La corrélation des paires de zéros de la fonction zêta
H. L. Montgomery, 1970

1. Énoncé des résultats.

Nous supposons l'hypothèse de Riemann (RH) tout au long de cet article ; $\varrho = \frac{1}{2} + i\gamma$ désigne un zéro non trivial de la fonction zêta de Riemann. Notre objectif est d'étudier la distribution des différences $\gamma - \gamma'$ entre les zéros. Il serait donc souhaitable de connaître la transformée de Fourier de la fonction de distribution des nombres $\gamma - \gamma'$; dans ce but, nous posons

$$F(\alpha) = F(\alpha, T) = \left(\frac{T}{2\pi}\log T\right)^{-1} \sum_{0<\gamma\le T, 0<\gamma'\le T} T^{i\alpha(\gamma-\gamma')} w(\gamma-\gamma'), \tag{1}$$

où α et $T \ge 2$ sont réels. Ici $w(u)$ est une fonction de pondération convenable, $w(u) = \frac{4}{4+u^2}$, de sorte que $w(0) = 1$. Nos résultats concernant $F(\alpha)$ sont énoncés dans le

Théorème. *(On suppose RH.) Pour α réel, $T \ge 2$, soit $F(\alpha)$ définie par (1). Alors $F(\alpha)$ est réelle, et $F(\alpha) = F(-\alpha)$. Si $T > T_0(\varepsilon)$ alors $F(\alpha) \ge -\varepsilon$ pour tout α. Pour α fixé satisfaisant $0 \le \alpha < 1$ on a*

$$F(\alpha) = (1 + \mathrm{o}(1))T^{-2\alpha}\log T + \alpha + \mathrm{o}(1) \tag{2}$$

lorsque T tend vers l'infini ; cela est valable uniformément pour $0 \le \alpha \le 1 - \varepsilon$.

Le premier terme du membre de droite ci-dessus se comporte à la limite comme une fonction δ de Dirac ; il reflète le fait que si $\alpha = 0$ alors tous les termes de (1) sont positifs. Avec plus d'efforts, nous pourrions montrer que (2) est valable uniformément sur tout $0 \le \alpha \le 1$.

Pour étudier les sommes impliquant $\gamma - \gamma'$, il nous suffit de faire une convolution de $F(\alpha)$ avec un noyau approprié $\widehat{r}(\alpha)$; à partir de (1) seule, il est immédiat que

$$\sum_{0<\gamma\le T, 0<\gamma'\le T} r\left((\gamma-\gamma')\frac{\log T}{2\pi}\right) w(\gamma-\gamma') = \left(\frac{T}{2\pi}\log T\right)\int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha)\widehat{r}(\alpha)d\alpha. \tag{3}$$

Ici $\widehat{r}$ est la transformée de Fourier de r,

$$\widehat{r}(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} r(u)e(-\alpha u)du \qquad\qquad (e(\theta) = e^{2\pi i\theta}). \tag{4}$$

Notre théorème ne nous donne que peu d'informations sur $F(\alpha)$ pour $\alpha \ge 1$, aussi nous restreignons-nous la plupart du temps aux noyaux $\widehat{r}$ qui s'annulent en dehors de $[-1+\delta, 1-\delta]$. Des choix particuliers de $r(x)$ nous donnent le

Corollaire 1. *(On suppose RH.) Si $0 < \alpha < 1$ est fixé alors*

$$\sum_{0<\gamma\le T, 0<\gamma'\le T} \left(\frac{\sin\alpha(\gamma-\gamma')\log T}{\alpha(\gamma-\gamma')\log T}\right) w(\gamma-\gamma') \sim \left(\frac{1}{2\alpha} + \frac{\alpha}{2}\right)\frac{T}{2\pi}\log T, \tag{5}$$

Révision de la traduction ia : Denise Vella-Chemla, octobre 2026.

et

$$\sum_{0<\gamma\le T,0<\gamma'\le T}\left(\frac{\sin(\alpha/2)(\gamma-\gamma')\log T}{(\alpha/2)(\gamma-\gamma')\log T}\right)^2 w(\gamma-\gamma')\sim\left(1+\frac{\alpha}{3}\right)\frac{T}{2\pi}\log T. \tag{6}$$

Dans cette dernière assertion on peut supprimer le facteur $w(\gamma-\gamma')$ si on le souhaite. Nous utilisons (6) pour déduire le

Corollaire 2. *(On suppose RH.) Lorsque T tend vers l'infini*

$$\sum_{\substack{0<\gamma\le T\\ \varrho \text{ simple}}} 1\ge\left(\frac{2}{3}+\mathrm{o}(1)\right)\frac{T}{2\pi}\log T. \tag{7}$$

