Théorie additive des nombres premiers
L. Mirsky

Le domaine d'étude de la théorie additive des nombres premiers est clairement indiqué par son nom. Dans cette branche de la théorie des nombres, nous nous intéressons à la représentation des entiers comme sommes de nombres premiers ; et le problème central consiste en la démonstration (ou éventuellement l'infirmation) d'une célèbre conjecture émise par Goldbach en 1742, selon laquelle tout entier pair ≥ 4 peut être représenté comme somme de 2 nombres premiers. La vérité de cette conjecture n'est toujours pas établie ; mais bien que les progrès dans ce domaine aient été lents, les tentatives pour résoudre ce problème ont conduit à toute une série de résultats remarquables.

Le problème de Goldbach est resté pratiquement intact jusqu'en 1923, date à laquelle Hardy et Littlewood l'ont attaqué au moyen d'une technique analytique nouvelle et puissante, qui a été nommée (d'après une intégrale de contour utilisée dans l'argumentation) la "méthode du cercle". Les travaux de Hardy et Littlewood ont montré que le problème était abordable ; mais le succès de leur méthode était incomplet, car ils ne purent établir leurs résultats qu'en supposant une certaine hypothèse de la théorie des fonctions qui reste non démontrée à ce jour (l'hypothèse de Riemann généralisée). [1]

En combinant les idées de Hardy et Littlewood avec des inégalités pour les sommes exponentielles d'une ingéniosité audacieuse, Vinogradoff réussit en 1937 à se passer de GRH et à fonder solidement toutes les affirmations hypothétiques antérieures. Le résultat le plus important démontré de cette manière était le suivant.

Théorème 1. *Tout entier impair suffisamment grand peut être représenté comme somme de 3 nombres premiers.*

Ce résultat découle, bien sûr, trivialement de la conjecture de Goldbach, mais l'inférence inverse ne peut pas être faite.

Vinogradoff a en fait démontré bien plus que le théorème 1. Soit $r_3(n)$ le nombre de représentations de n comme somme de 3 nombres premiers. Vinogradoff a montré que, lorsque $n \to \infty$ par valeurs impaires [2]

$$r_3(n) \sim \frac{n^2}{2\log^3 n} \prod_p \left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right) \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p^2 - 3p + 3}\right). \tag{1}$$

On peut également noter un corollaire immédiat du théorème 1.

Théorème 2. *Tout entier pair suffisamment grand peut être représenté comme somme de 4 nombres premiers.*

Version abrégée d'une conférence donnée au British Mathematical Colloquium à St. Andrews en septembre 1956. Référence originale : L. Mirsky, "Additive Prime Number Theory", *The Mathematical Gazette*, Vol. 42, No. 339 (fév. 1958), pp. 7-10.

1. Cette hypothèse, que nous désignerons par GRH, est une généralisation de la célèbre "hypothèse de Riemann".
2. Le symbole $\sim$ indique que le rapport des deux côtés du symbole tend vers 1. La lettre p est réservée tout au long de la note aux nombres premiers ; et dans le premier produit du côté droit de (1), p couvre tous les nombres premiers, alors que dans le second, il couvre tous les diviseurs premiers de n.

Un autre résultat intéressant issu des travaux de Vinogradoff est le suivant. Soit $N(x)$ le nombre d'entiers pairs $\leq x$ qui ne sont pas représentables comme somme de 2 nombres premiers ; alors $N(x)/x \to 0$ quand $x \to \infty$. Ainsi, la conjecture de Goldbach est vraie du moins dans la majorité des cas, et cette assertion est généralement exprimée sous la forme suivante.

Théorème 3. *Presque tous les entiers pairs peuvent être représentés comme sommes de 2 nombres premiers.*

Les trois théorèmes énoncés ci-dessus, ainsi que la formule asymptotique (1), ont été établis pour la première fois par Hardy et Littlewood sur la base de l'hypothèse non démontrée GRH.

Le développement de la méthode du cercle entre les mains de Hardy, Littlewood et Vinogradoff est probablement relativement bien connu, et nous proposons donc d'examiner plus en détail un traitement alternatif des problèmes de la théorie additive des nombres. Il s'agit de la "méthode du crible", qui fut conçue à l'origine par Viggo Brun en 1915-1920 et a depuis été modifiée et étendue par d'autres auteurs. La méthode du crible est élémentaire et ne conduit pas à la solution complète d'aucun problème, mais, comparée à la méthode du cercle, elle a l'avantage d'être applicable à un plus large éventail de questions.

