Principes arithmétiques

Nouvelle méthode exposée

Giuseppe Peano

Professeur de l'Académie militaire
Chargé de l'enseignement de l'analyse infinitésimale à l'Université royale de Turin

Turin
Édité par les frères Bocca
Libraires du Roi

Rome Florence
Via del Corso, 216-217. Via Cerretani, 8.
1889
Turin - Imprimerie Vincent Bona

Préface

Les questions [1]

1. Dans la suite, Peano utilise comme symbole $\supset$ pour $\Longrightarrow$ $\cap$ pour $\wedge$, $\cup$ pour $\vee$, Λ pour `False`, ϵ pour $\in$ ainsi qu'une notation spécifique pour l'inversion ("les x tels que") qui appartiennent aux fondements des mathématiques, bien que traitées par beaucoup en ces temps, manquent encore d'une solution satisfaisante. Cette difficulté naît principalement de l'ambiguïté du langage.

C'est pourquoi il est de la plus grande importance de peser attentivement les mots eux-mêmes dont nous usons. Cet examen, je me le suis proposé, et j'expose dans cet écrit les résultats de mon étude et les applications à l'arithmétique.

Toutes les idées qui interviennent dans les principes de l'arithmétique, je les ai indiquées par des signes, de sorte que toute proposition s'énonce par ces seuls signes.

Or les signes appartiennent soit à la logique, soit en propre à l'arithmétique. Les signes logiques qui apparaissent ici sont au nombre d'une dizaine, bien que tous ne soient pas nécessaires. L'usage de ces signes et quelques-unes de leurs propriétés sont expliqués dans la première partie en langage commun. Je n'ai pas voulu exposer leur théorie plus abondamment ici. Les signes arithmétiques, là où ils apparaissent, sont expliqués.

Par ces notations, toute proposition revêt une forme et une précision dont jouissent les équations en algèbre, et à partir des propositions ainsi écrites, d'autres se déduisent, et par des procédés qui s'assimilent à la résolution des équations. Ceci est le point capital de tout l'écrit.

Et, ayant établi les signes par lesquels je peux écrire les propositions arithmétiques, j'ai utilisé dans leur

J'ai institué le signe ϵ, qu'il n'est pas permis de confondre avec le signe $\supset$, les applications de l'inversion en logique, et quelques autres conventions, pour parvenir à exprimer n'importe quelle proposition.

Dans les démonstrations arithmétiques, j'ai utilisé le livre de H. Grassmann, *Lehrbuch der Arithmetik*, Berlin 1861.

M'a été utile aussi le récent écrit de R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen* ; Braunschweig, 1888, dans lequel les questions qui appartiennent aux fondements des nombres sont examinées avec acuité.

Ce petit livre doit être considéré comme un spécimen de la nouvelle méthode. Par ces notations, nous pouvons énoncer et démontrer d'innombrables autres propositions, comme celles qui appartiennent aux rationnels et aux irrationnels. Mais, pour traiter d'autres théories, il est nécessaire d'instituer de nouveaux signes, qui indiquent de nouveaux êtres. Je pense certes qu'avec ces seuls signes logiques, les propositions de n'importe quelle science peuvent être exprimées, pourvu qu'on y ajoute les signes qui représentent les êtres de cette science.

Table des signes

traitement une méthode que, puisqu'elle devrait aussi être suivie dans d'autres études, j'expose brièvement.

Parmi les signes de l'arithmétique, ceux qu'il est permis d'exprimer par les autres, avec les signes logiques, signifient des idées que nous pouvons définir. J'ai ainsi défini tous les signes, si l'on en excepte quatre, qui sont contenus dans les explications du § 1. Si, comme je le pense, ces derniers ne peuvent être réduits davantage, les idées qu'ils expriment ne peuvent être définies au moyen d'idées supposées connues auparavant.

Les propositions qui se déduisent des autres par les opérations logiques sont des *théorèmes* ; celles qui ne le sont pas, je les ai appelées *axiomes*. Les axiomes sont ici au nombre de neuf (§ 1), et ils expriment les propriétés fondamentales des signes qui manquent de définition.

Dans les § 1-6, j'ai démontré les propriétés communes des nombres ; par souci de brièveté, j'ai omis les démonstrations semblables aux précédentes ; il faut changer la forme commune des démonstrations pour qu'elles s'expriment par des signes logiques ; cette transformation est parfois plus difficile, mais la nature de la démonstration ressort cependant très clairement de là.

Dans les § suivants, j'ai traité diverses choses, afin que la puissance de cette méthode apparaisse davantage.

Dans le § 7 sont contenus quelques théorèmes qui appartiennent à la théorie des nombres. Dans les § 8 et 9 se trouvent les définitions des rationnels et des irrationnels.

Enfin, dans le § 10, j'ai exposé quelques théorèmes que je pense nouveaux, appartenant à la théorie des êtres (*entia*), que l'illustre Cantor a appelée *Punktmenge* (ensemble de points).

Dans cet écrit, j'ai utilisé des études d'autrui. Les notations et propositions logiques qui sont contenues dans le n° II, III et IV, si l'on en excepte quelques-unes, sont à rapporter à l'œuvre de beaucoup d'auteurs, parmi lesquels principalement Boole [2].

Signes logiques

Signe	Signification	Page
P	proposition	VII
K	classe	X
$\cap$	et	VII, X
$\cup$	ou	VIII, X, XI
$-$	non	VIII, X
Λ	Faux, absurde, néant	VIII, XI
$\supset$	se déduit de, ou est contenu dans	VIII, XI
$=$	est égal	VIII
ϵ	dans, appartient	X
[ ]	signe d'inversion	XI
$\ni$	qui, ou $[\epsilon]$	XII
Théorème	Th	XVI
Hypothèse	Hp	"
Thèse	Ts	"
Logique	L	"

Signes arithmétiques

Signes 1, 2, ..., $=$, $>$, $<$, $+$, $-$, $\times$	ont leur signification habituelle.
Le symbole de la division est	/.

Signe	Signification	Page
N	nombre entier positif	1
R	nombre rationnel positif	12
Q	quantité ou nombre réel positif	16
Np	nombre premier	9
M	le plus grand	6
$\mathfrak{M}$	le plus petit	6
T	borne, ou limite supérieure	15
D	est un diviseur de	9
$\mathfrak{D}$	est un multiple de	9
π	est premier à (a un pgcd de 1 avec)	9

Signes composés

$- <$	n'est pas plus petit que
$= \cup >$	est plus grand ou égal
$\ni$ D	diviseur
M $\ni$ D	le plus grand diviseur

Notations logiques

I. *De la ponctuation.*

Les lettres $a, b, \ldots x, y, \ldots x'y' \ldots$ indiquent des êtres indéterminés quelconques. Mais les êtres déterminés sont indiqués par des signes ou lettres P, K, N ...

Nous écrivons le plus souvent les signes sur la même ligne. Pour que l'ordre apparaisse selon lequel il faut les joindre, nous usons de *parenthèses* comme en algèbre, ou de *points* : $\cdot$: $\therefore$ :: etc.

Pour que soit comprise une formule divisée par des points, il faut d'abord réunir les signes que ne sépare aucun point, ensuite ceux que sépare un point, etc.

Ex. gr. soient $a, b, c \ldots$ des signes quelconques. Alors $ab \cdot cd$ signifie $(ab)(cd)$; et $ab \cdot cd : ef \cdot gh \ldots k$ signifie $(((ab)(cd))((ef)(gh)))k$.

Il est permis d'omettre les signes de ponctuation si les formules qui existent avec une ponctuation diverse ont le même sens ; ou si une seule formule, et celle-là même que nous voulons écrire, a un sens.

Pour éviter le danger d'ambiguïté, nous n'employons jamais les signes "." et " :" comme signes d'opérations arithmétiques ... :

La figure des parenthèses est une seule () ; si dans la même formule se trouvent des parenthèses et des points, sont réunis d'abord ceux qui sont contenus par des parenthèses.

II. *Des propositions.*

Par le signe P on indique *proposition.*

Le signe $\cap$ se lit *et.* Soient a, b, des propositions ; alors $a \cap b$ est l'affirmation simultanée des propositions a, b. Par souci de brièveté, au lieu de $a \cap b$ nous écrivons communément ab.

Le signe $-$ se lit *non.* Soit a une proposition P quelconque ; alors $-a$ est la négation de la proposition a.

Le signe $\cup$ se lit *ou.* Soient a, b des propositions ; alors $a \cup b$ est la même chose que $- : -a \cdot -b$.

[Par le signe V on indique *le vrai*, ou *l'identité* ; mais nous n'utilisons jamais ce signe].

Le signe Λ signifie *faux*, ou *absurde.*

[Le signe C signifie *est conséquence de* ; ainsi $b \subset a$ se lit b *est conséquence de la proposition* a. Mais nous n'usons jamais de ce signe].

Le signe $\supset$ signifie *se déduit* ; ainsi $a \supset b$ signifie la même chose que $b \subset a$. Si les propositions a, b contiennent des êtres indéterminés $x, y, \ldots$, à savoir s'il y a entre ces mêmes êtres des conditions, alors $a \supset_{x,y\ldots} b$ signifie : quels que soient $x, y, \ldots$, de la proposition a on déduit b. Si cependant le danger d'ambiguïté est écarté, au lieu de $\supset_{x,y\ldots}$ nous écrivons seulement $\supset$.

Le signe $=$ signifie *est égal*. Soient a, b des propositions ; alors $a = b$ signifie la même chose que $a \supset b \cdot b \supset a$; la proposition $a =_{x,y\ldots} b$ signifie la même chose que $a \supset_{x,y\ldots} b \cdot b \supset_{x,y\ldots} a$.

III. *Propositions logiques*

Soient $a, b, c, \ldots$ des propositions. Alors on aura :

1. $a \supset a$.
2. $a \supset b \cdot b \supset c :\supset: a \supset c$.
3. $a = b \cdot = : a \supset b \cdot b \supset a$.
4. $a = a$.
5. $a = b \cdot = \cdot b = a$.
6. $a = b \cdot b \supset c :\supset \cdot a \supset c$.
7. $a \supset b \cdot b = c :\supset \cdot a \supset c$.
8. $a = b \cdot b = c :\supset \cdot a = c$.
9. $a = b \cdot \supset \cdot a \supset b$.
10. $a = b \cdot \supset \cdot b \supset a$.
11. $ab \supset a$.

---

12. $ab = ba$.
13. $a(bc) = (ab)c = abc$.
14. $aa = a$.
15. $a = b \cdot \supset \cdot ac = bc$.
16. $a \supset b \cdot \supset \cdot ac \supset bc$.
17. $a \supset b \cdot c \supset d :\supset \cdot ac \supset bd$.
18. $a \supset b \cdot a \supset c := \cdot a \supset bc$.
19. $a = b \cdot c = d :\supset \cdot ac = bd$.

---

20. $-(-a) = a$.

21. $a = b\cdot = \cdot - a = -b.$
22. $a \supset b\cdot = \cdot - b \supset -a.$

---

23. $a \cup b\cdot =: \cdot - : -a \cdot -b.$
24. $-(ab) = (-a) \cup (-b).$
25. $-(a \cup b) = (-a)(-b).$
26. $a \supset \cdot a \cup b.$
27. $a \cup b = b \cup a.$
28. $a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c = a \cup b \cup c.$
29. $a \cup a = a.$
30. $a(b \cup c) = ab \cup ac.$
31. $a = b\cdot \supset \cdot a \cup c = b \cup c.$
32. $a \supset b\cdot \supset \cdot a \cup c \supset b \cup c.$
33. $a \supset b \cdot c \supset d :\supset \cdot a \cup c\cdot \supset \cdot b \cup d.$
34. $b \supset a \cdot c \supset a := \cdot b \cup c \supset a.$

---

35. $a - a = \Lambda.$
36. $a\Lambda = \Lambda.$
37. $a \cup \Lambda = a.$
38. $a \supset \Lambda\cdot = \cdot a = \Lambda.$
39. $a \supset b\cdot = \cdot a - b = \Lambda.$
40. $\Lambda \supset a.$
41. $a \cup b = \Lambda\cdot =: a = \Lambda \cdot b = \Lambda.$

---

42. $a \supset \cdot b \supset c :=: ab \supset c.$
43. $a \supset \cdot b = c := \cdot ab = ac.$

Soit a un certain signe de relation (ex. gr. $=$, $\supset$), de sorte que $a\alpha b$ soit une certaine proposition. Alors au lieu de $a\alpha b \cdot a\beta b$, nous écrivons $a - \alpha - b$; à savoir :

$$a- = -b\cdot =: - \cdot a = b.$$

$$a- \supset -b\cdot =: - \cdot a \supset b.$$

Ainsi le signe $- \neq -$ signifie *n'est pas égal*. Si la proposition a contient un indéterminé x, $a- = -_x\Lambda$ signifie : sont x qui satisfont à la condition a. Le signe $- \supset$ signifie *ne se déduit pas*.