Le nombre de zéros de $\zeta(s)$ avec $0<\gamma\le T$ est $\sim\left(\frac{T}{2\pi}\right)\log T$, de sorte que ce qui précède affirme qu'au moins $\frac{2}{3}$ des zéros sont simples. C'est un fait connu (voir [6]) que les 3 500 000 premiers zéros sont simples et se trouvent sur la droite critique $\sigma=\frac{1}{2}$. Bien que l'on s'attende à ce que tous les zéros de $\zeta(s)$ soient simples, le seul autre résultat dans cette direction est dû à A. Selberg [7]. Son résultat est inconditionnel ; il énonce qu'une densité positive des zéros de $\zeta(s)$ sont d'ordre impair et se trouvent sur la droite critique.

Soit $0<\gamma_1\le\gamma_2\le\cdots$ les parties imaginaires des zéros de $\zeta(s)$ dans le demi-plan supérieur. La moyenne de $\gamma_{n+1}-\gamma_n$ est $\frac{2\pi}{\log\gamma_n}$; notre théorème nous permet de montrer que $\gamma_{n+1}-\gamma_n$ n'est pas toujours proche de sa moyenne.

Corollaire 3. *(On suppose RH.) On peut calculer une constante λ telle que*

$$\liminf_n\left((\gamma_{n+1}-\gamma_n)\left(\log\left(\frac{\gamma_n}{2\pi}\right)\right)\right)\le\lambda<1. \tag{8}$$

Un argument compliqué permettrait de montrer qu'en fait $\gamma_{n+1}-\gamma_n\le\frac{2\pi\lambda}{\log\gamma_n}$ pour une densité positive de n. Ceci, joint au fait que la valeur moyenne est $\frac{2\pi}{\log\gamma_n}$, permet d'affirmer que

$$\limsup_n(\gamma_{n+1}-\gamma_n)\left(\frac{\log\gamma_n}{2\pi}\right)\ge\lambda'>1. \tag{9}$$

Nous notons que si $\zeta(s)$ a une infinité de zéros multiples alors on peut prendre $\lambda=0$ dans (8). Notre preuve permet de prendre $\lambda=0.68$. Il serait intéressant d'avoir $\lambda<\frac{1}{2}$, car P. J. Weinberger et moi avons établi ce qui suit : soit $d>0$ sans facteur carré, et posons $K=\mathbb{Q}((-d)^{1/2})$. Soit $h(-d)$ le nombre de classes de K, et soit $\zeta_K(s)=\zeta(s)L(s,\chi)$ la fonction zêta de Dedekind de K. Pour chaque A positif, il existe une constante effectivement calculable $d_0=d_0(A,\varepsilon)$ telle que si $h(-d)\le A$, $d>d_0$, alors tous les zéros de $\zeta_K(s)$ qui se trouvent dans le rectangle $0<\sigma<1$,

$0 \le t \le d^{1/2-\varepsilon}$ sont sur la droite $\sigma = \frac{1}{2}$; si $\frac{1}{2} + i\gamma_n, \frac{1}{2} + i\gamma_{n+1}$ sont des zéros consécutifs de $\zeta_K(s)$ dans ce domaine alors

$$(1-\varepsilon)\frac{2\pi}{\log d(\gamma_n+2)^2} \le \gamma_{n+1} - \gamma_n \le (1+\varepsilon)\frac{2\pi}{\log d(\gamma_n+2)^2}. \tag{10}$$

On peut s'interroger sur le comportement de $F(\alpha)$ pour $\alpha \ge 1$. Notre première observation est que (2) ne peut pas être valable uniformément pour $0 \le \alpha \le C$ si C est grand. Car si tel était le cas, alors (6) serait valable pour $0 < \alpha \le C$. Écrivons (6) sous la forme $G(\alpha) \sim H(\alpha)$. D'une part $|\sin 2x| \le 2|\sin x|$, donc $G(2\alpha) \le G(\alpha)$ pour tout α. D'autre part $H(2\alpha) > \frac{3}{2}H(\alpha)$ pour $\alpha \ge 2$. Cela suggère que $F(\alpha)$ subit un changement de comportement pour $\alpha \ge 1$. D'autres considérations du même type conduisent à croire que certaines moyennes de $F(\alpha)$ sur de grands α sont proches de 1. À la fin du § 3, nous décrivons deux arguments heuristiques qui suggèrent que

$$F(\alpha) = 1 + \mathrm{o}(1) \tag{11}$$

pour $\alpha \ge 1$, uniformément sur des intervalles bornés. Ceci, joint au Théorème, détermine complètement F, de sorte qu'un usage approprié de (3) conduit immédiatement à une

