

Introduction

Dans presque toutes les branches des mathématiques, nous utilisons l'anneau des entiers rationnels, pourtant, en regardant au-delà de la structure formelle de cet anneau, nous rencontrons souvent de grandes lacunes dans notre compréhension. Le besoin de trouver de nouvelles perspectives sur l'anneau des entiers nous est en particulier rappelé par notre incapacité à trancher la validité de l'hypothèse de Riemann classique, que l'on peut concevoir comme une question sur la distribution des nombres premiers. Inspiré par des idées issues de la géométrie non commutative, Alain Connes [8], [10], [9] a proposé ces dernières années un cadre pour aborder l'hypothèse de Riemann. Les chapitres suivants constituent une introduction à ces idées d'Alain Connes et sont conçus pour faciliter l'étude sérieuse de ses articles et l'analyse des détails de ses démonstrations, que pour la plupart nous ne reproduisons pas ici. Nous évitons également de reproduire une trop grande partie du matériel classique, et choisissons plutôt de passer en revue, sans démonstration, les faits de base concernant l'hypothèse de Riemann nécessaires directement à la compréhension des articles de Connes. Ces chapitres doivent donc être lus en ayant à portée de main un manuel standard sur la fonction zêta de Riemann, par exemple le livre de Harold M. Edwards [15], qui comprend également une traduction du mémoire original de Riemann. Pour le cas des corps de fonctions, le lecteur peut consulter le livre d'André Weil [39]. Une bonne introduction à la fonction zêta de Riemann et au cas des corps de fonctions se trouve également dans l'étude de Samuel J. Patterson [30]. Une vue d'ensemble concise et informative de l'hypothèse de Riemann, que nous citons à plusieurs reprises, est donnée par Enrico Bombieri sur le site internet du Clay Mathematics Institute [3] (voir aussi le rapport mis à jour de Peter Sarnak sur ce même site).

Certaines notions avancées de théorie des nombres sont mentionnées pour motiver l'approche de Connes, mais une faible connaissance de la théorie des nombres est supposée pour la discussion des résultats de ses articles. Bien que les articles de Connes s'appliquent à des corps globaux arbitraires, nous restreignons le plus souvent notre attention au corps des nombres rationnels, car cela met encore en valeur les points principaux et limite les technicités.

Il existe certaines similitudes entre le travail d'Alain Connes dans [8], [10], [9] et celui de Shai Haran dans [21], [23], [22]. Nous ne poursuivons pas ici la relation avec les articles de Shai Haran, bien que nous les citons à plusieurs reprises.

1 Les objets d'étude

1.1 La fonction zêta de Riemann.

Riemann a formulé sa célèbre hypothèse en 1859 dans un article fondateur [31], de seulement 8 pages, sur le nombre de premiers inférieurs à une magnitude donnée. L'article est centré sur l'étude

d'une fonction $\zeta(s)$, appelée aujourd'hui la fonction zêta de Riemann, qui a l'expression formelle :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad (1)$$

dont le membre de droite converge pour $\Re(s) > 1$. Cette fonction précède en fait Riemann. Dans un article [17] publié en 1748, Euler a observé un lien avec les nombres premiers via le développement en produit formel :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ premier}} (1 - p^{-s})^{-1}, \quad (2)$$

valide pour $\Re(s) > 1$. L'équation (2) est un résultat direct de la factorisation unique, à permutation des facteurs près, d'un entier rationnel positif en un produit de nombres premiers. Le contenu de l'article d'Euler est décrit dans [15]. Il semble qu'Euler avait conscience de la formule asymptotique :

$$\sum_{p < x} \frac{1}{p} \sim \log(\log x) \quad (x \rightarrow \infty)$$

où la somme dans le membre de gauche porte sur les nombres premiers p inférieurs au nombre réel x .

La structure additive des entiers conduit à considérer les entiers négatifs aussi bien que positifs et à la définition de la valeur absolue usuelle sur l'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers rationnels, définie par $|n| = \text{sgn}(n)n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Les valuations p -adiques sont déjà implicites dans la factorisation unique des entiers positifs en nombres premiers. À savoir, pour chaque nombre premier p et chaque entier n , on peut écrire :

$$n = p^{\text{ord}_p(n)} n'$$

où n' est un entier non divisible par p . La valeur absolue p -adique de n est alors définie par :

$$|n|_p = p^{-\text{ord}_p(n)}$$

Nous désignons par $\mathbb{Q}$ le corps des fractions de $\mathbb{Z}$, c'est-à-dire le corps des nombres rationnels, et par $M_{\mathbb{Q}}$ l'ensemble des valuations que l'on vient d'introduire, étendu à ∞ de manière évidente, et indexé par ∞ et par les nombres premiers p . Pour $x \in \mathbb{Q}$, nous écrivons :

$$|x|_v = |x|, \quad v = \infty \in M_{\mathbb{Q}}$$

et

$$|x|_v = |x|_p, \quad v = p \in M_{\mathbb{Q}}.$$

La proposition importante suivante est évidente d'après les définitions.

Formule du produit : Pour tout $x \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$, nous avons :

$$\prod_{v \in M_{\mathbb{Q}}} |x|_v = 1$$

Riemann a dérivé une formule pour $\sum n^{-s}$ valable pour tout $s \in \mathbb{C}$. Pour $\Re(s) > 0$, la fonction Γ est définie par :

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx.$$

La fonction $\Gamma(s)$ possède un prolongement analytique à tout $s \in \mathbb{C}$ avec des pôles simples aux points $s = 0, -1, -2, \dots$, de résidu $(-1)^m/m!$ en $-m$ ($m \geq 0$). Cela se voit en utilisant la formule :

$$\Gamma(s) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot N}{s(s+1) \cdot \dots \cdot (s+N-1)} (N+1)^{s-1}.$$

De plus, nous avons $s\Gamma(s) = \Gamma(s+1)$, et aux entiers positifs $m > 0$, nous avons $\Gamma(m) = (m-1)!$. Riemann a observé que, pour $\Re(s) > 1$:

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-s/2} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \int_0^\infty \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-n^2 \pi x) x^{s/2} \frac{dx}{x}. \quad (3)$$

De plus, il a remarqué que la fonction du membre de droite est invariante par les substitutions $s \mapsto 1-s$ et que l'on peut réécrire l'intégrale de (3) comme :

$$\int_1^\infty \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-n^2 \pi x) (x^{s/2} + x^{(1-s)/2}) \frac{dx}{x} - \frac{1}{s(1-s)} \quad (4)$$

laquelle converge pour tout $s \in \mathbb{C}$ et possède des pôles simples en $s = 1$ et $s = 0$. Ceci montre que $\zeta(s) = \sum n^{-s}$, définie pour $\Re(s) > 1$, peut être prolongée analytiquement en une fonction $\zeta(s)$ sur tout $\mathbb{C}$ avec un pôle simple en $s = 1$ (le pôle en $s = 0$ dans (4) étant pris en compte par $\Gamma(s/2)$).

Riemann a défini, pour $t \in \mathbb{C}$ donné par $s = \frac{1}{2} + it$, la fonction :

$$\xi(t) = \frac{1}{2} s(s-1) \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-s/2} \zeta(s), \quad (5)$$

pour laquelle nous avons le résultat important suivant.

Théorème 1. On a

(i) Soit Z l'ensemble des zéros de $\xi(t)$. Nous avons un développement en produit de la forme :

$$\xi(t) = \frac{1}{2} \pi^{-s/2} e^{bs} \prod_{\rho \in Z} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{s/\rho}, \quad s = \frac{1}{2} + it, \quad (6)$$

où $b = \log 2\pi - 1 - \frac{1}{2}\gamma$ et $\gamma = -\Gamma'(1) = 0,577\dots$ est la constante d'Euler. De plus, $\xi(t)$ est une fonction entière, et l'ensemble Z est contenu dans $\{s \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \Re(s) \leq 1\} = \{t \in \mathbb{C} \mid -\frac{i}{2} \leq \Im(t) \leq \frac{i}{2}\}$.

(ii) La fonction $\xi(t)$ satisfait l'équation fonctionnelle :

$$\xi(t) = \xi(-t). \quad (7)$$

De plus, l'ensemble Z est stable par conjugaison complexe.

- (iii) D'après l'équation (5), les pôles de $\Gamma(s)$ aux entiers non positifs donnent naissance à des zéros de $\zeta(s)$ aux entiers négatifs pairs. Ce sont les zéros triviaux. Les zéros restants de $\zeta(s)$ sont aux éléments de Z . Ce sont les zéros non triviaux.

La démonstration de la formule du produit de la partie (i) du Théorème 1 a été esquissée par Riemann et démontrée rigoureusement par Hadamard [19] en 1893. Le reste du Théorème 1 est dû à Riemann.

Nous pouvons maintenant énoncer le problème central non résolu concernant la fonction zêta, à savoir décider si l'hypothèse suivante est valide.

Hypothèse de Riemann : *Les zéros de $\xi(t)$ sont réels. De manière équivalente, les zéros non triviaux de $\zeta(s)$ reposent sur la droite $\Re(s) = \frac{1}{2}$.*

Riemann a vérifié cette hypothèse à la main pour les premiers zéros et a commenté :

“Sans aucun doute, il serait souhaitable d'avoir une preuve rigoureuse de cette proposition ; cependant, j'ai laissé cette recherche de côté pour le moment après quelques tentatives rapides et infructueuses, car elle semble superflue pour le but immédiat de mon étude.” *(traduit de l'allemand)*

Le “but immédiat” de Riemann était de trouver une formule pour le nombre de nombres premiers inférieurs à un nombre réel positif donné. Cependant, la grande contribution de Riemann n'a pas tant été ses résultats concrets sur cette question, mais plutôt les méthodes de son article, en particulier sa prise de conscience de l'existence d'une relation entre la localisation des zéros de $\zeta(s)$ et la distribution des nombres premiers. Une illustration de ce phénomène réside dans les deux types de formules de produit, l'une pour $\zeta(s)$ comme produit sur les nombres premiers comme en (2) et l'autre comme produit sur les zéros Z de la fonction associée $\xi(t)$ comme dans le Théorème 1 (i).

Avant Riemann, et suivant certaines idées d'Euler datant de 1737, Tchebychev avait amorcé l'étude de la distribution des nombres premiers par des méthodes analytiques vers 1850, en étudiant la fonction :

$$\pi(x) = \text{Card}\{p \text{ premier}, p \leq x\}.$$

Il a introduit la fonction :

$$J(x) = \frac{1}{2} \left(\sum_{p^n < x} \frac{1}{n} + \sum_{p^n \leq x} \frac{1}{n} \right) = \pi(x) + \frac{1}{2}\pi(\sqrt{x}) + \frac{1}{3}\pi(\sqrt[3]{x}) + \dots$$

et a montré en utilisant le produit d'Euler (2) que :

$$\frac{1}{s} \log \zeta(s) = \int_1^\infty J(x) x^{-s} \frac{dx}{x}, \quad \Re(s) > 1. \quad (8)$$

Riemann a utilisé plus tard cette formule et le calcul des résidus pour calculer $J(x)$, et par suite $\pi(x)$, en fonction des singularités de $\log \zeta(s)$, qui se produisent aux zéros et aux pôles de $\zeta(s)$. En s'appuyant sur les travaux de Tchebychev et de Gauss, Riemann a fait une étude rigoureuse de (8),

de son inversion et de sa relation avec $\pi(x)$.

Ce travail a été développé après Riemann et a culminé dans la démonstration indépendante en 1896 par Hadamard [20] et de la Vallée-Poussin [34] d'une formule asymptotique pour $\pi(x)$.

Théorème des nombres premiers : *Lorsque $x \rightarrow \infty$, nous avons :*

$$\pi(x) \sim \text{Li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\log t} \sim \frac{x}{\log x}.$$

où l'intégrale du membre de droite est comprise au sens de la valeur principale de Cauchy, c'est-à-dire :

$$\int_0^x \frac{dt}{\log t} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_0^{1-\epsilon} \frac{dt}{\log t} + \int_{1+\epsilon}^x \frac{dt}{\log t} \right)$$

De plus, il est apparu clairement que plus on comprend bien la localisation des zéros de $\zeta(s)$, mieux on comprend cette approximation de $\pi(x)$. Par exemple, le théorème des nombres premiers est équivalent à l'affirmation qu'il n'y a pas de zéros de $\zeta(s)$ sur la droite $\Re(s) = 1$, et l'hypothèse de Riemann est équivalente à l'affirmation que, pour tout $\epsilon > 0$, l'erreur relative dans le théorème des nombres premiers est inférieure à $x^{-1/2+\epsilon}$ pour tout x suffisamment grand.

Riemann a également étudié $N(T)$, pour $T > 0$ (le nombre de zéros de $\xi(t)$ compris entre 0 et T), et a esquissé une démonstration du fait que :

$$N(T) \sim \frac{T}{2\pi} \log \left(\frac{T}{2\pi} \right) - \frac{T}{2\pi}.$$

1.2 Corps locaux.

Les nombres premiers sont intimement liés aux corps finis. Si F est un corps fini, il est nécessairement de caractéristique première $p > 1$, c'est-à-dire que p est le plus petit entier non nul pour lequel l'identité $p1_F = 0$ est vraie dans F , où 1_F est l'élément unité multiplicative dans F . D'après un résultat de Wedderburn, un corps fini doit également être commutatif et possède la structure d'espace vectoriel de dimension $f \geq 1$ sur son corps premier $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, le corps à p éléments. Le nombre d'éléments de F est alors $q = p^f$ et il est isomorphe au corps $\mathbb{F}_q$ des racines de l'équation $X^q = X$.

Un corps arbitraire muni de la topologie discrète est localement compact. (En général, un espace métrique est dit localement compact si chaque point possède un voisinage qui est compact.) Du point de vue topologique, les corps localement compacts intéressants ne doivent pas être discrets. Cela conduit à considérer, pour des corps discrets comme $\mathbb{Q}$, leurs plongements dans des corps ou anneaux localement compacts non discrets étroitement associés.

L'ensemble $M_{\mathbb{Q}}$ des valuations du corps des fractions de l'anneau $\mathbb{Z}$ définit une famille d'espaces métriques $(\mathbb{Q}, d_v)$, où $d_v(x, y) = |x - y|_v$, $v \in M_{\mathbb{Q}}$. À chaque tel couple $(\mathbb{Q}, d_v)$, nous pouvons associer les complétés correspondants par rapport aux topologies induites par les métriques. Chacun de ces complétés possède également la structure de corps. Nous désignons par $\mathbb{Q}_p$ le corps donné par le complété de $\mathbb{Q}$ par rapport à la métrique d_p , pour p nombre premier. Le complété de $\mathbb{Q}$ par rapport

à $d_\infty(x, y) = |x - y|$ est le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels. Les corps $\mathbb{Q}_p$ et $\mathbb{R}$ sont des exemples de corps commutatifs localement compacts non discrets. Nous pouvons considérer $\mathbb{Q}$ comme un sous-corps de ses complétés $\mathbb{Q}_p$ et $\mathbb{R}$, enrichissant ainsi la structure topologique ambiante et permettant l'application de techniques d'analyse classique. Soit K^* le groupe des éléments non nuls d'un corps K . Comme nous le verrons au Chapitre 3, la considération des actions de $\mathbb{Q}_p^*$ sur $\mathbb{Q}_p$ et de $\mathbb{R}^*$ sur $\mathbb{R}$ conduit déjà à de remarquables formules de traces et peut être vue comme une première étape dans l'analyse "locale" de la structure d'anneau de $\mathbb{Z}$ d'un point de vue théorique des opérateurs.

En général, un corps local K est un corps commutatif muni d'une topologie par rapport à laquelle les opérations du corps sont continues et tel qu'en tant qu'espace métrique, il est complet, non discret et localement compact. (Souvent, on ne suppose pas la commutativité dans la définition d'un corps local.) Tout groupe topologique localement compact de Hausdorff possède une unique (à un scalaire près) mesure à gauche invariante non nulle qui est finie sur les ensembles compacts. Si le groupe est abélien, cette mesure est également invariante à droite. On l'appelle la mesure de Haar. L'action de $K^* = K \setminus \{0\}$ sur K par multiplication, $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$, $\lambda \in K^*$, $x \in K$, induit un redimensionnement de la mesure de Haar sur le groupe additif K et par suite un homomorphisme de groupes multiplicatifs :

$$\begin{aligned} K^* &\rightarrow \mathbb{R}_{>0}^* \\ \lambda &\mapsto |\lambda|, \end{aligned}$$

où $\mathbb{R}_{>0}^*$ désigne les nombres réels positifs. Soit :

$$\text{Mod}(K) = \{|\lambda| \in \mathbb{R}_{>0}^* \mid \lambda \in K^*\}$$

Alors $\text{Mod}(K)$ est un sous-groupe fermé de $\mathbb{R}_{>0}^*$. Il existe deux classes de corps locaux, comme suit (voir [38], § I-4, Théorème 5 et Théorème 8).

- (i) Corps locaux archimédiens : $\text{Mod}(K) = \mathbb{R}_{>0}^*$, auquel cas $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- (ii) Corps locaux non archimédiens : $\text{Mod}(K) \neq \mathbb{R}_{>0}^*$, auquel cas on a :

$$\text{Mod}(K) = q^{\mathbb{Z}},$$

où $q = p^d$ pour un certain nombre premier p et un certain entier positif d . De plus,

$$\mathcal{R} = \{x \in K \mid |x| \leq 1\}$$

est l'unique sous-anneau compact maximal de K . C'est un anneau local d'idéal maximal unique :

$$\mathcal{P} = \{x \in K \mid |x| < 1\},$$

avec $\mathcal{R}/\mathcal{P} \simeq \mathbb{F}_q$, le corps fini à q éléments. (Remarquons que si K' est une extension de K de degré d , alors pour $a \in K$, son module par rapport à K' est la d -ième puissance de son module par rapport à K .) Si le corps local non archimédien est de caractéristique $p > 1$, alors il est isomorphe à un corps de séries formelles en une indéterminée à coefficients dans un corps fini. Si le corps non archimédien est de caractéristique nulle, alors c'est une extension algébrique finie de $\mathbb{Q}_p$.

Pour p premier et $x \in \mathbb{Q}_p$, il existe un entier r tel que x peut s'écrire sous la forme :

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} a_{r+i} p^{r+i},$$

avec $0 \leq a_{r+i} \leq p-1$, $i \geq 0$ et $a_r \neq 0$. Nous avons alors $|x|_p = p^{-r}$ et $x \in \mathbb{Z}_p$ si et seulement si $a_j = 0$ pour $j < 0$. Le sous-anneau compact maximal de $\mathbb{Q}_p$ est l'anneau des entiers p -adiques $\mathbb{Z}_p$ donné par :

$$\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p \mid |x|_p \leq 1\},$$

qui contient les entiers rationnels $\mathbb{Z}$ comme sous-anneau. L'idéal maximal unique de $\mathbb{Q}_p$ est :

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{Z}_p \mid |x|_p < 1\},$$

de sorte que $\mathbb{Z}_p/\mathcal{P} \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \simeq \mathbb{F}_p$.

1.3 Corps globaux et leurs anneaux d'adèles.

Un corps global K peut être défini comme un sous-corps discrets cocompact d'un anneau commutatif semi-simple localement compact (non discret) $A = A_K$, appelé son anneau d'adèles [38]. Il existe deux classes de corps globaux, comme suit.

- (i) Corps globaux de caractéristique 0 : Ce sont les corps de nombres, c'est-à-dire les corps commutatifs qui sont des espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{Q}$, cette dimension étant généralement appelée le degré du corps sur $\mathbb{Q}$.
- (ii) Corps globaux de caractéristique p , où p est premier : Ce sont les extensions de type fini de $\mathbb{F}_p$ de degré de transcendance 1 sur $\mathbb{F}_p$. Si K est un tel corps, alors il existe un $T \in K$, transcendant sur $\mathbb{F}_p$, tel que K soit une extension algébrique finie de $\mathbb{F}_p(T)$. Le corps $\mathbb{F}_q$ où $q = p^f$ pour un certain f , est inclus dans K comme son sous-corps fini maximal, appelé le corps des constants. Le corps K peut également être réalisé comme corps de fonctions d'une courbe algébrique non singulière sur $\mathbb{F}_q$.

Un analogue de l'hypothèse de Riemann existe pour de tels corps et est discuté au Chapitre 2.