Semblablement, si α et β sont des signes de relation, au lieu de $a\alpha b \cdot a\beta b$, et $a\alpha b \cdot \cup \cdot a\beta b$ nous pouvons écrire $a \cdot \alpha\beta \cdot b$ et $a \cdot \alpha \cup \beta \cdot b$. Ainsi, si a et b sont des propositions, la formule $a\cdot \supset - = \cdot b$ dit : de a on déduit b, mais non réciproquement.

$$a\cdot \supset - = \cdot b :=: a \supset b \cdot b - \supset a.$$

Formules :

$$a \supset b \cdot b \supset c \cdot a - \supset c := \Lambda.$$

$$a = b \cdot b = c \cdot a - = c := \Lambda.$$

$$a \supset b \cdot b \supset - = c :\supset \cdot a \supset - = c.$$

$$a \supset - = b \cdot b \supset c :\supset \cdot a \supset - = c.$$

Mais nous usons rarement de ces notations.

IV. *Des classes.*

Par le signe K on indique *classe*, ou agrégat d'êtres.

Le signe $-\epsilon$ signifie *n'est pas*. Ainsi $a\epsilon b$ se lit *a est un certain b*; $a\epsilon K$ signifie *a est une certaine classe*; $a\epsilon P$ signifie *a est une certaine proposition*.

Au lieu de $-(a\epsilon b)$ nous écrivons $a - \epsilon b$; le signe $-\epsilon$ signifie *n'est pas*; à savoir :

44. $a - \epsilon b\cdot =: - \cdot a\epsilon b$.

Le signe $a, b, c\epsilon m$ signifie : a, b et c sont m; à savoir :

45. $a, b, c\epsilon m\cdot =: a\epsilon m \cdot b\epsilon m \cdot c\epsilon m$.

Soit a une classe; alors $-a$ indique la classe constituée des individus qui ne sont pas a.

46. $a\epsilon K\cdot \supset: x\epsilon - a\cdot = \cdot x - \epsilon a$.

Soient a, b des classes; $a \cap b$, ou ab, est la classe constituée des individus qui à la fois a et b; $a \cup b$ est la classe des individus constituée qui sont a ou b.

47. $a, b\epsilon K\cdot \supset \cdot x\epsilon \cdot ab :=: x\epsilon a \cdot x\epsilon b$.

48. $a, b\epsilon K\cdot \supset \cdot x\epsilon \cdot a \cup b :=: x\epsilon a \cdot \cup \cdot x\epsilon b$.

Le signe Λ indique la classe qui ne contient aucun individu. Ainsi :

49. $a\epsilon K\cdot \supset \cdot a = \Lambda :=: x\epsilon a\cdot =_x \Lambda$.

[Par le signe V, qui indique la classe constituée de tous les individus dont il s'agit, nous n'usons pas]. Le signe $\supset$ signifie *est contenu(e) dans*. Ainsi $a \supset b$ signifie la classe a est *contenue dans la classe b*.

50. $a, b\epsilon K\cdot \supset \cdot a \supset b :=: x\epsilon a\cdot \supset_x \cdot x\epsilon b$.

[La formule $b \subset a$ peut signifier la classe b contient la classe a; mais on n'use pas du signe C].

Ici les signes Λ et $\supset$ ont une signification qui diffère un peu de la précédente; mais aucune ambiguïté ne naîtra. En effet, si l'on traite des propositions, ces signes se lisent *absurde* et *se déduit*; si vraiment [on traite] des classes, *néant* et *est contenu*. La formule $a = b$, si a et b sont des classes, signifie $a \supset b \cdot b \supset a$. C'est pourquoi

51. $a, b\epsilon K\cdot \supset \cdot a = b :=: x\epsilon a\cdot =_x \cdot x\epsilon b$.

Les propositions 1... 41 subsistent aussi, si $a, b \ldots$ indiquent des classes ; en outre il y a :

52. $a\epsilon b\cdot \supset \cdot b\epsilon K$.
53. $a\epsilon b\cdot \supset \cdot b- = \Lambda$.
54. $a\epsilon b \cdot b = c :\supset \cdot a\epsilon c$.
55. $a\epsilon b \cdot b \supset c :\supset \cdot a\epsilon c$.

Soient s une classe, et k une classe qui est contenue dans s ; alors nous disons que k est un *individu de la classe* s, si k est constitué d'un seul individu. C'est pourquoi :

56. $s\epsilon K \cdot k \supset s :\supset \cdot k\epsilon s\cdot =: \cdot k- = \Lambda : x, y\epsilon k\cdot \supset_{x,y} \cdot x = y$.

V. *De l'inversion.*

Le signe de l'inversion est [ ], et nous expliquerons son usage au numéro suivant. Ici nous exposons seulement les cas particuliers.

1. Soit a une proposition, contenant l'indéterminé x ; alors l'écriture $[x\epsilon]a$, qui se lit *les* x *pour lesquels* a, ou *solutions*, ou *racines* de la condition a, indique la classe constituée des individus qui satisfont à la condition a. C'est pourquoi :

57. $a\epsilon P\cdot \supset : [x\epsilon]a \cdot \epsilon K$.
58. $a\epsilon K\cdot \supset \cdot \cdot [x\epsilon] \cdot x\epsilon a := a$.
59. $a\epsilon P\cdot \supset \cdot x\epsilon \cdot [x\epsilon]a := a$.

Soient α, β des propositions contenant l'indéterminé x ; il sera :

60. $[x\epsilon](\alpha\beta) = ([x\epsilon]\alpha)([x\epsilon]\beta)$.
61. $[x\epsilon] - \alpha = -[x\epsilon]\alpha$.
62. $[x\epsilon](\alpha \cup \beta) = [x\epsilon]\alpha \cup [x\epsilon]\beta$.
63. $\alpha \supset_x \beta\cdot = \cdot [x\epsilon]\alpha \supset [x\epsilon]\beta$.
64. $\alpha =_x \beta\cdot = \cdot [x\epsilon]\alpha = [x\epsilon]\beta$.

2. Soient x, y des êtres quelconques ; le système composé de l'être x et de l'être y nous le considérons comme nouveau, et nous l'indiquons par le signe (x, y) ; et semblablement si le nombre des êtres est plus grand. Soit α une proposition indéterminée contenant x, y ; alors $[(x, y)\epsilon]\alpha$ indique la classe constituée des êtres (x, y) qui satisfont à la condition α. Il sera :

65. $\alpha \supset_{x,y} \beta\cdot = \cdot [(x, y)\epsilon]\alpha \supset [(x, y)\epsilon]\beta$.
66. $[(x, y)\epsilon]\alpha- = \Lambda\cdot =: \cdot [x\epsilon] \cdot [y\epsilon]\alpha- = \Lambda : - = \Lambda$.

3. Soit $x\alpha y$ une relation entre les indéterminés x et y (ex. gr. en logique les relations $x = y, x- = y, x \supset y$; en arithmétique $x < y, x > y$, etc.). Alors par le signe $[\epsilon\alpha]y$ nous indiquons les x qui satisfont à la relation $x\alpha y$. Par commodité, au lieu de $[\epsilon]$, nous usons du signe $\ni$. Ainsi $\ni \alpha y\cdot =: [x\epsilon] \cdot x\alpha y$, et le signe $\ni$ se lit *qui*, ou *quel*. Ex. gr. soit y un nombre ; alors $\ni< y$ indique la classe des nombres x qui satisfont à la condition $x < y$, à savoir, *qui sont moindres* que y, ou simplement *moindres* que y. Semblablement, puisque le signe D signifie *divise*, ou *est diviseur*, le signe $\ni$ D signifie *divise*. On déduit $x\epsilon \ni \alpha y = x\alpha y$.

4. Soit α une formule contenant l'indéterminé x. Alors l'écriture $x'[x]\alpha$, qui se lit x' *substitué à* x *dans* α, indique la formule qui est obtenue si dans α, au lieu de x, on lit x'. On déduit $x[x]\alpha = \alpha$.
5. Soit α une formule, qui contient les indéterminés $x, y, \ldots$ Alors $(x', y', \ldots)[x, y \ldots]\alpha$,

qui se lit $x', y', \ldots$ *substitués à x, y, ...dans* α, indique la formule qui est obtenue si dans α au lieu de $x, y, \ldots$, on écrit les lettres $x', y', \ldots$. On déduit $(x, y)[x, y]\alpha = \alpha$.

VI. *Des fonctions.*

Les notations logiques qui précèdent suffisent pour exprimer n'importe quelle proposition arithmétique, et nous n'usons que de celles-là. Ici nous expliquons brièvement quelques autres notations, qui peuvent devenir utiles.

Soit s une certaine classe ; nous supposons définie entre les êtres du système s une égalité, qui satisfait aux conditions :

$$a = a.$$

$$a = b \cdot = \cdot b = a.$$

$$a = b \cdot b = c :\supset \cdot a = c.$$

Soit φ un signe, ou un agrégat de signes, de sorte que si x est un être de la classe s, l'écriture φx indique un nouvel être ; nous supposons aussi définie une égalité entre les êtres φx ; et si x et y sont des êtres de la classe s, et si $x = y$, nous supposons que l'on peut déduire $\varphi x = \varphi y$. Alors le signe φ est dit *signe de fonction préposé* dans la classe s, et nous écrivons $\varphi \ni F's$.

$$s \epsilon K \cdot \supset : \cdot \varphi \epsilon F's \cdot =: \cdot x, y \epsilon s \cdot x = y :\supset_{x,y} \cdot \varphi x = \varphi y.$$

Mais si, comme x est un être quelconque de la classe s, l'écriture $x\varphi$ indique un nouvel être, et si de $x = y$ on déduit $x\varphi = y\varphi$, alors nous disons que φ est *un signe de fonction postposé* dans la classe s et nous écrivons $\varphi \epsilon s'F$.

$$s \epsilon K \cdot \supset : \cdot \varphi \epsilon s'F \cdot =: \cdot x, y \epsilon s \cdot x = y :\supset_{x,y} \cdot x\varphi = y\varphi.$$

Exemples. Soit a un nombre ; alors $a+$ est un *signe de fonction préposé* dans la classe des nombres, et $+a$ est un *signe de fonction postposé* ; en effet, quel que soit le nombre x, les formules $a + x$ et $x + a$ indiquent de nouveaux nombres, et de $x = y$ on déduit $a + x = a + y$, et $x + a = y + a$. C'est pourquoi

$$a \epsilon N \cdot \supset : a + \cdot \epsilon F'N.$$

$$a \epsilon N \cdot \supset : + a \cdot \epsilon N'F.$$

Soit φ un *signe de fonction préposé* dans la classe s. Alors $[\varphi]y$ indique la classe constituée de ceux x, qui satisfont à la condition $\varphi x = y$; à savoir : *Def.* $s \epsilon K \cdot \varphi \epsilon F's :\supset \cdot [\varphi]y \cdot = \cdot [x \epsilon](\varphi x = y)$. La classe $[\varphi]y$ peut contenir soit un, soit plusieurs, soit même aucun individu. Il sera :

$$s \epsilon K \cdot \varphi \epsilon F's :\supset \cdot y = \varphi x \cdot = \cdot x \epsilon [\varphi]y.$$

Si vraiment φy est constitué d'un seul individu, il sera $y = \varphi x\cdot = \cdot x = [\varphi]y$.

Soit φ un *signe de fonction postposé* ; semblablement nous posons :

$$s\epsilon K \cdot \varphi\epsilon s'F :\supset \cdot\cdot y[\varphi] = [x\epsilon](x\varphi = y).$$

Le signe [ ] est dit *signe d'inversion*, et son usage a déjà été exposé en logique. En effet, si α est une proposition contenant l'indéterminé x, et si α est la classe composée des individus x qui satisfont à la condition α, il sera $x\epsilon\alpha\cdot = \cdot\alpha$, alors $\alpha = [x\epsilon]\alpha$, comme au V, 1.

