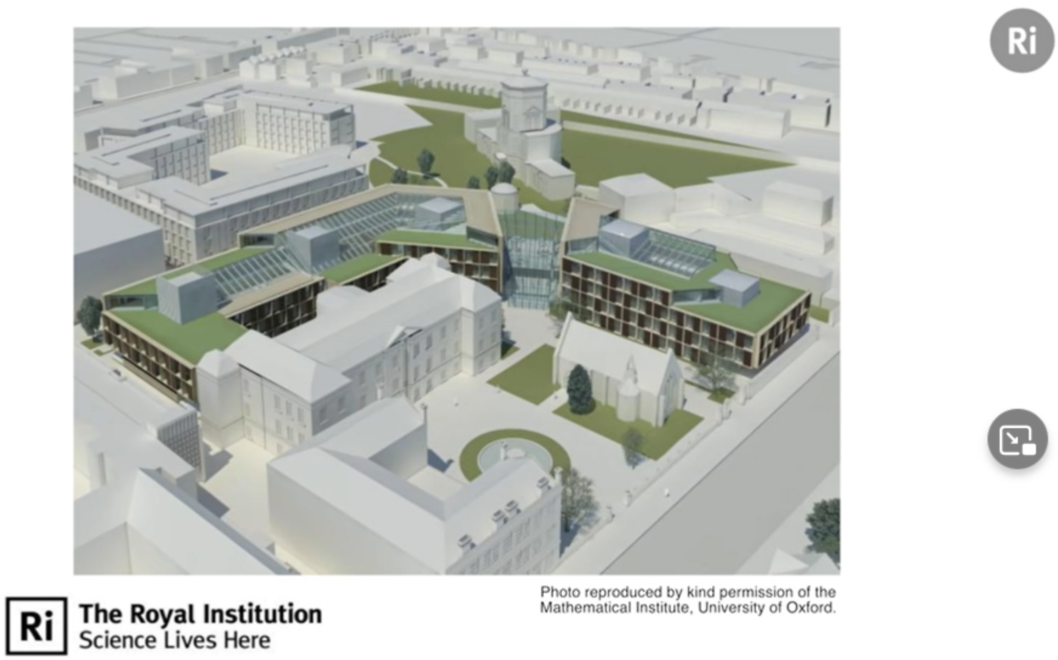
Symétries interdites

Sir Roger Penrose

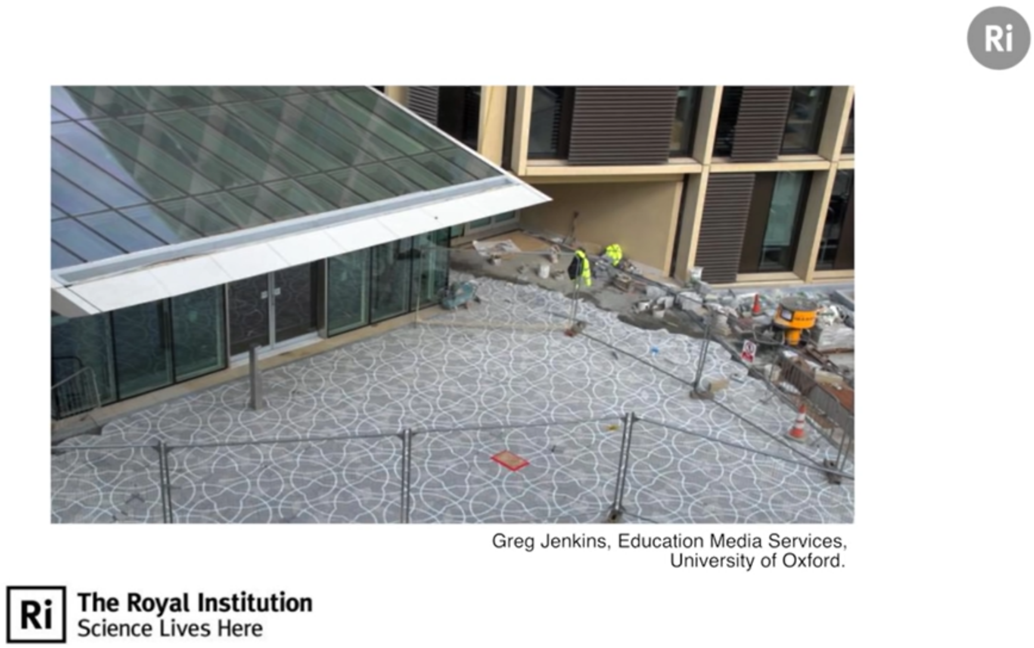
(20 premières minutes de la conférence)

Eh bien, merci beaucoup pour cette introduction, j'espère que je pourrai être à la hauteur. Tout d'abord, laissez-moi... En fait, la principale chose dont je veux parler, c'est une chose qui n'est pas tout à fait terminée, à savoir, eh bien, vous voyez, ce que vous voyez ici devant vous, c'est en fait un dessin ou quoi que ce soit d'autre, fait ces jours-ci avec des ordinateurs je suppose, du nouveau bâtiment de mathématiques, c'est la seule chose qui est en couleur sur l'image, et qui n'est pas tout à fait terminée. C'est cependant suffisamment terminé pour que j'aie un bureau quelque part là-bas, je ne peux pas vraiment entrer dedans, il n'y a qu'une chaise et deux bureaux et tout un tas de caisses. Ce n'est donc pas encore très accueillant, mais c'est en partie de ma faute, car j'ai récupéré trop de choses dans mon autre bureau.