Le corps des nombres rationnels est un corps global de caractéristique 0 muni d'un ensemble de valuations inéquivalentes $v \in M_{\mathbb{Q}}$, $v = \infty$ ou $v = p$ premier, comme dans la section 1.1. Comme dans la section 1.2, les corps locaux associés sont donnés par les complétés :

$$\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R} \quad \text{pour } v = \infty$$

et

$$\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}_p \quad \text{pour } v = p.$$

L'anneau d'adèles $A = A_{\mathbb{Q}}$ combine tous ces corps locaux d'une manière qui leur donne un statut égal et combine leurs topologies en une topologie globalement localement compacte. Il est donné par le produit restreint :

$$A = \mathbb{R} \times \prod_p' \mathbb{Q}_p$$

par rapport à $\mathbb{Z}_p$. Cela signifie que les éléments de A sont des vecteurs infinis indexés par $M_{\mathbb{Q}}$:

$$x = (x_{\infty}, x_2, x_3, \dots)$$

avec $x_\infty \in \mathbb{R}$, $x_p \in \mathbb{Q}_p$ et $x_p \in \mathbb{Z}_p$ pour presque tous les nombres premiers p (c'est-à-dire pour tous sauf un nombre fini). L'addition et la multiplication se font composante par composante. Les plongements de $\mathbb{Q}$ dans ses complétés par rapport aux éléments de $M_{\mathbb{Q}}$ induisent un plongement diagonal de $\mathbb{Q}$ dans A dont l'image est appelée les adèles principaux. Par conséquent, $a \in \mathbb{Q}$ correspond à l'adèle principal :

$$a = (a, a, a, \dots).$$

Une base de la topologie sur A est donnée par les produits restreints $U_\infty \times \prod'_p U_p$ où U_∞ est ouvert dans $\mathbb{R}$ et U_p est ouvert dans $\mathbb{Q}_p$ avec $U_p = \mathbb{Z}_p$ pour presque tous les nombres premiers p . Le quotient $A/\mathbb{Q}$ des adèles par les adèles principaux est compact. La raison d'être du produit restreint est précisément de permettre la définition d'une topologie localement compacte non triviale sur A prolongeant les topologies localement compactes des facteurs.

Le groupe $J = J_{\mathbb{Q}}$ des idèles de $\mathbb{Q}$ est le produit restreint :

$$J = \mathbb{R}^* \times \prod'_p \mathbb{Q}_p^*$$

par rapport à $\mathbb{Z}_p^* := \{x \in \mathbb{Q}_p \mid |x|_p = 1\}$. Ce sont les éléments inversibles de A . Les éléments de J sont des vecteurs infinis indexés par $M_{\mathbb{Q}}$:

$$u = (u_\infty, u_2, u_3, \dots)$$

avec $u_\infty \in \mathbb{R}$, $u_\infty \neq 0$, $u_p \in \mathbb{Q}_p$, $u_p \neq 0$ et $|u_p|_p = 1$ pour presque tous les nombres premiers p . La multiplication se fait composante par composante. La topologie sur J est induite par l'inclusion :

$$J \hookrightarrow A \times A$$

$$u \mapsto (u, u^{-1})$$

Le groupe $\mathbb{Q}^*$ des nombres rationnels non nuls s'injecte diagonalement dans J et leur image est appelée les idèles principaux. Par conséquent, $q \in \mathbb{Q}^*$ correspond à l'idèle principal :

$$q = (q, q, q, \dots)$$

Le groupe J porte la norme donnée par :

$$\|\cdot\| : J \rightarrow \mathbb{R}_{>0}^*$$

$$u = (u_v)_{v \in M_{\mathbb{Q}}} \mapsto \prod_{v \in M_{\mathbb{Q}}} |u_v|_v = |u_\infty| \prod_{p \text{ premier}} |u_p|_p.$$

La formule du produit de la section 1.1 implique que $\mathbb{Q}^*$ est contenu dans $\text{Ker} \|\cdot\|$, c'est-à-dire les éléments de J de norme 1, c'est-à-dire que pour $u \in \mathbb{Q}$, $u \neq 0$, nous avons :

$$\|u\| = |u|_\infty \prod_p |u|_p = 1.$$

L'action de J sur A incarne donc simultanément les actions de $\mathbb{Q}_p^*$ sur $\mathbb{Q}_p$ et de $\mathbb{R}^*$ sur $\mathbb{R}$. Cependant, les rôles des valuations individuelles $v \in M_{\mathbb{Q}}$ restent indépendants, de sorte qu'on ne peut espérer obtenir beaucoup d'informations supplémentaires sur la structure de l'anneau $\mathbb{Z}$ de cette

manière.

Le groupe des classes d'idèles est le quotient $C = J/\mathbb{Q}^*$ des idèles par les idèles principaux. D'après la formule du produit, la norme définie sur les idèles induit une norme bien définie sur ce quotient, que nous denotons également par :

$$\|\cdot\| : C \rightarrow \mathbb{R}_{>0}^*$$

Soit J^1 le sous-groupe de J donné par le noyau de l'application norme. Les idèles principaux $\mathbb{Q}^*$ forment un sous-groupe discret de J^1 et le groupe quotient $C^1 = J^1/\mathbb{Q}^*$ est compact. Le groupe des classes d'idèles C est le produit direct de C^1 et $\mathbb{R}_{>0}^*$ et à ce titre est appelé un groupe quasi-compact. Pour les démonstrations de ces faits, voir [38], Chapitre 4. Un homomorphisme (continu) :

$$\chi : C \rightarrow \mathbb{C}^*$$

est appelé un quasi-caractère. Les quasi-caractères forment un groupe pour la multiplication point par point. Un quasi-caractère est dit principal s'il est trivial sur C^1 , et les quasi-caractères principaux forment un sous-groupe. L'application norme sur C donne un homomorphisme non trivial de C dans $\mathbb{R}_{>0}^*$ et les quasi-caractères principaux sont de la forme :

$$u \mapsto |u|^t, \quad t \in \mathbb{C}, \quad u \in C.$$

Tout quasi-caractère admet une factorisation :

$$\chi(u) = \chi_0(u)|u|^t, \quad t \in \mathbb{C}, \quad u \in C$$

avec $\chi_0 : C \rightarrow U(1)$ un caractère unitaire sur C , c'est-à-dire un homomorphisme vers le groupe des nombres complexes de valeur absolue 1. Tout quasi-caractère χ sur C peut être considéré comme un homomorphisme $\chi : J \rightarrow \mathbb{C}$ qui est trivial sur $\mathbb{Q}^*$. Pour chaque $v \in M_{\mathbb{Q}}$, il existe un plongement naturel de $\mathbb{Q}_v^*$ (où $\mathbb{Q}_{\infty} = \mathbb{R}$) dans J en envoyant $x \in \mathbb{Q}_v^*$ sur l'idèle $(u_w)_{w \in M_{\mathbb{Q}}}$ avec $u_w = 1$ pour tout $w \neq v$ et $u_v = x$. Ainsi, le quasi-caractère χ induit un homomorphisme χ_v sur $\mathbb{Q}_v$ avec $\chi_p(\mathbb{Z}_p^*) = \{1\}$ pour presque tous les nombres premiers p . L'ensemble fini S des premiers p pour lesquels $\chi_p(\mathbb{Z}_p^*) \neq \{1\}$ est appelé l'ensemble des premiers ramifiés. Nous pouvons alors écrire $\chi = \chi_{\infty} \prod_p \chi_p$. En un premier non ramifié $p \notin S$, le facteur local χ_p est déterminé par sa valeur en p . La fonction L avec un quasi-caractère non principal (ou Grössencharacter) $\chi(u) = \chi_0(u)|u|^t$ est définie dans la région $\Re(s) > 1 - \tau$, où $\tau = \Re(t)$, par :

$$L(\chi, s) = \prod_{p \notin S} (1 - \chi_p(p)p^{-s})^{-1}.$$

Pour $\chi \neq 1$, cette fonction possède un prolongement analytique à tout $\mathbb{C}$, également noté $L(\chi, s)$. Pour plus de détails, voir [38], Chapitre 7. Remarquons que la fonction zêta de Riemann correspond au cas où χ est trivial et S est vide. Nous avons la généralisation suivante de l'hypothèse de Riemann pour les caractères unitaires χ_0 sur C (laquelle possède une version correspondante pour tous les corps globaux, et pas seulement $\mathbb{Q}$).

Hypothèse de Riemann généralisée : *Nous avons $L(\chi_0, s) = 0$ pour $\Re(s) \in]0, 1[$ si et seulement si $\Re(s) = \frac{1}{2}$.*

1.4 Le système dynamique de Connes.

Il existe des groupes de symétrie naturels qui apparaissent pour les corps globaux. Dans le cas de la caractéristique nulle, étant donné une extension finie K de $\mathbb{Q}$, le groupe de symétrie associé est le groupe des automorphismes de corps de K qui laissent $\mathbb{Q}$ fixe. Ce groupe de symétrie est appelé le groupe de Galois de K sur $\mathbb{Q}$. Dans le cas de la caractéristique p , les groupes de symétrie proviennent d'automorphismes de Frobenius de la variété correspondante sur $\mathbb{F}_q$ donnés par l'élévation des coordonnées sur la variété à la q -ième puissance. Pour un corps global K de caractéristique finie p , le groupe des classes d'idèles C_K correspondant s'avère canoniquement isomorphe au groupe de Weil W_K engendré par tous les automorphismes laissant K fixe, et induit sur une certaine extension de corps de K par des puissances du Frobenius. Par conséquent, le groupe de symétrie naturel est en fait le groupe des classes d'idèles qui à son tour possède une interprétation en tant que groupe de Galois.

La proposition suivante de Weil, formulée en 1951, est une motivation centrale pour l'approche de Connes [36] :

“La recherche d’une interprétation de C_K lorsque K est un corps de nombres, qui soit en quelque façon analogue à l’interprétation comme groupe de Galois lorsque K est un corps de fonctions, me semble constituer l’un des problèmes fondamentaux de la théorie des nombres de nos jours ; il est possible qu’une telle interprétation détienne la clé de l’hypothèse de Riemann.” *(traduit du français)*

Pour un corps local, le groupe de Weil W_K correspondant est à nouveau engendré par des puissances de l'automorphisme de Frobenius d'une extension de K . D'après le résultat principal de la théorie du corps de classes local, le groupe W_K est isomorphe à K^* , qui joue donc localement le rôle du groupe des classes d'idèles.

La théorie du corps de classes relie l'arithmétique d'un corps de nombres, ou d'un corps local, aux extensions galoisiennes du corps. Pour un corps local, d'après les remarques ci-dessus, la théorie du corps de classes nous dit que le groupe K^* joue un rôle central dans cette relation. Ce groupe agit naturellement sur l'espace constitué des éléments de K , et comprendre l'action de la multiplication sur la structure additive de K , c'est-à-dire l'application :

$$K^* \times K \rightarrow K$$

$$(\lambda, x) \mapsto \lambda x$$

fait certainement partie intégrante de la compréhension de l'arithmétique d'un corps local.

À la lumière de la situation pour les corps globaux de caractéristique $p > 0$, on peut voir l'analogue de l'action de W_K pour le corps $\mathbb{Q}$ comme étant le passage au quotient par $\mathbb{Q}^*$ de l'application :

$$J \times A \rightarrow A$$

$$(u, x) \mapsto ux,$$

c'est-à-dire :

$$C \times X \rightarrow X$$

$$([u], [x]) \mapsto [u][x].$$

Ici, C est le groupe des classes d'idèles tel que défini ci-dessus et X est l'espace des classes $X = A/\mathbb{Q}^*$. La notation $[\cdot]$ désigne la classe modulo l'action multiplicative de $\mathbb{Q}^*$ et sera principalement omise dans la suite. Par conséquent, $[a] = [b]$ dans X pour $a, b \in A$ si et seulement s'il existe un $q \in \mathbb{Q}^*$ tel que $a = qb$. L'espace X est très singulier (même pas de Hausdorff).

Connes propose d'étudier le système dynamique (X, C) en suivant les directives suivantes :

- relier la géométrie spectrale de l'action (X, C) aux zéros de $\zeta(s)$.
- relier la géométrie non commutative des orbites de (X, C) aux valuations $M_{\mathbb{Q}}$ de $\mathbb{Q}$.
- montrer que la relation consécutive des zéros de $\zeta(s)$ aux nombres premiers de $\mathbb{Z}$ est suffisamment fine pour prouver l'hypothèse de Riemann.

1.5 La formule explicite de Weil.

Une relation très grossière entre les zéros de $\zeta(s)$ et les nombres premiers apparaissait déjà dans la section 1.1 lorsque nous avons comparé la formule du produit sur $\mathbb{Z}$ pour $\xi(t)$ dans le Théorème 1(i) avec la formule du produit d'Euler (2) pour $\zeta(s)$. À savoir, nous avons, pour $\Re(s) > 1$:

$$s(s-1)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \prod_{p \text{ premier}} (1-p^{-s})^{-1} = \exp(bs) \prod_{\rho \in Z} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) \exp\left(\frac{s}{\rho}\right).$$

Un raffinement important des idées remontant au mémoire de Riemann a conduit Weil à développer sa "formule explicite". Grossièrement parlant, l'idée consiste à prendre des logarithmes puis des transformées de Mellin dans la dernière formule affichée. Pour une fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$, nous définissons la transformée de Mellin (formelle) par :

$$M(f, z) = \int_0^\infty f(t) t^z \frac{dt}{t}.$$

Alors la formule de Weil s'écrit (formellement) comme suit :

$$\begin{aligned} M(f, 0) - \sum_{\rho \in Z} M(f, \rho) + M(f, 1) &= (\log 4\pi + \gamma)f(1) + \sum_{m=1}^\infty \sum_{p \text{ premier}} (\log p) \{f(p^m) + p^{-m}f(p^{-m})\} \\ &\quad + \int_1^\infty \left\{f(x) + x^{-1}f(x^{-1}) - \frac{2}{x}f(1)\right\} \frac{dx}{x - x^{-1}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Ici,

$$\sum_{\rho \in Z} M(f, \rho) := \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{|\Im(\rho)| < T} M(f, \rho).$$

Weil a également observé que l'hypothèse de Riemann est équivalente à la positivité de :

$$R(f) := \sum_{\rho \in Z} M(f, \rho) \quad (10)$$

pour des fonctions de la forme :

$$f(x) = \int_0^\infty g(xy) \overline{g(y)} dy.$$

Ceci se traduit par la négativité du membre de gauche de (9) pour de telles fonctions f qui satisfont également :

$$M(f, 0) = \int_0^\infty f(x) \frac{dx}{x} = 0$$

$$M(f, 1) = \int_0^\infty f(x) dx = 0.$$

En effet, pour f comme en (10), nous avons :

$$M(f, \rho) = M\left(g, \rho - \frac{1}{2}\right) \overline{M\left(g, -\left(\bar{\rho} - \frac{1}{2}\right)\right)},$$

de sorte que l'hypothèse de Riemann implique la positivité de $R(f)$. Réciproquement, nous avons suffisamment de fonctions $M(f, z)$ pour localiser les zéros de $\zeta(s)$. Pour rendre cela rigoureux et non seulement formel, nous devons imposer certaines conditions sur la classe de fonctions $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$. Nous exigeons que f soit continue et continûment dérivable sauf en un nombre fini de points où f et f' ont des discontinuités de première espèce. À ces discontinuités, f et f' sont définies comme la moyenne de leurs valeurs à gauche et à droite. De plus, il existe un $\delta > 0$ tel que $f(x) = O(x^\delta)$ lorsque $x \rightarrow 0^+$ et $f(x) = O(x^{-1-\delta})$ lorsque $x \rightarrow +\infty$. Alors $M(f, z)$ est analytique pour $-\delta < \Re(z) < 1 + \delta$ (voir [3]).

Comme suggéré dans la section 1.4, pour l'action (X, C) , les zéros de $\zeta(s)$ devraient avoir une interprétation spectrale. L'examen de (9) suggère que ces valeurs propres devraient apparaître avec un signe négatif pour correspondre au terme $-\sum_{\rho \in \mathbb{Z}} M(f, \rho)$. C'est en fait une caractéristique de l'approche de Connes. Nous en discutons dans la section 3.2. Pour quelques commentaires connexes sur la comparaison de (X, C) avec les flux hamiltoniens en chaos quantique, voir [9].

2 L'hypothèse de Riemann pour les courbes sur les corps finis

Il existe un analogue de l'hypothèse de Riemann pour certaines fonctions zêta attachées à des courbes définies sur des corps finis. Cet analogue, introduit par E. Artin (1924) et vérifié par lui pour quelques courbes de genre 1, est connu sous le nom de cas des corps de fonctions d'après le corps de fonctions de la courbe. F. Schmidt (1931) a montré que la fonction zêta pour les courbes est rationnelle et possède une équation fonctionnelle. Hasse (1934), en utilisant des idées issues de la géométrie algébrique ainsi que des méthodes analytiques, a démontré l'analogue de l'hypothèse de Riemann pour toutes les courbes de genre 1. Au début des années 1940, Weil a formulé une approche de l'hypothèse de Riemann pour des courbes arbitraires définies sur des corps finis (voir [35]). Par la suite, Weil a développé les méthodes de géométrie algébrique nécessaires pour exécuter son approche, et il a publié des démonstrations complètes dans son livre de 1948 [39]. Une démonstration plus élémentaire a été développée par Stepanov (1969), et celle-ci a été encore simplifiée par Bombieri (1972) [2]. Weil a été le pionnier de l'étude des fonctions zêta pour des variétés arbitraires sur des corps finis et a développé certaines conjectures concernant ces fonctions, connectant en particulier les données topologiques de ces variétés au comptage des points rationnels sur celles-ci sur des extensions finies du corps de base. Sont incluses dans ces conjectures de Weil une généralisation de l'hypothèse de Riemann et son interprétation comme un énoncé sur les

valeurs propres de l'automorphisme de Frobenius agissant sur la cohomologie d'une variété. Dwork (1960) a utilisé l'analyse p -adique pour établir la rationalité de la fonction zêta pour des variétés arbitraires. Diverses théories cohomologiques pertinentes pour les conjectures de Weil ont été développées, en particulier par M. Artin, Grothendieck, Serre et Verdier. La démonstration complète des conjectures de Weil a finalement été obtenue en 1973 par Deligne [11], [12].

La résolution réussie de l'analogue de l'hypothèse de Riemann pour les corps de fonctions fournit un encouragement fort à croire en la validité de l'hypothèse de Riemann dans le cas des corps de nombres, qui n'est pas encore résolu. C'est cependant toujours un problème ouvert que de prouver l'hypothèse de Riemann dans la même généralité pour les corps de fonctions en utilisant le programme proposé par Alain Connes : on s'attend à ce que cela fournisse de nombreuses informations nouvelles sur le programme dans le cas des corps de nombres.

2.1 La fonction zêta d'une courbe sur un corps fini.

Soit p un nombre premier et $\mathbb{F}_q$ le corps à $q = p^d$ ($d \geq 1$) éléments. L'application $\alpha \mapsto \alpha^q$ est l'identité sur $\mathbb{F}_q$. Il existe d automorphismes de $\mathbb{F}_q$ laissant $\mathbb{F}_p$ fixe, à savoir $\alpha \mapsto \alpha^{p^i}$, $\alpha \in \mathbb{F}_q$, $i = 0, \dots, d-1$. Le corps $\mathbb{F}_q$ est l'extension finie de $\mathbb{F}_p$ de degré d . Soit K une extension de corps de $\mathbb{F}_q$ de degré de transcendance égal à 1. Alors K est une extension algébrique finie de $\mathbb{F}_p(T)$ où T est transcendant sur $\mathbb{F}_p$, et est un corps global de caractéristique p , tel que décrit dans la section 1.3. Nous pouvons également écrire $K = \mathbb{F}_q(x, y)$ où x est transcendant sur $\mathbb{F}_q$ et il existe un polynôme irréductible $F = F(x, y) \in \mathbb{F}_q[x, y]$ tel que $F(x, y) = 0$. Cette équation définit une courbe plane définie sur $\mathbb{F}_q$ qui possède un modèle lisse Σ dont le corps de fonctions méromorphes est K .

Soit $\overline{\mathbb{F}}_q$ la clôture algébrique de $\mathbb{F}_q$, et $\overline{\Sigma} = \Sigma(\overline{\mathbb{F}}_q)$ la courbe sur $\overline{\mathbb{F}}_q$ donnée par les points de Σ rationnels sur $\overline{\mathbb{F}}_q$. Le corps des fonctions de Σ est $\overline{K} = \overline{\mathbb{F}}_q(x, y)$. L'automorphisme de Frobenius de $\overline{K}$ est donné par l'application $u \mapsto u^q$, $u \in \overline{K}$. Ceci induit l'application $(x, y) \mapsto (x^q, y^q)$ sur les solutions $(x, y) \in \overline{\mathbb{F}}_q^2$ de $F(x, y) = 0$, qui à son tour définit une application de Frobenius Fr sur $\overline{\Sigma}$. Par linéarité sur les entiers, l'application Fr s'étend au groupe additif des sommes formelles finies de points sur $\overline{\Sigma}$.

Pour chaque entier $j \geq 1$, le groupe des automorphismes de $\mathbb{F}_{q^j}$ sur $\mathbb{F}_q$ est engendré par l'application de Frobenius dont la j -ième puissance fixe les éléments de $\mathbb{F}_{q^j}$. De la même manière, les points fixes dans $\overline{\Sigma}$ de la j -ième itérée Fr^j sont les points $\Sigma(\mathbb{F}_{q^j})$ de $\overline{\Sigma}$ rationnels sur $\mathbb{F}_{q^j}$.

Nous introduisons quelques définitions.

Définition 1. *Le groupe des diviseurs $\text{Div}(\Sigma)$ de Σ sur $\mathbb{F}_q$ est le groupe additif formel des sommes finies :*

$$\text{Div}(\Sigma) = \left\{ \mathcal{A} = \sum a_i P_i \mid a_i \in \mathbb{Z}, P_i \in \Sigma(\mathbb{F}_{q^{d_i}}) \text{ pour certains } d_i \in \mathbb{N}, \text{Fr}(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \right\}$$

invariant sous l'automorphisme de Frobenius Fr sur $\overline{\Sigma}$. Un diviseur $\mathcal{A} = \sum_i a_i P_i$ est dit effectif (noté $\mathcal{A} > 0$) si $a_i > 0$ pour tout i .

