Deux sous-espaces

P. R. Halmos

Dans l'étude des paires de sous-espaces M et N d'un espace de Hilbert H, il y a quatre cas totalement inintéressants, ceux où M et N sont tous deux soit 0 soit H. Dans le cas le plus général, H est la somme directe de cinq sous-espaces :

$$M \cap N, \qquad M \cap N^\perp, \qquad M^\perp \cap N, \qquad M^\perp \cap N^\perp,$$

et du reste. Les parties de M et N dans les quatre premiers sont "totalement inintéressantes". Dans "le reste", le complément orthogonal de l'enveloppe des quatre premiers, M et N sont en *position générique* ("position p" dans [2]), au sens où toutes les quatre intersections spéciales listées ci-dessus sont égales à 0. Le but de cet article est d'utiliser des graphes de transformations linéaires pour représenter des paires de sous-espaces en position générique. Les résultats sont issus de l'étude des treillis de sous-espaces invariants des opérateurs et promettent d'y être utiles. Un sous-produit plus immédiat, décrit ci-dessous, est une preuve nouvelle raisonnablement transparente du théorème de Dixmier sur l'équivalence unitaire des paires de sous-espaces. Même en dehors de telles applications externes, cependant, les résultats répondent au moins à une question naturelle et peuvent être considérés comme présentant un intérêt géométrique en eux-mêmes. La spécialisation au cas de dimension finie ne rend ni les conclusions plus évidentes ni les preuves substantiellement plus simples.

Graphe-axe. Supposons que T soit une transformation linéaire fermée mais pas nécessairement bornée sur un sous-ensemble dense d'un espace de Hilbert K, de noyau nul et d'image dense. Écrivons $H = K \oplus K$, soit M "l'axe horizontal" constitué de tous les vecteurs de la forme $\langle f, 0\rangle$ dans H, et soit N le graphe de T, c'est-à-dire l'ensemble de tous les vecteurs de la forme $\langle f, Tf\rangle$ dans H. Affirmation : M et N sont en position générique. La première étape de la preuve est de montrer que $M \cap N = 0$. En effet, comment un $\langle f, 0\rangle$ peut-il être égal à un $\langle g, Tg\rangle$? Réponse : seulement si $Tg = 0$, d'où $g = 0$ (car $\ker T = 0$), et par conséquent $f = 0$. Pour prouver le reste de l'affirmation, il est nécessaire de connaître $M^\perp$ (trivial : tous les $\langle 0, f\rangle$) et $N^\perp$ (facile et calcul standard : tous les $\langle -T^*f, f\rangle$). À partir de là, il est facile de déduire que $M^\perp \cap N^\perp = 0$: puisque $\operatorname{ran} T$ est dense, il s'ensuit que $\ker T^* = 0$, et la preuve qui vient d'être donnée s'applique à nouveau. Les équations $M \cap N^\perp = 0$ et $M^\perp \cap N = 0$ sont triviales.

La construction du paragraphe précédent n'est pas nouvelle ; elle a été utilisée, par exemple, pour exhiber des paires de sous-espaces dont la somme vectorielle diffère de leur enveloppe fermée [4, p. 110], [5, p. 26]. Le premier résultat du présent article est que cette façon de construire des paires de sous-espaces en position générique est, à équivalence unitaire près, la seule façon. Dire qu'une paire $\langle M_1, N_1\rangle$ de sous-espaces est unitairement équivalente à une paire $\langle M_2, N_2\rangle$ signifie, bien sûr, qu'il existe un opérateur unitaire U tel que $UM_1 = M_2$ et $UN_1 = N_2$. Dans le cas où M_1 et N_1 sont dans un espace de Hilbert H_1 et M_2 et N_2 dans un autre espace de Hilbert H_2, alors l'exigence que U soit unitaire doit être interprétée comme signifiant que U est une isométrie de H_1 sur H_2.