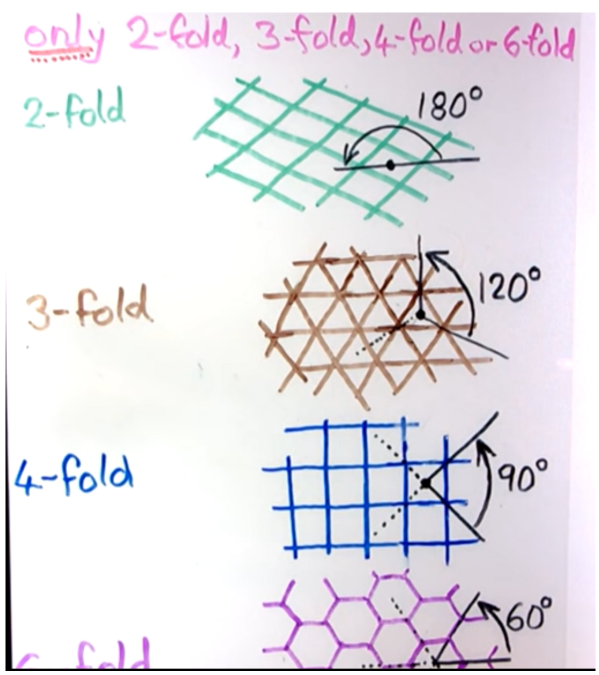


Mais ici, il y aura un pavage de dalles de carrelage avec un arrangement particulier, qui est basé sur des choses que j'ai faites. Je veux donc expliquer cela. C'est vraiment le but de cet exposé. Je reviendrai à l'explication détaillée de ce qui se passe là-bas vers la fin de l'exposé. Je dirai beaucoup de choses sur d'autres utilisations architecturales de ces pavages dans d'autres parties du monde, mais avant cela, je veux expliquer les pavages eux-mêmes.

Transcription par Denise Vella-Chemla, octobre 2022, de la vidéo *Symétries cristallines interdites en mathématiques et en architecture* visionnable ici : https://www.youtube-nocookie.com/embed/th3YMEamzmw, Événement de l'Institution Royale, 2013.

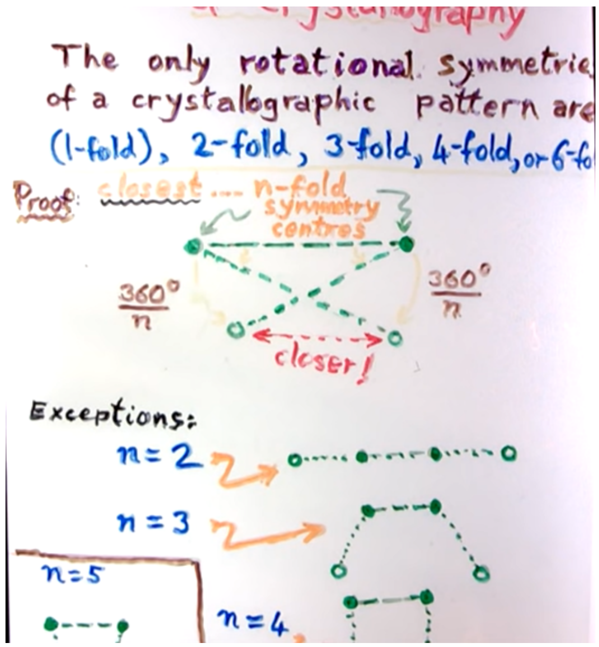


Alors laissez-moi... eh bien, je dois passer à la photo suivante, je pense. Ce que vous pouvez voir ici, c'est l'entrée principale, qui est juste ici et vous devez marcher sur mes dalles pour entrer dans le bâtiment. Et ce n'est pas tout à fait fini, vous pouvez voir des portions du dallage là-bas, où ce n'est pas fini, il y en a d'autres à l'arrière, on le voit très clairement sur la photo, où ce n'est pas fini non plus. L'ensemble n'est clairement pas fini. *(Rires)*. Ah mais alors et la dalle au centre manque, je pense que ça va être la dernière dalle qui sera placée dans un certain sens, elle est centrale à toute la conception mais vous pouvez voir certaines sortes de régularités en observant la dallage. Mais il n'est pas tout à fait évident de voir quelles sont ces régularités.



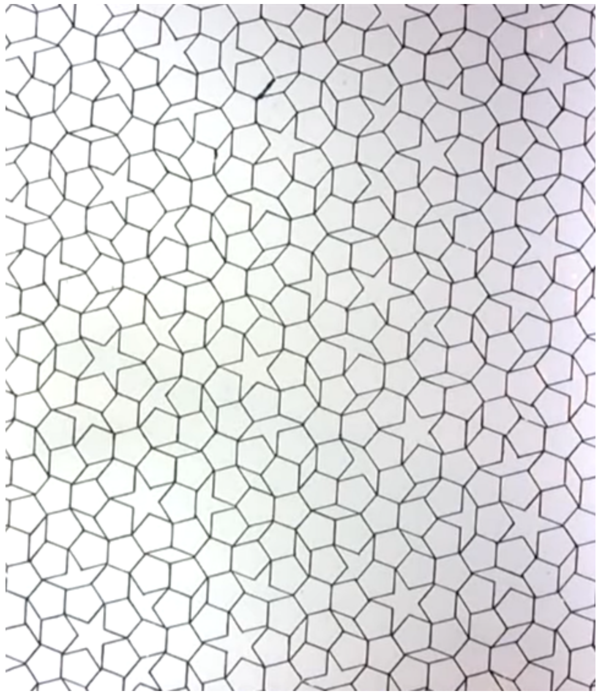
Je vais donc vous expliquer de quoi il s'agit. Mais avant cela, permettez-moi d'expliquer l'idée générale des symétries cristallines autorisées et de celles qui ne le sont pas. Et puis-je passer au visualiseur s'il vous plaît...? Merci.

J'utilise ce genre de technologie à l'ancienne parce que c'est la seule que je maîtrise. Ce sont les symétries cristallographiques. Nous avons donc des symétries doubles, un motif régulier de parallélogrammes aura une symétrie double autour du centre de chaque parallélogramme. Triple si vous avez des triangles équilatéraux, alors autour du centre de n'importe quel triangle, vous aurez l'ensemble du motif qui a une symétrie triple, vous faites pivoter de 120 degrés, et l'ensemble du motif revient sur lui-même. Carrés (quadruples) qui sont les plus familiers. Et six fois, nous avons le motif familier des hexagones. Et c'est un théorème de la théorie mathématique que ces symétries sont les seules que vous puissiez avoir. Quand je dis cela, je veux dire en plus de la symétrie translationnelle, vous devez donc avoir une symétrie translationnelle qui signifie que vous faites glisser l'ensemble de l'image parallèlement à elle même dans certaines directions et que le motif revient sur lui-même.