Pour deux diviseurs $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, nous écrivons $\mathcal{A} > \mathcal{B}$ lorsque $\mathcal{A} - \mathcal{B}$ est effectif.

Définition 2. Si $\mathcal{A} = \sum_i a_i P_i \in \text{Div}(\Sigma)$, alors le degré $d(\mathcal{A})$ de $\mathcal{A}$ est $\sum_i a_i$. La norme $N(\mathcal{A})$ de $\mathcal{A}$ est $q^{d(\mathcal{A})}$.

Remarquons que pour $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \text{Div}(\Sigma)$, nous avons :

$$N(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = N(\mathcal{A})N(\mathcal{B}). \quad (11)$$

Définition 3. Un diviseur effectif $\mathcal{A} \in \text{Div}(\Sigma)$ est premier s'il ne peut pas s'écrire comme la somme de deux diviseurs effectifs dans $\text{Div}(\Sigma)$.

Les diviseurs effectifs sont les analogues des entiers positifs et les diviseurs premiers sont les analogues des entiers premiers. Tout diviseur effectif peut être décomposé de manière unique (à permutation des sommandes près) en une somme de diviseurs premiers.

Définition 4. La fonction zêta de la courbe Σ de corps de fonctions K est donnée par :

$$\zeta_K(s) = \zeta(s, \Sigma) = \sum_{\mathcal{A} > 0} \frac{1}{N(\mathcal{A})^s} = \prod_{\mathcal{P}} (1 - N(\mathcal{P})^{-s})^{-1}, \quad \Re(s) > 1 \quad (12)$$

où le produit porte sur les diviseurs premiers $\mathcal{P}$ dans $\text{Div}(\Sigma)$.

La décomposition en produit d'Euler à droite de (12) est une conséquence de (11) et de l'unicité de la décomposition en facteurs premiers des diviseurs effectifs.

Il est utile d'utiliser le changement de variables $u = q^{-s}$ et d'écrire la fonction zêta comme :

$$Z(u) = \zeta_K(s) = \prod_{\mathcal{P}} (1 - u^{d(\mathcal{P})})^{-1}. \quad (13)$$

Nous avons alors :

$$u \frac{d}{du} \log Z(u) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{d(\mathcal{P})|j} d(\mathcal{P}) \right) u^j. \quad (14)$$

La quantité $\sum_{d(\mathcal{P})|j} d(\mathcal{P})$ dans (14) est égale au nombre de points de $\Sigma(\mathbb{F}_{q^j})$.

Théorème 2. La fonction zêta possède un prolongement analytique à tout le plan complexe $\mathbb{C}$ et peut s'écrire :

$$\zeta_K(s) = \frac{P(q^{-s})}{(1 - q^{-s})(1 - q^{1-s})} \quad (15)$$

pour un certain polynôme P de degré $2g$, où g est le genre de Σ . De plus, le polynôme P satisfait :

$$q^{gs} P(q^{-s}) = q^{g(1-s)} P(q^{s-1}). \quad (16)$$

Le genre de $\bar{\Sigma}$ est la dimension sur $\bar{\mathbb{F}}_q$ de l'espace des sections du faisceau canonique de $\bar{\Sigma}$. D'après (16), nous voyons que la fonction zêta satisfait l'équation fonctionnelle :

$$q^{(g-1)s} \zeta_K(s) = q^{(g-1)(1-s)} \zeta_K(1-s).$$

La démonstration du Théorème 2 utilise le théorème de Riemann-Roch pour Σ (voir, par exemple, [16], Chapitre V, § 5).

On peut écrire le polynôme P comme un produit sur le “multi-ensemble” Z (points avec multiplicités) de zéros réciproques de P :

$$P(u) = \prod_{\rho \in Z} (1 - \rho u). \quad (17)$$

Cela donne un analogue de la formule du produit d’Hadamard de (6) :

$$\zeta_K(s) = \left(\prod_{\rho \in Z} (1 - \rho u) \right) (1 - u)^{-1} (1 - qu)^{-1}. \quad (18)$$

D’après le produit d’Euler, nous savons que $\zeta_K(s) \neq 0$ pour $\Re(s) > 1$ et par conséquent $1 \leq |\rho| \leq q$. De plus, (16) implique la symétrie de Z sous l’application $\rho \mapsto q/\rho$.

2.2 L’hypothèse de Riemann, la formule explicite et la positivité.

Nous commençons par un énoncé de l’hypothèse de Riemann pour les corps de fonctions.

L’hypothèse de Riemann pour les courbes sur les corps finis : *Les zéros de $\zeta_K(s)$ reposent sur $\Re(s) = \frac{1}{2}$, ou de manière équivalente, chaque $\rho \in Z$ a $|\rho| = q^{1/2}$.*

La démonstration de cet énoncé est un théorème dû dans toute sa généralité à André Weil qui l’a prouvé en 1942, voir [39]. Il est équivalent à la positivité d’une certaine forme fonctionnelle que nous décrivons ci-dessous. En suivant le traitement de [30], nous remarquons que, comme dans le cas du corps de nombres, nous avons une relation formelle entre les diviseurs premiers et les zéros de ζ_K . À savoir, nous voyons d’après (13) et (18) que :

$$\prod_{\mathcal{P}} (1 - u^{d(\mathcal{P})})^{-1} = \left(\prod_{\rho \in Z} (1 - \rho u) \right) (1 - u)^{-1} (1 - qu)^{-1}.$$

En prenant les dérivées logarithmiques comme en (14), nous obtenons :

$$\sum_{\mathcal{P}} d(\mathcal{P}) u^{d(\mathcal{P})} (1 - u^{d(\mathcal{P})})^{-1} = - \sum_{\rho \in Z} \rho u (1 - \rho u)^{-1} + u(1 - u)^{-1} + qu(1 - qu)^{-1}.$$

En comparant les coefficients de u^j , nous avons :

$$\sum_{d(\mathcal{P})|j} d(\mathcal{P}) = 1 - \sum_{\rho \in Z} \rho^j + q^j. \quad (19)$$

Le membre de gauche de cette formule est le nombre de points de $\Sigma(\mathbb{F}_{q^j})$, c’est-à-dire le nombre de points fixes de la j -ième puissance de l’application de Frobenius agissant sur $\Sigma(\overline{\mathbb{F}}_q)$. Par exemple, pour la droite projective $\Sigma = \mathbb{P}_1$, le membre de gauche est $1 + q^j$.

En multipliant (19) par $q^{-j/2}$ et en utilisant l'équation fonctionnelle, nous obtenons, après quelques manipulations, l'identité suivante :

$$q^{-|j|/2} \sum_{d(\mathcal{P})|j} d(\mathcal{P}) = q^{j/2} + q^{-j/2} - \sum_{\rho \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\rho}{q^{1/2}} \right)^j. \quad (20)$$

Soit h une fonction $h : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$. Définissons la transformée de Mellin discrète de h par :

$$M^d(h, z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} h(j) z^j.$$

Supposons que h soit telle que sa transformée de Mellin discrète converge dans l'intervalle $q^{-1/2} \leq |z| \leq q^{1/2}$. En multipliant (20) par $h(j)$ et en sommant sur j , on obtient ce qui suit :

Formule explicite pour les courbes sur les corps finis :

$$M^d(h, q^{1/2}) - \sum_{\rho \in \mathbb{Z}} M^d \left(h, \frac{\rho}{q^{1/2}} \right) + M^d(h, q^{-1/2}) = (2 - 2g)h(0) + \sum_{l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \sum_{\mathcal{P}} d(\mathcal{P}) q^{-d(\mathcal{P})|l|/2} h(d(\mathcal{P})l), \quad (21)$$

où g est le genre de Σ .

Tout comme pour la fonction zêta de Riemann (voir la section 1.5), l'hypothèse de Riemann est équivalente à un énoncé de positivité. Considérons l'involution et la convolution naturelles sur l'algèbre des fonctions $h : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$. L'involution est donnée par :

$$h^*(j) = \overline{h(-j)}, \quad j \in \mathbb{Z} \quad (22)$$

et la convolution de deux fonctions h_1 et h_2 par :

$$h_1 * h_2(j) = \sum_{j_1 + j_2 = j} h_1(j_1) h_2(j_2), \quad j \in \mathbb{Z}.$$

La transformée de Mellin transforme cette convolution en un produit, à savoir :

$$M^d(h_1 * h_2, z) = M^d(h_1, z) M^d(h_2, z).$$

Définissons une forme hermitienne $R(h_1, h_2)$ par :

$$R(h_1, h_2) = \sum_{\rho \in \mathbb{Z}} M^d \left(h_1 * h_2^*, \frac{\rho}{q^{1/2}} \right). \quad (23)$$

D'après (21), nous avons :

$$R(h_1, h_2) = M^d(h_1 * h_2^*, q^{1/2}) + M^d(h_1 * h_2^*, q^{-1/2}) + (2g - 2)(h_1 * h_2^*)(0) - \sum_{\mathcal{P}} \sum_{l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} d(\mathcal{P}) q^{-d(\mathcal{P})|l|/2} (h_1 * h_2^*)(d(\mathcal{P})l). \quad (24)$$

Théorème 3. *L'hypothèse de Riemann a lieu pour $\zeta_K(s)$ si et seulement si R est semi-définie positive.*

Démonstration. Supposons que l'hypothèse de Riemann ait lieu pour $\zeta_K(s)$. Alors pour tout $\rho \in Z$, nous avons $|\rho/q^{1/2}| = 1$. Par conséquent :

$$M^d\left(h * h^*, \frac{\rho}{q^{1/2}}\right) = M^d\left(h, \frac{\rho}{q^{1/2}}\right) M^d\left(h^*, \frac{\rho}{q^{1/2}}\right) = M^d\left(h, \frac{\rho}{q^{1/2}}\right) M^d\left(h, \left(\frac{\bar{\rho}}{q^{1/2}}\right)^{-1}\right) = \left|M^d\left(h, \frac{\rho}{q^{1/2}}\right)\right|^2.$$

Il s'ensuit que la forme R est une somme finie de formes semi-définies positives et est donc elle-même semi-définie positive. L'argument peut être inversé en faisant un choix astucieux de la fonction h en termes d'un zéro présumé de ζ hors de la droite critique. À savoir, supposons que R soit semi-définie positive et que l'hypothèse de Riemann soit fausse pour $\zeta_K(s)$. Alors il existe un $\rho_0 \in Z$ avec $\rho_1 := q/\bar{\rho}_0 \neq \rho_0$. D'un autre côté, comme le polynôme P du Théorème 2 a des coefficients réels, nous avons $\rho_1 \in Z$. Choisissons maintenant, comme nous le pouvons, un polynôme F avec $F(\rho_0) = i$, $F(\rho_1) = -i$, et $F(\rho) = 0$ pour $\rho \in Z \setminus \{\rho_0, \rho_1\}$. Il existe une fonction $h : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ avec :

$$R(h, h) = \sum_{\rho \in Z} M^d\left(h, \frac{\rho}{q^{1/2}}\right) \overline{M^d\left(h, \left(\frac{\bar{\rho}}{q^{1/2}}\right)^{-1}\right)} = \sum_{\rho \in Z} F(\rho) \overline{F\left(\frac{q}{\bar{\rho}}\right)} = F(\rho_0) \overline{F(\rho_1)} + F(\rho_1) \overline{F(\rho_0)} = -2.$$

C'est absurde, l'hypothèse de Riemann doit donc être vraie.

Pour prouver la positivité de R , Weil a utilisé des idées de géométrie algébrique. Les idées “géométriques” correspondantes font défaut dans le cas des corps de nombres, et les articles de Connes proposent un cadre dans lequel de telles idées géométriques “non commutatives” peuvent émerger.

La théorie de la cohomologie étale l -adique, une théorie cohomologique pour $\bar{\Sigma}$ à coefficients dans $\mathbb{Q}_l$ où l est un nombre premier différent de p , permet d'interpréter la formule explicite de (24) comme une formule de traces. Rappelons la formule donnée en (19) :

$$\text{Card}(\Sigma(\mathbb{F}_{q^j})) = 1 - \sum_{\rho \in Z} \rho^j + q^j. \quad (25)$$

Celle-ci peut être vue comme une formule de points fixes de Lefschetz dans le contexte des corps finis. La formule classique des points fixes de Lefschetz s'applique à une variété complexe V . Soit F une action sur V . Alors le nombre de points fixes de F est, d'après cette formule :

$$\text{Card}(\text{points fixes de } F) = \sum_j (-1)^j \text{Tr}(F^* | H^j(V)),$$

où F^* est l'action induite de F sur la cohomologie.

Les dimensions des groupes de cohomologie $H^*(\Sigma, \mathbb{Q}_l)$ sont données par :

$$\dim(H^j(\Sigma, \mathbb{Q}_l)) = \begin{cases} 0, & j > 2, \\ 1, & j = 0, 2, \\ 2g, & j = 1. \end{cases}$$

Rappelons que le Frobenius donne une application sur Σ et que les points de $\Sigma(\mathbb{F}_{q^j})$ sont les points fixes de Fr^j agissant sur la courbe sur la clôture algébrique. Par une version du théorème des points fixes de Lefschetz, on identifie ceci à une somme alternée de traces sur les groupes de cohomologie :

$$\begin{aligned} \text{Card}(\Sigma(\mathbb{F}_{q^j})) &= \text{Card}(\text{points fixes de } \text{Fr}^j) \\ &= 1 - \sum_{\rho \in Z} \rho^j + q^j \\ &= \text{Tr}((\text{Fr}^*)^j \mid H^0(\bar{\Sigma}, \mathbb{Q}_l)) - \text{Tr}((\text{Fr}^*)^j \mid H^1(\bar{\Sigma}, \mathbb{Q}_l)) + \text{Tr}((\text{Fr}^*)^j \mid H^2(\bar{\Sigma}, \mathbb{Q}_l)). \end{aligned}$$

Les premier et dernier termes du membre de droite somment ensemble à $1 + q^j$, de sorte que les zéros de la fonction zêta apparaissent comme les valeurs propres de Fr^* agissant sur H^1 et nous avons :

$$\text{Tr}((\text{Fr}^*)^j \mid H^1(\bar{\Sigma}, \mathbb{Q}_l)) = \sum_{\rho \in Z} \rho^j.$$

Pour montrer la positivité de la forme de (23), Weil travaille essentiellement avec $\bar{\Sigma}/S_g$, le produit symétrique de $\bar{\Sigma}$ avec lui-même g fois. Ceci est étroitement lié au jacobien J de la courbe Σ . L'application de Frobenius sur Σ induit un endomorphisme Fr de J qui est inversible sur $\mathbb{Q}$. Il existe une involution standard $e \mapsto e'$ sur les endomorphismes e de J , appelée l'involution de Rosati, pour laquelle $\text{Fr}'\text{Fr} = q$. En travaillant sur $\mathbb{Q}(q^{1/2})$ dans cette algèbre d'endomorphismes, on peut réinterpréter le Théorème 3 comme un énoncé sur la positivité de l'involution de Rosati, qui découle à son tour de l'inégalité de Castelnuovo-Severi pour les surfaces ; voir [30], § 5.17 et [32].

2.3 La démonstration de Weil par la théorie des correspondances.

Dans cette section, nous discutons brièvement de la démonstration de Weil de l'hypothèse de Riemann pour les courbes sur les corps finis en utilisant la théorie des correspondances. Tous les détails sont donnés dans son livre [39]. Des références additionnelles utiles sont [16], [32]. Une fois de plus, l'hypothèse de Riemann est ramenée à un énoncé de positivité qui découle de l'inégalité de Castelnuovo-Severi pour les surfaces.

Une correspondance sur une courbe est le graphe d'une application multivoque d'une courbe Σ vers elle-même, et elle peut également être vue comme un diviseur sur la surface $\Sigma \times \Sigma$. Rappelons la formule donnée en (19), qui donne la formule explicite, et est donnée par :

$$\sum_{\rho \in Z} \rho^j = 1 + q^j - \text{Card}(\Sigma(\mathbb{F}_{q^j})), \quad j \geq 1. \quad (26)$$

Si $\text{Fr} : \bar{\Sigma} \rightarrow \bar{\Sigma}$ est l'application de Frobenius, alors pour chaque entier $j \geq 1$, l'application Fr^j est univoque et de degré q^j . Soit F^j le graphe de Fr^j sur $\bar{\Sigma} \times \bar{\Sigma}$. Alors, pour tout point P sur Σ , nous avons :

$$m(F^j) := \text{Card}(F^j \cap (\{P\} \times \bar{\Sigma})) = 1, \quad (27)$$

et

$$d(F^j) := \text{Card}(F^j \cap (\bar{\Sigma} \times \{P\})) = q^j. \quad (28)$$

De plus, le graphe F^j intersecte la diagonale Δ de $\bar{\Sigma} \times \bar{\Sigma}$ en $N_j = \text{Card}(\Sigma(\mathbb{F}_{q^j}))$ points.

Il existe une forme d'intersection $(D_1, D_2) \rightarrow D_1 \cdot D_2$ définie sur les diviseurs de la surface $\bar{\Sigma} \times \bar{\Sigma}$, ou correspondances sur la courbe Σ , qui reste bien définie sur les classes de diviseurs, deux diviseurs

étant dans la même classe si leur différence est le diviseur d'une fonction sur $\bar{\Sigma} \times \bar{\Sigma}$. Les diviseurs forment un anneau dont la multiplication est induite par la composition des applications, et possède une transposition $D \rightarrow D^t$ donnée par la composition avec la permutation des deux facteurs de $\bar{\Sigma} \times \bar{\Sigma}$. Pour un diviseur D sur $\bar{\Sigma} \times \bar{\Sigma}$ et un point P sur Σ , nous généralisons (27) et (28) à des diviseurs arbitraires en posant $m(D) = D \cdot (\{P\} \times \bar{\Sigma})$ et $d(D) = D \cdot (\bar{\Sigma} \times \{P\})$.

Weil définit la trace sur les diviseurs, invariante sur une classe donnée, par :

$$\text{Trace}(D) = m(D) + d(D) - D \cdot \Delta,$$

où, comme ci-dessus, Δ est la diagonale de $\bar{\Sigma} \times \bar{\Sigma}$. L'hypothèse de Riemann est alors équivalente à l'énoncé de positivité :

$$\text{Trace}(D \circ D^t) > 0 \quad (29)$$

pour D non équivalent à un diviseur de la forme $\{P\} \times \bar{\Sigma}$ ou $\bar{\Sigma} \times \{P\}$, avec P un point de Σ . En effet, si $D = m\Delta + nF$ pour des entiers m et n , nous avons :

$$D \circ D^t = (m^2 + qn^2)\Delta + mn(F + F^t),$$

en utilisant $\Delta = \Delta^t$ et $F \circ F^t = q\Delta$. Comme le nombre d'auto-intersection de Δ est $2 - 2g$, la trace de Δ est égale à $2g$ et, comme nous l'avons vu, $\text{Trace}(F) = \text{Trace}(F^t) = 1 + q - N_1$.

L'énoncé de positivité dans (29) implique que la forme :

$$\text{Trace}(D \circ D^t)(m, n) = 2gm^2 + 2(1 + q - N_1)mn + 2gqn^2$$

est définie positive pour $g \neq 0$ (elle est identiquement nulle pour $g = 0$). Par conséquent, elle a un discriminant négatif, de sorte que :

$$(1 + q - N_1)^2 - (2g)(2gq) < 0$$

c'est-à-dire :

$$|N_1 - 1 - q| < 2gq^{1/2}.$$

Le même argument appliqué à $\mathbb{F}_{q^j}$ donne, pour tout $j \geq 1$:

$$|N_j - 1 - q^j| < 2gq^{j/2}.$$

En appliquant (25), nous déduisons que pour tout $j \geq 1$:

$$\left| \sum_{\rho \in Z} \rho^j \right| \leq 2gq^{j/2}. \quad (30)$$

D'après (17), nous avons :

$$\log P(u) = - \sum_{\rho \in Z} \sum_{j=1}^{\infty} j \rho^j u^j = - \sum_{j=1}^{\infty} j \left(\sum_{\rho \in Z} \rho^j \right) u^j. \quad (31)$$

En raison de (30), nous voyons que la série de (31) converge absolument pour $|u| < q^{-1/2}$, ce qui signifie que nous avons $|\rho| \leq q^{1/2}$ pour tout $\rho \in Z$. De plus, (16) montre que si $\rho \in Z$ alors $q\rho^{-1} \in Z$,

de sorte que nous en déduisons que $|\rho| = q^{1/2}$ pour tout $\rho \in Z$. Par conséquent, l'hypothèse de Riemann est démontrée.

Weil a montré que la positivité de (29) est une conséquence de la semi-définitive négativité de la forme d'intersection sur les diviseurs de degré zéro d'un plongement projectif de la surface $\bar{\Sigma} \times \bar{\Sigma}$, qui découle à son tour de l'inégalité de Castelnuovo-Severi. Pour des variétés de dimension supérieure plutôt que des courbes (où l'hypothèse de Riemann est remplacée par les conjectures de Weil), aucune démonstration dans cette direction n'a été trouvée : la démonstration de Deligne utilise de manière essentielle une déformation de la variété dans une famille.