Théorème 1. *Si M et N sont des sous-espaces en position générique dans un espace de Hilbert H, alors il existe un espace de Hilbert K, et il existe une transformation linéaire fermée T sur K de noyau nul et d'image dense, telle que la paire $\langle K \oplus 0, \operatorname{graph} T\rangle$ soit unitairement équivalente à la paire $\langle M, N\rangle$.*

Démonstration. Soit P la projection d'image M. Affirmation : la restriction $P|N$ de P à N envoie N bijectivement sur une variété linéaire dense dans M. Supposons, en effet, que $Pg = 0$ pour un certain g dans N. Il s'ensuit que $g \in M^\perp \cap N$, et donc (position générique) que $g = 0$: cela prouve que le noyau de $P|N$ est 0. Pour prouver que PN est dense dans M, supposons que $f \in M$ et $f \perp PN$. Cela signifie que si $g \in N$, alors $0 = (f, Pg) = (Pf, g) = (f, g)$, de sorte que $f \in M \cap N^\perp$. Il s'ensuit (position générique) que $f = 0$; la preuve de l'affirmation est complète.

L'existence d'une transformation avec les propriétés qui viennent d'être prouvées pour $P|N$ implique [5, p. 27] que M et N ont la même dimension. Puisque M et $M^\perp$ d'une part et N et $N^\perp$ d'autre part entrent dans les hypothèses avec une symétrie parfaite, il s'ensuit que tous ces quatre sous-espaces ont la même dimension. Puisque cela s'applique à M et $M^\perp$ en particulier, il existe une application isométrique I de M sur $M^\perp$.

Tout est maintenant prêt pour les définitions nécessaires. Écrivons

$$K = M,$$

définissons T sur le sous-ensemble dense PN de M par

$$TPg = I^{-1}(1 - P)g \qquad (g \in N),$$

et, si f et g sont tous deux dans $K(= M)$, écrivons

$$U\langle f, g\rangle = f + Ig.$$

La définition de T peut sembler artificielle au premier abord, mais elle ne l'est pas. Voici ce qu'elle dit. Pour représenter un vecteur g dans N sous la forme $\langle f, Tf\rangle$, rappelons que les composantes de g par rapport à la décomposition $H = M \oplus M^\perp$ sont Pg et $(1 - P)g$, et, par conséquent, posons $f = Pg$ et définissons T de sorte que $Tf = (1 - P)g$. Puisque T doit être une transformation sur $K(= M)$, cette dernière partie n'a pas tout à fait de sens ; ce dont Tf peut le plus s'approcher pour être $(1 - P)g$ est $I^{-1}(1 - P)g$, le vecteur dans M qui est identifié au vecteur $(1 - P)g$ dans M. La définition de T est sans ambiguïté, comme l'implique le caractère bijectif de $P|N$, prouvé ci-dessus.

Il reste à prouver que K, T et U ont les propriétés requises. Puisque I^{-1} est une isométrie, l'affirmation que $\ker T = 0$ revient à ceci : la restriction à N de la projection d'image $M^\perp$ a un noyau nul. Cette affirmation est l'une des huit (de M, ou $M^\perp$, vers N, ou $N^\perp$, ou inversement) ; elle ne diffère de ce qui a été montré dans le premier paragraphe de cette preuve que par la notation. La densité de $\operatorname{ran} T$ dans K se prouve de façon similaire.

Ensuite, pourquoi T est-elle fermée ? Il s'agit de prouver que si $f_n = Pg_n$ (avec $g_n \in N$), $f_n \to f$, et $I^{-1}(1 - P)g_n \to h$, alors $f = Pg$ pour un certain g dans N, et $h = I^{-1}(1 - P)g$. Appliquons I à $I^{-1}(1 - P)g_n \to h$ et déduisons $(1 - P)g_n \to Ih$. Combinons cela avec $Pg_n(= f_n) \to f$ pour obtenir

$$g_n = Pg_n + (1 - P)g_n \to f + Ih.$$

Au vu de cela, la chose évidemment indiquée à faire est d'écrire $g = f + Ih$. Puisque $g_n \in N$ et que N est fermé, il s'ensuit que $g \in N$. Puisque $I^{-1}(1 - P)g_n \in M$ et que M est fermé, il s'ensuit que $h \in M$; d'où $Ih \in M^\perp$ et $(1 - P)Ih = Ih$. Puisque, finalement, $f \in M$, il s'ensuit que

$$(1 - P)g = (1 - P)(f + Ih) = (1 - P)Ih = Ih,$$

et donc que $I^{-1}(1-P)g = h$. Conséquence : T est fermée.