Considérons la suite d'entiers $1, 2, ..., n$ et soit $p_1, \ldots, p_r$ r nombres premiers distincts quelconques. De cette suite, nous supprimons tous les entiers qui appartiennent à au moins une des r progressions arithmétiques spécifiées de différences communes $p_1, \ldots, p_r$ respectivement, c'est-à-dire que nous supprimons une classe de résidus (mod p_1), une classe de résidus (mod p_2), et ainsi de suite. Plus généralement, il peut être nécessaire de supprimer $m \geq 1$ classes de résidus modulo chacun des nombres premiers $p_1, \ldots, p_r$, et cette procédure est décrite comme un "criblage". Brun a donné une méthode pour estimer le nombre d'entiers de la suite 1, 2, ..., n qui survivent au processus de criblage, et il a montré comment de telles estimations pouvaient être utilisées pour traiter des questions qui avaient auparavant semblé insolubles.

Une adaptation de la méthode du crible de Brun permit à Schnirelmann, en 1930, de faire un progrès très substantiel dans la direction de la conjecture de Goldbach. Désignons par $p_1, \ldots, p_k$ tous les nombres premiers $< \sqrt{n}$, et par $Q(n)$ le nombre d'entiers positifs $t < n$ tels que

$$t \not\equiv 0, \qquad t \not\equiv n \pmod{p_i} \qquad (i = 1, \ldots, k).$$

Ainsi, $Q(n)$ est le nombre d'entiers $< n$ qui n'appartiennent pas à deux classes de résidus spécifiées modulo chacun des nombres premiers $p_1, \ldots, p_k$. Utilisant la méthode du crible, Schnirelmann a montré que[3]

$$Q(n) < c_1 \frac{n}{\log^2 n} \sum_{d|n} d^{-1}, \tag{2}$$

où, dans la somme, d parcourt tous les diviseurs de n. Ensuite, soit $r_2(n)$ le nombre de représentations de n comme somme de deux nombres premiers, c'est-à-dire le nombre de solutions de l'équation

$$n = p' + p''. \tag{3}$$

3. La lettre c est réservée aux constantes absolues positives.

Le nombre de solutions de (3) vérifiant $p' > \sqrt{n}, p'' > \sqrt{n}$ ne dépasse pas $Q(n)$; tandis que le nombre de solutions vérifiant $\min(p', p'') < \sqrt{n}$ ne dépasse pas $2\sqrt{n}$. Par conséquent,

$$r_2(n) < Q(n) + 2\sqrt{n},$$

et donc, d'après (2),

$$r_2(n) < c_2 \frac{n}{\log^2 n} \sum_{d|n} d^{-1}.$$

Ainsi, $r_2(n)$ n'est jamais très grand. D'autre part, la valeur moyenne de $r_2(n)$ n'est pas trop petite, car

$$\sum_{n \leq x} r_2(n) = \sum_{p'+p'' \leq x} 1 > c_3 \frac{x^2}{\log^2 x}.$$

Or, si une fonction non négative n'est pas trop petite en moyenne et pas trop grande pour toute valeur de la variable n, alors elle doit être positive pour de nombreuses valeurs de n. La formulation précise de cette idée nous permet de déduire que le nombre $E(n)$ d'entiers $t < n$ tels que $r_2(t) > 0$ (c'est-à-dire le nombre d'entiers $< n$ représentables au sens de Goldbach) satisfait l'inégalité $E(n) > c_4 n$.

En d'autres termes, la suite des entiers "représentables" a une densité positive [4]. Or, il a été montré par Schnirelmann - et la démonstration n'est pas du tout difficile - que si une suite $\{s_i\}$ d'entiers a une densité positive δ, alors il existe un nombre $l = l(\delta)$ tel que tout entier peut être représenté comme somme d'au plus l éléments de $\{s_i\}$. Il s'ensuit donc que tout entier est la somme d'au plus c_5 entiers "représentables", et donc la somme d'au plus $2c_5 = c_6$ nombres premiers.

La valeur de c_6 qui ressortait de l'analyse de Schnirelmann était grande, à savoir 800 000. Néanmoins, le théorème selon lequel tout entier est la somme d'au plus 800 000 nombres premiers constituait un très grand pas en avant, car à l'époque seuls les résultats hypothétiques de Hardy et Littlewood étaient disponibles. Des auteurs ultérieurs ont amélioré l'aspect quantitatif des travaux de Schnirelmann. On a montré, finalement, que tout nombre suffisamment grand est la somme d'au plus 67 nombres premiers, mais ce résultat fut bientôt lui-même supplanté par les théorèmes I et II de Vinogradoff.