2.4 Trouver une théorie sur les corps complexes.

Connes vise à construire une théorie sur $\mathbb{C}$ plutôt que sur $\mathbb{Q}_l$. Comme auparavant, soit K le corps de fonctions d'une courbe lisse Σ sur un corps fini $\mathbb{F}_q$, et K_{un} le corps engendré sur K par les racines de l'unité d'ordre premier à p . Soit K_{ab} l'extension abélienne maximale de K . Alors les éléments de $\text{Gal}(K_{ab}/K)$ induisant des puissances du Frobenius sur K_{un} forment un groupe appelé le groupe de Weil W_K . Le théorème principal de la théorie du corps de classes pour les corps de fonctions nous dit que W_K est isomorphe au groupe des classes d'idèles C_K de K . Par conséquent, dans ce cadre, on peut voir le groupe des classes d'idèles comme capturant l'action de Frobenius. Dans une formulation utilisant des algèbres d'opérateurs sur $\mathbb{C}$, les éléments de l'ensemble des zéros Z de la fonction zêta devraient idéalement apparaître comme des valeurs propres de $C = C_K$ agissant via une représentation :

$$W : C \rightarrow \mathcal{L}(H)$$

où $\mathcal{L}(H)$ est l'algèbre des opérateurs bornés dans un espace de Hilbert complexe H . De plus, guidé par la formule de Lefschetz (somme alternée), l'espace de Hilbert H devrait apparaître via son opposé H . Le problème dans le cas des corps de fonctions est de remplacer les groupes de cohomologie l -adique par un objet défini sur $\mathbb{C}$ qui existe également pour les corps de nombres.

Nous résumons ces objectifs dans le dictionnaire suivant :

Fonction Zêta	Géométrie Classique	Géométrie Non Comparative
Interprétation spectrale des zéros	Spectre de Fr^* sur $H^1(\Sigma, \mathbb{Q}_l)$	Spectre de C sur H
Équation fonctionnelle	Théorème de Riemann-Roch	Symétrie appropriée
Formule explicite	Formule de Lefschetz	Formule de traces géométrique
Hypothèse de Riemann	Positivité de Castelnuovo	Positivité de la fonctionnelle de Weil

3 La formule de traces locale et l'espace de Pólya-Hilbert

Nous nous tournons maintenant vers une étude plus directe de l'approche de Connes. Dans les chapitres précédents, nous avons motivé l'étude du système dynamique (X, C) de Connes, où $C = J/K^*$ est le groupe des classes d'idèles d'un corps global K et $X = A/K^*$ est l'espace des classes d'adèles. Une fois de plus, par simplicité, nous nous restreignons principalement au cas $K = \mathbb{Q}$ bien que la

discussion s'applique à des corps globaux arbitraires.

Les espaces classiques, leur topologie, leur structure différentiable et conforme, peuvent être compris à l'étude de leurs algèbres (commutatives !) associées. Un objectif principal de la géométrie non commutative est d'étendre ces structures à une classe plus large d'exemples en développant leurs analogues sur des algèbres non commutatives dont les espaces correspondants sont inexistantes ou difficiles à étudier. Connes propose que, bien que les corps globaux, leurs anneaux d'adèles et leurs groupes de classes d'idèles soient commutatifs, l'hypothèse de Riemann elle-même doit être vue comme faisant partie de la "théorie des nombres non commutative".

Nous avons vu au Chapitre 1 qu'une première étape naturelle dans ce programme est d'étudier, dans le cas où K est un corps local, l'action sur K du groupe K^* de ses éléments non nuls. Connes développe une formule de traces rigoureuse pour l'action (K^*, K) . Cette formule de traces, que nous discutons dans la section 3.1, s'avère fournir un soutien positif à son approche de l'hypothèse de Riemann pour les corps globaux.

En effet, Connes conjecture une formule de traces pour l'action (C, X) pour les corps globaux qui est une somme des contributions des formules de traces locales, et cette conjecture s'avère équivalente à l'hypothèse de Riemann. Dans la section 3.2, nous discutons de l'interprétation intéressante et rigoureuse par Connes des zéros non triviaux des fonctions L avec Grössencharacter pour un corps global (dont la fonction zêta de Riemann est un cas particulier) en termes de l'action du groupe des classes d'idèles sur un certain espace de Hilbert. Nous appelons celui-ci l'espace de Pólya-Hilbert d'après des suggestions antérieures de Pólya et Hilbert selon lesquelles il devrait y avoir une interprétation spectrale des zéros non triviaux de la fonction zêta de Riemann. Ceci n'est pas suffisant pour prouver la formule de traces globale conjecturée par Connes, mais cela fournit des preuves de la riche information sur l'hypothèse de Riemann contenue dans l'action (C, X) . Bien que nous ne donnions pas les démonstrations des résultats de la section 3.2, nous terminons dans la section 3.3 par une explication de la raison pour laquelle les zéros non triviaux des fonctions L apparaissent dans la formule spectrale de la section 3.2. Des démonstrations complètes sont données dans [9].

Nous concluons cette section en notant, comme l'a souligné pour nous Peter Sarnak, que Connes donne une interprétation spectrale uniquement des zéros sur la droite $s = 1/2$ (et par conséquent il n'a en fait une interprétation spectrale qu'en supposant l'hypothèse de Riemann). C'est parce qu'il utilise certains espaces de Sobolev qui ne détectent que les zéros sur cette droite.

3.1 La formule de traces locale.

Pour le moment, nous supposons que K est un corps local, et nous examinons l'action de K^* par multiplication sur K . Par simplicité, nous travaillons avec le cas $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{Q}_p$ pour p un nombre premier. Ce sont les corps locaux obtenus en complétant le corps aux éléments de $M_{\mathbb{Q}}$ comme au Chapitre 1.

Soit $H = L^2(K)$ où la norme L^2 est prise par rapport à la mesure de Haar additive dx sur K . Soit U la représentation régulière de K^* , les éléments non nuls de K , sur H . Par conséquent, pour

$\lambda \in K^*$ et $x \in K$, nous avons :

$$(U(\lambda)\xi)(x) = \xi(\lambda^{-1}x).$$

L'opérateur $U(\lambda)$ n'est pas de classe trace ; et, afin de lui associer un opérateur de classe trace, on le moyenne sur une fonction test $h \in \mathcal{S}(K^*)$ à support compact. Si $h(1) \neq 0$, il est nécessaire de modifier davantage l'opérateur, comme nous le verrons.

Définissons l'opérateur dans H donné par :

$$U(h) = \int_{K^*} h(\lambda) U(\lambda) d^* \lambda,$$

où $d^* \lambda$ désigne la mesure de Haar multiplicative sur K^* , normalisée en exigeant que :

$$\int_{|\lambda| \in [1, \Lambda]} d^* \lambda \sim \log \Lambda, \quad \Lambda \rightarrow \infty.$$

À l'opérateur $U(h)$ nous associons le noyau de Schwartz $k(x, y)$ sur K^2 pour lequel :

$$(U(h)\xi)(x) = \int_K k(x, y) \xi(y) dy.$$

Soit $\delta = \delta(x)$ la distribution delta de Dirac sur K . Nous avons :

$$k(x, y) = \int_{K^*} h(\lambda^{-1}) \delta(y - \lambda x) d^* \lambda.$$

La trace distributionnelle associée est donnée par :

$$\text{Tr}_D(U(h)) = \int_K k(x, x) dx = \int_{K^*} h(\lambda^{-1}) \left(\int_K \int_K \delta(x - y) \delta(y - \lambda x) dx dy \right) d^* \lambda.$$

Lorsque $\lambda \neq 1$, la distribution $\delta(x - y)$ a son support sur la droite $x = y$ sur K^2 tandis que $\delta(x - \lambda y)$ a son support sur la droite transverse $x = \lambda y$. Comme expliqué dans [9], l'intégrale :

$$\int_K \int_K \delta(x - y) \delta(x - \lambda y) dx dy = |1 - \lambda|^{-1}$$

est bien définie et vaut, comme prévu, la valeur affichée. Lorsque $h(1) = 0$, de sorte que le cas non transverse $\lambda = 1$ est éliminé, nous en déduisons que :

$$\text{Tr}_D(U(h)) = \int_{K^*} \frac{h(\lambda^{-1})}{|1 - \lambda|} d^* \lambda.$$

Dans [9], le cas $h(1) \neq 0$ est traité en introduisant une coupure. Pour $\Lambda > 0$, soit P_Λ la projection sur les fonctions $\xi = \xi(x) \in H$ dont le support vérifie $|x| \leq \Lambda$. Nous définissons la projection correspondante dans l'espace de Fourier par :

$$\hat{P}_\Lambda = F P_\Lambda F^{-1},$$

où :

$$(F\xi)(x) = \hat{\xi}(x) = \int_K \xi(y) \alpha(xy) dy,$$

pour α un caractère non trivial fixé du groupe additif K . La coupure à Λ est définie par l'opérateur de classe trace :

$$R_\Lambda = \hat{P}_\Lambda P_\Lambda.$$

Comme R_Λ est de classe trace, l'opérateur $R_\Lambda U(h)$ l'est également. En utilisant des formules standard du calcul symbolique, Connes dérive l'identité :

$$\begin{aligned} \text{Tr}(R_\Lambda U(h)) &= \int_{K^*} h(\lambda^{-1}) \int_K \int_{|x| \leq \Lambda; |\xi| \leq \Lambda} \delta(x + u - \lambda x) \alpha(u\xi) dx d\xi du d^* \lambda \\ &= \int_{K^*} h(\lambda^{-1}) \int_{|x| \leq \Lambda; |\xi| \leq \Lambda} \alpha((\lambda - 1)x\xi) dx d\xi d^* \lambda. \end{aligned}$$

Ayant fixé le caractère α , nous normalisons la mesure de Haar additive sur K pour qu'elle soit autoduale. Alors, il existe une constante $\rho > 0$ telle que :

$$\int_{1 \leq |\lambda| \leq \Lambda} \frac{d\lambda}{|\lambda|} \sim \rho \log \Lambda,$$

de sorte que :

$$d^* \lambda = \rho^{-1} \frac{d\lambda}{|\lambda|}.$$

Nous avons par conséquent :

$$\int_{K^*} h(\lambda^{-1}) \alpha((\lambda - 1)x\xi) d^* \lambda = \rho^{-1} \int_K \frac{h((u + 1)^{-1})}{|u + 1|} \alpha(ux\xi) du.$$

Nous en déduisons que :

$$\text{Tr}(R_\Lambda U(h)) = \rho^{-1} \int_{|x|, |\xi| \leq \Lambda} \hat{g}(x\xi) dx d\xi,$$

où $g \in C_c^\infty(K)$ est donné par :

$$g(u) = \frac{h((u + 1)^{-1})}{|u + 1|}.$$

Soit $v = x\xi$. Alors $dx d\xi = dv \frac{dx}{|x|}$ et, pour $|v| \leq \Lambda^2$ nous avons :

$$\rho^{-1} \int_{\frac{|v|}{\Lambda} \leq |x| \leq \Lambda} \frac{dx}{|x|} = \rho^{-1} \int_{1 \leq |y| \leq \Lambda^2} \frac{dy}{|y|} = 2 \log' \Lambda - \log |v|,$$

où nous définissons :

$$2 \log' \Lambda = \int_{|\lambda| \in [\Lambda^{-1}, \Lambda]} d^* \lambda.$$

Il s'ensuit que :

$$\text{Tr}(R_\Lambda U(h)) = \int_{|v| \leq \Lambda^2} \hat{g}(v) (2 \log' \Lambda - \log |v|) dv.$$

En utilisant le fait que $g \in C_c^\infty(K)$, nous en déduisons la formule asymptotique, lorsque $\Lambda \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(R_\Lambda U(h)) &= 2g(0) \log' \Lambda - \int_K \hat{g}(v) \log |v| dv + o(1) \\ &= 2h(1) \log' \Lambda - \int_K \frac{h((x + 1)^{-1})}{|x + 1|} \left(\int_K \log |v| \alpha(xv) dv \right) dx + o(1). \end{aligned}$$

Dans [9], il est montré que la distribution donnée par l'accouplement avec :

$$- \int_K \log |v| \alpha(xv) dv$$

diffère d'un multiple $c_v \delta(x)$ de la fonction delta en $x = 0$ de la distribution sur K définie par :

$$P(f) = \lim_{\epsilon \in \text{Mod}(K)} \left(\rho^{-1} \int_{|x| \geq \epsilon} f(x) \frac{dx}{|x|} + f(0) \log \epsilon \right).$$

Comme $\log |v|$ s'annule en $v = 1$, en remplaçant x par $x - 1$, la constante c_v est déterminée par la condition que :

$$L(f) = c_v f(0) + P(f)$$

est l'unique distribution sur K prolongeant $\rho^{-1} \frac{1}{|u-1|}$ pour $u \neq 1$, dont la transformée de Fourier s'annule en 1, c'est-à-dire $\hat{L}(1) = 0$. Si $k(u) = |u|^{-1} h(u^{-1})$, nous avons :

$$\begin{aligned} L(k) &= - \int_K \frac{h((x+1)^{-1})}{|x+1|} \left(\int_K \log |v| \alpha(xv) dv \right) dx \\ &= - \int_K \frac{h(u^{-1})}{|u|} \left(\int_K \log |v| \alpha((u-1)v) dv \right) du. \end{aligned}$$

Par conséquent, en dehors de $x = 0$, la distribution :

$$- \int_K \log |v| \alpha(xv) dv$$

coïncide avec $\rho^{-1} \frac{1}{|x|}$. Si $h(1) = 0$, nous trouvons, comme attendu de notre calcul ci-dessus de la trace distributionnelle dans ce cas, que :

$$\begin{aligned} \text{Tr}(R_\Lambda U(h)) &= \rho^{-1} \int_K \frac{h((x+1)^{-1})}{|x+1|} \frac{dx}{|x|} + o(1) \\ &= \int_{K^*} \frac{h(\lambda^{-1})}{|1-\lambda|} d^* \lambda + o(1), \quad (h(1) = 0); \end{aligned}$$

et en prenant la limite lorsque $\Lambda \rightarrow \infty$, nous avons :

$$\text{Tr}(U(h)) = \int_{K^*} \frac{h(\lambda^{-1})}{|1-\lambda|} d^* \lambda, \quad (h(1) = 0).$$

En revenant au cas général, $h(1) \neq 0$, nous voyons que :

$$\begin{aligned} \text{Tr}(R_\Lambda U(h)) &= h(1)(2 \log' \Lambda + c_v) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\rho^{-1} \int_{|u-1| \geq \epsilon} \frac{h(u^{-1})}{|u-1|} \frac{du}{|u|} + h(1) \log \epsilon \right) \\ &= h(1)(2 \log' \Lambda + c_v) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{|u-1| \geq \epsilon} \frac{h(u^{-1})}{|u-1|} d^* u + h(1) \log \epsilon \right). \end{aligned}$$

Dans [9], il est montré, par exemple, que pour $v = \infty$ nous avons $c_v = \log(2\pi) + \gamma$ où γ est la constante d'Euler. Nous avons par conséquent le résultat suivant.

Théorème 4. *Si $h \in \mathcal{S}_c(K^*)$ (h à support compact), alors $R_\Lambda U(h)$ est un opérateur de classe trace dans $L^2(K)$; et lorsque $\Lambda \rightarrow \infty$, nous avons la formule asymptotique :*

$$\mathrm{Tr}(R_\Lambda U(h)) = 2h(1) \log' \Lambda + \int' \frac{h(\lambda^{-1})}{|1 - \lambda|} d^* \lambda + o(1),$$

où $2 \log' \Lambda = \int_{\lambda \in K^*, |\lambda| \in [\Lambda^{-1}, \Lambda]} d^* \lambda$ et f' est l'accouplement de $h(u^{-1})/|u|$ avec l'unique distribution prolongeant $\rho^{-1} du / |1 - u|$ dont la transformée de Fourier s'annule en 1.

Pour $K = \mathbb{R}$, nous avons :

$$\mathrm{Tr}(R_\Lambda U(h)) = h(1)(2 \log \Lambda + \log(2\pi) + \gamma) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{|u-1| \geq \epsilon} \frac{h(u^{-1})}{|1 - u|} d^* u + h(1)(\log \epsilon) \right) + o(1). \quad (32)$$

3.2 Le cas global et l'espace de Pólya-Hilbert.

Connes conjecture qu'un analogue de la formule du Théorème 4 a lieu pour l'action de C sur X . Cependant, un obstacle majeur est de savoir s'il est logique de parler de fonctions mesurables sur X . Par analogie avec les fonctions sur une variété, on peut essayer de penser à A comme un revêtement universel de X . On voit alors les fonctions sur X comme des moyennes de fonctions sur A sur le "groupe de revêtement universel" $\mathbb{Q}^*$. (C'est l'application E ci-dessous). Connes montre néanmoins qu'un "espace de Pólya-Hilbert" lié à l'action (C, X) permet une interprétation spectrale des zéros non triviaux de la fonction zêta de Riemann.

Nous travaillons avec le cas $K = \mathbb{Q}$. Soit $\mathcal{S}(A)_0$ le sous-espace de $\mathcal{S}(A)$ donné par :

$$\mathcal{S}(A)_0 = \{f \in \mathcal{S}(A) \mid f(0) = 0, \int_A f dx = 0\}. \quad (33)$$

Soit E l'opérateur de "moyenne sur $\mathbb{Q}^*$ " qui à $f \in \mathcal{S}(A)_0$ associe l'élément de $\mathcal{S}(C)$ donné par :

$$E(f)(u) = |u|^{1/2} \sum_{q \in \mathbb{Q}^*} f(qu). \quad (34)$$

Pour $\delta \geq 0$, soit $L^2(X)_{0,\delta}$ le complété de $\mathcal{S}(A)_0$ par rapport à la norme donnée par :

$$\|f\|_\delta^2 = \int_C |E(f)(u)|^2 (1 + \log^2 |u|)^{\delta/2} d^* u, \quad (35)$$

où $\int_{|u| \in [1, \Lambda]} d^* u \simeq \log \Lambda$ lorsque $\Lambda \rightarrow \infty$.

Si $g(x) = f(qx)$ pour un $q \in \mathbb{Q}^*$ fixe, alors $\|g\|_\delta = \|f\|_\delta$; et l'on voit ainsi que cette norme respecte, en ce sens, le passage au quotient $A/\mathbb{Q}^*$. Nous définissons $L^2(X)_\delta$ par la suite exacte courte :

$$0 \rightarrow L^2(X)_{0,\delta} \rightarrow L^2(X)_\delta \rightarrow \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}(1) \rightarrow 0. \quad (36)$$

Lorsque $\delta = 0$, nous écrivons $L^2(X)_0$ et $L^2(X)$ pour les deux premiers termes. Ici, $\mathbb{C}$ est le C -module trivial et $\mathbb{C}(1)$ est le C -module pour lequel $u \in C$ agit par $\|u\|$, où $\|\cdot\|$ est la norme sur C . En effet,

d'après la définition de $\mathcal{S}(A)_0$ dans (33), nous voyons que son supplément de dimension deux dans $\mathcal{S}(A)$ est le C -module $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}(1)$.

La multiplication de C sur A induit une représentation de C sur $L^2(X)_\delta$ donnée par :

$$(U(\lambda)\xi)(x) = \xi(\lambda^{-1}x).$$

Nous introduisons un espace de Hilbert H_δ via une autre suite exacte courte :

$$0 \rightarrow L^2(X)_{0,\delta} \rightarrow L^2(C)_\delta \rightarrow H_\delta \rightarrow 0, \quad (37)$$

où l'inclusion de $L^2(X)_{0,\delta}$ dans $L^2(C)_\delta$ est effectuée par l'isométrie E . Ici, $L^2(C)_\delta$ est le complété par rapport à la mesure de Haar pondérée comme en (35), où nous écrivons $L^2(C)$ lorsque $\delta = 0$. L'interprétation spectrale sur H_δ des zéros critiques des fonctions L dans [8] repose sur le choix de $\delta > 0$. En effet, cela est nécessaire pour contrôler la croissance des fonctions sur le quotient non compact X ; en fin de compte, ce paramètre est éliminé de la formule de traces conjecturale en utilisant des coupures. Il est important ici d'utiliser la mesure $\|u\|d^*u$ (implicite en (35)) au lieu de la mesure de Haar additive dx , cette différence étant bien réelle pour les corps globaux, où l'on a $dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon|x|^{1+\epsilon}d^*x$.

La représentation régulière V de C sur $L^2_\delta(C)$ descend à H_δ (elle commute avec E à une phase près comme le montre un calcul simple, et nous la denotons par W). Connes décrit (H_δ, W) comme l'espace de Pólya-Hilbert avec action de groupe pour son approche de l'hypothèse de Riemann. Il démontre dans [8] et [9] le résultat remarquable donné dans le Théorème 5 reliant la trace de cette action aux zéros sur la droite critique des fonctions L avec Grössencharacter discutées au Chapitre 1.