Puisque I envoie M sur $M^\perp$, la transformation U envoie $K \oplus K$ sur H. Le caractère isométrique de U découle du calcul :

$$\|U\langle f, g\rangle\|^2 = \|f + Ig\|^2 = \|f\|^2 + \|Ig\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2 = \|\langle f, g\rangle\|^2.$$

Il est trivial que U envoie $K \oplus 0$ sur M ; comment U envoie-t-elle le graphe de T ? Le graphe de T est le même que l'ensemble de tous les $\langle Pg, I^{-1}(1-P)g\rangle$, avec g dans N ; l'image de $\langle Pg, I^{-1}(1-P)g\rangle$ sous U est $Pg + II^{-1}(1-P)g = g$, et par conséquent l'image du graphe est exactement N. La preuve du théorème est complète. □

Corollaire 2. *La transformation T peut être choisie auto-adjointe et positive, et, si elle est ainsi choisie, elle est alors unique, au sens où si la paire $\langle K \oplus 0, \operatorname{graph} T_1\rangle$ est unitairement équivalente à la paire $\langle K \oplus 0, \operatorname{graph} T_2\rangle$, alors T_1 est unitairement équivalente à T_2.*

Démonstration. Pour rendre T auto-adjointe, considérons sa décomposition polaire $T = WA$, où W est une isométrie partielle et A est auto-adjointe et positive [3, p. 1249]. Les conditions sur T (noyau nul, image dense) impliquent que le facteur isométrique partiel W est unitaire. Appliquons l'opérateur unitaire $1 \oplus W^*$ à l'axe et au graphe ; l'axe reste invariant, et le graphe devient le graphe de la transformation auto-adjointe positive A.

Pour prouver l'unicité, observons d'abord que si un opérateur unitaire sur $K \oplus K$ envoie l'axe $K \oplus 0$ sur lui-même, alors c'est une somme directe $U_1 \oplus U_2$ de deux opérateurs unitaires sur K. (Un sous-espace envoyé sur lui-même par un opérateur unitaire est invariant sous l'opérateur et sous son inverse, et par conséquent réduit l'opérateur.) L'hypothèse que $U_1 \oplus U_2$ envoie le graphe T_1 sur le graphe T_2 implique que si $f \in \operatorname{dom} T_1$, alors $U_1 f \in \operatorname{dom} T_2$ et $T_2 U_1 f = U_2 T_1 f$; en d'autres termes $T_2 U_1 = U_2 T_1$. Par adjonction $U_1^* T_2 = T_1 U_2^*$ (parce que T_1 et T_2 sont auto-adjointes) ; par multiplication $T_1^2 = U_1^* U_2^* U_2 T_1^2 = U_1^* T_2^2 U_1$, et donc $T_1 = U_1^* T_2 U_1$ (parce que T_1 et T_2 sont positives). □

Matrice de projection. C'est un exercice élémentaire de géométrie analytique que de calculer la matrice d'une projection de rang 1 agissant sur un espace de dimension 2. La projection dont l'image est une droite d'inclinaison θ s'avère être

$$\begin{pmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix}.$$

Le graphe d'une transformation linéaire sur un espace de Hilbert est très semblable à une droite dans un plan. Puisque les éléments du graphe de T sont des paires ordonnées $\langle f, Tf\rangle$, il s'ensuit, purement formellement, que le rapport de la seconde coordonnée à la première est toujours T ; la transformation T joue le rôle de la pente de la droite, c'est-à-dire de la tangente de l'inclinaison θ. Le résultat suivant est la version opératorielle de l'exercice élémentaire de géométrie analytique mentionné ci-dessus. Le caractère borné de sin et cos (par opposition au caractère non borné de tan) se reflète dans le fait que seules des transformations linéaires bornées ont besoin d'être mentionnées.