Conjecture. *Pour $\alpha < \beta$ fixés,*

$$\sum_{\substack{0<\gamma\le T \\ 2\pi\alpha/\log T \le \gamma-\gamma' \le 2\pi\beta/\log T}} 1 \sim \left(\int_\alpha^\beta \left(1 - \left(\frac{\sin \pi u}{\pi u}\right)^2\right) du + \delta(\alpha,\beta)\right) \frac{T}{2\pi}\log T \tag{12}$$

lorsque T tend vers l'infini. Ici $\delta(\alpha,\beta) = 1$ si $0 \in [\alpha,\beta]$, $\delta(\alpha,\beta) = 0$ sinon.

La fonction δ de Dirac apparaît naturellement ci-dessus, car si $0 \in [\alpha,\beta]$ alors la somme inclut les termes $\gamma = \gamma'$.

Les assertions (11) et (12) sont essentiellement équivalentes. De l'une ou l'autre il suit immédiatement que presque tous les zéros sont simples. À partir de (11), il est facile de voir comment le Corollaire 1 devrait être étendu : si (11) est vraie alors pour $\alpha \ge 1$,

$$\sum_{0<\gamma\le T, 0<\gamma'\le T} \left(\frac{\sin \alpha(\gamma-\gamma')\log T}{\alpha(\gamma-\gamma')\log T}\right) w(\gamma-\gamma') \sim \frac{T}{2\pi}\log T, \tag{13}$$

et

$$\sum_{0<\gamma\le T, 0<\gamma'\le T} \left(\frac{\sin(\alpha/2)(\gamma-\gamma')\log T}{(\alpha/2)(\gamma-\gamma')\log T}\right)^2 w(\gamma-\gamma') \sim \left(1 + \frac{1}{3\alpha^2}\right)\frac{T}{2\pi}\log T. \tag{14}$$

Dans une certaine terminologie standard, la Conjecture peut être formulée comme l'assertion que $1 - \left(\frac{\sin \pi u}{\pi u}\right)^2$ est la fonction de corrélation de paires des zéros de la fonction zêta.

F. J. Dyson a attiré mon attention sur le fait que les valeurs propres d'une matrice complexe hermitienne ou unitaire aléatoire de grand ordre ont précisément la même fonction de corrélation de paires (voir [3, équations (6.13), (9.61)]). Cela signifie que la Conjecture s'accorde bien avec l'idée qu'il

existe un opérateur linéaire (encore non découvert) dont les valeurs propres caractérisent les zéros de la fonction zêta. Les valeurs propres d'une matrice réelle symétrique aléatoire de grand ordre ont une fonction de corrélation de paires différente, et les valeurs propres d'une matrice symplectique aléatoire de grand ordre en ont encore une autre. En fait les "facteurs de forme" $F_2(\alpha), F_5(\alpha)$ de ces dernières corrélations de paires sont non linéaires pour $0 < \alpha < 1$, de sorte que notre Théorème nous permet de distinguer le comportement des zéros de $\zeta(s)$ de celui des valeurs propres de telles matrices. Par conséquent, s'il existe un opérateur linéaire dont les valeurs propres caractérisent les zéros de la fonction zêta, on peut s'attendre à ce qu'il soit complexe hermitien ou unitaire.

On pourrait étendre le présent travail à l'étude de la corrélation de k-uples de zéros de la fonction zêta. Si l'analogie avec les matrices complexes hermitiennes aléatoires semblait se poursuivre, alors on pourrait conjecturer que la fonction de corrélation de k-uples $\widehat{F}(u_1, u_2, \dots, u_k)$ est donnée par

$$\widehat{F}(u_1, u_2, \dots, u_k) = \det A, \tag{15}$$

où $A = [a_{ij}]$ est la matrice $k \times k$ de coefficients $a_{ii} = 1$, $a_{ij} = \dfrac{\sin \pi(u_i - u_j)}{\pi(u_i - u_j)}$ pour $i \neq j$.

Ici la normalisation est la même que dans la Conjecture, qui est le cas $k = 2$ de ce qui précède.