La norme sur le groupe abélien localement compact C a pour noyau $C^1 = \{u \in C \mid \|u\| = 1\}$; et, comme $K = \mathbb{Q}$, son image est $\mathbb{R}_{>0}^*$. Maintenant, le groupe compact C^1 agit sur H_δ qui se décompose par rapport à cette action en une somme directe canonique de sous-espaces orthogonaux deux à deux H_{δ,χ^1} où χ^1 parcourt le groupe abélien discret $\widehat{C^1}$ des caractères de C^1 . On peut restreindre l'action (H_δ, W) à une action (H_{δ,χ^1}, W) pour tout $\chi^1 \in \widehat{C^1}$, et nous avons :

$$H_{\delta,\chi^1} = \{\xi \in H_\delta \mid W(u)\xi = \chi^1(u)\xi \text{ pour tout } u \in C^1\}.$$

Choisissons une décomposition (non canonique) $C = C^1 \times N$ avec $N \simeq \mathbb{R}_{>0}^*$. Pour $\chi^1 \in \widehat{C^1}$, il existe une unique extension en un quasi-caractère χ de C , s'annulant sur N . Le choix de χ n'a pas d'importance dans ce qui suit, puisque si $\chi'(u) = \chi(u)\|u\|^{i\tau}$, $u \in C$, nous avons $L(\chi', s) = L(\chi, s + i\tau)$.

Théorème 5. *Pour toute fonction de Schwartz $h \in \mathcal{S}(C)$, l'opérateur :*

$$W(h) = \int_C W(u)h(u)d^*u$$

dans H_δ est de classe trace, et sa trace est donnée par :

$$\text{Trace}(W(h)) = \sum_{L\left(\chi, \frac{1}{2} + i\sigma\right)=0} \widehat{h}(\chi, i\sigma),$$

où la somme porte sur les caractères de C^1 avec χ étant l'unique extension en un quasi-caractère sur C s'annulant sur N . La multiplicité du zéro est comptée comme le plus grand entier $n < \frac{1}{2}(1 + \delta)$ avec n au plus égal à la multiplicité de $\frac{1}{2} + i\sigma$ en tant que zéro de $L(\chi, s)$. De plus, nous définissons :

$$\widehat{h}(\chi, s) := \int_C h(u) \chi(u) \|u\|^s d^*u.$$

Maintenant, l'action de C est libre sur $L^2(C)_\delta$, de sorte que la suite exacte courte (38) nous dit que la trace de l'action de C sur H_δ devrait être, à une correction près due à une régularisation, l'opposé de la trace de l'action de C sur $L^2(X)_{0,\delta}$. D'après (36), nous voyons que la trace régularisée de l'action de C sur $L^2(X)_\delta$ devrait impliquer la somme de la trace correspondante sur $L^2(X)_{0,\delta}$ et de la trace sur $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}(1)$. Par conséquent, la trace régularisée de l'action de C sur $L^2(X)_\delta$ devrait impliquer la trace de l'action sur $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}(1)$ moins la trace de cette action sur H_δ . Ce signe moins est crucial pour la comparaison avec la distribution de Weil.

Lorsque $\chi = 1$ dans le Théorème 5, la fonction L correspondante est la fonction zêta de Riemann $\zeta(s)$; et la démonstration du théorème montre que :

$$\text{Trace}(W(h) |_{H_{\delta,1}}) = \sum_{\zeta\left(\frac{1}{2} + is\right)=0} \widehat{h}(is),$$

où $\widehat{h}(is) = \widehat{h}(1, is)$, avec la même convention pour la multiplicité. Il existe une conjecture selon laquelle les zéros de la fonction zêta de Riemann sont tous simples, auquel cas nous pourrions prendre $n = 1$ et tout $\delta > 1$.

3.3 Un calcul.

Le résultat suivant formulé par Weil dans [37], et apparaissant dans la thèse de Tate, montre comment l'opération E dans (34) fait intervenir les zéros des fonctions L dans la bande critique et fournit la clé de la démonstration du Théorème 5 et de l'apparition des zéros non triviaux des $L(\chi, s)$. Il indique que les zéros non triviaux des fonctions L devraient “engendrer” H_δ car ils sont “orthogonaux” à l'image de E .

Proposition 1. *Soit χ un caractère unitaire sur C . Pour tout $\rho \in \mathbb{C}$ avec $\Re(\rho) \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, nous avons :*

$$\int_C E(\xi)(u) \chi(u) \|u\|^\rho d^*u = 0 \quad \text{pour tout } \xi \in \mathcal{S}(A)_0,$$

précisément lorsque $L\left(\chi, \frac{1}{2} + \rho\right) = 0$.

Discutons de la fonction zêta classique, les autres cas étant similaires. Soit p un nombre premier fini, et soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{Q}_p)$. Soit :

$$\Delta_{p,s}(f) = \int_{\mathbb{Q}_p^*} f(x) |x|^s d^*x, \quad \Re(s) > 0,$$

et également :

$$\Delta'_{p,s}(f) = \int_{\mathbb{Q}_p^*} (f(x) - f(p^{-1}x)) |x|^s d^*x,$$

où :

$$\langle 1_{\mathbb{Z}_p}, \Delta'_{p,s} \rangle = \int_{\mathbb{Z}_p^*} d^*x.$$

Nous avons :

$$\Delta'_{p,s} = (1 - p^{-s}) \Delta_{p,s}. \quad (38)$$

Pour $p = \infty$, définissons :

$$\Delta_{\infty,s}(f) = \Delta'_{\infty,s}(f) = \int_{\mathbb{R}^*} f(x) |x|^s ds.$$

On peut définir ces fonctions globalement en multipliant sur toutes les places. Pour $\sigma = \Re(s) > 1$ et $f \in \mathcal{S}(A)$, l'intégrale suivante converge absolument :

$$\int_J f(u) \|u\|^s d^*u.$$

De plus, d'après (39), pour $\sigma = \Re(s) > 1$:

$$\int_J f(u) \|u\|^s d^*u = \Delta_s(f) = \zeta(s) \Delta'_s(f) \neq 0,$$

où :

$$\Delta_s = \Delta_{\infty,s} \times \prod_p \Delta_{p,s}$$

et :

$$\Delta'_s = \Delta'_{\infty,s} \times \prod_p \Delta'_{p,s}.$$

En fait, pour un domaine de convergence un peu plus large, nous avons ce qui suit.

Lemme 1. *Si $\sigma = \Re(s) > 0$, alors il existe une constante $c \neq 0$ telle que, pour tout $f \in \mathcal{S}(A)_0$:*

$$\int_J f(x) \|u\|^s d^*u = c \int_C E(f)(u) \|u\|^{s-1/2} d^*u = c \zeta(s) \Delta'_s(f).$$

4 La distribution de Weil et la formule de traces globale

Dans ce chapitre, nous discutons de la partie conjecturale de l'approche de Connes et en particulier d'un nouvel équivalent de l'hypothèse de Riemann (généralisée). Grossièrement parlant, l'hypothèse de Riemann (généralisée) pour un corps global K découlerait si l'on pouvait montrer qu'une formule de traces asymptotique globale pour l'action (C_K, X_K) , où $X_K = A_K/K^*$, est une somme de contributions locales de formules de traces telles que dans le Théorème 4 pour les actions (K_v^*, K_v) , où v parcourt un ensemble M_K de valuations inéquivalentes de K , et K_v est le complété du corps K par rapport à la métrique induite par la valuation v . Si l'on se restreint à un ensemble fini S de places, cela fonctionne ; mais le terme d'erreur dépend de S d'une manière qui n'a pas encore été maîtrisée.

4.1 Formule de traces globale.

Sauf indication contraire, nous posons $K = \mathbb{Q}$ à partir de maintenant, et omettons les indices K , bien que notre discussion s'applique à des corps globaux arbitraires. Au Chapitre 3, nous avons introduit pour $\delta \geq 0$ les espaces de Hilbert $L^2(X)_{0,\delta}$, $L^2(X)_\delta$ et $L^2(C)_\delta$, et une inclusion de $L^2(X)_{0,\delta}$ dans $L^2(C)_\delta$ effectuée par l'isométrie :

$$(Ef)(u) = \|u\|^{1/2} \sum_{q \in \mathbb{Q}^*} f(qu), \quad u \in C.$$

Nous avons également vu que pour $\sigma = \Re(s) > 0$, il existe une constante $c \neq 0$ telle que, pour tout $f \in \mathcal{S}(A)_0$:

$$\int_C (Ef)(u) \chi(u) \|u\|^{s-1/2} d^*u = cL(\chi, s) \Delta'_s(f).$$

Comme $\Delta'_s \neq 0$, si pour $\Re(s) \in]0, 1[$ le membre de gauche de cette formule s'annule pour tout $f \in \mathcal{S}(A)_0$, alors $\zeta(s) = 0$. Nous voyons donc un lien entre l'orthogonalité à l'image de E et les zéros non triviaux de $\zeta(s)$. Comme au Chapitre 1, soit χ un quasi-caractère unitaire sur C et $L(\chi, s)$ la fonction L associée. En adaptant l'argument du Chapitre 3 pour le cas $\chi = 1$ à un χ arbitraire, nous avons :

$$\int_C (Ef)(u) \chi(u) \|u\|^{s-1/2} d^*u = cL(\chi, s) \Delta'_s(f).$$

Pour étudier certains aspects spectrales des fonctions L générales de $\mathbb{Q}$, dont la fonction zêta de Riemann est un cas particulier, Connes travaille principalement dans l'espace de Hilbert $L^2(C)$ (de sorte que $\delta = 0$). Comme dans le cas local, il faut à nouveau régulariser en utilisant une coupure à $\Lambda > 0$. Soit S_Λ la projection orthogonale sur :

$$S = \{\xi \in L^2(C) \mid \xi(u) = 0, \|u\| \notin [\Lambda^{-1}, \Lambda]\}.$$

Soit :

$$V : C \rightarrow \mathcal{L}(L^2(C))$$

la représentation régulière :

$$(V(\lambda)\xi)(u) = \xi(\lambda^{-1}u), \quad \lambda, u \in C.$$

Soit la mesure $d^*\lambda$ sur C normalisée de sorte que :

$$\int_{|\lambda| \in [1, \Lambda]} d^*\lambda \sim \log \Lambda, \quad \Lambda \rightarrow \infty$$

et posons :

$$2 \log' \Lambda = \int_{\|\lambda\| \in [\Lambda^{-1}, \Lambda]} d^*u.$$

Pour $h \in \mathcal{S}_c(C)$ à support compact, soit :

$$V(h) = \int_C h(\lambda) V(\lambda) d^*\lambda.$$

Alors l'opérateur $S_\Lambda V(h)$ est de classe trace et :

$$\text{Trace}(S_\Lambda V(h)) = 2h(1) \log' \Lambda,$$

car l'action de C sur C n'a pas de points fixes. La coupure dans $L_0^2(X)$ est beaucoup moins directe.

Dans le cas des corps de fonctions, Connes propose de travailler avec une famille de sous-espaces fermés $B_{\Lambda,0}$ de $L_0^2(X)$ telle que $E(B_{\Lambda,0}) \subset S_\Lambda$. Ces sous-espaces sont donnés par :

$$B_{\Lambda,0} = \{f \in \mathcal{S}(A)_0 \mid f(x) = 0, \hat{f}(x) = 0 \text{ pour tout } \|x\| > \Lambda\},$$

où $\|\cdot\|$ est l'extension évidente à A de la norme sur J , et cet ensemble n'est pas vide. Par conséquent, si $Q_{\Lambda,0}$ est la projection orthogonale sur $B_{\Lambda,0}$ et :

$$Q'_{\Lambda,0} = EQ_{\Lambda,0}E^{-1},$$

alors nous avons l'inégalité de projections :

$$Q'_{\Lambda,0} \leq S_\Lambda.$$

Pour tout $\Lambda > 0$, la distribution suivante, Δ_Λ , est par conséquent positive :

$$\Delta_\Lambda = \text{Trace}((S_\Lambda - Q'_{\Lambda,0})V(h)), \quad h \in \mathcal{S}(C).$$

La positivité de Δ_Λ signifie que pour $h \in \mathcal{S}(C)$:

$$\Delta_\Lambda(h * h^*) \geq 0$$

où $h^*(u) = \overline{h(u^{-1})}$. Par conséquent, la distribution limite :

$$\Delta_\infty = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \Delta_\Lambda$$

est également positive.

Cependant, dans le cas des corps de nombres, l'ensemble analogue à $B_{\Lambda,0}$ est vide. Pour sauver cette situation, on est guidé par le fait physique qu'il existe des signaux à support fini dans la variable temporelle et également dans la variable fréquentielle duale, comme un signal musical. C'est parce que les positions relatives de P_Λ et $\hat{P}_\Lambda$ telles que définies dans le cas local peuvent être analysées. Pour ce faire, Connes fait appel aux travaux de Landau, Pollak et Slepian [28], [29], [27]. Nous citerons également souvent dans ce qui suit la discussion connexe et utile dans [22, § 3].

Considérons le cas $K = \mathbb{Q}$. Rappelons que $\mathbb{Q}$ possède une place infinie donnée par la valeur absolue euclidienne usuelle et que le complété correspondant est le corps des nombres réels. Comme au Chapitre 3, à la place infinie, nous définissons P_Λ comme la projection orthogonale sur le sous-espace :

$$P_\Lambda = \{\xi \in L^2(\mathbb{R}) \mid \xi(x) = 0 \text{ pour tout } x, |x| > \Lambda\}$$

et $\hat{P}_\Lambda = FP_\Lambda F^{-1}$, où F est la transformée de Fourier associée au caractère $\chi(x) = \exp(-2\pi i x)$.

Pour $\xi \in P_\Lambda$, la fonction $F\xi(y)$ est une fonction analytique et n'est donc jamais à support dans $|y| \leq \Lambda$. Par conséquent, les espaces P_Λ et $\hat{P}_\Lambda$ ont une intersection nulle, ce qui explique notre affirmation ci-dessus selon laquelle, pour $K = \mathbb{Q}$, l'espace analogue à $B_{\Lambda,0}$ serait trivial.

Les projections P_Λ et $\hat{P}_\Lambda$ commutent avec l'opérateur différentiel du second ordre sur $\mathbb{R}$ donné par :

$$H_\Lambda \psi(x) = -\partial((\Lambda^2 - x^2)\partial)\psi(x) + (2\pi\Lambda x)^2\psi(x)$$

où $\partial = \frac{d}{dx}$, comme on peut le vérifier par un calcul direct. L'opérateur H_Λ possède un spectre discret simple, que nous pouvons indexer par des entiers $n \geq 0$, sur des fonctions à support dans $[-\Lambda, \Lambda]$. Les fonctions propres correspondantes ψ_n sont appelées les fonctions d'onde sphéroïdales prolate, que l'on peut prendre à valeurs réelles.

Puisque $P_\Lambda \hat{P}_\Lambda P_\Lambda$ (c'est-à-dire l'opérateur $\hat{P}_\Lambda$ restreint à $[-\Lambda, \Lambda]$) commute avec H_Λ , les fonctions sphéroïdales prolate sont également des fonctions propres de $P_\Lambda \hat{P}_\Lambda P_\Lambda$. D'après [28], [29] et [27] (voir aussi [22]), on sait également que leurs valeurs propres sont proches de zéro pour $n \geq 4\Lambda^2 + O(\log \Lambda)$. De plus, les projections P_Λ et $\hat{P}_\Lambda$ dans $L^2(\mathbb{R})$ ont des angles relatifs proches de zéro en dehors de l'espace engendré par les fonctions propres ψ_n , $n \leq 4\Lambda^2$ (voir [9]). Ces résultats motivent Connes à substituer à l'espace nul $P_\Lambda \cap \hat{P}_\Lambda$ le sous-espace $B_{\infty, \Lambda}$ de P_Λ donné par l'enveloppe linéaire dans $L^2(\mathbb{R})$ des ψ_n pour $n \leq 4\Lambda^2$.

Nous pouvons écrire les adèles A sur $\mathbb{Q}$ comme le produit direct $A = \mathbb{R} \times A_f$ où A_f , les adèles finis, est le produit restreint sur les nombres premiers finis p de $\mathbb{Q}_p$ par rapport à $\mathbb{Z}_p$. Soit $\mathcal{R} = \prod_p \mathbb{Z}_p$ et soit $1_{\mathcal{R}}$ la fonction caractéristique de $\mathcal{R}$. Soit $W_f = \prod_p \mathbb{Z}_p^*$ les unités de $\mathcal{R}$ et $W = \{\pm 1\} \times W_f$. Considérons les éléments $f \in \mathcal{S}(A) = \mathcal{S}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{S}(A_f)$ satisfaisant :

$$f(wa) = f(a), \quad a \in A, w \in W.$$

Alors f peut s'écrire comme une combinaison linéaire finie :

$$f(a) = \sum_{j=1}^m f_j(q_j a_\infty) \otimes 1_{\mathcal{R}}(q_j a_f), \quad a = (a_\infty, a_f), a_\infty \in \mathbb{R}, a_f \in A_f$$

où les $f_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ sont pairs et $q_j \in \mathbb{Q}^*$, $q_j > 0$. Soit :

$$B_{\Lambda, 0}^1 = \{f \in \mathcal{S}(A)_0 \mid f = f_\infty \otimes 1_{\mathcal{R}}, f_\infty \in B_{\infty, \Lambda}, f_\infty \text{ pair}\}.$$

Comme à la section 3.2, soit C^1 le sous-groupe compact du groupe des classes d'idèles C de $\mathbb{Q}$ donné par le noyau de l'application norme sur C . Nous avons un isomorphisme (non canonique) entre C et $C^1 \times N$ où $N \simeq \mathbb{R}_{>0}^*$. Nous pouvons étendre tout caractère χ^1 de C^1 en un quasi-caractère χ de C , s'annulant sur N . Comme dans [9], §8, Lemme 1, nous pouvons, d'une manière similaire au cas $\chi = 1$ ci-dessus, définir des sous-espaces $B_{\Lambda, 0}^\chi$, où χ est l'extension d'un caractère χ^1 de C^1 , en écrivant $A = \mathbb{R} \times \prod_{p \in S} \mathbb{Q}_p \times A_{f, S}$, où S est l'ensemble fini des nombres premiers ramifiés pour χ (voir la section 1.3) et $A_{f, S}$ sont les adèles finis avec le produit restreint sur les nombres premiers finis n'appartenant pas à S . Soit $B_{\Lambda, 0} = \bigoplus_{\chi^1 \in \widehat{C^1}} B_{\Lambda, 0}^\chi$, et $Q_{\Lambda, 0}$ la projection orthogonale correspondante, avec $Q'_{\Lambda, 0} = EQ_{\Lambda, 0}E^{-1}$.

À nouveau, pour tout $\Lambda > 0$, nous introduisons la distribution positive :

$$\Delta_\Lambda = \text{Trace}((S_\Lambda - Q'_{\Lambda, 0})V(h)), \quad h \in \mathcal{S}(C).$$

Connes observe que les considérations ci-dessus montrent que la distribution limite :

$$\Delta_\infty = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \Delta_\Lambda$$

est positive, tout comme elle l'était dans le cas des corps de fonctions.

Si nous laissons Q_Λ désigner la projection dans $L^2(X)$ sur $B_{\Lambda,0} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}(1)$, alors Connes conjecture l'analogie global suivant de la formule de traces géométrique locale. Nous l'énonçons uniquement pour le corps global $K = \mathbb{Q}$ mais l'énoncé pour un corps global arbitraire est analogue.

Conjecture 1. *Pour $h \in \mathcal{S}_c(C)$, nous avons lorsque $\Lambda \rightarrow \infty$:*

$$\text{Trace}(Q_\Lambda U(h)) = 2h(1) \log' \Lambda + \sum_{p \text{ premier}} \int'_{\mathbb{Q}_p^*} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|} d^*u + \int'_{\mathbb{R}^*} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|} d^*u + o(1), \quad (39)$$

où $2 \log' \Lambda = \int_{\|\lambda\| \in [\Lambda^{-1}, \Lambda]} d^*u \sim 2 \log \Lambda$.

Cela signifie qu'on conjecture que la formule de traces globale dans $L^2(X)$ se comporte comme une somme de formules locales. Observons que :

$$\text{Trace}(Q_\Lambda U(h)) = \int_C h(u)(1 + \|u\|) d^*u + \text{Trace}(Q_{\Lambda,0} U(h)). \quad (40)$$

En utilisant (41), et en notant le déphasage de $1/2$ dans E , nous avons comme conséquence de la Conjecture 1 que, lorsque $\Lambda \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \Delta_\Lambda(h) &= \int_C h(u)(\|u\|^{1/2} + \|u\|^{-1/2}) d^*u \\ &- \sum_{p \text{ premier}} \int'_{\mathbb{R}_p^*} \frac{h(u)}{|1-u|} \|u\|^{1/2} d^*u - \int'_{\mathbb{R}^*} \frac{h(u)}{|1-u|} \|u\|^{1/2} d^*u + o(1). \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \Delta_\infty(h) &= \int_C h(u)(\|u\|^{1/2} + \|u\|^{-1/2}) d^*u \\ &- \sum_{p \text{ premier}} \int'_{\mathbb{R}_p^*} \frac{h(u)}{|1-u|} \|u\|^{1/2} d^*u - \int'_{\mathbb{R}^*} \frac{h(u)}{|1-u|} \|u\|^{1/2} d^*u. \end{aligned}$$

Au Chapitre 1, nous avons donné une version de la formule explicite de Weil reliant les zéros de $\zeta(s)$ aux nombres premiers rationnels p en comparant la formule du produit d'Hadamard avec la formule du produit d'Euler. Une version adélique de cette formule explicite a été développée par Weil, qui invoque une relation entre les zéros de toutes les $L(\chi, s)$, où χ parcourt les Grössencharacters de $\mathbb{Q}$, et les nombres premiers rationnels p . Dans l'Appendice II de [9], Connes retravaille (pour un corps global arbitraire) cette version de la formule explicite de Weil et montre ainsi que le membre de droite de la formule ci-dessus donne :

$$\Delta_\infty(h) = \sum_{L\left(\chi, \frac{1}{2} + \rho\right)=0} \int_C h(u) \chi(u) \|u\|^\rho d^*u.$$

La Conjecture 1 montrerait que Δ_∞ est positive par construction. Pour prouver l'HGR, on appliquerait alors le résultat suivant de Weil.