Théorème 3. *Si M et N sont des sous-espaces en position générique dans un espace de Hilbert H, de projections respectives P et Q, alors il existe un espace de Hilbert K, et il existe des contractions*

positives S et C sur K, avec $S^2+C^2 = 1$ et $\ker S = \ker C = 0$, telles que P et Q soient unitairement équivalentes à

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad et \quad \begin{pmatrix} C^2 & CS \\ CS & S^2 \end{pmatrix}$$

respectivement.

Démonstration. Identifions H à une somme directe $K \oplus K$ exactement comme dans la preuve du Théorème 1. Dans cette identification, M et $M^\perp$ sont les axes $K \oplus 0$ et $0 \oplus K$, et par conséquent

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Puisque Q est une contraction positive, il s'ensuit que

$$Q = \begin{pmatrix} D & E \\ E^* & F \end{pmatrix},$$

où $D(= PQP|M)$ et $F(= (1-P)Q(1-P)|M^\perp)$ sont des contractions positives. Puisque $E = PQ(1-P)|M^\perp$ et $E^* = (1-P)QP|M$, il s'ensuit facilement, exactement comme dans le premier paragraphe de la preuve du Théorème 1, que $\ker E = \ker E^* = 0$. Cela implique que dans la décomposition polaire $E = WA$ de E, le facteur isométrique partiel W est unitaire. Transformons P et Q par

$$\begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c'est-à-dire, multiplions par

$$\begin{pmatrix} W^* & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

à gauche et par

$$\begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

à droite) ; le premier reste invariant et le second se transforme en la même forme qu'avant, sauf que maintenant les termes hors diagonale sont égaux et positifs. Supposons donc, sans perte de généralité, qu'ils étaient ainsi dès le départ. (L'identification de H avec $K \oplus K$ a été réalisée en écrivant $K = M$ et en choisissant une correspondance isométrique arbitraire entre M et $M^\perp$. En ces termes, le changement qui vient d'être effectué revient simplement à choisir une correspondance isométrique différente, plus commode).

Soient C et S les racines carrées positives de D et F respectivement, de sorte que

$$Q = \begin{pmatrix} C^2 & E \\ E & S^2 \end{pmatrix},$$

où C, S et E sont des contractions positives. L'idempotence de Q dit exactement que

$$C^2 - C^4 = S^2 - S^4 = E^2 \quad \text{et} \quad C^2E + ES^2 = E.$$

Puisque, par les deux premières équations, C et S commutent avec E, la dernière équation dit que $E(C^2 + S^2 - 1) = 0$. Puisque $\ker E = 0$, il s'ensuit que $S^2 = 1 - C^2$; puisque $E^2 = C^2 - C^4 = C^2(1-C^2) = C^2S^2$, donc $E = CS$. La dernière assertion, jointe à $\ker E = 0$, implique que $\ker C = \ker S = 0$; la preuve est complète. □

Une partie de la théorie connue des paires de sous-espaces en position générique peut être retrouvée à partir du Théorème 2. Considérons, comme échantillon, le problème de la détermination du commutant de la paire de projections P et Q. Le commutant de P seul est facile à calculer : il consiste en toutes les matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix}.$$

Quand une telle matrice commute-t-elle avec

$$\begin{pmatrix} C^2 & CS \\ CS & S^2 \end{pmatrix}?$$

Réponse : si et seulement si X et Y commutent tous deux avec C^2 (et donc avec C, et S^2 et S), et aussi $CSX = CSY$. Puisque $\ker CS = 0$, la dernière condition implique $X = Y$. Conclusion : le commutant simultané de P et Q consiste en toutes les

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix}$$

où X commute avec C.