Si l'on continue à s'appuyer sur l'analogie avec les matrices complexes hermitiennes aléatoires, on peut alors formuler une conjecture concernant la distribution des nombres $\gamma_{n+1} - \gamma_n$. La conjecture précise fait intervenir une fonction sphéroïdale compliquée (mais calculable). Ainsi, ou autrement, on peut conjecturer que

$$\liminf_n (\gamma_{n+1} - \gamma_n) \log \gamma_n = 0, \tag{16}$$

et

$$\limsup_n (\gamma_{n+1} - \gamma_n) \log \gamma_n = +\infty; \tag{17}$$

de sorte que le Corollaire 3 est probablement loin de la vérité.

Il serait intéressant de voir comment les données numériques se comparent aux conjectures ci-dessus. Les quelques premiers milliers de zéros ont été calculés, de sorte qu'il ne serait pas difficile de rassembler les statistiques pertinentes. Cependant, les données sur les échecs de la "loi de Gram" indiquent que le comportement asymptotique est approché très lentement. Ainsi les données numériques pourraient ne pas être particulièrement éclairantes.

2. Une formule explicite.

Pour démontrer notre Théorème, nous avons besoin de la formule suivante, qui relie les zéros de $\zeta(s)$ aux nombres premiers.

LEMME. *Si* $1 < \sigma < 2$ *et* $x \geq 1$ *alors*

$$\begin{aligned}(2\sigma - 1) \sum_\gamma \frac{x^{i\gamma}}{(\sigma - \frac{1}{2})^2 + (t - \gamma)^2} = &- x^{-1/2} \left(\sum_{n \leq x} \Lambda(n) \left(\frac{x}{n}\right)^{1-\sigma+it} + \sum_{n>x} \Lambda(n) \left(\frac{x}{n}\right)^{\sigma+it} \right) \\ &+ x^{1/2-\sigma+it}(\log \tau + O_\sigma(1)) + O_\sigma(x^{1/2}\tau^{-1}),\end{aligned} \tag{18}$$

où $\tau = |t| + 2$. Les constantes implicites ne dépendent que de σ.

PREUVE. Il est bien connu (voir [2, p. 353]) que si $x > 1$, $x \neq p^\nu$, alors

$$\sum_{n\leq x} \Lambda(n)n^{-s} = -\frac{\zeta'}{\zeta}(s) + \frac{x^{1-s}}{1-s} - \sum_{\varrho} \frac{x^{\varrho-s}}{\varrho-s} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-2n-s}}{2n+s}$$

pourvu que $s \neq 1$, $s \neq \varrho$, $s \neq -2n$. Cela ne dépend pas de RH, mais si nous supposons RH alors ce qui précède peut s'écrire

$$\sum_{\varrho} \frac{x^{i\gamma-it}}{\sigma - \frac{1}{2} + it - i\gamma} = x^{\sigma-1/2}\left(\frac{\zeta'}{\zeta}(s) + \sum_{n\leq x} \Lambda(n)n^{-s} - \frac{x^{1-s}}{1-s} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-2n-s}}{2n+s}\right). \tag{19}$$

Si nous remplaçons s par $1 - \sigma + it$ dans ce qui précède, alors nous avons

$$\begin{aligned}\sum_{\varrho} \frac{x^{i\gamma-it}}{\frac{1}{2} - \sigma + it - i\gamma} = x^{1/2-\sigma}\Bigg(&\frac{\zeta'}{\zeta}(1-\sigma+it) + \sum_{n\leq x} \Lambda(n)n^{\sigma-1-it} - \frac{x^{\sigma-it}}{\sigma-it} \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-2n-1+\sigma+it}}{2n+1-\sigma+it}\Bigg).\end{aligned} \tag{20}$$

Nous soustrayons les membres respectifs de (20) de (19), et utilisons la relation

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)n^{-s}, \tag{21}$$

qui est valable pour $\sigma > 1$. Nous trouvons que

$$\begin{aligned}(2\sigma-1)\sum_{\varrho} \frac{x^{i\gamma}}{(\sigma-\frac{1}{2})^2 + (t-\gamma)^2} = &- x^{-1/2}\left(\sum_{n\leq x} \Lambda(n)\left(\frac{x}{n}\right)^{1-\sigma+it} + \sum_{n>x} \Lambda(n)\left(\frac{x}{n}\right)^{\sigma+it}\right) \\ &- \frac{\zeta'}{\zeta}(1-\sigma+it)x^{1/2-\sigma+it} + \frac{x^{1/2}(2\sigma-1)}{(\sigma-1+it)(\sigma-it)} \\ &- x^{-1/2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2\sigma-1)x^{-2n}}{(\sigma-1-it-2n)(\sigma+it+2n)}.\end{aligned} \tag{22}$$