Théorème 6. *L'hypothèse de Riemann généralisée (HGR) est équivalente à la positivité de Δ_∞ .*

Ceci est une version adélique de l'hypothèse de Riemann et du résultat de Weil sur l'équivalence avec la positivité de R discutée à la section 1.5. En remplaçant $h(u)$ par $f(u) = \|u\|^{-1/2}h(u^{-1})$, nous pouvons écrire la formule explicite de Weil sous la forme :

$$\int_{\mathbb{R}^*}' \frac{h(u^{-1})}{|1-u|} d^*u + \sum_p \text{premier} \int_{\mathbb{Q}_p^*}' \frac{h(u^{-1})}{|1-u|} d^*u = \int_C h(u) d^*u - \sum_{L(\chi, \rho)=0} \int_C h(u) \chi(u) \|u\|^\rho d^*u + \int_C h(u) \|u\| d^*u.$$

Par conséquent, Connes conjecture que :

$$\Delta_\infty(f) = \int_C h(u) d^*u - \sum_{v \in M_{\mathbb{Q}}} \int_{\mathbb{Q}_v^*}' \frac{h(u^{-1})}{|1-u|} d^*u + \int_C h(u) \|u\| d^*u,$$

et ceci impliquerait par la formule explicite que :

$$\Delta_\infty(f) = \sum_{L(\chi, \rho)=0} \int_C h(u) \chi(u) \|u\|^\rho d^*u,$$

laquelle serait positive.

Dans un certain sens, les formules, pour $\Lambda > 0$:

$$\Delta_\Lambda(h) = \text{Trace}((S_\Lambda - Q'_{\Lambda,0})V(h))$$

sont en train de “calculer la trace dans H ”. Connes est capable de démontrer la version suivante de la formule explicite ci-dessus qui montre que l'action de C sur H par W détecte les zéros des fonctions L comme un spectre d'absorption dans $L^2(X)$ avec les zéros non critiques comme résonances. Une démonstration complète dans le cas des corps de fonctions est donnée dans la Partie VIII, Lemme 3 de [9] et les modifications nécessaires pour le cas des corps de nombres sont indiquées dans la discussion subséquente de ce article sur l'analyse de la position relative des projections P_Λ et $\hat{P}_\Lambda$.

Théorème 7. *Soit $h \in \mathcal{S}_c(C)$, alors :*

$$\Delta_\infty(h) = \sum_{\chi, \rho} N\left(\chi, \frac{1}{2} + \rho\right) \int_{z \in i\mathbb{R}} \hat{h}(\chi, z) d\mu_\rho(z),$$

où la somme porte sur les paires (χ^1, ρ) de caractères χ^1 de C^1 , avec χ étant l'unique quasi-caractère sur C s'annulant sur N , et sur les zéros ρ de $L\left(\chi, \frac{1}{2} + \rho\right)$ avec $\Re(\rho) \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Le

nombre $N\left(\chi, \frac{1}{2} + \rho\right)$ est la multiplicité du zéro, la mesure $d\mu_\rho(z)$ est la mesure harmonique par rapport à $\Re \subset \mathbb{C}$ et :

$$\hat{h}(\chi, z) = \int_C h(u) \chi(u) \|u\|^z d^*u.$$

La mesure $d\mu_\rho(z)$ est une mesure de probabilité sur la droite $i\mathbb{R}$ qui coïncide avec la masse de Dirac en $\rho \in i\mathbb{R}$. En transformant la région à droite de $i\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ vers l'intérieur $|z| < 1$ du cercle unité, de sorte que ρ soit envoyé sur u avec $|u| = 1$, nous pouvons écrire cette mesure sous la forme $P_z(u)du$ où P_z est le noyau de Poisson :

$$P_z(u) = \frac{1 - |z|^2}{|u - z|^2}.$$

4.2 Analogie avec la formule de traces de Guillemin.

On peut résumer l'approche de Connes de l'hypothèse de Riemann comme un programme pour la dérivation d'une formule explicite conjecturée à la Weil. Alors que dans le cadre de Weil la formule explicite est connue et le problème ouvert est de prouver un résultat de positivité, dans le cadre de Connes la positivité fait partie de la construction de l'espace de Pólya-Hilbert (H, W) et le problème est de prouver la formule explicite correspondante. Dans son article original [8], Connes a trouvé une analogie frappante entre sa formule de traces globale conjecturée pour l'action U de C sur $L^2(X)$ et la formule de traces distributionnelle à la Guillemin pour les flux sur les variétés.

Soit M une variété C^∞ et v un champ de vecteurs lisses sur M avec des zéros isolés. Nous avons le flux associé $F_t = \exp(tv)$, $t \in \mathbb{R}$, avec son action sur les fonctions lisses :

$$(U(t)\xi)(x) = \xi(F_t(x)), \quad \xi \in C^\infty(M), x \in M, t \in \mathbb{R}.$$

Pour $h \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ avec $h(0) = 0$, soit :

$$U(h) = \int_{\mathbb{R}} h(t) U(t) dt.$$

Si $U(h)$ a pour noyau $k(x, y)$, c'est-à-dire :

$$U(h)\xi(x) = \int_{\mathbb{R}} k(x, y) \xi(y) dy,$$

alors la trace distributionnelle de $U(h)$ est définie comme :

$$\text{Trace}_D(U(h)) = \int_{\mathbb{R}} k(x, x) dx = \rho(h).$$

C'est-à-dire que ρ est vue comme une distribution. La formule de traces de Guillemin nous dit que :

$$\begin{aligned} \text{Trace}_D(U(h)) &= \sum_{\gamma} \int_{I_{\gamma}} \frac{h(u)}{|1 - (F_u)_*|} d^*u \\ &= \sum_{x, v_x=0} \int \frac{h(t)}{|1 - (F_t)_*|} dt + \sum_{\gamma \text{ Périodique}} \sum_{T=T_{\gamma}^m} T_{\gamma}^* \frac{1}{|1 - (F_T)_*|} h(T). \end{aligned}$$

Ici, $(F)_*$ est l'application de retour de Poincaré : c'est la restriction de $d(\exp(Tv))$, où T est une période, à la normale de l'orbite, et en un zéro du champ de vecteurs c'est l'application induite sur

l'espace tangent par le flux. Par conséquent, $(F_u)_*$ est la restriction de l'application tangente à F_u à l'espace transverse des orbites. Dans la formule (42), on considère les zéros comme des orbites périodiques, tandis que $I_\gamma \subset \mathbb{R}$ est le groupe d'isotropie de tout $x \in \gamma$ et d^*u est l'unique mesure de Haar du de masse totale 1. Remarquons la ressemblance avec la formule de traces globale de Connes lorsque $h(0) = 0$. Supposons que $1 - (F_u)_*$ soit inversible. Alors $|1 - (F_u)_*| = \det(1 - (F_u)_*)$. Avec l'hypothèse $h(1) = 0$, nous pouvons écrire la formule de traces globale pour $U : C \rightarrow \mathcal{L}^2(X)$, $h \in \mathcal{S}_c(C)$ comme :

$$\text{Trace}_D(U(h)) = \sum_{v \in M_{\mathbb{Q}}} \int_{\mathbb{Q}_v^*} \frac{h(u^{-1})}{|1 - u|_v} d^*u,$$

où pour l'évaluation de h , nous pouvons plonger $u \in \mathbb{Q}_v$ dans J de manière évidente avec des 1 partout sauf à la place v . Remarquons que l'action de J sur A possède des points fixes provenant des éléments de A ayant des composantes nulles. Dans [8], Connes démontre ce qui suit.

Lemme 2. *Pour $x \in X = A/\mathbb{Q}^*$, $x \neq 0$, le groupe d'isotropie I_x de x dans $C = J/\mathbb{Q}^*$ est cocompact si et seulement s'il existe exactement un $v \in M_{\mathbb{Q}}$ avec $\tilde{x}_v = 0$, où $\tilde{x} = (\tilde{x}_v)_{v \in M_{\mathbb{Q}}}$ est un relèvement de x à J .*

Démonstration. Pour $v_1 \neq v_2$ dans $M_{\mathbb{Q}}$, l'application $\|\cdot\| : \mathbb{Q}_{v_1}^* \times \mathbb{Q}_{v_2}^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ n'est pas propre.

Supposons que seuls les points fixes de l'action de C comme dans le Lemme contribuent à la formule de traces. Alors Connes a l'heuristique suivante. Pour $v \in M_{\mathbb{Q}}$, soit :

$$\widetilde{H}_v = \{\tilde{x} \in A \mid \tilde{x} = (\tilde{x}_v), \tilde{x}_v = 0, \tilde{x}_u \neq 0, u \neq v\},$$

et :

$$H_v = \{[\tilde{x}] \in X \mid \tilde{x} \in \widetilde{H}_v\}.$$

Soit N_x l'"espace normal" à $x \in H_v$, c'est-à-dire :

$$N_x \simeq X/H_v \simeq A/\widetilde{H}_v \simeq \mathbb{Q}_v,$$

de sorte que $\mathbb{Q}_v$ peut être vu comme l'"espace transverse" à H_v . Soit $j \in I_x$, le groupe d'isotropie de $x \in H_v$, et soit $\tilde{j}$ un relèvement de j à J . Alors $\tilde{j}$ agit linéairement sur A et fixe $\tilde{x}$. L'action induite sur l'espace transverse N_x , l'application de retour de Poincaré dans cette situation, est juste l'application de multiplication,

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_v^* \times \mathbb{Q}_v &\rightarrow \mathbb{Q}_v \\ (\lambda, a) &\mapsto \lambda a. \end{aligned}$$

Par *analogie* avec la formule de trace de Guillemin, la contribution correspondante à la formule de trace devrait être $\int_{\mathbb{Q}_v^*} \frac{h(\lambda^{-1})}{|1 - \lambda|_v} d^*\lambda$ pour $h \in \mathcal{S}(C)$ avec $h(1) = 0$. Cette contribution forme la formule de trace *locale*. Les cut-offs donnent la régularisation. Quand $v = p$ est un nombre premier, la période de l'orbite est le covolume du groupe d'isotropie $\mathbb{Q}_p^*$, et est égal à $\log p$ puisque l'image de la norme p -adique sur $\mathbb{Q}_p^*$ est $p^{\mathbb{Z}}$.

Connes propose que la formule explicite de Weil incorpore un analogue en théorie des nombres non-commutative pour (X, C) de la formule de trace de Guillemin pour les flots sur les variétés.

5. Aspects connexes de la géométrie non commutative

(Avec un appendice de Peter Sarnak)

Dans les chapitres précédents, nous avons cherché à présenter de manière directe et élémentaire l'essentiel de l'approche de Connes pour l'hypothèse de Riemann. Connes a présenté dans ses articles [8], [10], [9] des motivations plus sophistiquées qui intéressent un contexte plus large, car elles invitent à une nouvelle interaction entre les algèbres d'opérateurs et la théorie des nombres. Elles se rapportent toutes dans une certaine mesure aux travaux antérieurs de Bost-Connes [5], dont une vue d'ensemble fait l'objet du présent chapitre.

Nous avons ajouté, avec son autorisation, un appendice rédigé par Peter Sarnak, qui est la reproduction d'une lettre qu'il a écrite à Enrico Bombieri concernant l'apparition, dans le cadre de Connes, d'une symétrie symplectique - au sens des travaux de Katz-Sarnak [26] - pour des familles de fonctions L de Dirichlet munies de caractères quadratiques.

5.1. Algèbres de von Neumann et théorie de Galois

Une motivation supplémentaire pour l'approche de Connes, décrite en détail dans [10], découle de son observation selon laquelle certaines caractéristiques de la théorie de Galois liées au groupe des classes d'idèles ressemblent à celles de la classification des facteurs d'algèbres de von Neumann. Pour les corps locaux, le rôle du groupe des classes d'idèles est joué par le groupe des éléments non nuls du corps, qui, d'après la théorie locale du corps de classes, possède une interprétation galoisienne en tant que groupe de Weil.

Pour les corps globaux K de caractéristique $p > 0$, nous avons un isomorphisme entre le groupe des classes d'idèles et le groupe de Weil W_K du corps global K (voir la section 2.4). Les sous-corps K' de K_{un} tels que $[K' : K] < \infty$ sont classés par les sous-groupes $\{1\} \neq \Gamma \subset \text{Mod}(K) = q^{\mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}_+^*$. En définissant $\theta_\lambda(\mu) = \mu^\lambda$, pour $\lambda \in \Gamma$ et μ une racine l -ième de l'unité avec $(l, p) = 1$, on a :

$$K' = \{x \in K_{un} : \theta_\lambda(x) = x \text{ pour tout } \lambda \in \Gamma\}$$

Les groupes de Galois d'extensions infinies sont construits comme des limites projectives des groupes finis rattachés aux extensions finies. Lorsque K est un corps global de caractéristique 0, le résultat principal de la théorie du corps de classes énonce qu'il existe un isomorphisme entre $\text{Gal}(K_{ab}/K)$ (où K_{ab} est l'extension abélienne maximale de K) et le quotient C/D du groupe des classes d'idèles de K par la composante connexe D de l'identité dans C .

Lorsque $K = \mathbb{Q}$, cela se traduit par un isomorphisme entre C et $\mathbb{R}_+^* \times \prod_p \mathbb{Z}_p^*$, avec de plus $D = \mathbb{R}_+^*$, de sorte que $\text{Gal}(\mathbb{Q}_{ab}/\mathbb{Q})$ est isomorphe à $\prod_p \mathbb{Z}_p^*$. En effet, pour un corps global de caractéristique 0, la composante connexe D est toujours non triviale en raison des places archimédiennes.

Les algèbres d'opérateurs peuvent-elles nous permettre de faire de la théorie de Galois "avec la place infinie", comme le proposait Weil (voir la section 1.4) ? Les algèbres de von Neumann apparaissent comme les commutants de représentations unitaires dans un espace de Hilbert ; les algèbres

centrales simples sont appelées des facteurs, et celles approximativement de dimension finie sont la fermeture faible de l'union de séquences croissantes d'algèbres de dimension finie.

Comme en théorie de Galois, on a une correspondance entre les sous-groupes virtuels Γ de $\mathbb{R}_+^*$ (actions ergodiques de $\mathbb{R}_+^*$) et les facteurs M . Les facteurs non simples approximativement de dimension finie sont $M_\infty(\mathbb{C})$ (les opérateurs dans l'espace de Hilbert, qui sont de type I_∞) et $R_{0,1} = R \otimes M_\infty(\mathbb{C})$ (qui est de type II_∞ et possède une trace $\tau = \tau_0 \otimes \text{Tr}_{M_\infty(\mathbb{C})}$, où R est l'unique facteur approximativement fini muni d'une trace finie τ_0). Par la théorie des algèbres de von Neumann, il existe, à conjugaison près, un unique groupe à un paramètre $\theta_\lambda \in \text{Aut}(R_{0,1})$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, tel que $\tau(\theta_\lambda(a)) = \lambda\tau(a)$ pour $a \in \text{Dom}(\tau)$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

Si Γ est un sous-groupe virtuel de $\mathbb{R}_+^*$ et α l'action ergodique correspondante de $\mathbb{R}_+^*$ sur une algèbre abélienne A , alors :

$$R_\Gamma = \{x \in R_{0,1} \otimes A : (\theta_\lambda \otimes \alpha_\lambda)x = x \text{ pour tout } \lambda \in \mathbb{R}_+^*\}$$

est le facteur correspondant. Pour les bases de la théorie des algèbres de von Neumann, voir [7]. Une direction de recherche future, proposée par Connes, est de développer cette analogie avec la théorie de Galois.

Nous notons le corollaire suivant des travaux de Bost-Connes [5] (voir aussi la section 5.4) :

Théorème 8. *Soient A l'anneau des adèles de $\mathbb{Q}$ et $L^\infty(A)$ l'espace des fonctions essentiellement bornées sur A muni de la norme du supremum. Alors le produit croisé $L^\infty(A) \rtimes \mathbb{Q}^*$, correspondant à l'action de multiplication de $\mathbb{Q}^*$ sur A , est isomorphe à $R_{0,1}$. De plus, la restriction de l'action de C sur $A/\mathbb{Q}^*$ correspond à l'action θ_λ sur $R_{0,1}$.*

L'espace $X = A/\mathbb{Q}^*$ est l'espace des orbites associé à $L^\infty(A) \rtimes \mathbb{Q}^*$. Le principal résultat de [5] a été de construire un système dynamique, muni d'un groupe de symétrie naturel $W = \text{Gal}(\mathbb{Q}_{ab}/\mathbb{Q})$ et d'une fonction de partition égale à la fonction zêta de Riemann, présentant une transition de phase à son pôle $s = 1$.

Cette transition de phase correspondait au passage d'une famille d'états d'équilibre de facteurs de type I_∞ indexée par W (dans la région $s > 1$) à un état d'équilibre unique de facteur de type III_1 (dans la région $0 < s \leq 1$). Bost et Connes montrent que le facteur de type III_1 correspondant pour la bande critique $0 < s \leq 1$ possède un facteur de type II_∞ dans sa décomposition continue, donné par $L^\infty(A) \rtimes \mathbb{Q}^*$.

Cela motive l'étude de l'action (X, C) . La nature II_∞ de l'algèbre de von Neumann associée à X écarte l'idée d'étudier cet espace à l'aide de la théorie de la mesure classique. Des extensions de ces résultats à des corps globaux arbitraires sont dues à Harari-Leichtnam [24], Arledge-Laca-Raeburn [1] et à l'auteur [6].

Ce travail est également lié aux travaux antérieurs de Julia [25] et d'autres, qui visent à enrichir notre connaissance de la fonction zêta de Riemann en créant un dictionnaire entre ses propriétés et des phénomènes de mécanique statistique. Le point de départ de ces approches est l'observation

que, tout comme les fonctions zêta encodent des informations arithmétiques, les fonctions de partition des systèmes mécaniques statistiques quantiques encodent leurs propriétés thermodynamiques à grande échelle.

La première étape consiste donc à construire un système dynamique quantique dont la fonction de partition est la fonction zêta de Riemann. Pour que le système dynamique quantique reflète l'arithmétique des nombres premiers, il doit également capturer une forme d'interaction entre eux. Cette dernière caractéristique se traduit, dans le langage de la mécanique statistique, par le phénomène de brisure spontanée de symétrie à une température critique par rapport à un groupe de symétrie naturel.

Dans la région de haute température, il existe un état d'équilibre unique, car le système est en désordre et est symétrique par rapport à l'action du groupe de symétrie. Dans la région de basse température, une transition de phase se produit et la symétrie est brisée. Ce groupe de symétrie agit transitivement sur une famille d'états d'équilibre extrémaux possibles qui engendrent les états du système après la transition de phase : l'état d'équilibre n'est plus unique. Ce phénomène de transition de phase est connu sous le nom de brisure spontanée de symétrie à l'inverse de température critique β_0 . La fonction de partition doit posséder un pôle en β_0 . Pour une explication plus complète, voir [5]. Le problème résolu par Bost et Connes était le suivant :

Problème 1. *Construire un système dynamique (B, σ_t) dont la fonction de partition est la fonction zêta de Riemann $\zeta(\beta)$ (où $\beta > 0$ est l'inverse de la température), présentant une brisure spontanée de symétrie au pôle $\beta = 1$ de la fonction zêta par rapport à un groupe de symétrie naturel.*

Comme mentionné à la section 5.1, le groupe de symétrie est le groupe unitaire des idèles, donné par $W = \prod_p \mathbb{Z}_p^*$, où le produit porte sur les nombres premiers p et $\mathbb{Z}_p^* = \{u_p \in \mathbb{Q}_p : |u_p|_p = 1\}$. Nous utilisons, comme auparavant, la normalisation $|p|_p = p^{-1}$. C'est le même que le groupe de Galois $\text{Gal}(\mathbb{Q}^{ab}/\mathbb{Q})$.

Ici $\mathbb{Q}^{ab}$ est l'extension abélienne maximale du corps des nombres rationnels $\mathbb{Q}$, qui est à son tour isomorphe à son extension cyclotomique maximale, c'est-à-dire l'extension obtenue en adjoignant toutes les racines de l'unité. L'interaction détectée dans la transition de phase provient de l'interaction entre les nombres premiers découlant de la considération simultanée de tous les plongements des rationnels non nuls $\mathbb{Q}^*$ dans les complétés $\mathbb{Q}_p$ de $\mathbb{Q}$ par rapport à la valuation $|\cdot|_p$. La généralisation naturelle de ce problème au cas des corps de nombres a été résolue dans [6] et est la suivante :

Problème : étant donné un corps de nombres K , construire un système dynamique (B, σ_t) dont la fonction de partition est la fonction zêta de Dedekind $\zeta_K(\beta)$, où $\beta > 0$ est la température inverse, présentant une brisure spontanée de symétrie au pôle $\beta = 1$ de la fonction de Dedekind par rapport à un groupe de symétrie naturel.