La simple affirmation que le commutant de $\{P, Q\}$ est non trivial est triviale : $(P+Q-1)^2$ commute avec P et Q. N.B. :

$$(P + Q - 1)^2 = \begin{pmatrix} C^2 & 0 \\ 0 & C^2 \end{pmatrix}.$$

Il s'ensuit facilement que l'algèbre de von Neumann engendrée par deux projections (sur un espace de Hilbert de dimension supérieure à 2) n'est jamais l'algèbre de tous les opérateurs ; les cas où les images ne sont pas en position générique sont facilement écartés. De façon équivalente : si P et Q sont des projections sur un espace de Hilbert H de dimension supérieure à 2, alors il existe un sous-espace non trivial de H invariant sous P et Q. (Notons que, puisque P et Q sont hermitiennes, l'invariance est la même chose que la réduction.) Des résultats comme ceux-ci sont presque explicitement contenus dans les travaux antérieurs sur les paires de sous-espaces ; cf. en particulier [1] et [2].

Graphes réfléchis. Les Théorèmes 1 et 2 ont été prouvés séparément ci-dessus, mais il existe d'autres approches (pas nécessairement plus simples) de la théorie. Les mêmes résultats peuvent être obtenus en prouvant directement un seul d'entre eux (l'un ou l'autre) et en dérivant l'autre à partir de celui-ci.

La façon d'obtenir le Théorème 1 à partir du Théorème 2, par exemple, est de noter d'abord que l'image de

$$\begin{pmatrix} C^2 & CS \\ CS & S^2 \end{pmatrix}$$

consiste en tous les vecteurs de la forme $\langle Cf, Sf\rangle$. (Elle consiste en réalité en tous les vecteurs de la forme $\langle C(Cf+Sg), S(Cf+Sg)\rangle$. Puisque, cependant, l'opérateur positif $C+S$ est inversible, parce que la fonction $x \mapsto x + (1-x^2)^{1/2}$ est bornée loin de zéro sur $[0, 1]$, la description plus simple est

valide.) Pour reconnaître cet ensemble comme un graphe, il est nécessaire de définir une transformation linéaire T telle que $TC = S$. (Formellement : $\tan\theta = \sin\theta/\cos\theta$.) Il n'y a pas de difficulté conceptuelle ici. L'opérateur C a un inverse (pas nécessairement borné), et le calcul fonctionnel pour les transformations auto-adjointes peut être invoqué pour justifier la définition $T = C^{-1}(1-C^2)^{1/2}$.

Pour aller dans l'autre sens, du Théorème 1 au Théorème 2, il est nécessaire d'exprimer d'abord en termes de T la projection dont l'image est le graphe de T. Formellement, c'est aussi un exercice de géométrie analytique ; la projection dont l'image est une droite de pente $\tan\theta$ s'avère être

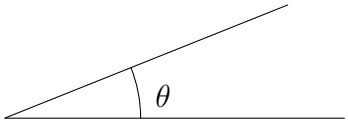
$$\begin{pmatrix} (1+\tan^2\theta)^{-1} & \tan\theta(1+\tan^2\theta)^{-1} \\ \tan\theta(1+\tan^2\theta)^{-1} & \tan^2\theta(1+\tan^2\theta)^{-1} \end{pmatrix}.$$

(Alternativement, obtenir cette matrice à partir de celle en termes de sinus et cosinus par des identités trigonométriques.) Il est facile de dériver la version précise du formalisme à partir des définitions de base ; pour un traitement explicite voir [6]. Une fois la projection Q reconnue comme

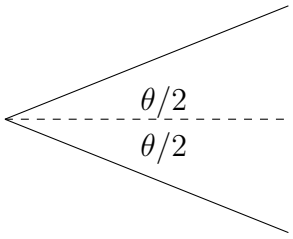
$$\begin{pmatrix} (1+T^2)^{-1} & T(1+T^2)^{-1} \\ T(1+T^2)^{-1} & T^2(1+T^2)^{-1} \end{pmatrix},$$

alors le calcul fonctionnel pour les transformations auto-adjointes peut être invoqué à nouveau ; le résultat est que $C^2 = (1+T^2)^{-1}$ et $S^2 = T^2(1+T^2)^{-1}$, et toutes les conditions du Théorème 2 sont satisfaites.