Soit α une formule contenant l'indéterminé x, et soit φ un *signe de fonction*, qui, préposé à la lettre x, engendre la formule α ; à savoir soit $\alpha = \varphi x$; alors il sera $\varphi = \alpha[x]$, et si x' est un nouvel être, il sera $\varphi x' = \alpha[x]x'$, à savoir, si α est une formule contenant l'indéterminé x, alors $\alpha[x]x'$ signifie ce qui est obtenu si dans α, au lieu de x, on pose x'.

Semblablement, soit α une formule contenant l'indéterminé x, et soit φ un *signe de fonction postposé*, de sorte que $x\varphi = \alpha$; on déduit $\varphi = [x]\alpha$; alors, si x' est un nouvel être, il sera $x'\varphi = x'[x]\alpha$, à savoir $x'[x]\alpha$ indique à son tour ce qui est obtenu si dans α, au lieu de x, on lit x', comme au V, 4.

Le signe [ ] peut avoir en logique d'autres usages, que nous exposons brièvement, bien que nous n'en usions pas. Soient a et b deux classes ; alors $[a\cap]b$ soit $b[\cap a]$ indique les classes x, qui satisfont à la condition $b = a \cap x$, soit $b = x \cap a$. Si b n'est pas contenu dans a, aucune classe ne satisfait à cette condition ; si b est contenu dans a, le signe $b[\cap a]$ indique toutes les classes qui contiennent b et sont contenues dans $b \cup -a$.

En arithmétique, soient a, b des nombres ; alors $[b + a]$ soit $[a+]b$ indique le nombre x, qui satisfait à la condition $b = x + a$, soit $b = a + x$, à savoir $b - a$. Semblablement il sera $b[\times a] = [a\times]b = b/a$. Et en analyse ce signe peut se présenter ; c'est pourquoi

$$y = \sin x\cdot = \cdot x\epsilon[\sin]y \qquad (\text{au lieu de} x = \arcsin y).$$

$$d\mathrm{F}(x) = f(x)dx\cdot = \cdot\mathrm{F}(x)\epsilon[d]f(x)dx \qquad (\text{au lieu de } \mathrm{F}(x) = \int f(x)dx).$$

Soit à nouveau φ un *signe de fonction préposé* dans la classe s, et soit k une classe contenue dans s ; alors φk indique la classe composée de tous les φx, où x sont des êtres de la classe k ; à savoir *Def.* $s\epsilon K \cdot k\epsilon K \cdot k \supset s \cdot \varphi\epsilon F's :\supset \cdot\varphi k = [y\epsilon](k \cdot [\varphi]y : - = \Lambda)$.

Ou $s\epsilon K \cdot k\epsilon K \cdot k \supset s \cdot \varphi\epsilon F's :\supset \cdot\varphi k = [y\epsilon]([x\epsilon] \cdot x\epsilon k \cdot \varphi x = y \cdot - = \Lambda)$. *Def.* $s\epsilon K \cdot k\epsilon K \cdot k \supset s \cdot \varphi\epsilon s'F :\supset \cdot k\varphi = [y\epsilon](k \cdot y[\varphi] : - = \Lambda)$.

C'est pourquoi, si $\varphi\epsilon F's$, alors φs indique la classe composée de tous les φx, où x sont des êtres de la classe s. Il sera :

$$s\epsilon K \cdot \varphi\epsilon F's \cdot y\epsilon\varphi s :\supset \cdot\varphi[\varphi]y = y.$$

$$s\epsilon K \cdot a, b\epsilon K \cdot a \supset s \cdot b \supset s \cdot \varphi\epsilon F's :\supset \cdot\varphi(a \cup b) = (\varphi a) \cup (\varphi b).$$

$$s\epsilon K \cdot \varphi\epsilon F's :\supset \cdot\varphi\Lambda = \Lambda.$$

$$s\epsilon K \cdot a, b\epsilon K \cdot b \supset s \cdot a \supset b \cdot \varphi\epsilon F's :\supset \cdot \varphi a \supset \varphi b.$$

$$s\epsilon K \cdot a, b\epsilon K \cdot a \supset s \cdot b \supset s \cdot \varphi\epsilon F's :\supset \cdot \varphi(ab) \supset (\varphi a)(\varphi b).$$

Soit a une certaine classe ; alors $a \cap K$, soit $K \cap a$, soit Ka, indique toutes les classes de la forme $a \cap x$, soit $x \cap a$, xa, où x est une classe quelconque ; à savoir Ka indique les classes qui sont contenues dans a. La formule $x\epsilon Ka$ signifie la même chose que $x\epsilon K \cdot x \supset a$. Nous usons parfois de cette convention ; ainsi KN indique la classe des nombres.

Semblablement, si a est une classe, $K \cup a$ indique les classes qui contiennent a. Soit a un nombre ; alors $a+N$, soit $N+a$, indique les nombres plus grands que le nombre a ; $a \times N$, soit $N \times a$, soit Na indique les multiples du nombre a ; a^N indique les puissances du nombre a ; $N^2, N^3, \ldots$ indiquent les nombres carrés, ou les nombres cubes, etc.

L'égalité, le produit, les puissances des signes de fonctions peuvent être définies ainsi : *Def.* $s\epsilon K \cdot \varphi, \psi\epsilon F's :\supset \cdot \varphi = \psi :=: x\epsilon s \cdot \supset \cdot \varphi x = \psi x$. *Def.* $s\epsilon K \cdot \varphi\epsilon F's \cdot \psi\epsilon F'\varphi s \cdot x\epsilon s :\supset \cdot \psi\varphi x = \psi(\varphi x)$.

C'est pourquoi, dans l'hypothèse de la définition, il sera $\psi\varphi$ un nouveau *signe de fonction préposé* ; et cela même est appelé *produit des signes* ψ et φ.

Semblablement, si φ, ψ sont des *signes de fonctions postposés*.

Cette proposition vaudra :

$$s\epsilon K \cdot \varphi\epsilon F's \cdot \varphi s \supset s :\supset \cdot \varphi\varphi s \supset s \cdot \varphi\varphi\varphi s \supset s \cdot \text{etc.}$$

Les fonctions $\varphi\varphi, \varphi\varphi\varphi$,... sont dites itérées et sont communément désignées par les signes φ^2, φ^3,... , comme puissances de l'opération φ.
Si vraiment φ est un *signe de fonction postposé*, on peut user de cette notation plus facile, sans ambiguïté : *Def.* $s\epsilon K \cdot \varphi\epsilon s'F \cdot s\varphi \supset s :\supset \cdot \varphi 1 = \varphi \cdot \varphi 2 = \varphi\varphi \cdot \varphi 3 = \varphi\varphi\varphi \cdot \text{etc.}$ Dans l'hypothèse de la définition, si $m, n\epsilon N$, il sera $\varphi(m+n) = (\varphi m)(\varphi n)$; $(\varphi m)n = \varphi(mn)$.

Si nous usons de cette définition en Arithmétique, nous trouvons ceci. Le nombre qui suit le nombre a nous pouvons l'indiquer par le signe plus facile $a+$; alors $a+1, a+2, \ldots$ etc., et si b est un nombre, $a+b$, ont le sens connu $a+, a++, \ldots$ comme il ressort de la définition au § 1. La proposition 6 au § 1 nous pouvons l'écrire $N+ \supset N$. Si a, b, c sont des nombres, alors $a : +b \cdot c$ signifie $a + bc$, et $a : \times b \cdot c$ signifie ab^c.

Les signes de fonctions jouissent de beaucoup d'autres propriétés, surtout s'ils satisfont à la condition : $\varphi x = \varphi y \cdot \supset \cdot x = y$. Le signe de fonction qui satisfait à cette condition est appelé par le très illustre Dedekind *semblable* (ähnlich Abbildung). Mais le lieu manque pour exposer ces choses.

Déclarations.

Une définition, ou brièvement *Def.* est une proposition ayant la forme $x = \alpha$, soit $\alpha \supset x = \alpha$, où α est un agrégat de signes ayant un sens connu ; x est un signe, ou un agrégat de signes, manquant

encore de signification ; α vraiment est la condition sous laquelle la définition est donnée.

Un Théorème, (Théor. ou Th.) est une proposition qui est démontrée. Si le théorème a la forme $\alpha \supset \beta$, où α et β sont des propositions, alors α est dite être une *Hypothèse* (Hyp. ou Hp.), β vraiment une *Thèse* (Thès. ou Ts.) dépendent de la forme du Théorème ; en effet si au lieu de $\alpha \supset \beta$ nous écrivons $-\beta \supset -\alpha$, on aura $-\beta$ Hypothèse, et $-\alpha$ Thèse ; si vraiment nous écrivons $\alpha - \beta = \Lambda$, Hypothèse et Thèse dépendent de la forme du théorème.

Dans n'importe quel § le signe P qui suit un certain nombre, indique la proposition du même § signalée par ce numéro. Les propositions logiques sont indiquées par le signe L et le numéro de la proposition. Les formules qui ne sont pas contenues sur une même ligne, sont suivies sur une autre ligne, aucun signe n'étant interposé.

Principes arithmétiques.

§ 1. Des nombres et de l'addition.

Explications.

Par le signe	N	on indique	*un nombre (entier positif).*
"	1	"	*l'unité.*
"	$a+1$	"	le successeur de a, soit a plus 1.
"	$=$	"	*est égal.* Ceci doit être considéré comme un nouveau signe, bien qu'il ait l'apparence d'un signe logique.

Axiomes.

1. $1\epsilon N$.
2. $a\epsilon N \cdot \supset \cdot a = a$.
3. $a, b, c\epsilon N \cdot \supset : a = b \cdot = \cdot b = a$.
4. $a, b\epsilon N \cdot \supset \cdot \cdot a = b \cdot b = c : \supset \cdot a = c$.
5. $a = b \cdot b\epsilon N : \supset \cdot a\epsilon N$.
6. $a\epsilon N \cdot \supset \cdot a + 1\epsilon N$.
7. $a, b\epsilon N \cdot \supset : a = b \cdot = \cdot a + 1 = b + 1$.
8. $a\epsilon N \cdot \supset \cdot a + 1 - = 1$.

9. $k\epsilon K \cdot \cdot 1\epsilon k\cdot : x\epsilon N \cdot x\epsilon k :\supset_x \cdot x + 1\epsilon k ::\supset \cdot N \supset k.$

Définitions.

10. $2 = 1 + 1; 3 = 2 + 1; 4 = 3 + 1;$ etc.

Théorèmes.

11. $2\epsilon N.$
    Dém. :
    P $1 \cdot \supset : 1\epsilon N$ (1)
    $1[a](P6)\cdot \supset : 1\epsilon N\cdot \supset \cdot 1 + 1\epsilon N$ (2)
    $(1)(2) \cdot \supset : 1 + 1\epsilon N$ (3)
    P $10 \cdot \supset : 2 = 1 + 1$ (4)
    $(4) \cdot (3) \cdot (2,\ 1{+}1)\ [a, b](P5) :\supset : 2\epsilon N$ (Théorème).

Note. - De cette démonstration très facile, nous avons écrit explicitement tous les degrés. Par souci de brièveté, nous l'écrivons ainsi :

$$P1 \cdot 1[a](P6) :\supset: 1 + 1\epsilon N \cdot P10 \cdot (2, 1 + 1)[a, b](P5) :\supset: \text{Th.}$$

ou

$$P1 \cdot P6 :\supset: 1 + 1\epsilon N \cdot P10 \cdot P5 :\supset: \text{Th.}$$

12. $3, 4, \ldots \epsilon N.$
13. $a, b, c, d\epsilon N \cdot a = b \cdot b = c \cdot c = d :\supset: a = d.$
    Dém. Hyp. P $4 :\supset: a, c, d \in N \cdot a = c \cdot c = d \cdot P4 :\supset: Th\grave{e}s.$
14. $a, b, c\epsilon N \cdot a = b \cdot b = c \cdot a- = c := \Lambda.$
    Dém. P $4\ \cdot\ $ L $39 :\supset \cdot Th\acute{e}or.$
15. $a, b, c\epsilon N \cdot a = b \cdot b- = c :\supset \cdot a- = c.$
16. $a, b\epsilon N \cdot a = b :\supset \cdot a + 1 = b + 1.$

16'. $a, b\epsilon N \cdot a + 1 = b + 1 :\supset \cdot a = b.$
    Dém. P 7 = (P 16)(P 16').

