Transcription et traduction du paragraphe 9.6. *Fonction zeta d'un laplacien* du livre de Nicole Berline, Ezra Getzler et Michèle Vergne *Heat kernels and Dirac operators* (éd. Springer, 1996), Denise Vella-Chemla, 31 décembre 2024.

Dans cette section, on donne une application de l'existence d'un développpement asymptotique pour le noyau de la chaleur : la construction de la fonction zeta d'un laplacien généralisé et la définition de son déterminant renormalisé. Cette construction, appliquée à une famille d'opérateurs de Dirac, est utilisée dans la théorie des fibrés à déterminant linéaire, que nous décrirons dans la prochaine section. Le lecteur intéressé seulement par le théorème des familles d'indices peut sauter le reste de ce chapitre.

Si $f \in C^\infty(0,\infty)$ est une fonction de la demi-droite des réels positifs (qui se comporte bien en 0 et en l'∞, ce que nous décrirons rapidement), la transformation de Mellin de f est la fonction

$$\mathrm{M}[f](s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty f(t) t^{s-1} dt$$

Lemme 9.34. *Soit $f \in C^\infty(0,\infty)$ une fonction dont le développement asymptotique pour de petites valeurs de t est de la forme*

$$f(t) \sim \sum_{k \geq -n} f_k t^{k/2} + g \log t,$$

et décroît exponentiellement à l'infini, c'est-à-dire, telle que, pour un certain $\lambda > 0$ et pour t suffisamment grand,

$$|f(t)| \leq C e^{-t\lambda}$$

Soit γ la constante d'Euler. Alors

(1) *la transformation de Mellin $\mathrm{M}[f]$ est une fonction méromorphe avec des pôles appartenant à l'ensemble $n/2 - \mathbb{N}/2$;*

(2) *la série de Laurent de $\mathrm{M}[f]$ au voisinage de $s = 0$ est $-gs^{-1} + (f_0 - \gamma g) + O(s)$*

Soit $h \in C^\infty(0,\infty)$ une fonction dont le développement asymptotique pour les petites valeurs de t est de la forme

$$h(t) \sim \sum_{k \geq -n} h_k t^{k/2},$$

et telle que pour un certain $\lambda > 0$ et t grand,

$$|h(t)| \leq C e^{-t\lambda}$$

Alors $f(t) = \int_t^\infty h(s) ds$ satisfait les contraintes ci-dessus.

Preuve. Choisissons $\mathfrak{Re}\ s$ grand, et effectuons l'intégration sur $[0,\infty)$ sur les deux intervalles $[0,1]$ et $(1,\infty)$ séparément :

$$\Gamma(s)\mathrm{M}[f](s) = \int_0^1 f(t) t^{s-1} dt + \int_1^\infty f(t) t^{s-1} dt.$$

Le second terme, la contribution de l'intégrale à l'infini, est clairement entière, du fait de la décroissance exponentielle de $f(t)$ lorsque $t \to \infty$. Le premier terme peut être développé en une série asymptotique, et alors intégré explicitement, terme par terme :

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(t)t^{s-1}dt &= \sum_{k<K} f_k \int_0^1 t^{k/2+s-1}dt \\ &\quad + g\int_0^1 (\log t)t^{s-1}dt + \int_0^1 O(t^{K/2+s-1})dt \\ &= \sum_{k<K} \frac{f_k}{s+k/2} - \frac{g}{s^2} + r(s),\end{aligned}$$

où $r(s)$ est holomorphe dans le demi-plan droit $\mathfrak{Re}\ s > -K/2$. Puisque l'inverse de la fonction Gamma $\Gamma(s)^{-1}$ est entière, on peut déduire (1).

Puisque $\Gamma(s)^{-1} = s + \gamma s^2 + O(s^3)$, il s'ensuit que $\mathrm{M}[f]$ a le développement en série de Taylor au voisinage de $s = 0$

$$-gs^{-1} + (f_0 - \gamma g) + O(s),$$

ce qui prouve la partie (2) du lemme.

Si h est comme dans l'énoncé du lemme, alors pour montrer que $\int_t^\infty h(s)ds$ a un développement asymptotique de la forme requise, on écrit, pour de petites valeurs de t,

$$f(t) = \int_t^1 \sum_{k<0} \left(h_k s^{k/2}\right) ds - \int_0^t \left(h(s) - \sum_{k<0} h_k s^{k/2}\right) ds$$

$$+ \int_0^1 \left(h(s) - \sum_{k<0} h_k s^{k/2}\right) ds + \int_1^\infty h(s)ds$$

d'où on obtient

$$f(t) \sim -\sum_{k\neq -2} \frac{h_k}{k/2+1} t^{k/2+1} - h_{-2}\log t + c,$$

où c est la constante

$$c = \sum_{k<0, k\neq -2} \frac{h_k}{k/2+1} + \int_0^1 \left(h(s) - \sum_{k<0} h_k s^{k/2}\right) + \int_1^\infty h(s)ds. \qquad \square$$

Si on définit $\mathrm{LIM}_{t\to 0} f(t)$ comme étant égal à $f_0 - \gamma g$ où f_0 et g sont les coefficients de t^0 et $\log t$ dans le développement asymptotique de f, on voit que la partie (2) du lemme ci-dessus implique la formule

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} s\mathrm{M}[f] = \underset{t\to 0}{\mathrm{LIM}} f(t).$$

On notera $\mathrm{LIM}_{t\to 0} f(t)$ la limite renormalisée de $f(t)$ lorsque $t \to 0$.