Les deux membres de ce qui précède sont continus pour tout $x \geq 1$, de sorte que nous n'excluons plus les valeurs $x = 1$, $x = p^\nu$. Si $1 < \sigma < 2$, alors à partir de la dérivée logarithmique de l'équation fonctionnelle de la fonction zêta (voir [1, pp. 75, 82-83]) nous avons

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(1-\sigma+it) = -\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma-it) - \log\tau + O_\sigma(1) \quad ;$$

d'après (21), nous voyons que ceci est $= -\log\tau + O_\sigma(1)$. Par conséquent le membre de droite de (22) est

$$\begin{aligned}= &- x^{-1/2}\left(\sum_{n\leq x} \Lambda(n)\left(\frac{x}{n}\right)^{1-\sigma+it} + \sum_{n>x} \Lambda(n)\left(\frac{x}{n}\right)^{\sigma+it}\right) \\ &+ x^{1/2-\sigma+it}(\log\tau + O_\sigma(1)) + O_\sigma(x^{1/2}\tau^{-2}) + O_\sigma(x^{-2}\tau^{-1}),\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat.

3. Preuve du Théorème.

La première assertion du Théorème découle de l'observation que nous pouvons échanger γ et γ' dans (1). Pour prouver les assertions restantes, prenons $\sigma = \dfrac{3}{2}$ dans le Lemme, et écrivons (18) brièvement sous la forme $L(x,t) = R(x,t)$. Nous évaluons les intégrales $\displaystyle\int_0^T |L(x,t)|^2 dt$, $\displaystyle\int_0^T |R(x,t)|^2 dt$.

Nous traitons d'abord le membre de gauche. Nous avons

$$\int_0^T |L(x,t)|^2 dt = 4 \sum_{\gamma,\gamma'} x^{i(\gamma-\gamma')} \int_0^T \frac{dt}{(1+(t-\gamma)^2)(1+(t-\gamma')^2)}. \tag{23}$$

Nous souhaitons exclure les nombres $\gamma \notin [0,T]$. Il suffit de montrer que

$$\sum_{\gamma,\gamma' \notin [0,T]} \int_0^T \frac{dt}{(1+(t-\gamma)^2)(1+(t-\gamma')^2)} \ll \log^3 T, \tag{24}$$

car alors (23) devient

$$\int_0^T |L(x,t)|^2 dt = 4 \sum_{0<\gamma\le T, 0<\gamma'\le T} x^{i(\gamma-\gamma')} \int_0^T \frac{dt}{(1+(t-\gamma)^2)(1+(t-\gamma')^2)} + \mathrm{O}(\log^3 T). \tag{25}$$

Pour prouver (24) nous utilisons le fait (Théorème 9.2 de [8]) que si $T \ge 2$ alors il y a $\ll \log T$ zéros pour lesquels $T \le \gamma \le T+1$. De là il est immédiat que si $0 \le t \le T$ alors

$$\sum_{\gamma;\gamma' \notin [0,T]} \frac{1}{1+(t-\gamma)^2} \ll \left(\frac{1}{t+1} + \frac{1}{T-t+1}\right) \log T,$$

et

$$\sum_{\gamma} \frac{1}{1+(t-\gamma)^2} \ll \log T.$$

Dans le membre de gauche de (24) nous rentrons les sommes et utilisons les estimations ci-dessus. L'intégration est alors triviale, et nous obtenons (24).

En raisonnant de manière similaire, nous pouvons aussi montrer que

$$\sum_{0<\gamma\le T, 0<\gamma'\le T} \int_T^\infty \frac{dt}{(1+(t-\gamma)^2)(1+(t-\gamma')^2)} \ll \log^2 T \int_T^\infty \frac{dt}{(t-T+1)^2} \ll \log^2 T.$$

L'estimation de $\displaystyle\sum_{0<\gamma\le T, 0<\gamma'\le T} \int_{-\infty}^0 \cdots$ est la même, de sorte que nous voyons que (25) est

$$\int_0^T |L(x,t)|^2 dt = 4 \sum_{0<\gamma\le T, 0<\gamma'\le T} x^{i(\gamma-\gamma')} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1+(t-\gamma)^2)(1+(t-\gamma')^2)} + \mathrm{O}(\log^3 T).$$

Du calcul des résidus nous déduisons que l'intégrale définie est $= (\pi/2) w(\gamma-\gamma')$, de sorte que ce qui précède est

$$\int_0^T |L(x,t)|^2 dt = 2\pi \sum_{0<\gamma\le T, 0<\gamma'\le T} x^{i(\gamma-\gamma')} w(\gamma-\gamma') + \mathrm{O}(\log^3 T).$$

Si nous posons $x = T^\alpha$ alors nous avons

$$\int_0^T |L(T^\alpha, t)|^2 dt = F(\alpha) T \log T + \mathrm{O}(\log^3 T). \tag{26}$$

Ici le membre de gauche est clairement non négatif, de sorte que nous avons la deuxième assertion du Théorème.