Jusqu'à présent, nous avons discuté de la représentation des entiers comme sommes de plus de 2 nombres premiers, mais un assouplissement de la conjecture de Goldbach peut évidemment prendre différentes formes et nous pourrions, par exemple, considérer la représentation de n sous la forme $n = n_1 + n_2$, où les conditions imposées à n_1 et n_2 sont moins sévères que celles de primalité. Brun a utilisé sa méthode du crible dans une investigation de ce type et a montré que tout entier suffisamment grand peut être représenté comme somme de 2 entiers ayant chacun au plus 9 diviseurs premiers. Ce résultat fut amélioré par étapes successives jusqu'à ce qu'en 1940, Buchstab démontre

Théorème 4. *Tout entier suffisamment grand peut être représenté comme somme de 2 entiers ayant chacun au plus 4 diviseurs premiers* [5].

4. La densité de la séquence $\{s_i\}$ est définie comme la borne inférieure de $S(n)/n$, où $S(n)$ dénote le nombre de s_i qui n'excèdent pas n.

5. A. Selberg a établi en 1949 qu'il est possible de remplacer le nombre 4 dans le théorème 4 par 3, mais il n'a pas publié de preuve détaillée.

Une variante du problème que nous venons de considérer consiste à étudier l'existence de représentations de n sous la forme $n = p + n'$, où n' a peu de diviseurs premiers. Dès 1932, Estermann avait montré que, sous une hypothèse légèrement plus forte que GRH, tout entier n suffisamment grand possède une telle représentation, avec n' ayant au plus 6 diviseurs premiers. En 1948, Renyi a démontré un théorème extrêmement intéressant qui, bien que plus faible que celui d'Estermann, ne dépend d'aucun résultat non démontré. Le théorème de Renyi est le suivant.

Théorème 5. *Tout entier peut être représenté comme la somme d'un nombre premier et d'un nombre ayant au plus c_7 diviseurs premiers.*

La démonstration de ce résultat est longue et difficile et fait pleinement usage à la fois de techniques arithmétiques et analytiques. Le trait probablement le plus intéressant de la démonstration est une généralisation puissante de la méthode du crible de Brun, et nous conclurons par une brève référence à cet aspect des travaux de Renyi. On se souviendra que la méthode du crible, telle qu'elle a été conçue par Brun, concerne l'estimation du nombre h d'entiers $< n$ qui n'appartiennent pas à m classes de résidus spécifiées modulo chacun des nombres premiers $p_1, \ldots, p_r$. Considérons maintenant le cas plus général où le nombre de classes de résidus exclues (mod p_i), au lieu d'être un nombre fixe m, est une fonction $f(p_i)$ de p_i. La méthode de Brun pour estimer h n'est plus applicable, mais en 1941 Linnik a inventé une technique pour traiter cette nouvelle opération - une opération qu'il a judicieusement nommée "le grand crible". Le théorème de Linnik énonce que si $p_1, \ldots, p_r$ sont des nombres premiers quelconques $< \sqrt{n}$ et $\sigma = \min f(p_i)/p_i$, alors $h \leq c_8 n/\sigma^2 r$. Ce résultat était même insuffisant pour les besoins de Renyi, et une généralisation encore plus poussée de la méthode du crible fut nécessaire avant que le théorème 5 puisse être établi.

Il existe, bien sûr, des résultats concernant la conjecture de Goldbach autres que ceux que nous avons mentionnés. Ainsi, par exemple, un théorème plutôt amusant dû à Linnik (1941) a énoncé que, si un entier pair quelconque est écrit dans le système binaire, alors il est possible de le convertir en un "nombre de Goldbach" en changeant au plus c_9 chiffres. Cependant, les cinq théorèmes énumérés ci-dessus sont certainement les approximations les plus importantes que l'on connaisse de la conjecture de Goldbach. Dans un certain sens, ils s'approchent tous du but recherché, mais la démonstration définitive nous échappe encore ; et il serait probablement téméraire de hasarder une conjecture sur le point de savoir si nous sommes actuellement proches ou non de la solution définitive du problème.

The University of Sheffield. L. M.