Donc, vous voulez avoir une symétrie de rotation et, avec cela, une symétrie de translation. Et je veux vous donner un argument rapide pour montrer que c'est le cas : ce sont vraiment les seules symétries que vous pouvez avoir ; et c'est une sorte de théorème standard. Supposons que vous ayez un motif constitué de points ou quelque chose qui ne ressemble pas à une fractale. Les motifs sont donc discrets et il y a une sorte de distance minimale finie entre deux motifs... Vous pouvez juste imaginer un modèle. Et ce motif a une symétrie de translation pour que vous puissiez le faire glisser et il revient sur lui-même, mais aussi une symétrie de rotation pour que vous si vous le tournez à 360 degrés sur n où n est votre degré de symétrie, le motif revient sur lui-même. Alors ce que je vais proposer, c'est que vous ayez de tels points de symétrie. Voici donc un point de n-symétrie et il y a un autre intérêt : s'il y en a un, il doit y en avoir un autre car si tout le motif glisse, alors celui-ci ira sur un autre motif. Il doit s'agir d'un autre point de n-symétrie. Il doit donc y en avoir plus d'un. S'il doit y en avoir plus d'un, il y en aura quelque part dans le motif, deux d'entre eux aussi proches que possible. Donc je vais choisir ceux-là, tant que ce n'est pas une fractale ou quelque chose de stupide comme ça, choisir une paire de points qui sont aussi proches que possible, et ce sont ceux-là là-haut. Maintenant, vous voyez, je vais faire pivoter celui-ci de 360 degrés sur n, jusqu'à ce point, et celui-ci dans l'autre sens de 360 degrés sur n jusqu'à ce point, et ces deux seront alors plus proches, ce qui contredit que j'avais pris au départ les deux plus proches. On a donc une contradiction, à moins que n ne soit égal à deux ; quand ils ne sont pas plus proches, ils sont beaucoup plus éloignés. Lorsque n est égal à trois, ils ne sont pas plus proches, ils sont plus éloignés.

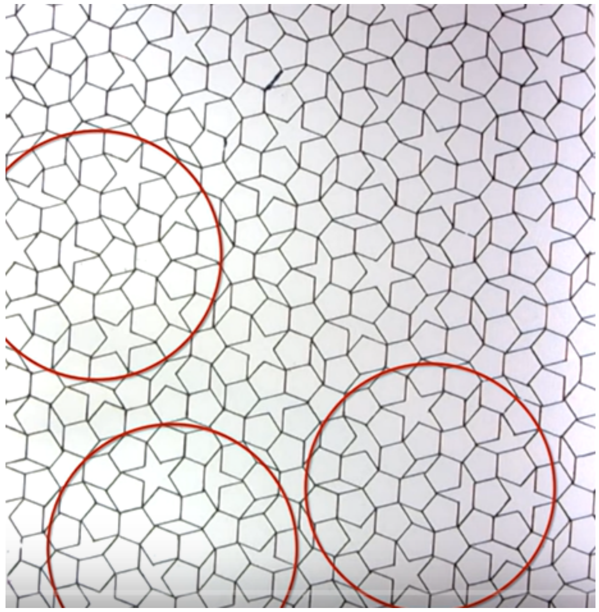
Lorsque n est égal à six, c'est au-dessus. Lorsque $n = 5$, ils coïncident donc vous vous en sortez. Dans le cas où n est égal à quatre, bien sûr, ils sont à la même distance qu'avant, donc ça va. Mais si n est égal à cinq par exemple, ils sont plus proches et tout ce qui est supérieur à six, ils se croiseront comme ici et ils seront certainement plus proches ;



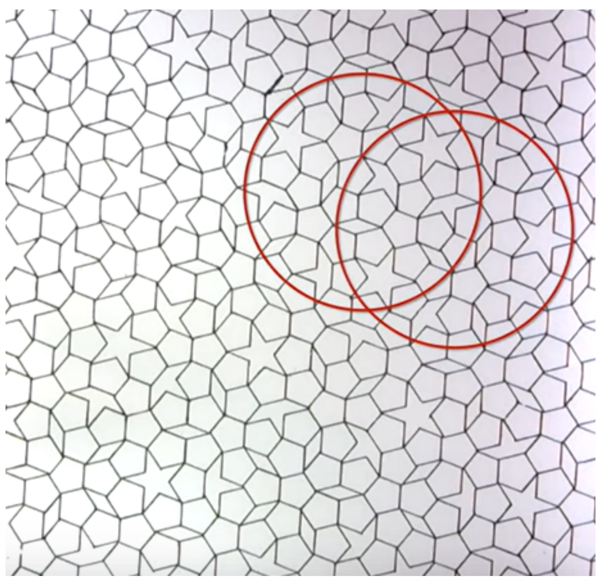
Cela vous indique donc que les seules symétries cristallines que vous pouvez avoir sont celles données : deux, trois, quatre et six. D'accord, ok, d'accord.