Si H est un laplacien généralisé auto-adjoint sur une variété compacte M et si λ est un nombre réel positif, la fonction zeta de H est la transformée de Mellin

$$\zeta(s, H, \lambda) = \mathrm{M}[\mathrm{Tr}(P_{(\lambda,\infty)} e^{-tH})] = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \mathrm{Tr}(P_{(\lambda,\infty)} e^{-tH}) t^{s-1} dt,$$

où $P_{(\lambda,\infty)}$ est la projection spectrale associée à H sur les valeurs propres appartenant à l'intervalle (λ, ∞). Cette fonction est égale à $\mathrm{Tr}(P_{(\lambda,\infty)} H^{-s})$ pour $s > n/2$ où n est la dimension de la variété M.

Comme exemple, considérons le laplacien scalaire $(-d^2)/dt^2$ sur le cercle, avec pour valeurs propres

$$\{0, 1, 1, 4, 4, ..., n^2, n^2, ...\}.$$

Si $0 < \lambda < 1$ et $s > 1/2$, on voit que

$$\zeta(s, H, \lambda) = \frac{2}{\Gamma(s)} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty e^{-tn^2} t^{s-1} dt = 2 \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2s} = 2\zeta(2s),$$

où $\zeta(s)$ est la fonction zeta de Riemann.

On peut comprendre le comportement de la fonction zeta comme une fonction du plan complexe au moyen du développement asymptotique de Minakshisundaram-Pleijel du noyau de la chaleur.

Proposition 9.35. *La fonction $\zeta(s, H, \lambda)$ possède un développement méromorphe à tout le plan complexe, et elle est holomorphe en $s = 0$.*

Preuve. Lorsque $t \to 0$, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(P_{(\lambda,\infty)} e^{-tH}) &= \mathrm{Tr}(e^{-tH}) - \sum_{k=0}^{m} e^{-t\lambda_k} \\ &\sim \sum_{k=-n/2}^{\infty} t^k a_k, \end{aligned}$$

où les $\lambda_0 \leq \ldots \leq \lambda_m \leq \lambda$ sont les valeurs propres de H appartenant à l'intervalle $(-\infty, \lambda]$ énumérées selon leur multiplicité. Le fait que $\mathrm{Tr}(P_{(\lambda,\infty)} e^{-tH})$ décroisse exponentiellement rapidement lorsque $t \to \infty$ a été démontré dans le lemme 2.37 [1]. □

[1]**Proposition 2.37** : *Si H est un laplacien généralisé, et si $P_{(0,\infty)}$ est la projection sur les fonctions propres de H de valeur propre positive, alors pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, il existe une constante $C(\ell) > 0$ telle que pour tout t suffisamment grand,*

$$\|\langle x | P_{(0,\infty)} e^{-tH} P_{(0,\infty)} | y \rangle\| \leq C(\ell) e^{-t\lambda_1/2},$$

où λ_1 est la plus petite valeur propre non nulle de H.

Notons $\zeta'(s,H,\lambda)$ la dérivée de $\zeta(s,H,\lambda)$ par rapport à s. En suivant Ray et Singer, on définit le déterminant de la fonction zeta d'un laplacien généralisé H pour lequel 0 n'est pas une valeur propre comme étant

$$\det(H) = e^{-\zeta'(0,H,0)}.$$

Cette définition est motivée par le fait que si H est un endomorphisme positif d'un espace vectoriel hermitien fini-dimensionnel V, et si

$$\zeta(s,H) = \mathrm{M}[\mathrm{Tr}(e^{-tH})] = \mathrm{Tr}(H^{-s})$$

alors $\zeta'(0,H) = -\log\det(H)$. Le déterminant de la fonction zeta d'un laplacien généralisé H est un déterminant renormalisé adapté à la classe des laplaciens généralisés.

Si H est un laplacien auto-adjoint, soit $0 < \lambda < \mu$, et $\lambda < \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_m \leq \mu$ l'énumération des valeurs propres de H appartenant à l'intervalle $(\lambda,\mu]$. Le résultat suivant est clair.

Proposition 9.36. *La fonction zeta de H satisfait la formule*

$$\zeta(s,H,\lambda) = \zeta(s,H,\mu) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^{-s},$$

et par conséquent, sa dérivée en $s=0$ satisfait la formule

$$\zeta'(0,H,\lambda) = \zeta'(0,H,\mu) - \sum_{i=1}^{m} \log\lambda_i.$$

Dans la proposition suivante, on calcule la variation de la fonction zeta $\zeta(s,H^z,\lambda)$ d'une famille H^z de laplaciens généralisés sur M par rapport au paramètre z. On travaille sur l'ensemble U_λ où λ n'est pas une valeur propre de H^z.

