Distribution des zéros de la fonction zêta de Riemann

Hugh L. Montgomery

L'un des problèmes les plus fascinants de la théorie des nombres est celui de déterminer effectivement tous les corps quadratiques imaginaires $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ possédant un nombre de classes h donné. Pour $h = 1$ ce problème a été résolu indépendamment par Heegner, Baker et Stark, et ces deux derniers ont également résolu la question pour $h = 2$. Pour $h \geq 3$ le problème reste ouvert, bien que l'on sache que, parmi tous les corps quadratiques imaginaires $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ de nombre de classes h, on a $d < Ch^2 \log^2 h$, sauf pour au plus un corps exceptionnel, pour lequel d peut être plus grand. L'hypothèse de Riemann généralisée implique qu'il n'existe pas un tel corps exceptionnel, mais l'hypothèse opposée, à savoir qu'il existe un corps $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ avec d très grand et h petit, a de nombreuses conséquences intéressantes. Par exemple, Mordell en a déduit que tous les zéros non triviaux de la fonction zêta de Riemann se trouvent sur la droite critique $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$, au moins jusqu'à une hauteur $T(d)$ qui croît avec d. Weinberger et moi [3] avons poussé cette analyse un peu plus loin en montrant que, jusqu'à $T(d)$, les zéros de la fonction zêta de Riemann sont bien espacés sur la droite critique. Soit $0 < \gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \cdots$ les ordonnées des zéros non triviaux de $\zeta(s)$. La moyenne de $\gamma_{n+1} - \gamma_n$ est $2\pi/\log \gamma_n$. Pour γ_n presque aussi grand que $T(d)$, nous avons trouvé que

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n > \left(\frac{1}{4} - \varepsilon\right) 2\pi/\log \gamma_n.$$

Des résultats de ce type, avec des paires de zéros proches explicitement connues, permettent de montrer, par exemple, qu'il n'existe pas de corps $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ avec $h = 3$ et $10^{12} \leq d \leq 10^{2500}$. Pour parvenir à une solution complète de ces problèmes par cette approche, il suffirait de montrer qu'il existe une constante $c < \frac{1}{4}$ telle que, pour tout T grand,

$$\min_{T \leq \gamma \leq 2T} (\gamma_{n+1} - \gamma_n) \log T \leq 2\pi c. \tag{1}$$

On peut en déduire que $h(-d)$ tend effectivement vers l'infini.

En tentant de démontrer (1), on peut chercher une estimation de l'expression

$$D(\alpha, \beta) = \sum_{\substack{0 < \gamma \leq T, \\ 0 < \gamma' \leq T \\ 2\pi\alpha/\log T \leq \gamma - \gamma' \leq 2\pi\beta/\log T}} 1; \tag{2}$$

ici γ et γ' parcourent indépendamment les ordonnées des zéros non triviaux de $\zeta(s)$. En prenant les transformées de Fourier, nous voyons qu'estimer la densité $D(\alpha, \beta)$ revient essentiellement à évaluer un facteur de la forme

$$F(\alpha) = \left(\frac{T}{2\pi} \log T\right)^{-1} \sum_{\substack{0 < \gamma \leq T, \\ 0 < \gamma' \leq T}} T^{i\alpha(\gamma - \gamma')} w(\gamma - \gamma')$$

Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vancouver, 1974.
Révision de la traduction par ia : Denise Vella-Chemla, octobre 2026.

pour α réel, où $w(u) = \dfrac{4}{4+u^2)}$. Puisque F est symétrique en γ et γ', nous voyons que F est réelle et paire. Récemment j'ai montré [2] que si l'hypothèse de Riemann est vraie alors F est presque non négative, $F(\alpha) \geq -\varepsilon$ uniformément en α, pour $T > T_0(\varepsilon)$, et que

$$F(\alpha) = (1 + \mathrm{o}(1))T^{-2\alpha} \log T + \alpha + \mathrm{o}(1) \tag{3}$$

pour $0 \leq \alpha \leq 1$. Pour $\alpha > 1$ le comportement change, et nous conjecturons que

$$F(\alpha) = 1 + \mathrm{o}(1) \tag{4}$$

pour $\alpha \geq 1$. Cette conjecture est fondée sur des heuristiques de théorie des nombres ; elle implique que

$$D(\alpha, \beta) \sim \left(\int_\alpha^\beta \left(1 - \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 \right) du + \delta(\alpha, \beta) \right) \frac{T}{2\pi} \log T \tag{5}$$

pour chaque $\alpha < \beta$ fixé. Ici $\delta(\alpha, \beta) = 1$ si $0 \in [\alpha, \beta]$, et $\delta(\alpha, \beta) = 0$ sinon. L'apparition de la fonction δ de Dirac ici est à prévoir, car si $\alpha \leq 0 \leq \beta$ alors la somme (2) inclut les termes avec $\gamma = \gamma'$. Nous notons que notre conjecture (5) implique (1) pour tout $c > 0$.