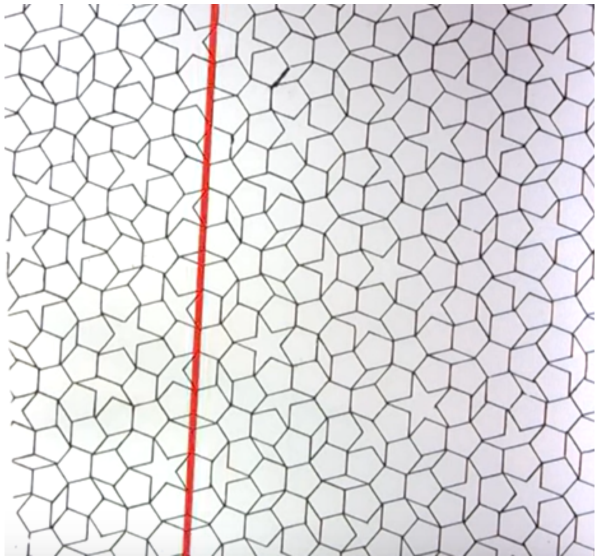
Eh bien, qu'en est-il de ce modèle ? Eh bien, il a beaucoup de régularité et il a une sorte de 5-symétrie également en fait, vous pouvez voir diverses régions qui sont 5-symétriques, jusqu'à un certain point et qui ont une symétrie de translation vers le haut, jusqu'à un certain point ; en fait, laissez-moi vous dire que si vous me donnez un pourcentage inférieur à 100 %, donc de 99,9 % par exemple, je pourrais faire glisser cette image sur elle-même afin que le motif corresponde à ce que vous aviez avant ce pourcentage de 99,9 % de tout ce qu'il était et qui a aussi la 5-symétrie de rotation, pour deux quels qu'ils soient déplacés à 99,9 % de la distance qui les séparait et vous pourriez bien vous dire "pourquoi le théorème ne fonctionne-t-il pas ?" et l'argument est bien que vous devez revenir à la preuve ici, et vous voyez que si ce point ici était ici, ce ne serait pas parfait, vous voyez, supposons que ce ne soit que 99,9 % points, alors cela risque de perdre un peu de précision, ce sera probablement 99,8 %, et celui-là est probablement 99,8 et quelques % de telle façon que bien qu'ils soient plus proches, ils ne sont pas aussi bons. Vous perdez donc un peu de symétrie. Mais chaque fois que vous utilisez cet argument ici, les points peuvent être plus proches. Il y a donc un compromis entre ces deux choses. Et c'est exactement ce qui se passe avec ce modèle.

Bref, je vais juste vous montrer ça. Je pense qu'il vaut la peine de souligner un certain nombre de caractéristiques de ce modèle... Mmmm, par exemple, eh bien, j'ai en fait ces cercles ici. Je parlerai d'eux plus tard.



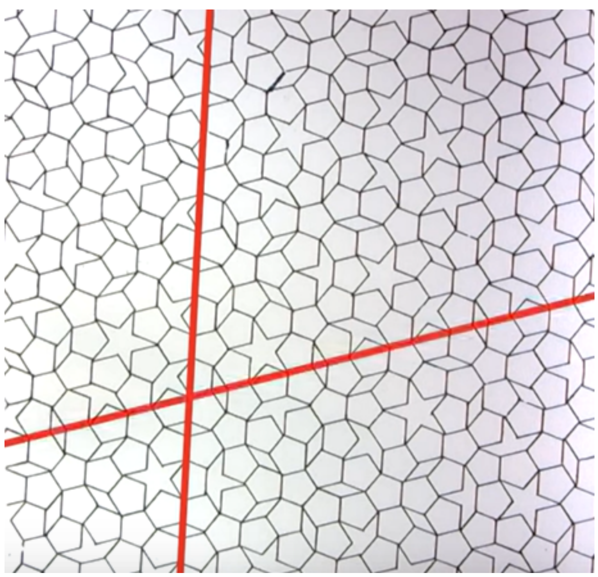
Une autre caractéristique par exemple, qui est peut-être un peu plus évidente d'où je suis, eh bien, cela dépend de l'endroit où vous êtes assis, si vous êtes assis sur le bord, c'est probablement assez évident, que vous voyez ces lignes.



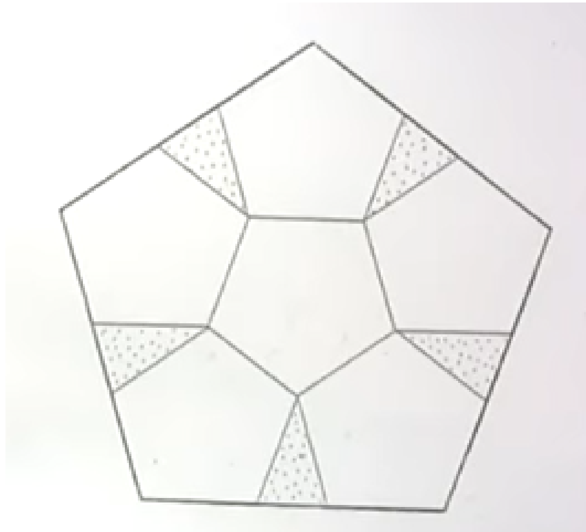


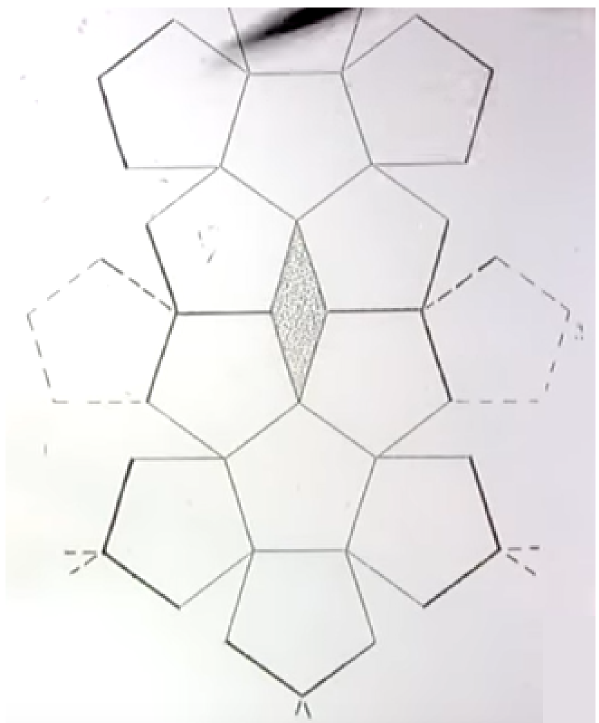
C'est un décagone régulier. Et chaque fois que vous trouvez un de ces décagones réguliers, il y a toujours dix pentagones qui l'entourent. C'est toujours le cas, partout où vous en trouvez un, il y en a un autre ici. Parfois, vous les trouvez qui se chevauchent, comme celui-ci et celui-ci, et vous obtenez toujours des anneaux de dix pentagones, ils se croisent, c'est tout, c'est donc une caractéristique générale.

Ici, vous trouvez une ligne dans l'image et vous placez votre règle et le long de la ligne, vous trouvez simplement d'autres lignes et leur densité ne diminue pas, peu importe l'endroit où vous le faites.