Le but de cette section est d'exploiter une fois de plus l'analogie trigonométrique. Le fait géométrique sous-jacent est que le diagramme



lorsqu'il est tourné vers le bas d'un angle $\theta/2$, devient



La version opératorielle de ce fait géométrique est l'assertion quelque peu surprenante suivante.

Théorème 4. *Si M et N sont des sous-espaces en position générique dans un espace de Hilbert H, alors il existe un espace de Hilbert K, et il existe une contraction positive T_0 sur K, avec* $\ker T_0 = \ker(1-T_0) = 0$*, telle que la paire $\langle M, N\rangle$ soit unitairement équivalente à la paire* $\langle \operatorname{graph} T_0, \operatorname{graph}(-T_0)\rangle$.

Démonstration. La rotation qui envoie une droite d'inclinaison θ sur une droite d'inclinaison $\theta/2$ et, en même temps, envoie l'axe horizontal sur la droite d'inclinaison $-\theta/2$ a pour matrice

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & \sin(\theta/2) \\ -\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix}.$$

Cela suggère que le Théorème 3 pourrait être dérivé du Théorème 1 par l'analogue opératoriel de cette rotation de demi-angle. Formellement, ce programme est un simple calcul, et précisément c'est un argument direct sur les transformations auto-adjointes. Puisque, cependant, l'argument fait intervenir des transformations non bornées, et puisque le même résultat peut être obtenu avec des opérateurs bornés seulement, il est préférable de baser la preuve sur le Théorème 2. Le caractère borné de T_0 est, d'ailleurs, l'une des caractéristiques légèrement surprenantes du Théorème 3. La raison heuristique en est que si T correspond à $\tan\theta$, $0 < \theta < \pi/2$, alors T_0 correspond à $\tan(\theta/2)$. Lorsque θ varie sur $(0, \pi/2)$, sa tangente varie de façon non bornée, mais, puisque $\theta/2$ varie sur $(0, \pi/4)$, la tangente du demi-angle reste bornée.

En vertu du Théorème 2, il n'y a pas de perte de généralité à supposer que H est déjà représenté comme $K \oplus K$ de telle manière que M soit l'axe $K \oplus 0$ et N l'image de la projection

$$Q = \begin{pmatrix} C^2 & CS \\ CS & S^2 \end{pmatrix}.$$

Le problème est de trouver T_0 de sorte que $\langle K \oplus 0, \operatorname{ran} Q\rangle$ soit unitairement équivalent à

$$\langle \operatorname{graph} T_0, \operatorname{graph}(-T_0)\rangle.$$

Puisque la formule du demi-angle pour la tangente est

$$\tan\frac{\theta}{2} = \left(\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}\right)^{1/2},$$

il est formellement naturel d'écrire

$$T_0 = ((1-C)(1+C)^{-1})^{1/2}.$$

Cela a un sens. Puisque C est positive, $1 + C$ est inversible, et puisque C est une contraction positive, il en va de même de $1 - C$. Que T_0 et $1 - T_0$ aient un noyau nul est une conséquence des mêmes propriétés de $1 - C$ et C, respectivement.

Le candidat naturel pour T_0 a été trouvé ; le problème suivant est de trouver un opérateur unitaire qui transforme M et N de la façon désirée. Le formalisme le suggère aussi ; puisque

$$\cos\frac{\theta}{2} = \left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)^{1/2} \quad \text{et} \quad \sin\frac{\theta}{2} = \left(\frac{1-\cos\theta}{2}\right)^{1/2},$$

il est naturel d'écrire

$$U = \begin{pmatrix} C_0 & S_0 \\ -S_0 & C_0 \end{pmatrix},$$

où

$$C_0 = \left(\frac{1+C}{2}\right)^{1/2} \quad \text{et} \quad S_0 = \left(\frac{1-C}{2}\right)^{1/2}.$$

Tout cela a un sens ; la vérification que U est unitaire est triviale.

