Sur les intersections des trissectrices des angles d'un triangle

Professeur Frank Morley

(extrait d'une lettre destinée au Professeur T. Hayashi)

Cher Professeur Hayashi,

Je n'ai pas publié le théorème [Les trois intersections des trissectrices des angles d'un triangle, étant proches respectivement des trois côtés, forment un triangle équilatéral] [1]. Cela découle de la considération de cardioïdes. J'ai remarqué, dans les *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 1, p. 115, que certaines chaînes de théorèmes étaient vraies pour n'importe quel nombre de droites d'un plan, quand on remplace l'intersection des droites prises deux par deux (1) par le centre d'un cercle tangent aux droites prises trois par trois et (2) par le centre d'une cardioïde tangente aux droites prises 4 par 4, et etc.

J'ai ainsi été amené à penser aux cardioïdes tangentes à 3 droites.

La cardioïde est envoyée sur le cercle-unité par une équation.

$$x = 2t - t^2$$

x étant un nombre complexe, t un nombre complexe tel que $|t| = 1$. L'équation de la droite tangente en t est

$$x - 3t + 3t^2 - \overline{x}t^3 = 0,$$

où $\overline{x}$ est le conjugué de x. Les 3 tangentes en un point x sont alors telles que

$$t_1t_2t_3 = x/\overline{x}.$$

Par conséquent, si θ_i sont les angles que ces tangentes font avec n'importe quelle droite fixée, et si ϕ est l'angle de x lui-même,

$$3\phi = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \qquad (1)$$

L'image y d'un point quelconque x de la tangente est donnée par

$$y - 3t + 3 * t^2 - \overline{x}t^3 = 0$$

Ainsi, l'image du centre $x = 0$ est

$$y = 3(t - t^2).$$

Par conséquent si

$$y = 2pe^{i\omega}, \quad \text{de telle faon que} \quad \overline{y} = 2pe^{-i\omega},$$

Référence : "On the intersections of the trisectors of the angles of a triangle", *Journal of the Math. Assoc. of Japan for Secondary Education*, 6 (1921), 260-202.

Transcription - traduction : Denise Vella-Chemla, avril 2025.

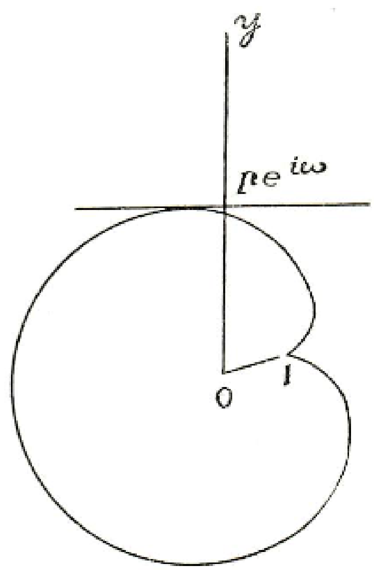
1. Cet énoncé du théorème a été ajouté par le Professeur T. Hayashi.

on a

$$\begin{aligned} 4p^2 &= 9(1-t)(1-1/t), \\ e^{2i\omega} &= -t^3, \\ t+1/t &= -2\cos 2\omega/3, \end{aligned}$$

et

$$p = 3\sin\omega/3 \tag{2}$$



Ceci est l'équation de la courbe cardioïde. On peut trouver l'équation $p = a\sin\mu\omega$ d'une courbe cycloïdale quelconque dans certains livres anciens (par exemple, dans le livre de Edwards, *Differential Calculus*), de telle façon qu'on peut commencer en utilisant l'équation (2).

Si alors p_1, p_2, p_3 sont perpendiculaires du centre sur 3 tangentes [2], et si $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, sont les angles de ces perpendiculaires, puisque

$$\sum^3 \sin\frac{\omega_1}{3}\sin\frac{\omega_2-\omega_3}{3} = 0,$$

on a

$$\sum^3 p_1 \sin\frac{\omega_2-\omega_3}{3} = 0.$$

En remplaçant $\omega_2 - \omega_3$ par l'angle A_1 du triangle des tangentes, mais en gardant à l'esprit que dans (3), les angles doivent avoir une somme congruente à 0, on obtient pour le lieu des centres 9 droites, telles que

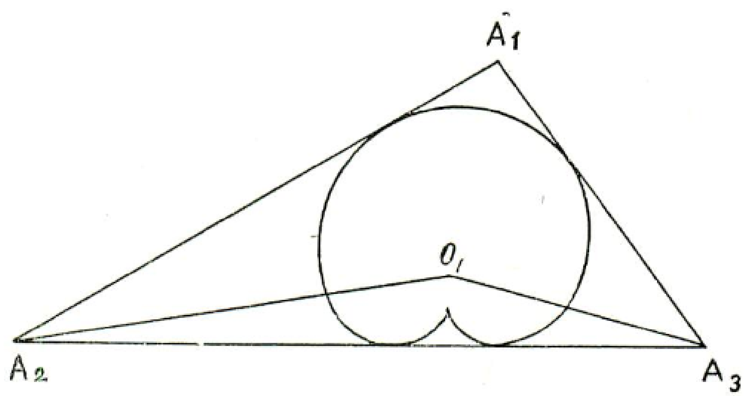
$$\begin{aligned} p_1\sin\frac{\pi-A_1}{3} + p_2\sin\frac{\pi-A_2}{3} + p_3\sin\frac{-\pi-A_3}{3} &= 0, \\ p_1\sin\frac{2\pi-A_1}{3} + p_2\sin\frac{\pi-A_2}{3} + p_3\sin\frac{-2\pi-A_3}{3} &= 0. \end{aligned}$$

2. ?

Mais à partir de (1), en considérant ces cardioïdes dont les centres sont à une grande distance (de telle façon que le triangle se comporte comme un point), on voit que les 9 droites ont seulement 3 directions, données par

$$3\phi = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3.$$

Ce sont ainsi 3 ensembles de droites parallèles, formant des triangles équilatéraux. Le centre change d'une ligne à l'autre lorsque l'une des droites est une tangente double.



Considérons en particulier les cardioïdes qui sont à l'intérieur du triangle. Soit O_1 le centre d'une cardioïde avec tangente double A_2A_3. On a, à partir de (1)

$$\text{angle } A_3A_2O_1 = A_2/3,$$

$$\text{angle } O_1A_3A_2 = A_3/3,$$

et on a vu que les 3 droites O_1O_2, O_2O_3, O_3O_1 forment un triangle équilatéral.

C'était la justification. La vérification est naturellement beaucoup plus simple à effectuer. Si vous pensez imprimer les éléments ci-dessus, je serais très heureux qu'elles paraissent dans un journal japonais.

Si le sujet du mémoire cité en référence est digne d'intérêt, je serais heureux de vous envoyer une copie, avec une correction, car l'utilisation des "droites de direction" n'y est pas claire.

Avec ces sentiments respectueux, sincèrement vôtre. (Signature)