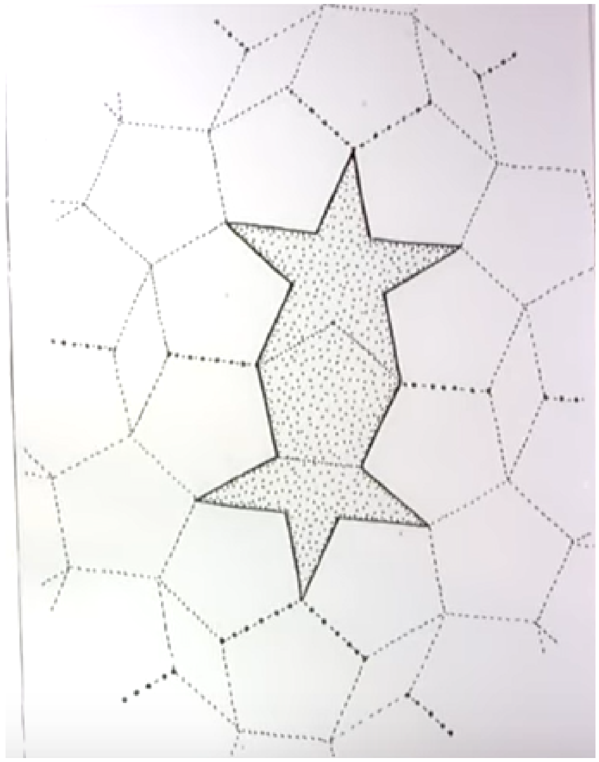
Donc le motif a beaucoup de régularité et cette régularité, bon, ce n'est pas tout à fait évident... Bon, je vais d'abord vous dire comment la figure a été construite. Elle est construite à partir de quelque chose de très simple : ici nous avons un pentagone régulier, subdivisé en six plus petits je pense que c'est facile si je le fais juste ici, pentagone régulier six plus petits avec quelques petits trous ici.



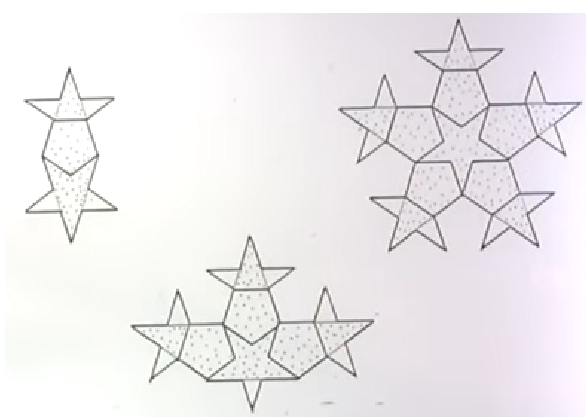


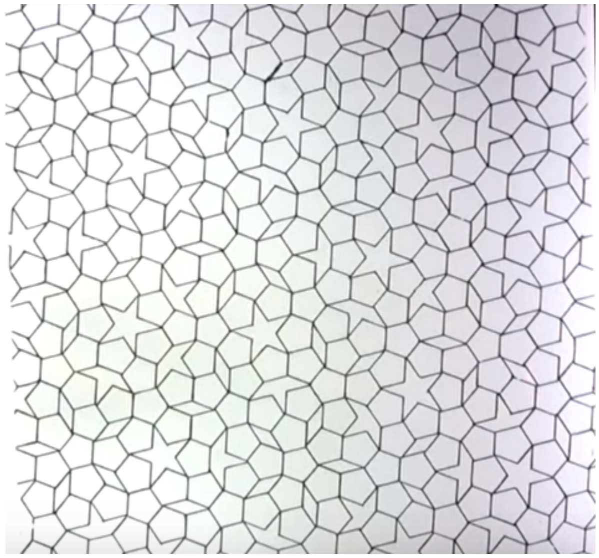
Maintenant, ce que je vais faire, c'est agrandir ça pour que les plus petits pentagones aient la même taille que celui d'origine, puis subdiviser chacun de ceux-ci, agrandir (faire exploser), subdiviser, agrandir, subdiviser... Maintenant, si je fais ça, ça ne marche pas tout à fait : et j'imagine juste que je l'ai maintenant fait exploser donc c'était un plus grand pentagone, en quelque sorte ici et cela a été subdivisé, puis j'ai recommencé à subdiviser, et vous remarquez qu'il y avait un petit espace ici et ce petit espace rejoint un autre petit espace de sorte que nous avons une petite forme de losange, un trou dans le motif.

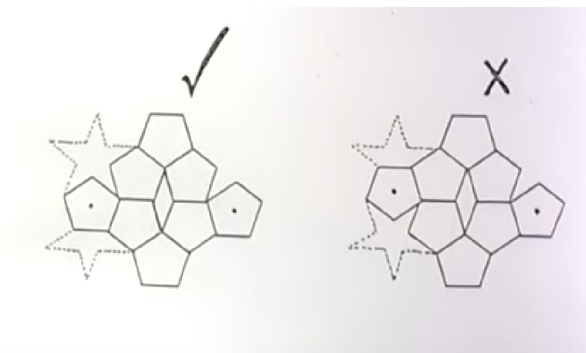
D'accord. Maintenant, je vais le refaire. Et quand je recommencerai, si je subdivise cela, il y aura un petit espace là-bas, donc ce losange fera pousser des pointes. Et ça ressemblera à ça.