Pour compléter la preuve du Théorème, nous prouvons (2) ; à cette fin, nous évaluons $\int_0^T |R(x,t)|^2 dt$. En premier lieu

$$\int_0^T |x^{-1+it} \log \tau|^2 dt = \frac{T}{x^2}(\log^2 T + \mathrm{O}(\log T)) \tag{27}$$

pour tout $x \geq 1$, $T \geq 2$. Pour calculer la moyenne quadratique de la série de Dirichlet au membre de droite de (18), nous utilisons la forme quantitative suivante (voir [5]) de l'identité de Parseval pour les séries de Dirichlet :

$$\int_0^T \left| \sum_n a_n n^{-it} \right|^2 dt = \sum_n |a_n|^2 (T + \mathrm{O}(n)). \tag{28}$$

Nous pourrions plutôt utiliser la relation plus faible

$$\int_0^T \left| \sum_{n \leq N} a_n n^{-it} \right|^2 dt = (T + \mathrm{O}(N)) \sum_{n \leq N} |a_n|^2;$$

c'est le Théorème 1.6 de [4]. Cependant, ce dernier est restreint aux polynômes de Dirichlet, aussi simplifions-nous notre traitement en raisonnant à partir de (28). Nous avons

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \int_0^T \left| \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \left(\frac{x}{n}\right)^{-1/2+it} + \sum_{n > x} \Lambda(n) \left(\frac{x}{n}\right)^{3/2+it} \right|^2 dt \\ = \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} \Lambda(n)^2 \left(\frac{x}{n}\right)^{-1} (T + \mathrm{O}(n)) + \frac{1}{x} \sum_{n > x} \Lambda(n)^2 \left(\frac{x}{n}\right)^3 (T + \mathrm{O}(n)). \end{aligned}$$

Par le théorème des nombres premiers avec terme d'erreur, ceci vaut

$$= T(\log x + \mathrm{O}(1)) + \mathrm{O}(x \log x). \tag{29}$$

Quant aux termes d'erreur dans (18), nous voyons que

$$\int_0^T |x^{-1+it}|^2 dt = \frac{T}{x^2}, \tag{30}$$

et

$$\int_0^T x \tau^{-2} dt \ll x. \tag{31}$$

Nous combinons maintenant nos estimations (27), (29), (30), (31) ; nous employons la conséquence suivante de l'inégalité de Cauchy-Schwarz : si $M_k = \int_0^T |A_k(t)|^2 dt$ et $M_1 \geq M_2 \geq M_3 \geq M_4$, alors

$$\int_0^T \left| \sum_{k=1}^4 A_k(t) \right|^2 dt = M_1 + \mathrm{O}((M_1 M_2)^{1/2}).$$

Nous considérons trois cas.

Cas 1. $1 \le x \le (\log T)^{3/4}$. Alors notre terme M_1 est donné par (27). Nos autres termes sont uniformément $\mathrm{o}(M_1)$, de sorte que notre expression est $= (1+\mathrm{o}(1))(T/x^2)\log^2 T$.

Cas 2. $(\log T)^{3/4} < x \le (\log T)^{3/2}$. Dans ce cas toutes nos estimations sont uniformément $\mathrm{o}(T\log T)$.

Cas 3. $(\log T)^{3/2} < x \le T/\log T$. Alors notre terme M_1 est donné par (29). Tous nos autres termes sont uniformément $\mathrm{o}(M_1)$, de sorte que notre expression est $= (1+\mathrm{o}(1))T\log x$.

Si nous posons $x = T^\alpha$ alors nous pouvons exprimer notre résultat en disant que

$$\int_0^T |R(T^\alpha, t)|^2 dt = ((1+\mathrm{o}(1))T^{-2\alpha}\log T + \alpha + \mathrm{o}(1))T\log T,$$

uniformément pour $0 \le \alpha \le 1-\varepsilon$. Ceci et (26) donnent (2), de sorte que la preuve est complète.