Proposition 9.37. *Sur l'ensemble U_λ, la dérivée par rapport au paramètre z de la fonction zeta d'une famille de laplaciens généralisés est donnée par la formule*

$$\frac{\partial\zeta(s,H^z,\lambda)}{\partial z} = -s\mathrm{M}[\mathrm{Tr}(P^z_{(\lambda,\infty)}\partial_z H^z (H^z)^{-1} e^{-tH^z})].$$

Preuve. En utilisant la méthode du lemme 9.34, il n'est pas difficile de montrer que la dérivée $\partial\zeta(s,H^z,\lambda)/\partial z$ de la fonction zeta est méromorphe. Par conséquent, on peut arguer que pour les grandes valeurs de $\mathfrak{Re}\ s$, les deux côtés de la formule sont donnés par des intégrales convergentes. Si on différencie l'expression

$$\zeta(s,H^z,\lambda) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \mathrm{Tr}\left(P^z_{(\lambda,\infty)} e^{-tH^z}\right) t^{s-1} dt$$

pour la fonction zeta par rapport à z et si on applique le corollaire 2.50 [2], on obtient que

[2]**Corollaire 2.50.** *Si H^z est une famille lisse à un paramètre de laplaciens généralisés sur un fibré vectoriel $\mathcal{E}$ sur une variété compacte, alors*

$$\frac{\partial}{\partial z}\mathrm{Str}\left(e^{-tH^z}\right) = -t\,\mathrm{Str}\left(\frac{\partial H^z}{\partial z} e^{-tH^z}\right).$$

*Note de la traductrice : la notion de Supertrace (*Str*) est définie à la page 38 et travaille sur des espaces "double-face", une face positive et une face négative.*

$$\frac{\partial}{\partial z}\zeta(s,H^z,\lambda) = -\mathrm{M}[t\ \mathrm{Tr}(P^z_{(\lambda,\infty)}\partial_z H^z e^{-tH^z})] + \mathrm{M}[\mathrm{Tr}(\partial_z P_{(\lambda,\infty)} e^{-tH^z})]. \tag{9.5}$$

Puisque $P = P^z_{(\lambda,\infty)}$ est une projection, la règle de Leibniz montre que

$$\partial_z P = P\partial_z P + \partial_z P P\ ;$$

en multipliant sur la gauche et sur la droite par P, on voit que $P\partial_z PP = 0$, de telle façon que

$$\partial_z P = P(\partial_z P)(1-P) + (1-P)(\partial_z P)P.$$

Par conséquent, le second terme du côté droit de (9.5) s'évanouit. De l'autre côté, l'intégration par parties montre qu'en général

$$\mathrm{M}[tf'] = -s\mathrm{M}[f],$$

de telle façon que le premier terme peut être réécrit sous la forme désirée. $\square$

Le théorème suivant est l'analogue pour le déterminant de la fonction zeta de la formule

$$\frac{\partial}{\partial z}\log\ \det(H^z) = \mathrm{Tr}(\partial_z H^z (H^z)^{-1})$$

pour la variation du déterminant d'une famille d'opérateurs H_z sur un espace vectoriel fini-dimensionnel.

Proposition 9.38. *Si H^z est une famille de laplaciens généralisés sur une variété compacte M, alors sur l'ensemble U_λ,*

$$\frac{\partial}{\partial z}\zeta'(s=0,H^z,\lambda) = -\underset{t\to 0}{\mathrm{LIM}}\ \mathrm{Tr}(P^z_{(\lambda,\infty)}\partial_z H^z (H^z)^{-1} e^{-tH^z}).$$

Preuve. Pour appliquer le lemme 9.34 (2), on doit montrer que

$$\mathrm{Tr}(P^z_{(\lambda,\infty)}\partial_z H^z (H^z)^{-1} e^{-tH^z})$$

a un développement asymptotique. Considérons le développement asymptotique

$$\mathrm{Tr}(P^z_{(\lambda,\infty)} e^{-sH^z}) \sim \sum_{k=-n/2}^{\infty} a_k(z) s^k.$$

En se rappelant de la preuve de la proposition précédente que

$$\partial_z \mathrm{Tr}(P^z_{(\lambda,\infty)} e^{-sH^z}) = -s\mathrm{Tr}(P^z_{(\lambda,\infty)}\partial_z H^z e^{-sH^z}),$$

on voit que $\mathrm{Tr}(P^z_{(\lambda,\infty)}\partial_z H^z e^{-sH^z})$ a un développement asymptotique de la forme

$$\mathrm{Tr}(P^z_{(\lambda,\infty)}\partial_z H^z e^{-sH^z}) \sim -\sum_{k=-n/2}^{\infty} \partial_z a_k s^{k-1}.$$

Par conséquent, on peut appliquer le lemme 9.34 pour conclure que

$$\int_t^\infty \mathrm{Tr}(P^z_{(\lambda,\infty)}\partial_z H^z e^{-sH^z})\, ds = \mathrm{Tr}(P^z_{(\lambda,\infty)}\partial_z H^z (H^z)^{-1} e^{-tH^z})$$

a un développement asymptotique. $\square$