17. $a, b\epsilon N\cdot \supset: a- = b\cdot = \cdot a + 1- = b + 1.$
    Dém. P $7 \cdot L21 :\supset \cdot Th\acute{e}or.$

Définitions.

18. $a, b\epsilon N\cdot \supset \cdot a + (b + 1) = (a + b) + 1.$

Note. - Cette définition doit être lue ainsi : si a et b sont des nombres, et $(a+b)+1$ a un sens (à savoir si $a+b$ est un nombre), mais $a+(b+1)$ n'est pas encore défini, alors $a+(b+1)$ signifie le nombre qui suit $a+b$.

De cette définition, et des précédentes, on déduit :

$$a\epsilon N\cdot \supset \cdot\cdot a+2 = a+(1+1) = (a+1)+1.$$

$$a\epsilon N\cdot \supset \cdot\cdot a+3 = a+(2+1) = (a+2)+1, \text{etc.}$$

Théorèmes.

19. $a, b\epsilon N\cdot \supset \cdot a+b\epsilon N$.
Dém. $a\epsilon N \cdot P6 :\supset \cdot a+1\epsilon N :\supset \cdot 1\epsilon[b\epsilon]$Thèse (1)
$a\epsilon N\cdot \supset \cdot\cdot b\epsilon N \cdot b\epsilon[b\epsilon]$Thèse $:\supset \cdot a+b\epsilon N \cdot P6 :\supset \cdot(a+b)+1\epsilon N \cdot P18 :\supset \cdot a+(b+1)\epsilon N :\supset \cdot(b+1)\epsilon[b\epsilon]$Thèse (2)
$a\epsilon N\cdot(1)\cdot(2)\cdot \supset \cdot\cdot 1\epsilon[b\epsilon]$Thèse $: \cdot b\epsilon N\cdot b\epsilon[b\epsilon]$Thèse $:\supset_b \cdot b+1\epsilon[b\epsilon]$Thèse $: \cdot([b\epsilon]\text{Ts})[k]P9 :\supset \cdot N \supset [b\epsilon]$Thèse $\cdot (L50) :\supset \cdot b\epsilon N\cdot \supset \cdot$Thèse (3)
$(3)\cdot$ (L 42) $:\supset$: $a, b\epsilon N\cdot \supset \cdot$Thèse. (Théorème).

20. *Def.* $a+b+c = (a+b)+c$.

21. $a, b, c\epsilon N\cdot \supset \cdot a+b+c\epsilon N$.

22. $a, b, c\epsilon N\cdot \supset$: $a = b\cdot = \cdot a+c = b+c$.
Dém. $a, b\epsilon N \cdot P7 :\supset \cdot 1\epsilon[c\epsilon]$Thèse (1)
$a, b\epsilon N\cdot \supset$: $\cdot c\epsilon N \cdot c\epsilon[c\epsilon]$Thèse $:\supset \cdot\cdot a = b\cdot = \cdot a+c = b+c : \cdot a+c, b+c\epsilon N : a+c = b+c\cdot = \cdot a+c+1 = b+c+1 :\supset \cdot\cdot a = b\cdot = \cdot a+(c+1) = b+(c+1) :\supset \cdot(c+1)\epsilon[c\epsilon]$Thèse (2)
$a, b\epsilon N\cdot(1)\cdot(2) :\supset \cdot\cdot 1\epsilon[c\epsilon]$Thèse $: \cdot c\epsilon[c\epsilon]$Thèse $:\supset_c \cdot(c+1)\epsilon[c\epsilon]$Thèse $:\supset \cdot c\epsilon N\cdot \supset \cdot$Thèse (3)
$(3) \supset$ Théorème.

23. $a, b, c\epsilon N\cdot \supset \cdot a+(b+c) = a+b+c$.
Dém. $a, b\epsilon N \cdot P18 \cdot P20 :\supset \cdot 1\epsilon[c\epsilon]$Thèse (1)
$a, b\epsilon N\cdot \supset$: $\cdot c\epsilon N\cdot c\epsilon[c\epsilon]$Thèse $:\supset \cdot a+(b+c) = a+b+c\cdot P7 :\supset \cdot a+(b+c)+1 = a+b+c+1\cdot P18 :\supset \cdot a+(b+(c+1)) = a+b+(c+1) :\supset \cdot c+1\epsilon[c\epsilon]$Thèse (2)
$(1)(2)$(P 9) $\cdot \supset \cdot$ Théorème.

24. $a\epsilon N\cdot \supset \cdot 1+a = a+1$.
Dém. $P2\cdot \supset \cdot 1\epsilon[a\epsilon]$Thèse (1)
$a\epsilon N \cdot a\epsilon[a\epsilon]$Thèse $:\supset \cdot 1+a = a+1 :\supset \cdot 1+(a+1) = (a+1)+1 :\supset \cdot(a+1)\epsilon[a\epsilon]$Thèse (2)
$(1)(2) \cdot \supset \cdot$ Théorème.

24'. $a, b\epsilon N\cdot \supset \cdot 1+a+b = a+1+b$.
Démonstration. Hypothèse P 24 : $\supset \cdot 1+a = a+1 \cdot P22 :\supset \cdot$Thèse.

25. $a, b\epsilon N\cdot \supset \cdot a+b = b+a$.
Dém. $a\epsilon N \cdot P24 :\supset \cdot 1\epsilon[b\epsilon]$Thèse (1)
$a\epsilon N\cdot \supset \cdot\cdot b\epsilon N \cdot b\epsilon[b\epsilon]$Thèse $:\supset \cdot a+b = b+a \cdot P7 :\supset \cdot(a+b)+1 = (b+a)+1\cdot(a+b)+1 = a+(b+1)\cdot(b+a)+1 = 1+(b+a)\cdot 1+(b+a) = (1+b)+a\cdot(1+b)+a = (b+1)+a :\supset \cdot a+(b+1) = (b+1)+a :\supset \cdot(b+1)\epsilon[b\epsilon]$Thèse (2)
$(1)(2) \cdot \supset \cdot$ Théorème

26. $a, b, c \epsilon N \cdot \supset : a = b \cdot = \cdot c + a = c + b.$
27. $a, b, c \epsilon N \cdot \supset : a + b + c = a + c + b.$
28. $a, b, c, d \epsilon N \cdot a = b \cdot c = d : \supset \cdot a + c = b + d.$

§ 2. Des soustractions.

Explications.

Le signe − se lit *moins*.

" $<$ " *est plus petit.*
" $>$ " *est plus grand.*

Définitions.

1. $a, b \epsilon N \cdot \supset : b - a = N[x\epsilon](x + a = b)$.
2. $a, b \epsilon N \cdot \supset : a < b \cdot = \cdot b - a - = \Lambda$.
3. $a, b \epsilon N \cdot \supset : b > a \cdot = \cdot a < b$.
   $a + b - c = (a + b) - c; a - b + c = (a - b) + c; a - b - c = (a - b) - c$.

Théorèmes.

4. $a, b, a', b' \epsilon N \cdot a = a' \cdot b = b' : \supset \cdot b - a = b' - a'$.
   Dém. Hyp $: \supset : x + a = b \cdot = \cdot x + a' = b' : \supset \cdot$Thèse.

5. $a, b \epsilon N \cdot \supset : a < b \cdot = \cdot b - a \epsilon N$.
   Démonstration $a, b \epsilon N \cdot \supset : \cdot x, y \epsilon b - a \cdot \supset_{x,y} : x, y \epsilon N \cdot x + a = b \cdot y + a = b \cdot \S 1 P 22 : \supset : x = y$ (1)
   $a, b \epsilon N \cdot a < b \cdot P2 \cdot (1) : \supset \cdot b - a - = \Lambda : x, y \epsilon b - a \cdot \supset \cdot x = y : (N, b - a)[s, k](L56) : \supset \cdot b - a \epsilon N$ (2)

   $a, b \epsilon N \cdot b - a \epsilon N \cdot (L56) : \supset : b - a - = \Lambda : \supset : a < b$ (3)
   (2)(3) $\cdot \supset \cdot$ Théorème
6. $a, b \epsilon N \cdot a < b : \supset \cdot b - a + a = b$.
   Dém. Hypothèse P 5 $\cdot$ P 1 $: \supset : b - a \epsilon N \cdot (b - a) \epsilon [x\epsilon](x + a = b) : \supset \cdot$ Thèse.
7. $a, b, c \epsilon N \cdot \supset : c = b - a \cdot = \cdot c + a = b$.
   Dém. Hypothèse § 1 P 22 $\cdot$ P 6 $: \supset : c = b - a \cdot = \cdot c + a = b - a + a \cdot = \cdot c + a = b$.
8. $a, b \epsilon N \cdot \supset \cdot a + b - a = b$.
   Dém. $(a + b, b)[b, c] P7 \cdot \supset \cdot$ Théorème
9. $a, b, c \epsilon N \cdot a < b : \supset \cdot c + (b - a) = c + b - a$.
   Dém. Hypothèse P 6 $: \supset \cdot (b - a) + a = b : \supset \cdot c + (b - a) + a = c + b \cdot P7 : \supset \cdot$ Thèse.
10. $a, b, c \epsilon N \cdot a > b + c : \supset \cdot a - (b + c) = a - b - c$.
11. $a, b, c \epsilon N \cdot b > c \cdot a > b - c : \supset \cdot a - (b - c) = a + c - b$.
12. $a, b, a', b' \epsilon N \cdot a = a' \cdot b = b' : \supset : a < b \cdot = \cdot a' < b'$.
    Dém. Hypothèse $\cdot \supset \cdot b - a = b' - a' \cdot \supset \cdot b - a \epsilon N = b' - a' \epsilon N \cdot \supset \cdot$ Thèse.

13. $a, b \epsilon N \cdot \supset \cdot a < a + b.$
Dém. Hypothèse P 8 : $\supset \cdot a + b - a = b :\supset \cdot a + b - a \epsilon N \cdot P5 :\supset \cdot$ Thèse.

14. $a, b, c \epsilon N \cdot a < b \cdot b < c :\supset \cdot a < c.$
Dém. Hypothèse $\cdot \supset \cdot b - a \epsilon N \cdot c - b \epsilon N :\supset \cdot (b - a) + (c - b) \epsilon N :\supset \cdot c - a \epsilon N :\supset \cdot$ Thèse.

15. $a, b, c \epsilon N \cdot \supset : a < b \cdot = \cdot a + c < b + c.$
Dém. Hypothèse $\cdot \supset : a < b \cdot = \cdot b - a \epsilon N \cdot = \cdot (b + c) - (a + c) \epsilon N \cdot = \cdot a + c < b + c.$

16. $a, b, a', b' \epsilon N \cdot a < b \cdot a' < b' :\supset \cdot a + a' < b + b'.$
Dém. Hypothèse $\cdot \supset \cdot a + a' < b + a' \cdot b + a' < b + b' :\supset \cdot$ Thèse.

17. $a, b, c \epsilon N \cdot a < b \cdot b < c :\supset \cdot c - a > c - b.$
Dém. Hypothèse $\cdot \supset \cdot b - a \epsilon N \cdot c - b \epsilon N \cdot (c - b) + (b - a) = c - a :\supset \cdot$ Thèse.