Rappelons que la fonction zêta de Dedekind est donnée par

$$\zeta_K(s) = \sum_{\mathfrak{c} \subset \mathcal{O}_K} \frac{1}{N(\mathfrak{c})^s}, \quad \Re(s) > 1. \quad (44)$$

Ici, $\mathcal{O}_K$ est l'anneau des entiers de K , et la somme est sur les idéaux $\mathfrak{c}$ de K contenus dans $\mathcal{O}_K$.

Le groupe de symétrie est le groupe des unités des idéaux finis de K .

Pour une généralisation au cas des corps de fonctions, voir [24]. Nous nous restreignons dans ce qui suit au cas des nombres rationnels, c'est-à-dire à une discussion du problème 1.

5.3. Construction de la C^* -algèbre

Nous donnons une construction différente de la C^* -algèbre de [5] de celle trouvée dans leur article original. Elle est essentiellement équivalente à la construction de [1], sauf que nous travaillons avec les adèles et les idèles, et s'avère particulièrement utile pour la généralisation au cas des corps de nombres dans [6]. Soit A_f l'anneau des adèles finis de $\mathbb{Q}$, c'est-à-dire le produit restreint des $\mathbb{Q}_p$ par rapport aux $\mathbb{Z}_p$. Rappelons que ce produit restreint consiste en les vecteurs infinis $(a_p)_p$, indexés par les nombres premiers p , tels que $a_p \in \mathbb{Q}_p$ avec $a_p \in \mathbb{Z}_p$ pour presque tous les nombres premiers p . Les adèles (finis) forment un anneau pour l'addition et la multiplication composante par composante. Les idèles (finis) $\mathcal{I}$ sont les éléments inversibles des adèles. Ils forment un groupe pour la multiplication composante par composante. Soit $\mathbb{Z}_p^*$ les éléments $u_p \in \mathbb{Z}_p$ avec $|u_p|_p = 1$. Notons qu'un idèle $(u_p)_p$ a $u_p \in \mathbb{Q}_p^*$ avec $u_p \in \mathbb{Z}_p^*$ pour presque tous les nombres premiers p . Soit

$$R = \prod_p \mathbb{Z}_p, \quad I = \mathcal{I} \cap R, \quad W = \prod_p \mathbb{Z}_p^*.$$

De plus, soit $\mathcal{I}_{\mathbb{Z}}$ le semi-groupe des idéaux entiers de $\mathbb{Z}$. C'est le semi-groupe des $\mathbb{Z}$ -modules de la forme $m\mathbb{Z}$ où $m \in \mathbb{Z}$. Notons que I , comme ci-dessus, est aussi un semi-groupe. Nous avons une suite exacte courte naturelle,

$$1 \rightarrow W \rightarrow I \rightarrow \mathcal{I}_{\mathbb{Z}} \rightarrow 1. \quad (45)$$

L'application $I \rightarrow \mathcal{I}_{\mathbb{Z}}$ dans cette suite exacte courte est donnée comme suit. À $(u_p)_p \in I$, on associe l'idéal $\prod_p p^{\text{ord}_p(u_p)}$, où $\text{ord}_p(u_p)$ est déterminé par la formule $|u_p|_p = p^{-\text{ord}_p(u_p)}$. Il est clair que cette application est surjective de noyau W , c'est-à-dire que la suite ci-dessus est bien exacte courte. Par le théorème d'approximation forte, nous avons

$$\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \simeq A_f/R \simeq \bigoplus_p \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p; \quad (46)$$

et nous avons donc une action naturelle de I sur $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ par multiplication dans A_f/R et transport de structure. Nous utilisons ici que $I \cdot R \subset R$. Principalement, nous travaillerons dans A_f/R plutôt que dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Nous avons le lemme suivant (voir [6]).

Pour $a = (a_p)_p \in I$ et $y \in A_f/R$, l'équation

$$ax = y$$

a $n(a) := \prod_p p^{\text{ord}_p(a_p)}$ solutions dans $x \in A_f/R$. Notons ces solutions par

$$[x : ax = y].$$

Dans le lemme ci-dessus, il est important de garder à l'esprit que nous calculons modulo R . Maintenant, soit $\mathbb{C}[A_f/R] := \text{span}\{\delta_x : x \in A_f/R\}$ l'algèbre du groupe de A_f/R sur $\mathbb{C}$, de sorte que $\delta_x \delta_{x'} = \delta_{x+x'}$ pour $x, x' \in A_f/R$. Nous avons (voir pour comparaison [1]),

La formule

$$\alpha_a(\delta_y) = \frac{1}{n(a)} \sum_{[x:ax=y]} \delta_x,$$

pour $a \in I$, définit une action de I par endomorphismes de $C^*(A_f/R)$.

L'endomorphisme α_a pour $a \in I$ est un inverse unilatéral de l'application $\delta_x \mapsto \delta_{ax}$ pour $x \in A_f/R$, donc c'est comme une "division" de semi-groupe. La C^* -algèbre peut être considérée comme la fermeture en norme d'opérateur de $\mathbb{C}[A_f/R]$ dans sa représentation régulière gauche naturelle dans $\ell^2(A_f/R)$. Nous faisons maintenant appel à la notion de produit croisé de semi-groupes développée par Laca et Raeburn et utilisée dans [1], en l'appliquant à notre situation. Une représentation covariante de $(C^*(A_f/R), I, \alpha)$ est une paire (π, V) où

$$\pi : C^*(A_f/R) \rightarrow B(\mathcal{H})$$

est une représentation unifière et

$$V : I \rightarrow B(\mathcal{H})$$

est une représentation isométrique dans les opérateurs bornés d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. La paire (π, V) est requise pour satisfaire

$$\pi(\alpha_a(f)) = V_a \pi(f) V_a^*, \quad a \in I, \quad f \in C^*(A_f/R).$$

Notons que les V_a ne sont pas en général unitaires. Une telle représentation est donnée par (λ, L) sur $\ell^2(A_f/R)$ avec base orthonormale $\{e_x : x \in A_f/R\}$, où λ est la représentation régulière gauche de $C^*(A_f/R)$ sur $\ell^2(A_f/R)$ et

$$L_a e_y = \frac{1}{\sqrt{n(a)}} \sum_{[x:ax=y]} e_x.$$

La représentation covariante universelle, à travers laquelle toutes les autres représentations covariantes se factorisent, est appelée le produit croisé (de semi-groupes) $C^*(A_f/R) \rtimes_\alpha I$. Cette algèbre est la C^* -algèbre universelle engendrée par les symboles $\{e(x) : x \in A_f/R\}$ et $\{\mu_a : a \in I\}$ soumis aux relations

$$\mu_a^* \mu_a = 1, \quad \mu_a \mu_b = \mu_{ab}, \quad a, b \in I, \quad (47)$$

$$e(0) = 1, \quad e(x)^* = e(-x), \quad e(x)e(y) = e(x+y), \quad x, y \in A_f/R, \quad (48)$$

$$\frac{1}{n(a)} \sum_{[x:ax=y]} e(x) = \mu_a e(y) \mu_a^*, \quad a \in I, \quad y \in A_f/R. \quad (49)$$

Les relations dans (47) reflètent une structure multiplicative, celles dans (48) une structure additive, et celles dans (49) comment ces structures multiplicative et additive sont reliées via l'action du produit croisé. Julia [25] a observé qu'en utilisant uniquement la structure multiplicative des entiers, on ne peut espérer capturer une interaction entre les différents nombres premiers. Lorsque $u \in W$, alors μ_u est unitaire, de sorte que $\mu_u^* \mu_u = \mu_u \mu_u^* = 1$, et nous avons pour tout $x \in A_f/R$

$$\mu_u e(x) \mu_u^* = e(u^{-1}x), \quad \mu_u^* e(x) \mu_u = e(ux). \quad (50)$$

Par conséquent, nous avons une action naturelle de W comme automorphismes intérieurs de $C^*(A_f/R) \rtimes_\alpha I$ en utilisant (50).

Pour retrouver la C^* -algèbre de [5], nous devons scinder la suite exacte courte (45). Les idéaux dans $\mathcal{I}_{\mathbb{Z}}$ sont tous de la forme $m\mathbb{Z}$ pour un certain $m \in \mathbb{Z}$. Ce générateur m est déterminé au signe près. Considérons l'image de $|m|$ dans I sous le plongement diagonal $q \mapsto (q)_p$ de $\mathbb{Q}^*$ dans I , où la p -ième composante de $(q)_p$ est l'image de q dans $\mathbb{Q}_p^*$ sous le plongement naturel de $\mathbb{Q}^*$ dans $\mathbb{Q}_p^*$. L'application

$$+ : m\mathbb{Z} \mapsto (|m|)_p \quad (51)$$

définit une scission de (45). Soit I_+ l'image et définissons B comme le produit croisé de semi-groupes $C^*(A_f/R) \rtimes_{\alpha} I_+$ avec l'action restreinte α de I à I_+ . Par transport de structure utilisant (46), cette algèbre est facilement vue comme isomorphe à un produit croisé de semi-groupes de $C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ par $\mathbb{N}_+$, où $\mathbb{N}_+$ désigne les entiers naturels positifs. C'est l'algèbre construite dans [5] (voir aussi [1]). Désormais, nous utilisons les symboles $\{e(x) : x \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\}$ et $\{\mu_a : a \in \mathbb{N}_+\}$. Il est essentiel de scinder la suite exacte courte de cette manière afin d'obtenir le phénomène de brisure de symétrie. En particulier, ce remplacement de I par I_+ signifie maintenant que le groupe W agit par automorphismes extérieurs. Pour $x \in B$, on a que $\mu_a^* x \mu_a$ est encore dans B (en calculant dans la plus grande algèbre $C^*(A_f/R) \rtimes_{\alpha} I$), mais maintenant cela définit une action extérieure de W . Ceci coïncide avec la définition de W comme groupe de symétrie comme dans [5].

5.4. Le théorème de Bost-Connes

En utilisant la description abstraite de la C^* -algèbre B du §5.3, pour définir l'évolution temporelle σ de notre système dynamique (B, σ) , il suffit de la définir sur les symboles $\{e(x) : x \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\}$ et $\{\mu_a : a \in \mathbb{N}_+\}$. Pour $t \in \mathbb{R}$, soit σ_t l'automorphisme de B défini par

$$\sigma_t(\mu_m) = m^{it} \mu_m, \quad m \in \mathbb{N}_+, \quad \sigma_t(e(x)) = e(x), \quad x \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}. \quad (52)$$

Par (47) et (50), nous avons clairement que l'action de W commute avec ce groupe à 1 paramètre σ_t . Par conséquent, W permutera les états KMS β extrémaux de (B, σ_t) . Pour décrire les états KMS β pour $\beta > 1$, nous allons représenter (B, σ_t) sur un espace de Hilbert. À savoir, suivant [5], soit $\mathcal{H}$ l'espace de Hilbert $\ell^2(\mathbb{N}_+)$ avec la base orthonormale canonique $\{\epsilon_m, m \in \mathbb{N}_+\}$. Pour chaque $u \in W$, on a une représentation π_u de B dans $B(\mathcal{H})$ donnée par

$$\begin{aligned} \pi_u(\mu_m)\epsilon_n &= \epsilon_{mn}, & m, n \in \mathbb{N}_+, \\ \pi_u(e(x))\epsilon_n &= \exp(2i\pi n u \circ x)\epsilon_n, & n \in \mathbb{N}_+, \quad x \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (53)$$

Ici, $u \circ x$ pour $u \in W$ et $x \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est la multiplication induite par le transport de structure utilisant (46). On vérifie facilement que (53) donne bien une représentation de la C^* -algèbre B . Soit H l'opérateur non borné dans $\mathcal{H}$ dont l'action sur la base canonique est donnée par

$$H\epsilon_n = (\log n)\epsilon_n, \quad n \in \mathbb{N}_+. \quad (54)$$

Alors clairement, pour chaque $u \in W$, nous avons

$$\pi_u(\sigma_t(x)) = e^{itH} \pi_u(x) e^{-itH}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in B.$$

Notons que, pour $\beta > 1$,

$$\mathrm{Tr}(e^{-\beta H}) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle e^{-\beta H} \epsilon_n, \epsilon_n \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\beta} \langle \epsilon_n, \epsilon_n \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\beta},$$

de sorte que la fonction zêta de Riemann apparaît comme une fonction de partition de type état de Gibbs. Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de [5].

[Bost-Connes] Le système dynamique (B, σ_t) a pour groupe de symétrie W . L'action de $u \in W$ est donnée par $[u] \in \text{Aut}(B)$ où

$$[u] : e(y) \mapsto e(u \circ y), \quad y \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \quad [u] : \mu_a \mapsto \mu_a, \quad a \in \mathbb{N}.$$

Cette action commute avec σ :

$$[u] \circ \sigma_t = \sigma_t \circ [u], \quad u \in W, \quad t \in \mathbb{R}.$$

De plus,

1. pour $0 < \beta \leq 1$, il existe un unique état KMS_β . (C'est un état facteur de type III_1 avec facteur associé le facteur d'Araki-Woods R_∞ .)
2. pour $\beta > 1$ et $u \in W$, l'état

$$\phi_{\beta,u}(x) = \zeta(\beta)^{-1} \text{Tr}(\pi_u(x)e^{-\beta H}), \quad x \in B$$

est un état KMS_β pour (B, σ_t) . (C'est un état facteur de type I_∞ .) L'action de W sur B induit une action sur ces états KMS_β qui les permute transitivement, et l'application $u \mapsto \phi_{\beta,u}$ est un homomorphisme du groupe compact W sur l'espace $\mathcal{E}_\beta$ des points extrémaux du simplexe des états KMS_β pour (B, σ_t) .

3. la fonction ζ de Riemann est la fonction de partition de (B, σ_t) .

La partie (1) du théorème ci-dessus est difficile, et le lecteur est renvoyé à [5] pour tous les détails, ainsi que pour une preuve complète de (2). Que pour $\beta > 1$, les états KMS_β donnés dans la partie (2) satisfassent la Définition 5 du §5.2 est un exercice direct. Notons qu'ils ont la forme d'états d'équilibre de Gibbs.

Le théorème 9 résout le Problème 1 du §5.2. Plus d'informations sont contenues dans sa preuve cependant. Comme déjà mentionné, étant donné l'existence de l'isomorphisme d'Artin en théorie du corps de classes pour les rationnels, on peut retrouver l'action de Galois de W explicitement. Malgré les progrès dans [6], il reste un problème ouvert d'exhiber cette action de Galois en termes d'un analogue de (B, σ_t) de manière complètement satisfaisante pour des corps de nombres généraux. Une autre caractéristique apparaît dans l'analyse de la preuve de la partie (1) du Théorème 9. On peut traiter les places infinies de manière similaire à ce qui a déjà été décrit pour les places finies, donc en travaillant avec les adèles (complets) A et les idèles (complets) J . L'anneau des adèles A de $\mathbb{Q}$ consiste en les vecteurs infinis $(a_\infty, a_p)_p$ indexés par la place archimédienne et les nombres premiers p de $\mathbb{Q}$ avec $a_p \in \mathbb{Z}_p$ pour tous sauf un nombre fini de p . Le groupe J des idèles consiste en les vecteurs infinis $(u_\infty, u_p)_p$ avec $u_\infty \in \mathbb{R}$, $u_\infty \neq 0$ et $u_p \in \mathbb{Q}_p$, $u_p \neq 0$ et $|u_p|_p = 1$ pour tous sauf un nombre fini de nombres premiers p . Il y a une norme $|\cdot|$ définie sur J donnée par $|u| = |u_\infty|_\infty \prod_p |u_p|_p$. Nous avons des plongements diagonaux naturels de $\mathbb{Q}$ dans A et de $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ dans J induits par les plongements de $\mathbb{Q}$ dans ses complétés. Notons que par la formule du produit $\mathbb{Q}^* \subset \text{Ker} |\cdot|$. Nous définissons une relation d'équivalence sur A par $a \equiv b$ si et seulement s'il existe $q \in \mathbb{Q}^*$ tel que $a = qb$. Par rapport à cette équivalence, nous formons l'espace des classes $X = A/\mathbb{Q}^*$. Les idèles J agissent sur A par multiplication composante par composante, ce qui induit une action de $C = J/\mathbb{Q}^*$ sur X . Notons que cette action a des points fixes. Par exemple, chaque fois qu'un adèle

a a $a_p = 0$, c'est un point fixe du plongement de $\mathbb{Q}_p^*$ dans J (à $q_p \in \mathbb{Q}_p^*$, on assigne l'idèle avec 1 à chaque place sauf la p -ième). D'autre part, tout facteur de type III_1 a une décomposition continue, c'est-à-dire qu'il peut s'écrire comme un produit croisé de $\mathbb{R}$ avec un facteur de type II_∞ . Connes a observé que l'algèbre de von Neumann de Type III_1 dans la région $0 < \beta \leq 1$ du théorème 9 a dans sa décomposition continue le facteur de type II_∞ donné par le produit croisé de $L^\infty(A)$ par l'action de $\mathbb{Q}^*$ par multiplication. L'algèbre de von Neumann associée a comme espace d'orbite $X = A/\mathbb{Q}^*$. Comme on l'a vu, la paire (X, C) joue un rôle fondamental dans l'approche proposée par Connes pour démontrer l'hypothèse de Riemann dans [8] et peut être envisagée comme jouant le rôle des corps de nombres de la courbe et le Frobenius pour la démonstration de l'hypothèse de Riemann dans le cas des courbes sur les corps finis.

5.5. Appendice par Peter Sarnak

Dans cette annexe, nous reproduisons, avec sa permission, le texte d'une lettre écrite par Peter Sarnak en juin 2001 et adressée à Enrico Bombieri.

Voici l'accouplement symplectique que je vous ai mentionné à Zurich. Il n'y a rien de profond là-dedans ni dans l'analyse qui l'accompagne. Pourtant, son existence est cohérente avec divers thèmes. Pour replacer les choses dans leur contexte, rappelons que les résultats phénoménologiques et analytiques sur les zéros de grand ordre d'une fonction L donnée et les zéros de bas ordre pour des familles de fonctions L suggèrent qu'il existe une interprétation spectrale naturelle pour les zéros ainsi qu'un groupe de symétrie associé à une famille [KaSa] (N. Katz et P. Sarnak, Bulletin of the AMS, 36 (1999), 1–26). En particulier, pour les fonctions L de Dirichlet $L(s, \chi)$, $\chi^2 = 1$, la symétrie prédite dans [KaSa] est une symétrie symplectique, c'est-à-dire $\text{Sp}(\infty)$. Nous nous attendons donc à ce qu'il y ait une interprétation spectrale appropriée : la transformation linéaire dont le spectre correspond aux zéros de $L(s, \chi)$ devrait correspondre à une forme symplectique. Il convient de souligner que cela ne place pas pour autant les zéros sur la droite. Un tel accouplement symplectique est une symétrie centrale pour comprendre cette famille de fonctions L . D'un autre côté, l'existence d'un accouplement unitaire (ou hermitien) invariant pour l'opérateur, tel que suggéré par Hilbert et Pólya, placerait bien sûr les zéros sur la droite. Cependant, je pense que l'existence de ce dernier est peu probable. Dans les cadres analogues des corps de fonctions, il existe des interprétations spectrales des zéros et des accouplements bilinéaires invariants dus à Grothendieck. Les preuves connues de l'hypothèse de Riemann (c'est-à-dire les conjectures de Weil dans ce cadre) ne procèdent pas par des structures unitaires magiques, mais plutôt par des familles et leur monodromie, des représentations de hautes puissances tensorielles de ces dernières et de la positivité [De] (P. Deligne, Publ. IHES, 48 (1974), 273–308).

On peut rechercher un accouplement symplectique dans l'interprétation spectrale bien connue des zéros de $\zeta(2s)$ dans le problème aux valeurs propres pour $X = \text{SL}(2, \mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}$. En effet, les résonances (ou fréquences de diffusion) via la théorie des séries d'Eisenstein pour X se trouvent aux zéros de $\xi(2s)$, ξ étant la fonction zêta complétée de Riemann. Lax et Phillips ont construit un opérateur B (voir [LaPh] (P. Lax, R. Phillips, Bulletin of the AMS, 2 (1980), 261–295)) dont le spectre est constitué des formes cuspidales de Maass sur X ainsi que des zéros de $\xi(2s)$. Le problème pour trouver un accouplement symplectique pour la partie du spectre correspondant à $\xi(2s)$ est que je ne connais aucun moyen géométrique d'isoler cette partie du spectre de B . L'espace $L^2(X)$ tel quel est trop grand. Néanmoins, cette interprétation spectrale des zéros de $\xi(2s)$ est importante

puisqu'elle peut être utilisée pour donner des régions sans zéros raisonnables pour $\zeta(s)$; voir [GLSa] (S. Gelbart, E. Lapid, P. Sarnak, A new method for lower bounds for L -functions, C.R. Acad. Sci. Paris, 339 (2004), 91–94). De plus, cette preuve spectrale de la non-annulation de $\zeta(s)$ sur $\Re(s) = 1$ s'étend à des fonctions L beaucoup plus générales où la méthode de Hadamard et de la Vallée Poussin ne fonctionne pas (du moins avec nos connaissances actuelles) [Sh] (F. Shahidi, Perspect. Math., 10 (1990), 415–437, Academic Press).