Il est intéressant de noter que la fonction de corrélation de paires $1 - \left(\dfrac{\sin \pi u}{\pi u} \right)^2$, qui apparaît dans (5), surgit aussi comme corrélation de paires limite des valeurs propres de matrices hermitiennes aléatoires de grand ordre [1]. Cela s'accorde avec l'idée, initialement avancée par Pólya, que l'hypothèse de Riemann pourrait être démontrée en exhibant un opérateur hermitien dont les valeurs propres sont reliées aux zéros de la fonction zêta. En effet, il serait probablement difficile d'interpréter (5) dans un autre cadre.

Puisque (5) reste non démontrée, il est utile de noter que, sous réserve de l'hypothèse de Riemann, l'estimation (3) permet d'évaluer asymptotiquement la somme

$$\sum_{\substack{0<\gamma\leq T,\\ 0<\gamma'\leq T}} r\left((\gamma - \gamma') \frac{\log T}{2} \right) w(\gamma - \gamma')$$

pourvu que le spectre de r soit suffisamment petit. Par exemple, nous trouvons que

$$\sum_{\substack{0<\gamma\leq T,\\ 0<\gamma'\leq T}} \left(\frac{\sin \dfrac{1}{2}(\gamma - \gamma') \log T}{\dfrac{1}{2}(\gamma - \gamma') \log T} \right)^2 \sim \frac{4}{3} \frac{T}{2\pi} \log T.$$

De là nous pouvons montrer, en supposant toujours RH, qu'au moins 2/3 des zéros de $\zeta(s)$ sont simples, comme suit. Soit m_ρ la multiplicité du zéro $\rho = \dfrac{1}{2} + i\gamma$. Dans la somme ci-dessus il y a m_ρ^2 paires γ, γ' pour lesquelles $\gamma = \gamma' = \mathrm{Im}\ \rho$, de sorte que

$$\sum_{0<\gamma\leq T} m_\rho^2 \leq \left(\frac{4}{3} + \mathrm{o}(1) \right) \frac{T}{2\pi} \log T.$$

D'autre part, nous savons classiquement que

$$\sum_{0<\gamma\le T} m_\rho \sim \frac{T}{2\pi}\log T.$$

Ainsi, en combinant ces estimations,

$$\sum_{\substack{0<\gamma\le T\\ \rho \text{ simple}}} 1 \ge \sum_{0<\gamma\le T} m_{\rm o}(2-m_\rho) \ge \left(\frac{2}{3}+{\rm o}(1)\right)\frac{T}{2\pi}\log T.$$

À l'examen, on verra que l'argument ci-dessus n'est pas aussi efficace qu'il pourrait l'être. Pour obtenir un résultat optimal, on est conduit à un problème extrémal dans lequel on cherche $r \in L^1(\mathbb{R})$ avec $r(u) \ge 0$. Nous voulons que

$$\widehat{r}(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} r(u)e^{-2\pi i\alpha u}du$$

ait un support contenu dans $[-1,1]$, et nous voulons que

$$\frac{\widehat{r}(0) + 2\displaystyle\int_0^1 \alpha\widehat{r}(\alpha)d\alpha}{\displaystyle\int_0^1 \widehat{r}(\alpha)d\alpha}$$

soit minimal. M. E. Taylor et moi nous sommes récemment penchés sur ce problème, et sous l'hypothèse raisonnable que $\widehat{r}(\alpha)$ est de la forme $\widehat{r}(\alpha) = h(\alpha) * h(-\alpha)$, nous avons trouvé que

$$\begin{aligned} h(\alpha) &= \cos 2^{1/2}\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) && \text{pour } |\alpha| \le 1,\\ &= 0 && \text{sinon,}\end{aligned}$$

fournit la fonction extrémale r. Cela conduit au résultat que, sous réserve de l'hypothèse de Riemann, au moins $3/2 - 2^{-1/2}\cot 2^{-1/2} = 0.6725\cdots$ des zéros de la fonction zêta sont simples.

Références

1. M. L. Mehta, *Random matrices and the statistical theory of energy levels*, Academic Press, New York, 1967. MR 36 #3553.
2. H. L. Montgomery, *The pair correlation of zeros of the zeta function*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 24, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1973, pp. 181–193.
3. H. L. Montgomery and P. J. Weinberger, *Notes on small class numbers*, Acta Arith. 24 (1974), 329–342.

Université du Michigan
Ann Arbor, Michigan 48104, U.S.A.