18. $a \epsilon N \cdot \supset : a = 1 \cdot \cup \cdot a > 1.$
Dém. $1 \epsilon [a \epsilon]$Thèse. (1)
$a \epsilon N \cdot P13 :\supset \cdot a + 1 > 1 :\supset \cdot a + 1 \epsilon [a \epsilon]$Thèse. (2)
$(1)(2) \cdot \supset \cdot$ Théorème

19. $a, b \epsilon N \cdot \supset \cdot a + b - = b.$
Dém. $a \epsilon N \cdot \S 1 P8 :\supset : a + 1 - = 1 :\supset \cdot 1 \epsilon [b \epsilon]$Thèse. (1)
$a \epsilon N \cdot b \epsilon N \cdot b \epsilon [b \epsilon]$Thèse $:\supset : a + b - = b \cdot \S 1 P17 :\supset \cdot a + (b + 1) - = b + 1 :\supset \cdot b + 1 \epsilon [b \epsilon]$Thèse (2)
$(1)(2) \cdot \supset \cdot$ Théorème

20. $a, b \epsilon N \cdot a < b \cdot a = b := \Lambda.$
Dém. Hyp $:\supset : b - a \in N \cdot (b - a) + a = a \cdot P19 :\supset : \Lambda.$

21. $a, b \epsilon N \cdot a > b \cdot a = b := \Lambda.$

22. $a, b \epsilon N \cdot a > b \cdot a < b := \Lambda.$

23. $a, b \epsilon N \cdot \supset : a < b \cdot \cup \cdot a = b \cdot \cup \cdot a > b.$
Dém. $a \epsilon N \cdot P18 :\supset \cdot 1 \epsilon [b \epsilon]$Thèse (1)
$a, b \epsilon N \cdot a < b :\supset \cdot a < b + 1.$ (2)
$a, b \epsilon N \cdot a = b :\supset \cdot a < b + 1.$ (3)
$a, b \epsilon N \cdot a > b :\supset \cdot a - b \epsilon N \cdot P18 :\supset \cdot a - b = 1 \cdot \cup \cdot a - b > 1.$ (4)
$a, b \epsilon N \cdot a - b = 1 :\supset \cdot a = b + 1.$ (5)
$a, b \epsilon N \cdot a - b > 1 :\supset \cdot a > b + 1.$ (6)
$a, b \epsilon N \cdot a > b \cdot (4)(5)(6) :\supset : a = b + 1 \cdot \cup \cdot a > b + 1.$ (7)
$a, b \epsilon N : a < b \cdot \cup \cdot a = b \cdot \cup \cdot a > b : (2)(3)(7) \cdot \supset \cdot \cdot a < b + 1 \cdot \cup \cdot a = b + 1 \cdot \cup \cdot a > b + 1.$ (8)
$a, b \epsilon N \cdot b \epsilon [b \epsilon]$Thèse $\cdot (8) :\supset \cdot b + 1 \epsilon [b \epsilon]$Thèse (9)
$(1)(9) \cdot \supset \cdot$ Théorème

§ 3. Des maxima et minima.

Explications.

Soit $a\epsilon KN$, c'est-à-dire soit a une certaine classe de nombres ; alors Ma se lit *le plus grand parmi* a, et $\mathbb{W}a$ se lit *le plus petit parmi* a.

Définitions.

1. $a\epsilon KN\cdot\supset: Ma = [x\epsilon](x\epsilon a\cdot\cdot a\cdot\ni> x := \Lambda)$.
2. $a\epsilon KN\cdot\supset\cdot\mathbb{W}a = [x\epsilon](x\epsilon a\cdot\cdot a\cdot\ni< x := \Lambda)$.

Théorèmes.

3. $n\epsilon N\cdot a\epsilon KN\cdot a- = \Lambda\cdot a\ni> n = \Lambda :\supset\cdot Ma\epsilon N$.
   Dém. $a\epsilon KN\cdot a- = \Lambda\cdot a\ni> 1 = \Lambda :\supset: a = 1 :\supset\cdot Ma = 1 :\supset\cdot Ma\epsilon N$. (1)
   (1) $\supset\cdot 1\epsilon[n\epsilon]$(Hypothèse $\supset$ Ts). (2)
   $n\epsilon N\cdot a\epsilon KN\cdot a\ni> n+1 = \Lambda\cdot n+1\epsilon a :\supset: n+1 = Ma :\supset\cdot Ma\epsilon N$. (3)
   $n\epsilon N\cdot a\epsilon KN\cdot a\ni> n+1 = \Lambda\cdot n+1-\epsilon a :\supset: a\ni> n = \Lambda$. (4)
   $n\epsilon[n\epsilon]$(Hp $\supset$ Ts)$\cdot a\epsilon KN\cdot a\ni> n+1 = \Lambda\cdot n+1-\epsilon a :\supset\cdot Ma\epsilon N$. (5)
   $n\epsilon[n\epsilon]$(Hp $\supset$ Ts)$\cdot a\epsilon KN\cdot a\ni> n+1 = \Lambda\cdot$(3)(5) $:\supset\cdot Ma\epsilon N$. (6)
   $n\epsilon[n\epsilon]$(Hp $\supset$ Ts)$\cdot$(6) $:\supset\cdot(n+1)\epsilon[n\epsilon]$(Hp $\supset$ Ts). (7)
   (2)(7) $\cdot$§1P9 $:\supset\cdot n\epsilon N\cdot\supset\cdot$Hp $\supset$ Thèse (Théorème).
4. $a\epsilon KN\cdot a- = \Lambda :\supset\cdot\mathbb{W}a\epsilon N$.
5. $a\epsilon KN\cdot\supset: \mathbb{W}a = M[x\epsilon](a\ni< x = \Lambda)$.

§ 4. De la multiplication.

Définitions.

1. $a\epsilon N\cdot\supset\cdot a\times 1 = a$.
2. $a,b\epsilon N\cdot\supset\cdot a\times(b+1) = a\times b+a$.
   $ab = a\times b; ab+c = (ab)+c; abc = (ab)c$.

Théorèmes.

3. $a,b\epsilon N\cdot\supset\cdot ab\epsilon N$.
   Dém. $a\epsilon N\cdot P1 :\supset\cdot a\times 1\epsilon N :\supset\cdot 1\epsilon[b\epsilon]$Thèse (1)
   $a,b\epsilon N\cdot b\epsilon[b\epsilon]$Thèse $:\supset\cdot a\times b\epsilon N\cdot$§1$P$19 $:\supset\cdot ab+a\epsilon N\cdot P1 :\supset\cdot a(b+1)\epsilon N :\supset\cdot b+1\epsilon[b\epsilon]$Thèse (2)
   (1)(2) $\cdot\supset\cdot$ Théorème.
4. $a,b,c\epsilon N\cdot\supset\cdot(a+b)c = ac+bc$.
   Note. C'est la prop. 5^e des Éléments d'Euclide, livre VII.
   Démonstration. $a,b\epsilon N\cdot P1 :\supset\cdot 1\epsilon[c\epsilon]$Thèse (1)
   $a,b,c\epsilon N\cdot c\epsilon[c\epsilon]$Thèse $:\supset\cdot(a+b)c = ac+bc\cdot$§1$P$22 $:\supset\cdot(a+b)c+a+b = ac+bc+a+b\cdot P2 :\supset\cdot(a+b)(c+1) = a(c+1)+b(c+1) :\supset\cdot c+1\epsilon[c\epsilon]$Thèse (2)
   (1)(2) $\cdot\supset\cdot$ Théorème.

5. $a\epsilon N\cdot \supset \cdot 1 \times a = a.$
   Dém. $1\epsilon[a\epsilon]$Thèse (1)
   $a\epsilon[a\epsilon]$Thèse$\cdot \supset \cdot 1 \times a = a \cdot \supset \cdot 1 \times a + 1 = a + 1 \cdot \supset \cdot 1 \times (a+1) = a+1 \cdot \supset \cdot a + 1\epsilon[a\epsilon]$Thèse (2)
   $(1)(2) \cdot \supset \cdot$ Théorème.

6. $a, b\epsilon N\cdot \supset \cdot ba + a = (b+1)a.$

7. $a, b\epsilon N\cdot \supset \cdot ab = ba.$ (Euclide VII, 16)
   Dém. $a\epsilon N \cdot P5 \cdot P1 :\supset \cdot a \times 1 = a = 1 \times a :\supset \cdot 1\epsilon[b\epsilon]$Thèse (1)
   $a, b\epsilon N \cdot b\epsilon[b\epsilon]$Thèse $:\supset \cdot ab = ba \cdot \supset \cdot ab + a = ba + a \cdot P1 \cdot P6 :\supset \cdot a(b+1) = (b+1)a :\supset \cdot b + 1\epsilon[b\epsilon]$Thèse (2)
   $(1)(2) \cdot \supset \cdot$ Théorème.

8. $a, b, c\epsilon N\cdot \supset \cdot a(b+c) = ab + ac.$
   Dém. P 4 $\cdot$ P 7 $: \supset \cdot$ Théorème.

9. $a, b, c\epsilon N \cdot a = b :\supset \cdot ac = bc.$
   Dém. $a, b\epsilon N \cdot a = b :\supset \cdot \cdot 1\epsilon[c\epsilon]$Thèse $: \cdot c\epsilon[c\epsilon]$Thèse$\cdot \supset: ac = bc \cdot a = b :\supset \cdot ac + a = bc + b :\supset \cdot a(c+1) = b(c+1) :\supset \cdot c + 1\epsilon[c\epsilon]$Thèse $:\supset \cdot c\epsilon N\cdot \supset \cdot$Thèse

10. $a, b, c\epsilon N \cdot a < b :\supset \cdot (b-a)c = bc - ac.$ (Euclide VII, 7)
    Dém. Hypothèse $\cdot \supset \cdot b - a\epsilon N \cdot (b-a) + a = b :\supset \cdot (b-a)c + ac = bc :\supset \cdot (b-a)c = bc - ac.$

11. $a, b, c\epsilon N \cdot a < b :\supset \cdot ac < bc.$
    Dém. Hypothèse. $\cdot \supset \cdot b - a\epsilon N \cdot P3 :\supset \cdot (b-a)c\epsilon N \cdot P10 :\supset \cdot bc - ac\epsilon N :\supset \cdot$ Thèse.

12. $a, b, c\epsilon N\cdot \supset: \cdot a < b \cdot = \cdot ac < bc : a = b \cdot = \cdot ac = bc : a > b \cdot = \cdot ac > bc.$

13. $a, b, a', b'\epsilon N \cdot a < a' \cdot b < b' :\supset \cdot ab < a'b'.$

14. $a, b\epsilon N\cdot \supset \cdot ab \cdot > \cup = \cdot a.$

15. $a, b, c\epsilon N\cdot \supset \cdot a(bc) = abc.$

Dém. $a, b\epsilon N \cdot P1 :\supset \cdot 1\epsilon[c\epsilon]$Thèse (1)
$a, b, c\epsilon N \cdot c\epsilon[c\epsilon]$Thèse $:\supset \cdot a(bc) = abc :\supset \cdot a(bc) + ab = abc + ab :\supset \cdot a(bc + b) = ab(c + 1) :\supset \cdot a(b(c + 1)) = ab(c + 1) :\supset \cdot c + 1\epsilon[c\epsilon]$Thèse (2)
$(1)(2) \cdot \supset \cdot$ Théorème.

§ 5. Des puissances.

Définitions.

1. $a\epsilon N \cdot \supset \cdot a^1 = a$.
2. $a, b\epsilon N \cdot \supset \cdot a^{b+1} = a^b a$.

Théorèmes.

3. $a, b\epsilon N \cdot \supset \cdot a^b \epsilon N$.
   Dém. $a\epsilon N \cdot P1 :\supset \cdot 1\epsilon[b\epsilon]$Thèse (1)
   $a, b\epsilon N \cdot b\epsilon[b\epsilon]$Thèse $:\supset \cdot a^b \epsilon N \cdot \S 4P3 :\supset \cdot a^b a\epsilon N \cdot P1 :\supset \cdot a^{b+1}\epsilon N :\supset \cdot b + 1\epsilon[b\epsilon]$Thèse (2)
   $(1)(2) \cdot \supset \cdot$ Théorème.
4. $a\epsilon N \cdot \supset \cdot 1^a = 1$.
5. $a, b, c\epsilon N \cdot \supset \cdot a^{b+c} = a^b a^c$.
6. $a, b, c\epsilon N \cdot \supset \cdot (ab)^c = a^c b^c$.
7. $a, b, c\epsilon N \cdot \supset \cdot (a^b)^c = a^{bc}$.
8. $a, b, c\epsilon N \cdot \supset : \cdot a < b \cdot = \cdot a^c < b^c : a = b \cdot = \cdot a^c = b^c : a > b \cdot = \cdot a^c > b^c$.
9. $a, b, c\epsilon N \cdot a > 1 \cdot \supset \cdot \cdot b < c \cdot = \cdot a^b < a^c : b = c \cdot = \cdot a^b = a^c : b > c \cdot = \cdot a^b > a^c$.

§ 6. De la division.

Explications.

