Le miracle de Morley
La preuve de J. H. Conway

John Conway (l'inventeur du jeu de la vie) de l'Université de Princeton a posté sa preuve sur le forum du groupe de discussion Puzzles de géométrie *en 1995. Ci-dessous est reproduit son message (j'ai seulement remplacé les illustrations par quelque chose de plus adéquat et modifié ses notations pour qu'elles concordent avec celles que j'ai utilisées dans les autres preuves).*

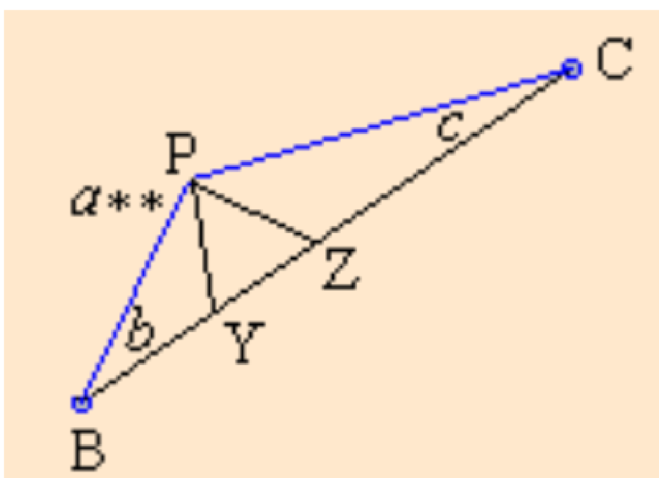
J'ai de manière incontestée la démonstration la plus simple du théorème des trisecteurs de Morley. La voici :

Appelez $3a, 3b, 3c$ les trois angles de votre triangle et dénotons par x^* la valeur $x + 60^o$, de telle façon que $a + b + c = 0^*$. Alors il existe abstraitement des triangles quelconques d'angles,

$$\begin{array}{ccc} & 0^*, 0^*, 0^* & \\ a, b^*, c^* & a^*, b, c^* & a^*, b^*, c \\ a^{**}, b, c & a, b^{**}, c & a, b, c^{**} \end{array}$$

puisque dans tous les cas, la somme des angles est égale à 180^o. Construisez-les sur une échelle définie comme suit :

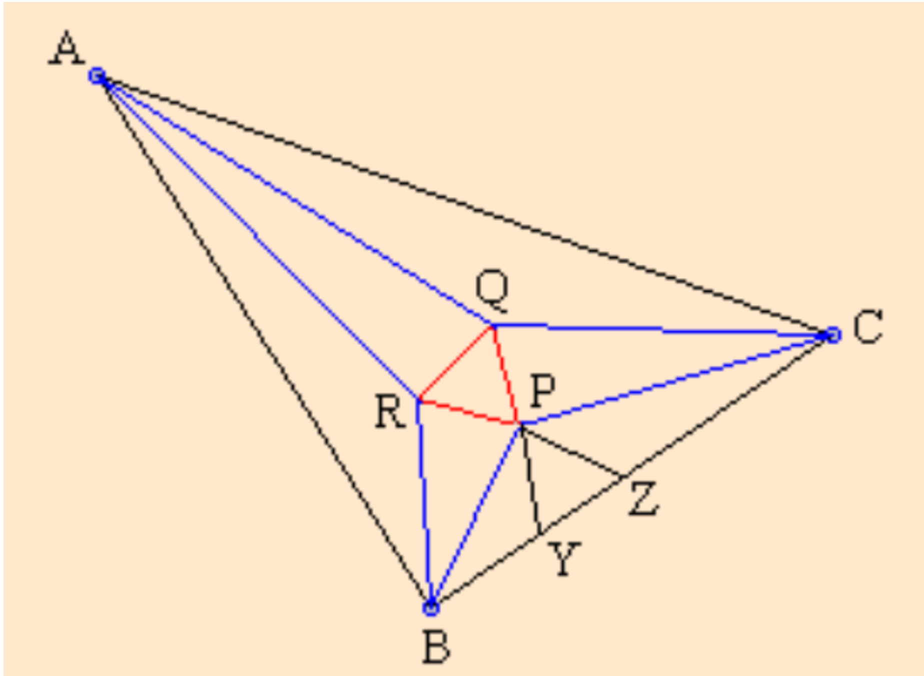
$0^*, 0^*, 0^*$	- celui-ci est équilateral - prenons ses côtés de longueur 1
a, b^*, c^*	- les côtés joignant les angles b^* et c^* sont de longueur 1 - de façon similaire, pour a^*, b, c^* et a^*, b^*, c
$a^{**},\ b,\ c$	- et les deux autres côtés comme lui - dessinons ci-dessous celui-ci :



Appelons les angles en $B,\ P,\ C$ ainsi : $b,\ a^{**},\ c$, et dessinons des segments de droite d'extrémité P coupant BC à angle a^* dans les deux sens, formant ainsi un triangle isocèle PYZ. Choisissons l'échelle de façon que PY et PZ soient tous les deux égaux à 1.

Maintenant il suffit d'assembler ces 7 triangles ensemble ! Ils formeront une figure comme celle-ci :

https://www.cut-the-knot.org/triangle/Morley/conway.shtml, traduction : Denise Vella-Chemla, sept. 2024.



(dans laquelle les points X, Y pourraient vraiment être omis). Je voulais dire les points Y, Z.

Pour rendre cela un peu plus clair, laissez-moi dire que les angles du triangle BPR sont b (en B), c^* (en P), a^* (en R).

Pourquoi s'agrègent-ils tous ensemble ? Eh bien, à chaque sommet interne, la somme des angles est égale à 360^o, comme vous pouvez aisément le vérifier. Et deux côtés adjacents soit ont été déclarés comme étant de longueur 1, soit sont comme le côté commun BP des triangles BPR et BPC.

Mais le triangle BPR est congruent au sous-triangle BPZ du triangle BPC, puisque

- $PR = PZ = 1$,
- $\angle PBR = \angle PBZ = b$,
- et $\angle BRP = \angle BZP = a^*$.

Donc la figure formée de ces 7 triangles est similaire à celle que vous obtenez en trisectant les angles de votre triangle donné, et par conséquent, dans ce triangle, le sous-triangle du milieu doit aussi être équilateral.

John Conway