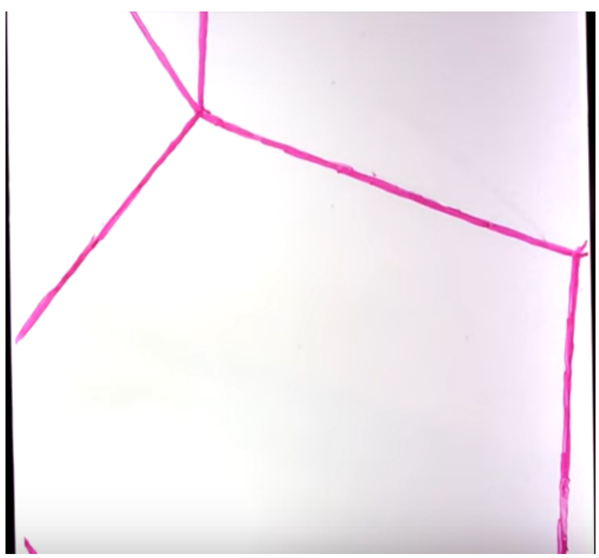


Maintenant, quand j'ai fait ça, j'ai trouvé qu'il y avait juste assez de place pour mettre un autre pentagone à l'intérieur. *(Rires)*. D'accord et ensuite la prochaine étape, cela va faire pousser des pointes et vous obtenez quelque chose qui ressemble à... Eh bien, vous voyez, je dois souligner que les formes que j'ai, le pentagone d'origine, cette étoile maintenant que j'appelle un pentacore, c'est un pentacore, et ce truc que j'appelle le képi de justice, eh bien, cela ressemble davantage à un képi de justice si je le mets dans ce sens. Ce sont donc des képis de justice, des pentacores et des losanges, nous avions les petits losanges auparavant, lorsque vous faites pousser des pointes pour chacune de ces formes que vous passez à l'étape suivante de la hiérarchie, vous pouvez toujours trouver que vous pouvez combler les lacunes avec des formes que vous aviez avant, pour que vous puissiez les gonfler, les remplir avec ces formes, les gonfler, les remplir. Et cela se terminera par quelque chose comme ça, eh bien, si vous avez fait juste un peu attention à cette petite subtilité que je dois mentionner..



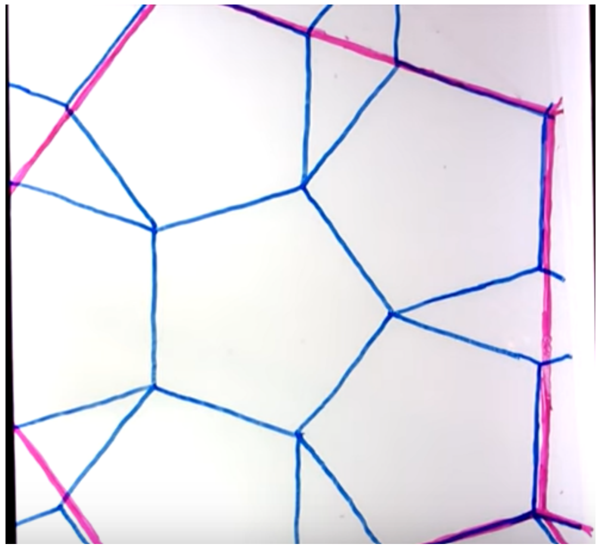




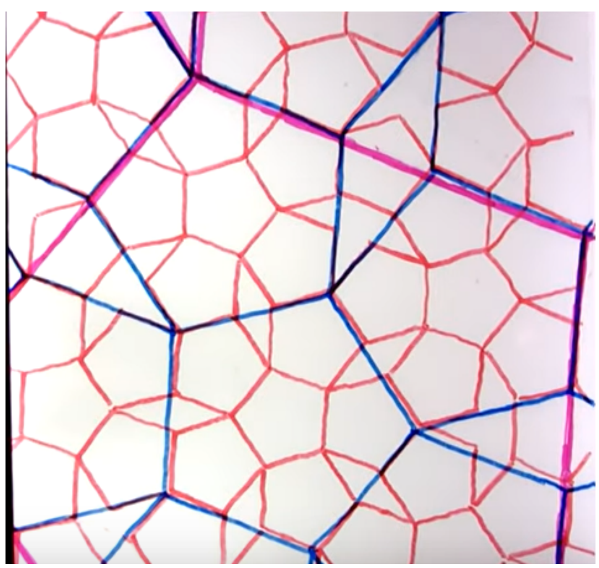


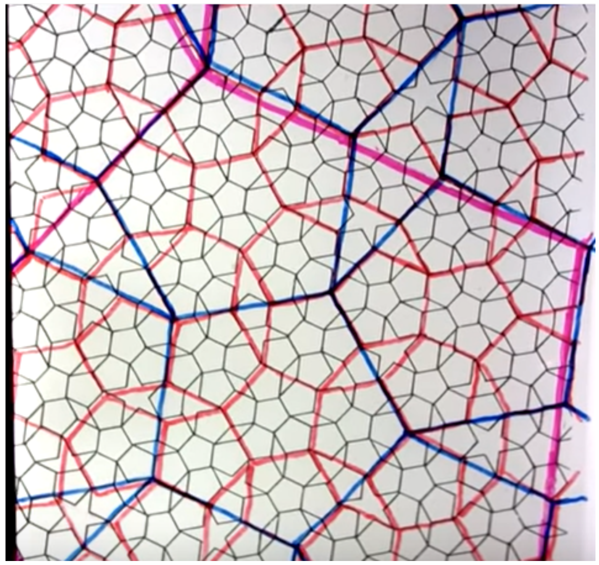
J’espère que la majeure partie de ce pentagone est à l’écran, il y en a un autre ici, et un autre ici, et un autre là, et ici, et ainsi de suite. Mais il y a un grand pentagone et ce que je veux faire de ce grand pentagone, c’est le subdiviser selon la manière que j’ai décrite, c’est parti.

Et puis je subdivise à nouveau là ouais, puis je subdivise à nouveau et vous obtenez le modèle que je viens de vous montrer. D'accord.