Le signe / se lit *divisé par.*

" D " *divise, est un diviseur de.*
" ⊐ " *est un multiple de.*
" Np " *nombre premier.*
" π " *est premier à*[3].

Définitions.

1. $a, b\epsilon N \cdot \supset : b/a = N[x\epsilon](xa = b)$.

2. $a, b \epsilon N \cdot \supset : aDb \cdot = \cdot b/a - = \Lambda$.
3. $a, b \epsilon N \cdot \supset : b \complement a \cdot = \cdot aDb$.
4. $Np = N[x\epsilon](\ni Dx \cdot \ni > 1 \cdot \ni < x := \Lambda)$.
5. $a, b \epsilon N \cdot \supset : \cdot a \pi b \cdot =: \cdot \ni Da \cdot \ni Db \cdot \ni > 1 := \Lambda$.
6. $a, b \epsilon N \cdot \supset \cdot\cdot \ni D(a, b) :=: \ni Da \cdot \cap \cdot \ni Db$.
7. $a, b \epsilon N \cdot \supset \cdot\cdot \ni \complement(a, b) :=: \ni \complement a \cdot \cap \cdot \ni \complement b$.
   $ab/c = (ab)/c; a/b/c = (a/b)/c; a/b \times c = (a/b)c$.

Théorèmes.

Note. Ces théorèmes se démontrent comme pour la soustraction.

8. $a, b, a', b' \epsilon N \cdot a = a' \cdot b = b' : \supset \cdot a/b = a'/b'$.
9. $a, b, a', b' \epsilon N \cdot a = a' \cdot b = b' : \supset \cdot aDb \cdot = \cdot a'Db'$.
10. $a, b, c \epsilon N \cdot \supset : ac = b \cdot = \cdot c = b/a$.
11. $a, b \epsilon N \cdot \supset : aDb \cdot = \cdot b/a \epsilon N$.
12. $a \epsilon N \cdot \supset \cdot a/1 = a$.
13. $a \epsilon N \cdot \supset \cdot a/a = 1$.
14. $a \epsilon N \cdot \supset \cdot 1Da$.
15. $a \epsilon N \cdot \supset \cdot aDa$.
16. $a, b \epsilon N \cdot ab/b = a$.
17. $a, b \epsilon N \cdot aDb : \supset \cdot a(b/a) = b$.
18. $a, b, c \epsilon N \cdot cDb : \supset \cdot a(b/c) = ab/c$.
19. $a, b, c \epsilon N \cdot a \complement bc : \supset \cdot a/(bc) = a/b/c$.
20. $a, b, c \epsilon N \cdot a \complement b \cdot b \complement c : \supset \cdot a/(b/c) = a/b \times c$.
21. $a, m, n \epsilon N \cdot m > n : \supset \cdot a^m/a^n = a^{m-n}$.
22. $a, b \epsilon N \cdot \supset \cdot aDab$.
23. $a, b, c \epsilon N \cdot aDb \cdot bDc : \supset \cdot aDc$.
24. $a, b, c \epsilon N \cdot aDb \cdot bDc : \supset \cdot c/a \complement c/b$.
25. $a, b, c \epsilon N \cdot cDa \cdot cDb : \supset \cdot (a + b)/c = a/c + b/c$.
26. $a, b, c \epsilon N \cdot cDa \cdot cDb \cdot a > b : \supset \cdot (a - b)/c = a/c - b/c$.
27. $a, b, c \epsilon N \cdot cDa \cdot cDb : \supset \cdot cDa + b$.
28. $a, b, c \epsilon N \cdot cDa \cdot cDb \cdot a > b : \supset \cdot cDa - b$.
29. $a, b, c, m, n \epsilon N \cdot cDa \cdot cDb : \supset \cdot cDma + nb$.
30. $a, b, c, m, n \epsilon N \cdot cDa \cdot cDb \cdot ma > nb : \supset \cdot cDma - nb$.
31. $a, b \epsilon N \cdot aDb : \supset : a \cdot < \cup = \cdot b$.
    Dém. Hypothèse P 11 · P 17 · § 4 P 14 : $\supset : b/a \epsilon N \cdot a(b/a) = b \cdot a < \cup = a(b/a) : \supset \cdot$ Thèse.

32. $a, b \epsilon N \cdot aDb \cdot bDa :\supset \cdot a = b.$

33. $a \epsilon N \cdot \supset \cdot M \ni Da = a.$

34. $a, b \epsilon N \cdot a > b :\supset \cdot \ni D(a,b) = \ni D(b, a-b).$
Dém. Hypothèse P 28 : $\supset \cdot \cdot xDa \cdot xDb :\supset \cdot xDb \cdot xD(a-b)$ (1)
Hypothèse P 27 : $\supset \cdot \cdot xDb \cdot xD(a-b) :\supset \cdot xDb \cdot xD(b+(a-b)) :\supset \cdot xDb \cdot xDa.$ (2)
(1)(2) $\supset \cdot$ Hypothèse $\cdot \supset \cdot \cdot xDa \cdot xDb :=: xDb \cdot xD(a-b).$ (Théorème)

35. $a, b \epsilon N \cdot \supset \cdot M \ni D(a,b) \epsilon N.$
Dém. $1Da \cdot 1Db :\supset \cdot \ni D(a,b) - = \Lambda.$ (1)
$\ni D(a,b) \cdot \ni > a := \Lambda.$ (2)
(1)(2) $\cdot$ § 3 P 3 : $\supset \cdot$ Th.

36. $a, b \epsilon N \cdot \supset \cdot \ni D(a,b) = \ni DM \ni D(a,b).$ (Euclide VII, 2)
Dém. $k = N[c\epsilon](\text{Hp} \cdot a < c \cdot b < c :\supset \cdot \text{Thèse}).$ (1)
$a \epsilon N \cdot b \epsilon N \cdot a < 1 \cdot b < 1 := \Lambda.$ (2)
(1)(2) $\cdot \supset \cdot 1 \epsilon k.$ (3)
$a, b \epsilon N \cdot a < c+1 \cdot b < c+1 :\supset \cdot \cdot a < c \cdot b < c : \cup \cdot a = c \cdot b < c : \cup \cdot a < c \cdot b = c : \cup \cdot a = c \cdot b = c.$ (4)
$c \epsilon k \cdot a, b \epsilon N \cdot a < c \cdot b < c :\supset \cdot$ Thèse (5)
$c \epsilon k \cdot a, b \epsilon N \cdot a = c \cdot b < c :\supset \cdot c \epsilon k \cdot b < c \cdot a - b < c \cdot \ni D(a,b) = \ni D(b, a-b) :\supset \cdot \ni D(b, a-b) = \ni DM \ni D(b, a-b) :\supset \cdot \ni D(a,b) = \ni DM \ni D(a,b) :\supset \cdot$ Thèse (6)
$(a,b)[b,a](6) \cdot \supset \cdot c \epsilon k \cdot a, b \epsilon N \cdot a < c \cdot b = c :\supset \cdot$ Thèse (7)
$c \epsilon k \cdot a, b \epsilon N \cdot a = c \cdot b = c :\supset \cdot \ni D(a,b) = \ni Dc = \ni DM \ni Dc = \ni DM \ni D(a,b) :\supset \cdot$ Thèse (8)
(4)(5)(6)(7)(8) $\cdot \supset \cdot c \epsilon k \cdot a, b \epsilon N \cdot a < c+1 \cdot b < c+1 :\supset \cdot$ Thèse (9)
$(9) \supset \cdot c \epsilon k \cdot \supset \cdot (c+1) \epsilon k.$ (10)
(1)(10) $\cdot \supset \cdot \cdot c \epsilon N \cdot \text{Hp} \cdot a < c \cdot b < c :\supset \cdot$ Thèse (11)
$(a+b)[c](11) \cdot \supset \cdot \text{Hp} \cdot \supset \cdot$ Thèse (Théorème)

37. $a, b, m \epsilon N \cdot \supset \cdot M \ni D(am, bm) = m \times M \ni D(a,b).$

§ 7. Théorèmes divers.

1. $a, b \epsilon N \cdot a^2 + b^2 \text{Ⅎ} 7 :\supset \cdot a \text{Ⅎ} 7 \cdot b \text{Ⅎ} 7.$
2. $x \epsilon N \cdot \supset \cdot x(x+1) \text{Ⅎ} 2.$
3. $x \epsilon N \cdot \supset \cdot x(x+1)(x+2) \text{Ⅎ} 6.$
4. $x \epsilon N \cdot \supset \cdot x(x+1)(2x+1) \text{Ⅎ} 6.$
5. $x \epsilon N \cdot \supset : x \cdot \pi \cdot x + 1.$
6. $x \epsilon N \cdot \supset : 2x - 1 \cdot \pi \cdot 2x + 1.$
7. $x \epsilon N \cdot \supset \cdot (2x+1)^2 - 1 \text{Ⅎ} 8.$
8. $a \epsilon N \cdot a > 1 :\supset \cdot \cdot Np \cdot \ni > 1 \cdot \ni Da : - = \Lambda.$ (Euclide VII, 31)
9. $a, b \epsilon N \cdot \cdot b^2 > a \cdot :\supset \cdot \ni Da \cdot \ni > 1 \cdot \ni < b := \Lambda :\supset \cdot a \epsilon Np.$
10. $a, b \epsilon N \cdot a \epsilon Np \cdot a - Db :\supset \cdot a \pi b.$ (Euclide VII, 29)
11. $a, b, c \epsilon N \cdot aDbc \cdot a \pi b :\supset \cdot aDc.$
12. $a, b \epsilon N \cdot m = M \ni D(a,b) :\supset \cdot a/m \cdot \pi \cdot b/m.$

13. $a\epsilon Np \cdot b, c\epsilon N \cdot aDbc :\supset \cdot aDb \cdot \cup \cdot aDc.$ (Euclide VII, 30)
14. $a\epsilon Np \cdot b, n\epsilon N \cdot \supset : aDb^n \cdot = \cdot aDb.$ (Euclide IX, 12)
15. $a, b, c\epsilon N \cdot a\pi b \cdot cDa :\supset \cdot c\pi b.$ (Euclide VII, 23)
16. $a, b, c\epsilon N \cdot \supset \cdot \cdot a\pi b \cdot a\pi c :=: a\pi bc.$ (Euclide VII, 24)
17. $a, b, c\epsilon N \cdot b\pi c \cdot bDa \cdot cDa :\supset \cdot bcDa.$
18. $a, b, c\epsilon N \cdot a\pi b :\supset \cdot \ni D(ac, b) = \ni D(c, b).$
19. $a, b\epsilon N \cdot \supset \cdot \mathbb{W} \ni \complement(a, b)\epsilon N.$
20. $a, b\epsilon N \cdot \supset \cdot \mathbb{W} \ni \complement(a, b) = ab/M \ni D(a, b).$ (Euclide VII, 34)
21. $a, b, c\epsilon N \cdot c\complement a \cdot c\complement b :\supset \cdot c\complement\mathbb{W} \ni D(a, b).$ (Euclide VII, 35)
22. $x\epsilon N \cdot x < 41 :\supset \cdot 41 - x + x^2\epsilon Np.$
23. $M \cdot Np := \Lambda.$ (Euclide IX, 20)
24. $n\epsilon Np \cdot a\epsilon N \cdot a - \complement n :\supset \cdot a^{n-1} - 1\complement n.$ (Fermat)

§ 8. Des ratios de nombres.

Explications.

Si $p, q\epsilon N$, alors $\frac{p}{q}$ se lit *rapport du nombre p au nombre q*. Le signe R se lit *rapport de deux nombres*, et indique les nombres rationnels positifs.

Définitions.

1. $m, p, q\epsilon N \cdot \supset \cdot m\frac{p}{q} = mp/q.$
2. $p, q, p', q'\epsilon N \cdot \supset : \cdot \frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} \cdot =: \cdot x\epsilon N \cdot x\frac{p}{q}, x\frac{p'}{q'}\epsilon N :\supset_x \cdot x\frac{p}{q} = x\frac{p'}{q'}.$
3. $R =: [x\epsilon] \cdot \cdot p, q\epsilon N \cdot \frac{p}{q} = x : - = \Lambda.$
4. $p\epsilon N \cdot \supset \cdot \frac{p}{1} = p.$

Théorèmes.