En supposant l'hypothèse de Riemann pour $L(s, \chi)$, Connes [Co] (A. Connes, Selecta Math. (N.S.), 5 (1999), No. 1, 29–106) donne une interprétation spectrale des zéros. Je rappelle cette construction ci-dessous. Tout comme l'interprétation spectrale sous forme de résonances, l'espace de Connes est défini de manière très indirecte – comme l'annulateur d'un espace compliqué de fonctions (il est très proche de l'espace considéré par Beurling [Be] (A. Beurling, Proc. Nat. Acad. Sci., USA, 41 (1955), 312–314)). Nous pouvons rechercher des accouplements invariants pour son opérateur. Notons que pour un espace de dimension paire, une condition nécessaire pour qu'une transformation A , de déterminant égal à 1, préserve une forme symplectique standard ou un accouplement orthogonal est que ses valeurs propres (en tant qu'ensemble) soient invariantes sous $\lambda \rightarrow \lambda^{-1}$. En fait, si les valeurs propres sont également distinctes, c'est aussi une condition suffisante. D'un autre côté, si A n'est pas diagonalisable, il existe d'autres obstructions (en plus de l'"équation fonctionnelle" $\lambda \rightarrow \lambda^{-1}$) pour préserver de tels accouplements.

Le cadre dans [Co] est le suivant : Soit χ un caractère de Dirichlet non trivial de conducteur q et avec $\chi(-1) = 1$ (on peut facilement inclure tous les χ). Pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ paire et $x > 0$, posons

$$\Theta_f(x) := \left(\frac{x}{\sqrt{q}} \right)^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{nx}{q}\right) \chi(n). \quad (1)$$

D'après la sommation de Poisson et les sommes de Gauss, nous avons

$$\Theta_f\left(\frac{1}{x}\right) = \Theta_f(x). \quad (2)$$

Par conséquent, $\Theta_f(x)$ décroît rapidement lorsque $x \rightarrow 0$ ou $x \rightarrow \infty$. Considérons l'espace vectoriel W des distributions D sur $(0, \infty)$ (par rapport au groupe multiplicatif) avec des conditions de croissance appropriées en 0 et ∞ pour lesquelles

$$D(\Theta_f) = \int_0^{\infty} D(x) \Theta_f(x) \frac{dx}{x} = 0, \quad (3)$$

pour tout f comme ci-dessus.

Pour $y > 0$, soit U_y la translation sur l'espace des distributions, $U_y D(x) = D(yx)$. Clairement, U_y laisse le sous-espace W invariant et donne une représentation de $\mathbb{R}_{>0}^*$. D'après (2), si $D \in W$, alors $RD := D(1/x)$ l'est aussi. Ce R agit comme une involution sur W . Pour voir quels caractères (c'est-à-dire les valeurs propres de U_y) x^s , $s \in \mathbb{C}$, de $\mathbb{R}^*$ sont dans W , considérons

$$\int_0^{\infty} \Theta_f(x) x^s \frac{dx}{x} = q^{s/2} L(s + \tfrac{1}{2}, \chi) \int_0^{\infty} f(y) y^{s+1/2} \frac{dy}{y}. \quad (4)$$

Maintenant, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ est paire, donc

$$I = \int_0^{\infty} f(x) x^{s+} \frac{dx}{x} = \int_0^1 f(x) x^{s+1/2} \frac{dx}{x} + g(s),$$

où $g(s)$ est entière. De plus, pour $N \geq 0$,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \sum_{n=0}^N a_{2n} x^{2n} x^{s+\frac{1}{2}} \frac{dx}{x} + \text{une fonction holomorphe en } \Re(s) > -N + 1, \\ &= \sum_{n=0}^N \frac{a_{2n}}{2n - \frac{1}{2} + s} + \text{une fonction holomorphe en } \Re(s) > -N + 1. \end{aligned} \quad (5)$$

Ainsi, pour de tels f généraux, I a un pôle simple en $s = \frac{1}{2} - 2n$.

D'après (4) et (5), nous avons que $x^s(\Theta_f) = 0$ pour tout f ssi

$$s = i\gamma \quad \text{où } \rho = \frac{1}{2} + i\gamma \text{ est un zéro non trivial de } L(s, \chi). \quad (6)$$

Si la multiplicité du zéro de $L(s, \chi)$ en $\rho = \frac{1}{2} + i\gamma$ est $m_\gamma \geq 1$, alors en dérivant (4) $m_\gamma - 1$ fois, on montre que

$$x^{i\gamma}, (\log x)x^{i\gamma}, \dots, (\log x)^{m_\gamma-1}x^{i\gamma}$$

sont dans W .

L'involution R de W assure que $x^{i\gamma} \in W$ ssi $x^{-i\gamma} \in W$ (et de même avec les multiplicités). Le cas $\gamma = 0$ est particulièrement intéressant. D'après (2), pour j impair,

$$\int_0^\infty (\log x)^j \Theta_f(x) \frac{dx}{x} = - \int_0^\infty (\log x)^j \Theta_{\bar{f}}(x) \frac{dx}{x}. \quad (8)$$

Par conséquent, si $f = \hat{f}$ et j est impair,

$$\int_0^\infty (\log x)^j \Theta_f(x) \frac{dx}{x} = 0. \quad (9)$$

Si $f = -\hat{f}$, alors

$$\int_0^\infty f(x) x^{1/2} \frac{dx}{x} = 0. \quad (10)$$

Donc d'après (4), on voit que si $f = -\hat{f}$, alors

$$\int_0^\infty \Theta_f(x) (\log x)^j \frac{dx}{x} = 0, \quad \text{pour } j = 0, \dots, m_0. \quad (11)$$

En combinant (9) et (11), on voit que

$$W_0 = \text{span}\{1, \log x, (\log x)^2, \dots\} \cap W = \text{span}\{1, \log x, \dots, (\log x)^{m_0-1}\}$$

est de dimension paire.

Par conséquent, m_0 est pair (ceci découle bien sûr aussi de l'équation fonctionnelle pour $L(s, \chi)$).

Pour continuer, nous devons spécifier l'espace précis de distributions avec lequel nous travaillons. Pour permettre des zéros ρ de $L(s, \chi)$ avec $\Re(\rho) \neq \frac{1}{2}$, on doit autoriser des espaces de distributions qui ont une croissance exponentielle à l'infini. Cela peut être fait et on peut procéder comme nous le faisons ici ; cependant, pour éviter de telles définitions, nous supposons l'hypothèse de Riemann pour $L(s, \chi)$ (de toute façon, ce n'est pas le problème en ce qui concerne le couplage symplectique). De cette façon, nous pouvons travailler avec les distributions tempérées familières. Nous changeons de variable en posant $x = e^t$, de sorte que nos distributions $D(t)$ satisfont

$$\int_{-\infty}^{\infty} D(t) \Theta_f(e^t) dt = 0. \quad (13)$$

Le groupe U_y agit maintenant par translations $\tau \in \mathbb{R}$

$$U_\tau D(t) = D(t + \tau). \quad (14)$$

Si maintenant V est l'espace de ces distributions tempérées satisfaisant la condition d'annihilation (13) pour tout f (qui est un espace vectoriel topologique), alors pour $D \in V$, sa transformée de Fourier $\widehat{D}(\xi)$ est supportée dans $\{\gamma \mid L(\frac{1}{2} + i\gamma, \chi) = 0\}$. Puisque $\widehat{D}$ est aussi tempérée, il est facile de décrire $\widehat{D}$ et donc l'espace V . Il consiste en toutes les distributions tempérées D de la forme

$$D(t) = \sum_{\gamma} \sum_{j=0}^{m_{\gamma}-1} a_{j,\gamma}(D) t^j e^{i\gamma t}. \quad (15)$$

La représentation (15) est unique et la série converge comme une distribution tempérée, c'est-à-dire

$$\sum_{|\gamma| \leq T} \sum_{j=0}^{m_{\gamma}-1} |a_{j,\gamma}(D)| \ll T^A$$

pour un certain A dépendant de D .

L'action (14) sur V donne un groupe de transformations dont le spectre est constitué des nombres $e^{i\gamma\tau}$ avec multiplicité m_{γ} . Les sous-espaces V_{γ} de V donnés par

$$V_{\gamma} = \text{span}\{e^{i\gamma t}, te^{i\gamma t}, \dots, t^{m_{\gamma}-1}e^{i\gamma t}\} \quad (17)$$

sont invariants par U_τ , l'action prenant la forme

$$e^{i\gamma\tau} \begin{pmatrix} 1 & \tau & \tau^2 & \dots & \tau^{m_{\gamma}-1} \\ 0 & 1 & 2\tau & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \tau \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (18)$$

dans la base apparente. Ainsi, U_τ n'est pas diagonalisable si $m_\gamma > 1$ pour un certain γ . L'étendue des sous-espaces V_γ est dense dans V . Ainsi, l'action U_τ sur V donne une interprétation spectrale des zéros non triviaux de $L(s, \chi)$. Bien que l'on s'attende à ce que pour ces $L(s, \chi)$, tous leurs zéros soient simples, il existe des fonctions L plus générales (par exemple celles des courbes elliptiques de rang supérieur à 1) qui ont des zéros multiples. Ainsi, la possibilité de zéros multiples, en particulier en $s = \frac{1}{2}$, doit être envisagée et il est instructif de le faire. Dans tous les cas, puisque des zéros multiples signifient que cette action U_τ n'est pas diagonalisable, nous en déduisons qu'il ne peut y avoir d'unité directe qui l'accompagne.

Il y a cependant un couplage symplectique sur V préservé par U_τ . Il est emprunté à $\text{Sym}^\nu \rho$, où ρ est la représentation standard bidimensionnelle de SL_2 (via (18) ci-dessus) lorsque ν est impair. Nous couplons V_γ avec $V_{-\gamma}$ pour $\gamma > 0$ et séparons l'espace de dimension paire V_0 .

Pour $D, E \in V$, posons

$$[D, E] := \sum_{j=0}^{m_0-1} \frac{(-1)^j a_{j,0}(D) a_{m_0-1-j,0}(E)}{\binom{m_0-1}{j}} + \sum_{\gamma>0} \gamma e^{-\gamma^2} \sum_{j=0}^{m_\gamma-1} \frac{(-1)^j a_{j,\gamma}(D) a_{m_\gamma-1-j,-\gamma}(E)}{\binom{m_\gamma-1}{j}}. \quad (19)$$

Il n'y a rien de spécial dans le facteur $\gamma e^{-\gamma^2}$ - il est mis là pour la convergence.

Le couplage bilinéaire $[\ , \]$ sur $V \times V$ est symplectique et invariant par U_τ . C'est-à-dire,

1. $[D, E] = -[E, D]$
2. Il est non dégénéré : pour $D \neq 0$, il existe un E tel que $[D, E] \neq 0$.
3. $[U_\tau D, U_\tau E] = [D, E]$ pour $\tau \in \mathbb{R}$.

La vérification de ces points est directe. Notons que si $m_0 > 0$ et pair, on vérifie que les transformations (18) ne peuvent préserver un couplage symétrique. Ainsi, la caractéristique symplectique est intrinsèque à cette interprétation spectrale des zéros de $L(s, \chi)$.

Il serait intéressant de réaliser ce qui précède de manière adélique comme dans les articles de Connes et aussi pour d'autres fonctions L (disons GL_2), en particulier là où, par exemple, une invariance orthogonale plutôt que symplectique est attendue [KaSa]. Un autre point est qu'il serait agréable de définir le couplage $[\ , \]$ directement sans la transformée de Fourier (c'est-à-dire sans d'abord diagonaliser vers la forme de Jordan). Si nous supposons l'hypothèse de Riemann comme nous l'avons fait ainsi que la simplicité des zéros de $L(s, \chi)$, alors une telle définition est possible. Posons $H(t) = e^{-t^2/2}$; alors pour D et E dans V , nous avons que $H * D(t)$ et $\frac{d}{dt}(H * E)(t)$ sont des fonctions presque périodiques sur $\mathbb{R}$. À un facteur constant près, nous avons

$$[D, E] = M \left((H * D)(t) \frac{d}{dt}(H * E)(t) \right). \quad (20)$$

Ici, pour une fonction presque périodique $f(t)$ sur $\mathbb{R}$, $M(f)$ est sa valeur moyenne donnée par

$$M(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(x) dx.$$

5.5.1. Section ajoutée par Peter Sarnak en février 2002

L'idée de Hilbert-Pólya selon laquelle il existe un opérateur auto-adjoint défini naturellement dont les valeurs propres sont simplement liées aux zéros d'une fonction L semble farfelue. Cependant, Luo et Sarnak [LuSa] (W. Luo and P. Sarnak, Quantum Variance for Hecke eigenforms, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 37 (2004), 91-94) ont récemment construit un opérateur auto-adjoint non négatif A sur

$$L_0^2(X) = \{\psi \in L^2(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}) \mid \int_X \psi(z) dv(z) = 0\}$$

dont les valeurs propres sont essentiellement les valeurs critiques centrales $L\left(\frac{1}{2}, \phi\right)$ lorsque ϕ varie sur les formes de Maass (à Hecke propres) pour X . En particulier, cela donne une preuve spectrale que $L\left(\frac{1}{2}, \phi\right) \geq 0$. Le fait que $L\left(\frac{1}{2}, \phi\right)$ ne puisse pas être négative (qui est une conséquence immédiate de l'hypothèse de Riemann pour $L(s, \phi)$) est connu et a été prouvé par des méthodes de fonctions thêta (voir [KatSa], S. Katok and P. Sarnak, Israel Math. Jnl., 84 (1993) 193-227, et aussi [Wal], L. Waldspurger, J. Math. Pures et Appl., 60 (1981), 365-384). L'opérateur A provient de la polarisation de la forme quadratique $B(\psi)$ sur $L_0^2(X)$ qui apparaît comme le terme principal dans les sommes de Shnirelman pour les mesures $\phi_j^2(z)dv(z)$, où ϕ_j est une base orthonormale de formes de Maass pour $L^2(X)$. Notons λ_j la valeur propre (laplacienne) de ϕ_j . Il est connu, voir page 688 dans [Se] (A. Selberg, Collected Papers, Vol. I (1989), Springer-Verlag), que

$$\sum_{\lambda_j \leq \lambda} 1 \sim \frac{\lambda}{12}, \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

La forme quadratique $B(\psi)$ provient de ce qui suit : Pour $\psi \in L_0^2(X)$ fixé,

$$\sum_{\lambda_j \leq \lambda} |\langle \phi_j^2, \psi \rangle|^2 \sim B(\psi) \sqrt{\lambda}$$

lorsque $\lambda \rightarrow \infty$.

Références

- [1] J. Arledge, M. Laca, I. Raeburn, Semigroup crossed products and Hecke algebras arising from number fields, Doc. Mathematica 2 (1997) 115-138.
- [2] E. Bombieri, Counting points on curves over finite fields (d'après S.A. Stepanov), Sem. Bourbaki, No. 430. In : Springer Lecture Notes, 383, Springer, Berlin, 1974.
- [3] E. Bombieri, Problems of the Millenium : the Riemann Hypothesis, Clay Mathematics Institute website (<http://www.claymath.org/prizeproblems/>), (2000)
- [4] E. Bombieri, Remarks on Weil's quadratic functional in the theory of prime numbers, I, Rend. Mat. Acc. Lincei, s. 9, v 1 :1 (2000).
- [5] J.-B. Bost, A. Connes, Hecke Algebras, Type III factors and phase transitions with spontaneous symmetry breaking in number theory, Selecta Math. (New Series), 1, 411-457 (1995).
- [6] P. B. Cohen, A C^* -dynamical system with Dedekind zeta partition function and spontaneous symmetry breaking, J. Theorie des Nombres de Bordeaux, 11 (1999), 15-30.
- [7] A. Connes, Noncommutative Geometry, Academic Press, 1994. (Version française : Géométrie non commutative, InterEditions, Paris, 1990.)

- [8] A. Connes, Formule de trace en géométrie non commutative et hypothèse de Riemann, C.R. Acad. Sci. Paris, t.323, Série 1 (Analyse), 1231-1236 (1996).
- [9] A. Connes, Trace formula in Noncommutative Geometry and the zeros of the Riemann zeta function, *Selecta Mathematica*, New Series 5, n. 1 (1999), 29-106.
- [10] A. Connes, Noncommutative geometry and the Riemann zeta function, in *Mathematics : frontiers and perspectives*, eds, Vladimir Arnold...[et al], IMU, AMS 1999, 35-54.
- [11] P. Deligne, La Conjecture de Weil I, *Pub. Math. IHES*, 43 (1974), 273-308.
- [12] P. Deligne, La Conjecture de Weil II, *Pub. Math. IHES*, 52 (1980), 137-252.
- [13] C. Deninger, Local L -factors of motives and regularized determinants, *Invent. Math.*, 107 (1992), 135-150.
- [14] J. Dixmier, *Les C^* -algèbres et leurs représentations*, Gauthier-Villars, Paris, 1964.
- [15] H. M. Eewards, *Riemann's zeta function*, Dover Publications, Inc. Mineola, New York 2001 (originally published by Academic Press, Inc. 1974).
- [16] M. Eichler, *Introduction to the Theory of Algebraic Numbers and Functions*, translated by G. Striker, Academic Press, New-York, London, 1966.
- [17] L. Euler, *Introduction in Analysis Infinitorum*, Chapter 15 Bousquet and Socios., Lausanne 1748 ("Opera" (1), Vol. 8)
- [18] V. Guillemin, Lectures on spectral theory of elliptic operators, *Duke Math. J.*, 44 no. 3, 485-517 (1977).
- [19] J. Hadamard, Etude sur les Propriétés des Fonctions Entières et en Particulier d'une Fonction Considérée par Riemann, *J. Math. Pures et Appl.* [4] 9, (1893) 171-215.
- [20] J. Hadamard, Sur la distribution des zeros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques, *Bull. Soc. Math. France* 24 (1896), 199-220.
- [21] S. Haran, Riesz potentials and explicit sums in arithmetic, *Invent. Math.*, 101 (1990), 697-703.
- [22] S. Haran, On Riemann's zeta function, *Contemp. Math.*, 290 (2001).
- [23] S. Haran, *The mysteries of the real prime*, Oxford University Press, 2001. (Series : London Mathematical Society monographs ; new ser., no. 25.)
- [24] D. Harari, E. Leichtnam, Extension du phénomène de brisure spontanée de symétrie de Bost-Connes au cas des corps globaux quelconques, *Selecta Mathematica*, New Series 3 (1997), 205-243.
- [25] B. Julia, *Statistical Theory of Numbers*, in *Number Theory and Physics*, Springer Proceedings in Physics, Vol. 47, 1990.
- [26] N. Katz AND P. Sarnak, Zeros of Zeta Functions and Symmetry, *Bulletin of the AMS*, 36 (1999), 1-26.
- [27] D. Slepian, H. Pollak, Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty I, *Bell Syst. Tech. J.*, 40 (1961).
- [28] H.J. Landau, H. Pollak, Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty II, *Bell Syst. Tech. J.*, 40 (1961).
- [29] H.J. Landau, H. Pollak, Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty III, *Bell Syst. Tech. J.*, 41 (1962).
- [30] S. Patterson, *An Introduction to the Riemann zeta function*, Cambridge studies in advanced mathematics Vol 14, Cambridge Uni. Press, 1988.
- [31] B. Riemann, Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse, *Monat der Königl. Preuss. Akad. der Wissen. zu Berlin* aus der Jahre 1859 (1860), 671-680 ; also, *Gesammelte math. Werke und wissenschaft. Nachlass*, 2. Aufl. 1892, 145-155. English translation in H.M. EDWARDS, *Riemann's zeta function*, loc. cit..
- [32] H.P.F. Swinnerton-Dyer, Applications of algebraic geometry to number theory In : *Proc. Symp. Pure Math.* XXIV, AMS, Providence, RI, 1973.
- [33] E.C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta-function*, Second Edition revised by D.R. Heath-Brown, Oxford University Press, New York, 1988.
- [34] C.-J. de la Vallée-Poussin, Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et le nombre des nombres premiers inférieurs a une limite donnée, *Mém. Courronnes et Autres Mém. Publ. Acad. Roy. Sci. des Lettres Beaux-Arts Belg.* 59 (1890-1900).

- [35] A. Weil, Œuvres Scientifiques - Collected Papers, corrected 2nd printing, Springer-Verlag, New York - Berlin 1980, Vol. 1, 280-298.
- [36] A. Weil, Sur la théorie du corps de classes, J. Math. Soc. Japan 3 (1951).
- [37] A. Weil, Fonctions zeta et distributions, Séminaire Bourbaki 312 (1966).
- [38] A. Weil, Basic Number Theory, Springer-Verlag Berlin-Heidelberg, 1967.
- [39] A. Weil, Sur les courbes algébriques et variétés abéliennes, Hermann, Paris 1971 (published first in 1948).
- [40] D. Zagier, Eisenstein series and the Riemann zeta function, in Automorphic Forms, Representation Theory and Arithmetic, Tata, Bombay (1979), 275-301.