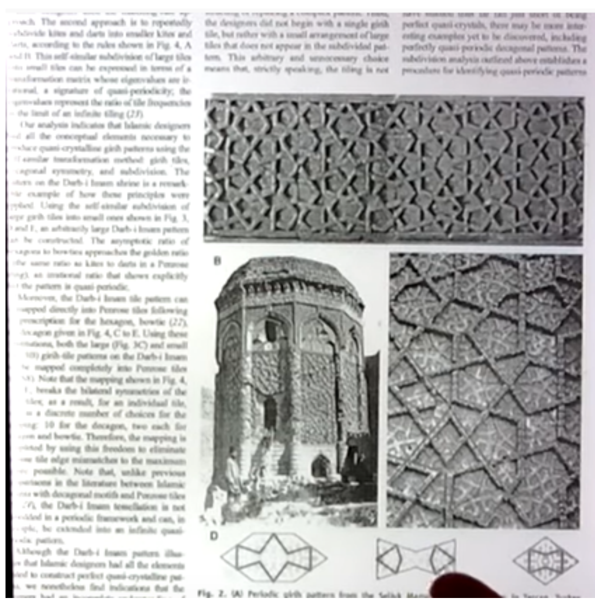


Maintenant, où est ce grand pentagone ? *(Rires)*. Maintenant, vous voyez, il y a quelque chose d'intéressant à ce sujet, qui est que le modèle a une plus grande uniformité que ce que vous auriez pu penser à partir de la construction hiérarchique. En fait, vous savez que je dois le trouver, je peux probablement le trouver, mais je n'essaierai même pas. La figure présente une plus grande uniformité que ne semble le suggérer l'organisation hiérarchique. Mais pourtant, cette hiérarchie est cachée là-dedans tout le temps. Maintenant, parfois, les gens font remarquer que ce genre de chose était dans l'art islamique ancien. Et il y a un article ici que je vais vous montrer.





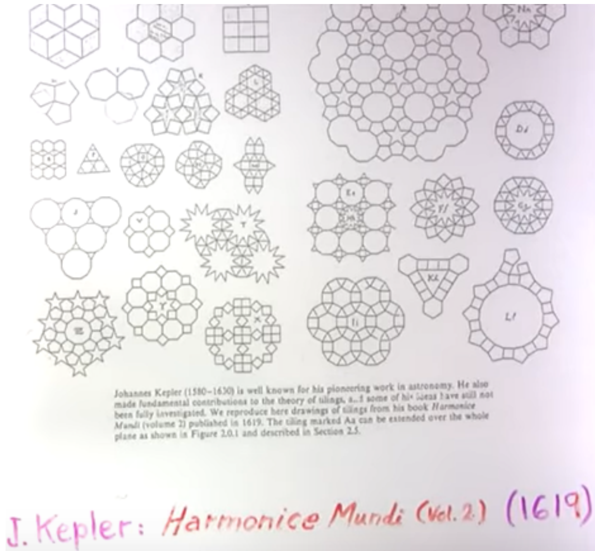
Et il y a beaucoup d’art islamique ancien très intéressant, où vous voyez des régions de 5-symétrie et 10-symétrie, des choses fascinantes, mais je n’ai vu aucune indication du type même de structure stricte qui sous-tend l’arrangement hiérarchique dans ce sens strict, ou quelque chose comme ça. Néanmoins, ils sont fascinants, mais le lien profond n’est pas si clair avec les choses que je viens de vous montrer.


the designers did not begin with a single girih tile, but rather with a small arrangement of large tiles that does not appear in the subdivided pattern. This arbitrary and unnecessary choice means that, strictly speaking, the tiling is not

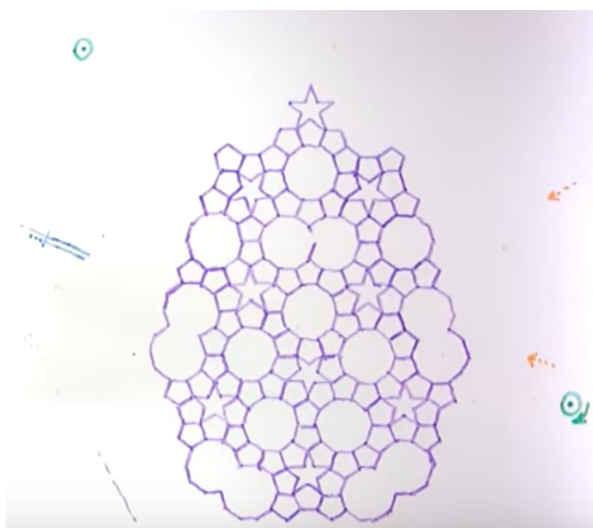
perfect quasi-crystals, there may be more interesting examples yet to be discovered, including perfectly quasi-periodic decagonal patterns. The subdivision analysis outlined above establishes a procedure for identifying quasi-periodic patterns

Cependant, si vous vous intéressez à des productions un peu plus récentes, datant de 1619, que ces anciens motifs islamiques, nous les trouvons dans les travaux de Johannes Kepler, le célèbre astronome, dans un livre qu’il a écrit intitulé *Harmonice Mundi*.

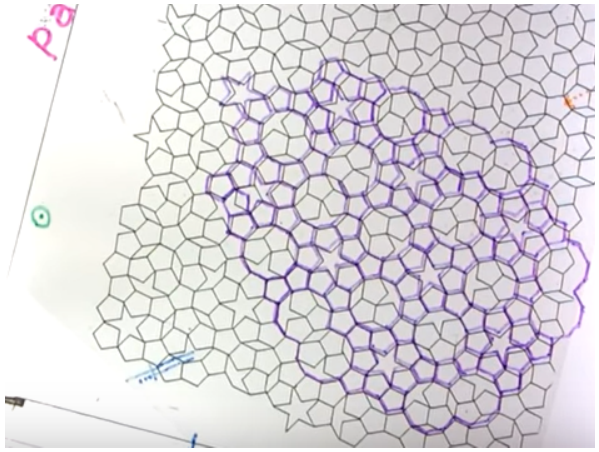
Et c’est dans ce livre que vous trouverez ces images fascinantes.