5. $p, q, p', q'\epsilon N \cdot \supset : \cdot \frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} \cdot = \cdot pq' = p'q.$ (Euclide VII, 19)
   Dém. Hypothèse $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} :\supset \cdot \cdot qq', qq'\frac{p}{q}, qq'\frac{p'}{q'}\epsilon N \cdot P2 \cdot \supset : \cdot \cdot qq'\frac{p}{q} = qq'\frac{p'}{q'} \cdot qq'\frac{p}{q} = pq' \cdot qq'\frac{p'}{q'} = p'q :\supset \cdot \cdot pq' = p'q.$ (1)
   Hypothèse $pq' = p'q \cdot \supset \cdot \cdot x\epsilon N \cdot x\frac{p}{q}, x\frac{p'}{q'}\epsilon N :\supset_x : xpq' = xp'q :\supset : \left(x\frac{p}{q}\right)qq' = \left(x\frac{p'}{q'}\right)qq' :\supset : x\frac{p}{q} = x\frac{p'}{q'}.$ (2)
   (1)(2) $\cdot \supset \cdot$ Th.
6. $m, p, q\epsilon N \cdot \supset \cdot \frac{p}{q} = \frac{mp}{mq}.$ (Euclide VII, 17)
7. $p, q\epsilon N \cdot m\epsilon N \cdot mDp \cdot mDq :\supset \cdot \frac{p}{q} = \frac{p/m}{q/m}.$

8. $p,q,p',q'\epsilon N \cdot p\pi q \cdot p'\pi q' \cdot \frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} :\supset: p = p' \cdot q = q'.$
9. $p,q,p',q'\epsilon N \cdot p'\pi q' \cdot \frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} :\supset \cdot p'/p = q'/q = M \ni D(p,q).$
10. $p,q,p',q'\epsilon N \cdot \frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} \cdot p\pi q \cdot q' < q := \Lambda.$ (Euclide VII, 21)
11. $p,q,p',q'\epsilon N \cdot \supset: \cdot\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} \cdot = \cdot\frac{p}{p'} = \frac{q}{q'} \cdot = \cdot\frac{q}{p} = \frac{q'}{p'} \cdot = \cdot\frac{q}{p} = \frac{q'}{p'}.$ (Euclide VII, 13)
12. $p,q\epsilon N \cdot \supset: \cdot[m\epsilon] : m\epsilon N \cdot m\frac{p}{q}\epsilon N \cdot : - = \Lambda.$
12'. $a\epsilon R \cdot \supset: \cdot[m\epsilon] : m\epsilon N \cdot ma\epsilon N \cdot : - = \Lambda.$
13. $p,q,p',q'\epsilon N \cdot \supset \cdot\cdot[(r,s,t)\epsilon] : r,s,t\epsilon N \cdot \frac{p}{q} = \frac{r}{t} \cdot \frac{p'}{q'} = \frac{s}{t} \cdot : - = \Lambda.$
13'. $a,b\epsilon R \cdot \supset \cdot\cdot[(r,s,t)\epsilon] : r,s,t\epsilon N \cdot a = \frac{r}{t} \cdot b = \frac{s}{t} \cdot : - = \Lambda.$
14. $a,b,c\epsilon R \cdot \supset \cdot\cdot[(m,n,p,q)\epsilon] : m,n,p,q\epsilon N \cdot a = \frac{m}{q} \cdot b = \frac{n}{q} \cdot c = \frac{p}{q} \cdot : - = \Lambda.$
15. $p,q,r\epsilon N \cdot a = \frac{p}{r} \cdot b = \frac{q}{r} :\supset: a = b \cdot = \cdot p = q.$
16. $m\epsilon N \cdot a,b\epsilon R \cdot a = b \cdot ma\epsilon N :\supset \cdot mb\epsilon N.$
17. $a,b,c\epsilon R \cdot \supset \cdot\cdot a = a \cdot$
$\supset \cdot\cdot a = b \cdot = \cdot b = a \cdot$
$\supset \cdot\cdot a = b \cdot b = c :\supset \cdot a = c.$
18. $N \supset R.$

Définitions.

19. $a,b\epsilon R \cdot \supset: \cdot a < b \cdot =: \cdot x\epsilon N \cdot xa, xb\epsilon N :\supset \cdot xa < xb.$
20. $a,b\epsilon R \cdot \supset: b > a \cdot = \cdot a < b.$

Théorèmes.

21. $p,q,r\epsilon N \cdot a = \frac{p}{r} \cdot b = \frac{q}{r} :\supset: a < b \cdot = \cdot p < q.$
22. $p,q,p',q'\epsilon N \cdot \supset: \frac{p}{q} < \frac{p'}{q'} \cdot = \cdot pq' < p'q.$
23. $p,q,r\epsilon N \cdot a = \frac{r}{p} \cdot b = \frac{r}{q} :\supset: a < b \cdot = \cdot p > q.$
24. $p,q,p',q'\epsilon N \cdot \frac{p}{q} < \frac{p'}{q'} :\supset \cdot\frac{p}{q} < \frac{p+p'}{q+q'} < \frac{p'}{q'}.$
25. $a\epsilon R \cdot \supset \cdot\cdot R \cdot \ni > a : - = \Lambda.$
26. $a\epsilon R \cdot \supset \cdot\cdot R \cdot \ni < a : - = \Lambda.$
27. $a,b\epsilon R \cdot a < b :\supset \cdot\cdot R \cdot \ni > a \cdot \ni < b : - = \Lambda.$
28. $a,b\epsilon R \cdot \supset \cdot\cdot a < b \cdot a = b := \Lambda \cdot$
$\supset \cdot\cdot a > b \cdot a = b := \Lambda \cdot$
$\supset \cdot\cdot a < b \cdot a > b := \Lambda \cdot$
$\supset \cdot\cdot a- < b \cdot a- = b \cdot a- > b := \Lambda.$
29. $a,b,c\epsilon R \cdot \supset \cdot\cdot a < \cup = b \cdot b < c :\supset \cdot a < c \cdot$
$\supset \cdot\cdot a < b \cdot b < \cup = c :\supset \cdot a < c.$

Définitions.

30. $a, b \epsilon R \cdot \supset \cdot a + b = [c\epsilon](c\epsilon R \cdot \cdot x\epsilon N \cdot xa, xb, xc\epsilon N :\supset_x \cdot xa + xb = xc)$.
31. $a, b \epsilon R \cdot \supset : \cdot b - a =: \cdot [x\epsilon](x\epsilon R \cdot a + x = b)$.
32. $a, b \epsilon R \cdot \supset \cdot ab = [c\epsilon](c\epsilon R \cdot \cdot x\epsilon N \cdot xa, (xa)b, xc\epsilon N :\supset_x \cdot (xa)b = xc)$.
33. $a, b \epsilon R \cdot \supset \cdot b/a = [x\epsilon](x\epsilon R \cdot ax = b)$.

Théorèmes

34. $p, q, r \epsilon N \cdot \supset \cdot \frac{p}{r} + \frac{q}{r} = \frac{p+q}{r}$.
35. $a, b \epsilon R \cdot \supset \cdot a + b \epsilon R$.
36. $p, q, r \epsilon N \cdot p < q :\supset \cdot \frac{q}{r} - \frac{p}{r} = \frac{q-p}{r}$.
37. $a, b \epsilon R \cdot a < b :\supset \cdot b - a \epsilon R$.
38. $p, q, p', q' \epsilon N \cdot \supset \cdot \frac{p}{q} \frac{p'}{q'} = \frac{pp'}{qq'}$.
39. $a, b \epsilon R \cdot \supset \cdot ab \epsilon R$.
40. $p, q, p', q' \epsilon N \cdot \supset \cdot \frac{p}{q} / \frac{p'}{q'} = \frac{pq'}{p'q}$.
41. $a, b \epsilon R \cdot \supset \cdot b/a \epsilon R$.
42. $p, q \epsilon N \cdot \supset \cdot \frac{p}{q} = p/q$.

§ 9. Systèmes de rationnels. Irrationnels.

Explication.

Si $a \epsilon KR$, le signe Ta se lit *borne supérieure*, ou *limite supérieure de la classe a*. Sur cet être nouveau, nous définissons seulement des relations et des opérations.

Définitions.

1. $a \epsilon KR \cdot x \epsilon R \cdot \supset : \cdot x < Ta \cdot = \cdot \cdot a \cdot \ni > x : - = \Lambda$.
2. $a \epsilon KR \cdot x \epsilon R \cdot \supset : \cdot \cdot x = Ta \cdot =: \cdot \cdot a \cdot \ni > x := \Lambda : \cdot u \epsilon R \cdot u < x :\supset_u \cdot \cdot a \cdot \ni > u : - = \Lambda$.
3. $a \epsilon KR \cdot x \epsilon R \cdot \supset : \cdot x > Ta \cdot =: x - < Ta \cdot x - = Ta$.

Théorème.

4. $x \epsilon R \cdot \supset : \cdot x = \cdot \cdot T : R \cdot \ni < x$.

Explication.

Le signe Q se lit *quantité*, et indique les nombres réels positifs, rationnels ou irrationnels, 0 et ∞ exceptés.

Définitions.

5. $Q = [x\epsilon](a\epsilon KR : a- = \Lambda : R\cdot \ni > Ta \cdot - = \Lambda : Ta = x\cdot : - = \Lambda)$.
6. $a, b\epsilon Q\cdot \supset : \cdot a = b\cdot =: \cdot R\cdot \ni < a :=: \cdot R\cdot \ni < b$.
7. $a, b\epsilon Q\cdot \supset : \cdot a < b\cdot =: \cdot R\cdot \ni > a\cdot \ni < b : - = \Lambda$.
8. $a, b\epsilon Q\cdot \supset : b > a\cdot = \cdot a < b$.

Théorèmes.

9. $a\epsilon Q\cdot \supset \cdot\cdot R\cdot \ni < a : - = \Lambda$.
10. $a\epsilon Q\cdot \supset \cdot\cdot R\cdot \ni > a : - = \Lambda$.
11. $R \supset Q$.

Subsistent aussi les propositions qui sont obtenues des P 17, 28, 29 au § 8, si au lieu de R on lit Q.

Définitions.

12. $a, b\epsilon Q\cdot \supset \cdot a + b = T[z\epsilon]\{[(x, y)\epsilon] : x, y\epsilon R \cdot x < a \cdot y < b \cdot x + y = z\cdot : - = \Lambda\}$.
13. $a, b\epsilon Q\cdot \supset \cdot ab = T[z\epsilon]\{[(x, y)\epsilon] : x, y\epsilon R \cdot x < a \cdot y < b \cdot xy = z\cdot : - = \Lambda\}$.

Pour que ces définitions vaillent, il faut démontrer que subsistent les propositions 12 et 13, si $a, b\epsilon R$. La soustraction et la division peuvent être définies comme opérations inverses de l'addition et de la multiplication, et on peut démontrer leurs propriétés.

§ 10. Systèmes de quantités.

Explications.

Si $a\epsilon KQ$, les signes Ia, Ea, La se lisent : *intérieur, extérieur, frontière de la classe a.*

Définitions.

1. $a\epsilon KQ\cdot \supset \cdot Ia = Q[x\epsilon]\{[(u, v)\epsilon] : \cdot u, v\epsilon Q \cdot \cdot u < x < v\cdot :\ni > u\cdot \ni < v :\supset \cdot a\cdot : - = \Lambda\}$.
2. $a\epsilon KQ\cdot \supset \cdot Ea = I(-a)$.
3. $a\epsilon KQ\cdot \supset \cdot La = (-Ia)(-Ea)$.

Théorèmes.