Le reste de la preuve est calculatoire : il vérifie que, lorsque f varie sur K, les images

$$\begin{pmatrix} C_0 & S_0 \\ -S_0 & C_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Cf \\ Sf \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} C_0 & S_0 \\ -S_0 & C_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}$$

remplissent exactement le graphe de T_0 et le graphe de $-T_0$ respectivement. Il s'agit de vérifier, en d'autres termes, que

(i) $\operatorname{ran}(C_0C + S_0S) = K$,
(ii) $T_0(C_0C + S_0S) = -S_0C + C_0S$,
(iii) $\operatorname{ran} C_0 = K$,
(iv) $(-T_0)C_0 = -S_0$.

Pour (i) : en fait $C_0C + S_0S = C_0$; puisque C_0 est inversible, cela règle (i) et (iii). Les vérifications de (ii) et (iv) sont mécaniques. □

Corollaire 5. *Si M et N sont des sous-espaces en position générique dans un espace de Hilbert H, de projections respectives P et Q, alors un ensemble complet d'invariants unitaires de la paire $\langle M, N\rangle$ est la classe d'équivalence unitaire de l'opérateur hermitien $P + Q$.*

Démonstration. L'énoncé signifie que $\langle M_1, N_1\rangle$ est unitairement équivalent à $\langle M_2, N_2\rangle$ si et seulement si $P_1 + Q_1$ est unitairement équivalent à $P_2 + Q_2$. Puisque le problème de l'équivalence unitaire pour les opérateurs hermitiens est en principe résolu, c'est une solution du problème de l'équivalence unitaire pour les paires de sous-espaces. Le résultat est dû à Dixmier [2].

Pour prouver le corollaire, utilisons le Théorème 3 pour justifier l'hypothèse que M et N sont les graphes de T_0 et $-T_0$ respectivement. Dans ce cas, les matrices des projections P et Q sont données par

$$P = \begin{pmatrix} (1+T_0^2)^{-1} & T_0(1+T_0^2)^{-1} \\ T_0(1+T_0^2)^{-1} & T_0^2(1+T_0^2)^{-1} \end{pmatrix}$$

et

$$Q = \begin{pmatrix} (1+T_0^2)^{-1} & -T_0(1+T_0^2)^{-1} \\ -T_0(1+T_0^2)^{-1} & T_0^2(1+T_0^2)^{-1} \end{pmatrix},$$

ou, de façon équivalente, par

$$P = \begin{pmatrix} C_0^2 & C_0S_0 \\ C_0S_0 & S_0^2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} C_0^2 & -C_0S_0 \\ -C_0S_0 & S_0^2 \end{pmatrix}.$$

Le reste de la preuve est le même que celui de Dixmier. Au vu de la forme de $P + Q$, il est naturel de considérer l'opérateur hermitien

$$R = P + Q - 1 = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & -C \end{pmatrix}.$$

Puisque les parties positive et négative d'un opérateur hermitien sont des invariants unitaires de celui-ci, il s'ensuit que la classe d'équivalence unitaire de R détermine uniquement celle de C. (Ici il est important que $\ker C = 0$.) Puisque C, à son tour, détermine uniquement C_0, et donc P et Q, il s'ensuit que la classe d'équivalence unitaire de R détermine uniquement celle de la paire P, Q. La direction opposée est triviale ; la preuve du corollaire est complète. (La différence entre $P + Q$ et R est une trivialité technique. Pour R, les parties qui comptent sont celles au-dessus et en dessous de 0, tandis que pour $P + Q$ ce sont celles au-dessus et en dessous de 1.) □

Références

→ Arlen Brown, *The unitary equivalence of binormal operators*, Amer. J. Math. **76** (1954), 414-434.

2. J. Dixmier, *Position relative de deux variétés linéaires fermées dans un espace de Hilbert*, Rev. Sci. **86** (1948), 387-399.
3. N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear operators*, Vol. II, Interscience, New York, 1963.
4. P. R. Halmos, *Introduction to Hilbert space and the theory of spectral multiplicity*, Chelsea, New York, 1951.
5. ———, *A Hilbert space problem book*, Van Nostrand, Princeton, N. J., 1967.
6. M. H. Stone, *On unbounded operators in Hilbert space*, J. Indian Math. Soc. **15** (1951), 155-192.

Université d'Hawaii,
Honolulu, Hawaii