Si $\alpha > 1$ dans ce qui précède alors $x > T$, de sorte que le second terme d'erreur dans (29) n'est plus plus petit que le terme principal. Le terme d'erreur (31) pose aussi problème ; un peu de réflexion révèle que ce dont nous avons besoin est de connaître la taille de

$$\int_0^T \left| \frac{1}{x}\sum_{n\le x}\Lambda(n)n^{1/2-it} + x\sum_{n>x}\Lambda(n)n^{-3/2-it} - \frac{2x^{1/2-it}}{(\frac{1}{2}+it)(\frac{3}{2}-it)} \right|^2 dt. \tag{32}$$

Si nous développons l'intégrande et intégrons terme à terme, nous trouvons qu'il y a trop de termes non diagonaux pour être négligés. Nous pouvons cependant regrouper les termes de sorte que ce qui précède soit exprimé en termes de sommes du type $\sum_{n\le y}\Lambda(n)\Lambda(n+h)$. Il y a diverses indications que cette somme est approximativement $c(h)y$, où $c(h)$ est une certaine constante arithmétique. Si nous remplaçons ces sommes par leurs approximations conjecturées $c(h)y$, alors notre nouvelle expression est $\sim T\log T$. De plus, il existe une hypothèse raisonnable quant à la taille des différences

$$\sum_{n\le y}\Lambda(n)\Lambda(n+h) - c(h)y \tag{33}$$

qui, si elle est vraie, nous permettrait de mener à bien notre programme pour $1 \le \alpha < 2$. Si les différences (33) sont non seulement raisonnablement petites mais aussi se comportent indépendamment pour différents h, alors (32) est $\sim T\log T$ pour tout $\alpha \ge 1$.

Une autre indication du comportement de l'expression (32) peut être obtenue en considérant son "analogue q". L'expression

$$\sum_{q\le Q}\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi\ne\chi_0}\left|\frac{1}{x}\sum_{n\le x}\Lambda(n)\chi(n)n^{1/2} + \sum_{n>x}\Lambda(n)\chi(n)n^{-3/2}\right|^2 \tag{34}$$

peut être montrée comme étant $\sim Q\log x$ pour $Q \ge x$, en analogie avec (29).

Si $x(\log x)^{-A} \le Q \le x$ alors nous pouvons utiliser une technique établie [4, Chapitre 17] pour montrer que (34) est $\sim Q \log Q$. Si GRH est vraie alors cette dernière relation asymptotique est valable pour $x^{3/4+\varepsilon} < Q \le x$. Ceci correspond à $1 \le \alpha < \frac{4}{3}$. On ne s'attend pas à un changement de comportement pour des α plus grands, mais une analyse plus délicate des termes d'erreur est nécessaire si l'on veut étendre le résultat.

4. Les corollaires.

Pour prouver le Corollaire 1 nous utilisons notre Théorème conjointement avec (3). Pour obtenir (5), nous prenons $r(u) = \dfrac{\sin 2\pi\alpha u}{2\pi\alpha u}$. Le Théorème fait de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(\beta)\widehat{r}(\beta)d\beta = \frac{1}{2\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha} F(\beta)d\beta$$

une tâche simple à calculer. Pour obtenir (6) nous prenons $r(u) = \left(\dfrac{\sin \pi\alpha u}{\pi\alpha u}\right)^2$. Là encore, à partir du Théorème, il est facile de calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(\beta)\widehat{r}(\beta)d\beta = \frac{1}{\alpha^2}\int_{-\alpha}^{+\alpha} (\alpha - |\beta|)F(\beta)d\beta.$$

Nous prouvons maintenant le Corollaire 2. Soit m_ϱ la multiplicité du zéro ϱ. Dans une somme sur $0 < \gamma \le T$, notre convention concernant les zéros multiples est que les zéros sont comptés selon leurs multiplicités. Ceci est réalisé en permettant à γ de prendre la même valeur m_ϱ fois. En particulier,

$$\sum_{0<\gamma\le T} m_\varrho = \sum_{\substack{0<\gamma\le T\\ 0<\gamma'\le T\\ \gamma=\gamma'}} 1$$

car des deux côtés un zéro donné ϱ est compté avec le poids m_ϱ^2. Mais

$$\sum_{\substack{0<\gamma\le T\\ \gamma=\gamma'}} 1 \le \sum_{0<\gamma\le T, 0<\gamma'\le T} \left(\frac{\sin(\alpha/2)(\gamma-\gamma')\log T}{(\alpha/2)(\gamma-\gamma')\log T}\right)^2 w(\gamma-\gamma'),$$

et si nous prenons $\alpha = 1 - \delta$ alors d'après (6), ce qui précède est

$$\sum_{0<\gamma\le T, 0<\gamma'\le T} \left(\frac{\sin(\alpha/2)(\gamma-\gamma')\log T}{(\alpha/2)(\gamma-\gamma')\log T}\right)^2 w(\gamma-\gamma') \le \left(\frac{4}{3}+\varepsilon\right)\left(\frac{T}{2\pi}\right)\log T.$$