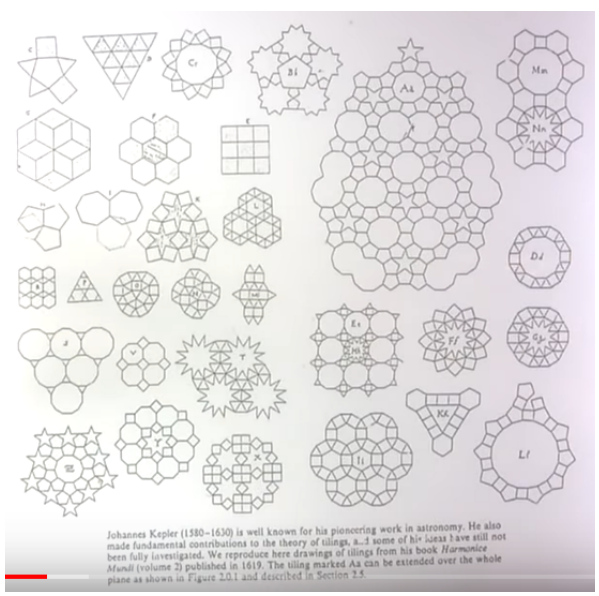
Maintenant, je dois dire que mon père possédait un exemplaire de ce livre, et j'avais vu cette photo. Je l'avais vue même si ce n'était pas dans mon esprit quand j'ai commencé à faire ça, sauf que d'une manière ou d'une autre, j'étais sans aucun doute influencé pour penser que les pentagones se réduisaient à une symétrie plus simple. Vous voyez ce qu'il a fait, des choses fascinantes avec les pentagones et d'autres choses avec des pentagones. Mais, je tiens à souligner cette conception en particulier. Et comme je l'ai découvert plus tard à ma grande surprise : ici, nous avons cette image dessinée en plus grand, c'est exactement la même image dans le livre de Kepler.



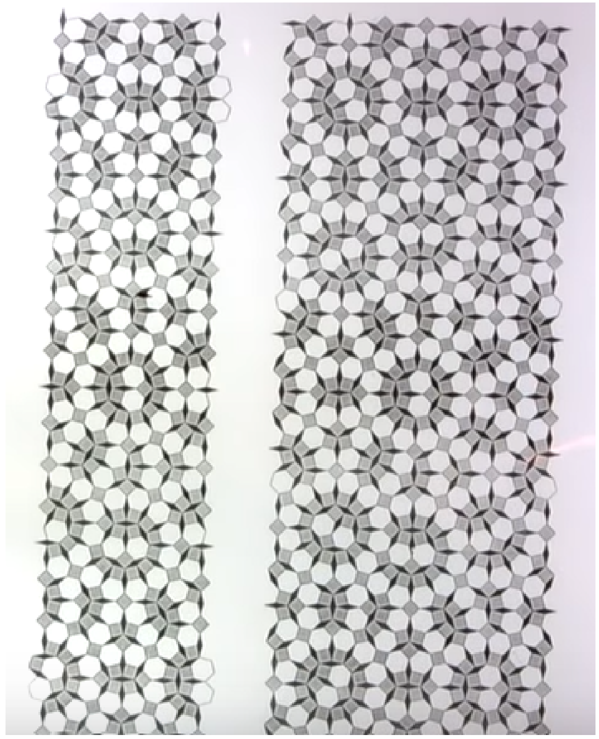
y compris une petite ligne ici, dont je ne sais pas trop pourquoi il l'a mise là, mais il l'a fait.



Voici maintenant mon modèle du pentagone. Maintenant, j'ai mis quelques marques ici que je peux faire se recouvrir les unes les autres exactement. Vous verrez que le modèle de Kepler correspond exactement à cela, y compris cette petite ligne là. Et donc, comment faisait-il ? Je ne sais pas. Je soupçonne qu'il pensait probablement, je veux dire, ils ne connaissaient même pas les atomes et ainsi de suite, et les cristaux, je soupçonne qu'il était peut-être intéressé par une sorte d'arrangement atomique et peut-être qu'il connaissait les cristaux et il se demandait peut-être la raison de certaines choses biologiques. Parce que vous voyez souvent une 5-symétrie et ainsi de suite en biologie, c'est peut-être quelque chose qui sous-tend le travail de Kepler. Je n'en ai aucune idée, et je n'ai aucune idée de la façon dont il avait l'intention de poursuivre ce schéma. Il y a des gens qui ont essayé d'autres suites auxquelles je ne crois pas. Je pense que sa suite ressemblait probablement beaucoup plus à ce que je faisais ici, je n'en serais pas du tout surpris. Mais il est fascinant qu'il l'ait effectivement fait, qu'il ait eu ce grand intérêt pour ces choses. Il s'intéressait à cette chose appelée le problème de Kepler qui consiste à regrouper les sphères aussi étroitement que possible dans un espace tridimensionnel, et ce problème n'a pas été résolu pendant longtemps et ce n'est que récemment que la conjecture de Kepler a été démontrée à l'aide d'un ordinateur, je peux dire, et il s'est avéré que Kepler avait raison de conjecturer ce qu'il a suggéré.



Vous voyez aussi d'autres symétries affichées comme celles-ci et en fait, vous trouvez ces choses aussi dans des quasi-cristaux ; je ne vais pas vous montrer trop d'autres exemples, ça prendrait juste trop de temps.



Celle que viens de vous montrer ici 12-4-1. Il a été conçu par certaines personnes (Galen et H.-U. Nissen). Nissen est une personne qui expérimente beaucoup et il avait en fait repéré des symétries d'ordre douze dans certains matériaux apparemment cristallins et il m'a montré le diagramme de diffraction qui a un histoire curieuse et qui montre le motif de diffraction et j'ai vu ce motif de petites taches où les électrons de diffraction rebondissent vraiment dans certaines directions. Et je me demandais "Mais où l'ai-je déjà vu ?".

Et j'ai réalisé alors que c'était juste ici. Ce sont ces petites petites pointes qui se trouvent aux coins de ce petit motif dans le livre de Kepler.

Comment faisait-il ? C'est plus que brumeux dans mon esprit, mais c'est fascinant de voir tout ce qu'il y avait dans ce petit ensemble de dessins de Kepler.

En voici un autre avec une 12-symétrie. Les 12-symétries sont plutôt sympas. Il y a aussi des 8-symétries que Robert Ammann et quelqu'un d'autre ont produites. Je ne les ai pas trouvées aussi attirantes. Je pense que les 5-symétries et les 12-symétries sont aussi particulièrement belles. Je n'ai pas de version à vous montrer donc je ne pense pas qu'elles aient été suffisamment utilisées en architecture. Bon, je vous ai donc présenté l'idée de base.