4. $a\epsilon KQ \cdot x,u,v\epsilon Q \cdot u < x < v \cdot (\ni > u \cdot \ni < v :\supset a) :\supset \cdot x\epsilon Ia.$
5. $a\epsilon KQ \cdot x\epsilon Ia \cdot \supset : \cdot [(u,v)\epsilon](u,v\epsilon Q \cdot \cdot u < x < v \cdot :\ni > u \cdot \ni < v :\supset \cdot a) - = \Lambda.$
   Dém. P 1 = (P 4)(P 5).
6. $a\epsilon KQ \cdot u,v\epsilon Q \cdot (\ni > u \cdot \ni < v :\supset a) \cdot \supset \cdot \ni > u \cdot \ni < v :\supset Ia.$
   Dém. P 6 = P 4.
7. $a\epsilon KQ \cdot \supset \cdot Ia \supset a.$
8. $a\epsilon KQ \cdot \supset \cdot IIa = Ia.$
   Dém. Hypothèse $(Ia)[a]P7 :\supset \cdot IIa \supset Ia.$ (1)
   Hypothèse $x,u,v\epsilon Q \cdot u < x < v \cdot (\ni > u \cdot \ni < v :\supset a) \cdot P6 :\supset \cdot u,v\epsilon Q \cdot u < x < v \cdot (\ni > u \cdot \ni < v :\supset Ia).$ (2)
   Hypothèse $x\epsilon Ia \cdot (2) :\supset \cdot x\epsilon IIa.$ (3)
   Hypothèse $(3) :\supset \cdot Ia \supset IIa.$ (4)
   Hypothèse $(1) \cdot (4) :\supset \cdot$Thèse (Théorème)
9. $a,b\epsilon KQ \cdot a \supset b :\supset \cdot Ia \supset Ib.$
   Dém. Hypothèse $x,u,v\epsilon Q \cdot u < x < v \cdot (\ni > u \cdot \ni < v :\supset a) :\supset \cdot \ni > u \cdot \ni < v :\supset b.$ (1)
   Hypothèse $x\epsilon Ia :\supset \cdot x\epsilon Ib.$ (Théorème)
10. $a,b\epsilon KQ \cdot \supset \cdot I(ab) \supset Ia.$
    Dém. (ab, a)[a, b] P 9 $\cdot = \cdot P10.$
11. $a,b\epsilon KQ \cdot \supset \cdot I(ab) \supset (Ia)(Ib).$
    Dém. P 11 = : P 10 $\cdot \cap \cdot (b,a)[a,b]P10.$
12. $a,b\epsilon KQ \cdot \supset \cdot Ia \supset I(a \cup b).$
13. $a,b\epsilon KQ \cdot \supset \cdot Ia \cup Ib \supset I(a \cup b).$
14. $a,b\epsilon KQ \cdot \supset \cdot I(ab) = (Ia)(Ib).$
    Dém.
    (1) Hypothèse P 11 : $\supset \cdot I(ab) \supset (Ia)(Ib).$
    (2) Hypothèse $x\epsilon Q \cdot u,v\epsilon Q \cdot u < x < v \cdot (\ni > u \cdot \ni < v :\supset a) \cdot u',v'\epsilon Q \cdot u' < x < v' \cdot (\ni > u' \cdot \ni < v' :\supset b) \cdot u'' = M(u \cup u') \cdot v'' = \mathbb{W}(v,v') :\supset \cdot u'',v''\epsilon Q \cdot u'' < x < v'' \cdot (\ni > u'' \cdot \ni > v'' :\supset \cdot ab).$
    (3) Hypothèse $x\epsilon Ia \cdot x\epsilon Ib \cdot (2) :\supset \cdot x\epsilon I(ab).$
    (4) Hypothèse : $\supset \cdot (Ia)(Ib) \supset I(ab).$
    Hypothèse $(1) \cdot (4) :\supset \cdot$Thèse
15. $a\epsilon KQ \cdot \supset \cdot Ea \supset -a.$
    Dém. P 15 = $(-a)[a]P7.$
16. $a\epsilon KQ \cdot \supset \cdot \cdot Ia \cdot Ea := \Lambda.$
    Dém. Hypothèse P 7 $\cdot$ P 15 : $\supset \cdot \cdot Ia \cdot Ea :\supset \cdot a - a := \Lambda.$
17. $a\epsilon KQ \cdot \supset \cdot IEa = Ea.$
    Dém. P 17 = $(-a)[a]P8.$
18. $a,b\epsilon KQ \cdot b \supset a :\supset \cdot Ea \supset Eb.$
    Dém. P 18 = $(-a,-b)[a,b]P9.$
19. $a,b\epsilon KQ \cdot \supset \cdot Ea \cup Eb \cdot \supset E(ab).$

20. $a, b \epsilon KQ \cdot \supset \cdot E(a \cup b) = (Ea)(Eb)$.
Dém. P 20 $= (-a, -b)[a, b]P14$.

21. $a \epsilon KQ \cdot \supset \cdot L(-a) = La$.

22. $a \epsilon KQ \cdot \supset \cdot \cdot Ia \cdot La := \Lambda \cdot$
$\supset \cdot \cdot Ea \cdot La := \Lambda \cdot$
$\supset \cdot \cdot -Ia \cdot -Ea \cdot -La := \Lambda$.
Dém. P 22 = P 3.

23. $a \epsilon KQ \cdot \supset : a \supset \cdot Ia \cup La$.

24. $a \epsilon KQ \cdot \supset \cdot I(aLa) = \Lambda$.
Dém. Hypothèse P 14 · P 7 · P 22 : $\supset \cdot I(aLa) \cdot = \cdot IaILa \cdot \supset \cdot IaLa \cdot = \Lambda$.

25. $a, b \epsilon KQ \cdot a \supset b : \supset \cdot La \cdot \supset \cdot Ib \cup Lb$.
Dém. Hypothèse P 18 : $\supset \cdot Eb \supset Ea : \supset \cdot Ia \cup La \cdot \supset \cdot Ib \cup Lb : \supset \cdot$Thèse

26. $a, b \epsilon KQ \cdot \supset \cdot L(ab) \supset \cdot IaLb \cup IbLa \cup LaLb$.
Dém. Hypothèse $\supset \cdot ab \supset a \cdot ab \supset b \cdot P25 : \supset \cdot L(ab) \supset Ia \cup La \cdot L(ab) \supset Ib \cup Lb : \supset \cdot L(ab) \supset (Ia \cup La)(Ib \cup Lb) \cdot L(ab)(Ia)(Ib) = L(ab)I(ab) = \Lambda : \supset \cdot$Thèse

26'. $a, b \epsilon KQ \cdot \supset \cdot L(ab) \supset La \cup Lb$.

27. $a, b \epsilon KQ \cdot \supset \cdot L(a \cup b) = LaEb \cup LbEa \cup LaLb$.
Dém. P 27 $= (-a, -b)[a, b]P26$.

27'. $a, b \epsilon KQ \cdot \supset \cdot L(a \cup b) \supset La \cup Lb$.

28. $a \epsilon KQ \cdot \supset \cdot LIa \supset La$.
Dém. Hypothèse P 7 : $\supset \cdot Ia \supset a \cdot P25 : \supset \cdot LIa \supset Ia \cup La$. (1)
Hypothèse P 8 · P 22 : $\supset \cdot LIaIa = LIaIIa = \Lambda$. (2)
(1)(2) · $\supset \cdot$ Théorème

28'. $a \epsilon KQ \cdot \supset \cdot LEa \supset La$.

29. $a \epsilon KQ \cdot \supset \cdot LLa \supset LIa \cup LEa$.
Dém. Hypothèse $\supset \cdot LLa = L(Ia \cup Ea) \cdot P27' : \supset \cdot$Thèse

29'. $a \epsilon KQ \cdot \supset \cdot LLa \supset La$.
Dém. P 29 · P 28 · P 28' : $\supset \cdot$ Théorème

30. $a \epsilon KQ \cdot \supset \cdot La = ILa \cup LLa$.
Dém. Hypothèse P 23 : $\supset \cdot La \supset ILa \cup LLa$. (1)
Hypothèse P 7 : $\supset \cdot ILa \supset La$. (2)
Hypothèse P 29' : $\supset \cdot LLa \supset La$. (3)
(1)(2)(3) · $\supset \cdot$ Théorème

31. $a \epsilon KQ \cdot \supset \cdot LILa \supset LLa$.
Dém. P 31 $= (La)[a]P28$.

32. $a \epsilon KQ \cdot \supset \cdot ILLa = \Lambda$.
Dém. Hypothèse P 29' : $\supset \cdot LLa = LaLLa \cdot (La)[a]P24 : \supset \cdot$Thèse

33. $a \epsilon KQ \cdot \supset \cdot ILILa = \Lambda$.
Dém. P 31 · P 32 : $\supset \cdot$ P 33.

34. $a \epsilon KQ \cdot \supset \cdot LLLa = LLa$.
Dém. $(La)[a]P30 \cdot P32 : \supset \cdot$ Théorème

35. $a, b \epsilon KQ\cdot \supset \cdot IaLb \supset L(ab)$.
Dém. Hypothèse P 14 : $\supset \cdot IaLbI(ab) = IaIbLb = \Lambda$. (1)
Hypothèse P 2 · P 14 : $\supset \cdot IaLbE(ab) = IaLbI(-a \cup -b) = I(a-b)Lb = IaEbLb = \Lambda$. (2)
(1)(2) $\supset$ Théorème

36. $a, b \epsilon KQ\cdot \supset \cdot IaLb \cup IbLa \supset Lab$. (Vide P 26)
Dém. P 36 := P 35 · (b, a) [a, b] P 35.

37. $a, b \epsilon KQ\cdot \supset \cdot EaLb \cup EbLa \supset L(a \cup b)$. (Vide P 27)
Dém. P 37 $= (-a, -b)[a, b]P36$.

38. $a, b \epsilon KQ\cdot \supset \cdot I(a \cup b) \supset Ia \cup Ib \cup LaLb$. (Vide P 13)
Dém. Hypothèse $\supset \cdot I(a \cup b) \supset (Ia \cup La \cup Ea)(Ib \cup Lb \cup Eb)$. (1)
Hypothèse P 20 · P 16 : $\supset \cdot I(a \cup b)EaEb = I(a \cup b)E(a \cup b) = \Lambda$. (2)
Hypothèse P 37 : $\supset \cdot I(a \cup b)(EaLb \cup EbLa)\cdot \supset \cdot I(a \cup b)L(a \cup b)\cdot = \Lambda$. (3)
(1)(2)(3) · $\supset$ · Théorème

38'. $a, b \epsilon KQ\cdot \supset \cdot E(ab) \supset Ea \cup Eb \cup LaLb$. (Vide P 19)

39. $a \epsilon KQ\cdot \supset \cdot ILaLIa = \Lambda$.
Dém. Hypothèse P 36 : $\supset \cdot ILaLIa \supset L(LaIa) = \Lambda$.

40. $a \epsilon KQ\cdot \supset \cdot LIa \supset LLa$.
Dém. Hypothèse P 28 · P 30 · P 39 : $\supset$ · Théorème

40'. $a \epsilon KQ\cdot \supset \cdot LEa \supset LLa$.

41. $a \epsilon KQ\cdot \supset \cdot LLa = LIa \cup LEa$.
Dém. P 29 · P 40 · P 40' : $\supset$ · Théorème

42. $a \epsilon KQ\cdot \supset \cdot ILIa = \Lambda\cdot$
$\supset \cdot ILEa = \Lambda\cdot$
$\supset \cdot LLIa = LIa\cdot$
$\supset \cdot LLEa = LEa$.

43. $a, b \epsilon KQ\cdot \supset \cdot I(Ia \cup Ib) = Ia \cup Ib$.
Dém. Hypothèse P 7 : $\supset \cdot I(Ia \cup Ib) \supset Ia \cup Ib$. (1)
Hypothèse P 8 · P 13 : $\supset \cdot Ia \cup Ib\cdot = \cdot IIa \cup IIb\cdot \supset \cdot I(Ia \cup Ib)$. (2)
(1)(2) $\supset$ Théorème

44. $a, b \epsilon KQ\cdot \supset \cdot I(LLa \cup LLb) = \Lambda$.
Dém. Hypothèse P 38 · P 32 · P 34 : $\supset \cdot I(LLa \cup LLb) \supset LLaLLb \supset LLa$. (1)
Hypothèse (1) · P 8 : $\supset \cdot I(LLa \cup LLb) \supset ILLa = \Lambda$.

45. $a \epsilon KQ\cdot \supset \cdot I(Ia \cup Ea) = Ia \cup Ea$.
Dém. P 8 · P 17 · (-a) [b] P 43 : $\supset$ · Théorème

45'. $a \epsilon KQ\cdot \supset \cdot ELa = Ia \cup Ea$.

46. $a \epsilon KQ\cdot \supset \cdot EIa = -(Ia \cup LIa)$.

46'. $a \epsilon KQ\cdot \supset \cdot EEa = -(Ea \cup LEa)$.