Nous avons donc démontré que

$$\sum_{0<\gamma\le T} m_\varrho \le \left(\frac{4}{3}+\mathrm{o}(1)\right)\left(\frac{T}{2\pi}\right)\log T.$$

Or

$$\sum_{\substack{0<\gamma\le T\\ \varrho \text{ simple}}} 1 \ge \sum_{0<\gamma\le T} (2 - m_\varrho) \ge \left(2 - \frac{4}{3} + \mathrm{o}(1)\right)\frac{T}{2\pi}\log T,$$

de sorte que nous avons le Corollaire 2. Le noyau $\widehat{r}(u)$ que nous avons utilisé ne semble pas optimal pour notre objectif, aussi peut-on vraisemblablement améliorer légèrement la constante $\frac{2}{3}$.

Nous passons maintenant à la première assertion du Corollaire 3. Nous prenons

$$r(u) = \max(1 - |u|/\lambda, 0)$$

dans (3), et choisissons λ plus tard. Or $\widehat{r}(\alpha)$ est non négatif, et $\int_0^\infty \widehat{r}(\alpha)d\alpha < \infty$, de sorte que notre Théorème nous permet de calculer une borne inférieure pour le membre de droite de (3). Nous voyons que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha)\widehat{r}(\alpha)d\alpha \geq (1 + \mathrm{o}(1)) \left(\lambda + 2\lambda \int_0^1 \alpha \left(\frac{\sin \pi\lambda\alpha}{\pi\lambda\alpha}\right)^2 d\alpha\right) \frac{T}{2\pi} \log T.$$

Nous pouvons supposer que tous les zéros sauf un nombre fini sont simples, de sorte que les termes $\gamma = \gamma'$ dans (3) contribuent pour un montant $\sim \left(\frac{T}{2\pi}\right) \log T$. Par conséquent

$$\sum_{\substack{0<\gamma\leq T \\ 0<\gamma'\leq T \\ 0<\gamma-\gamma'\leq 2\pi\lambda/\log T}} 1 \geq \left(\frac{1}{3} + \mathrm{o}(1)\right) C(\lambda) \frac{T}{2\pi} \log T$$

où

$$C(\lambda) = \lambda + \left(\frac{1}{\pi^2\lambda}\right) \mathrm{Cin}(2\pi\lambda) - 1.$$

Ici $\mathrm{Cin}(x)$ est l'"intégrale cosinus,"

$$\mathrm{Cin}\ x = \int_0^x \frac{1 - \cos u}{u} du.$$

Notons que l'intégrande est non négatif, de sorte que $\mathrm{Cin}(x) > 0$ pour $x > 0$. Pour obtenir (8) nous montrons que $C(\lambda) > 0$ pour un certain $\lambda < 1$. C'est facile, car $C(1) = \left(\frac{1}{\pi^2}\right) \cdot \mathrm{Cin}(2\pi) > 0$, et $C(\lambda)$ est continue. En fait un petit calcul révèle que $C(0.68) > 0$. Nous n'avons pas déterminé le noyau optimal $\widehat{r}(\alpha)$, aussi devrait-on pouvoir améliorer la constante 0.68.

Références

[1] H. Davenport, *Multiplicative number theory*, Lectures in Advanced Math., no. 1, Markham, Chicago, Ill., 1967. MR **36** #117.

[2] Edmund Landau, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, Teubner, Berlin, 1909.

[3] M. L. Mehta, *Random matrices and the statistical theory of energy levels*, Academic Press, New York, 1967. MR **36** #3554.

[4] Hugh L. Montgomery, *Topics in multiplicative number theory*, Lecture Notes in Math., vol. 227, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1971.

[5] Hugh L. Montgomery and R. C. Vaughan, *Hilbert's inequality* (to appear).

[6] J. B. Rosser, J. M. Yohe and L. Schoenfeld, *Rigorous computation and the zeros of the Riemann zeta-function (with discussion)*, Information Processing 68 (Proc. IFIP Congress, Edinburgh, 1968), vol. 1, Math. Software, North-Holland, Amsterdam, 1969, pp. 70-76. MR **41** #2892.

[7] Atle Selberg, *On the zeros of Riemann's zeta-function*, Skr. Norske Vid. Akad. Oslo I (1942), no. 10, 59 pp. MR **6**, 58.

[8] E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta-function*, Clarendon Press, Oxford, 1951. MR **13**, 741.

Trinity College
Cambridge, Royaume-Uni.