

Variance quantique pour les formes propres de Hecke

Wenzhi Luo et Peter Sarnak

2004

1. Résumé

Nous calculons la variance quantique pour la surface modulaire. Cette variance, introduite par Zelditch, décrit les fluctuations d'une observable quantique. La forme quadratique ainsi obtenue est ensuite comparée avec la variance classique. L'attente que ces deux coïncident ne devient vraie qu'après l'insertion de certains facteurs arithmétiques subtils, précisément les valeurs centrales des fonctions L correspondantes. Ce sont les termes non diagonaux dans l'analyse qui sont responsables de la riche structure arithmétique émergeant de la diagonalisation de la variance quantique.

2. Introduction

Ceci est le troisième article de la série [23, 24] traitant de l'équidistribution de la masse des formes automorphes sur $X = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ avec $\Gamma = \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ et $\mathbb{H}$ le demi-plan supérieur. Nous réalisons $\mathbb{H}$ comme $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})/\mathrm{SO}(2, \mathbb{R})$ avec sa métrique hyperbolique et $Y = \Gamma \backslash \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ comme l'espace cotangent unitaire de X . Les fonctions sur X peuvent être considérées comme des fonctions invariantes sous $\mathrm{SO}(2, \mathbb{R})$ sur Y et nous le ferons souvent. De cette manière, l'élément de Casimir ω dans l'algèbre enveloppante universelle de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ se restreint à l'opérateur de Laplace-Beltrami Δ lorsqu'il agit sur les fonctions de X .

Il y a deux types de formes automorphes que nous étudions. Les premières sont les formes cuspidales de Maass-Hecke sur X (voir [28]). Elles satisfont

$$\Delta\phi + \lambda\phi = 0, \quad T_n\phi = \lambda_\phi(n)\phi \quad (1)$$

où pour $n \geq 1$, T_n est l'opérateur de Hecke normalisé (voir [11]). Nous normalisons ces formes cuspidales de sorte que

$$\|\phi\|_2^2 = \int_X |\phi(z)|^2 \frac{dx dy}{y^2} = 1.$$

Si nous ordonnons les ϕ_j par leurs valeurs propres $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$, et par conséquent $\phi_1, \phi_2, \dots$, nous obtenons une base orthonormée pour le sous-espace cuspidal $L_{cusp}^2(X)$ de $L^2(X)$. Il est connu (d'après Selberg) que ces valeurs propres satisfont une loi de Weyl

$$N(\lambda) = \sum_{\lambda_j \leq \lambda} 1 \sim \frac{\mathrm{aire}(X)}{4\pi} \lambda = \frac{\lambda}{12}$$

lorsque $\lambda \rightarrow \infty$.

Les autres formes automorphes que nous considérons sont les formes cuspidales holomorphes dans $S_k(\Gamma)$ de poids entier pair k pour Γ (voir [30]). $S_k(\Gamma)$ est un espace vectoriel muni du produit

scalaire de Petersson. Soit H_k la base orthonormée des formes propres de Hecke pour $S_k(\Gamma)$. D'après le théorème de Riemann-Roch, nous avons

$$\dim S_k(\Gamma) = \#H_k \sim \frac{k}{12}$$

lorsque $k \rightarrow \infty$.

Notre intérêt porte sur la distribution des mesures de probabilité sur X , $\mu_\phi = |\phi(z)|^2 \frac{dx dy}{y^2}$ pour ϕ dans (1) et $\mu_f = y^k |f(z)|^2 \frac{dx dy}{y^2}$ pour $f \in H_k$, ainsi que sur leur comportement lorsque λ ou k tend vers l'infini (c'est-à-dire dans la limite semi-classique).

Pour expliquer à quoi s'attendre, rappelons quelques conjectures (ou suggestions) de la littérature physique. Le mouvement par géodésiques sur X donne naissance à un flux hamiltonien $\mathcal{G}_t$ sur Y donné par

$$\Gamma g \rightarrow \Gamma g \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ce flux préserve la mesure de Haar normalisée dg sur Y et est ergodique. Il a une entropie positive ainsi que toutes les autres caractéristiques d'un hamiltonien chaotique. Soit $C_0^\infty(Y)$ l'espace des fonctions lisses sur Y qui décroissent rapidement dans la pointe et de même nous définissons l'espace $C_0^\infty(X)$. Ainsi, si $\psi \in C_0^\infty(X)$ et pour tout $A > 0$, il existe une constante $C = C(A, \psi)$ telle que $|\psi(z)| \leq C(A, \psi) y^{-A}$ pour $y = \Im(z) \geq \sqrt{3}/2$ et de même pour les dérivées de ψ . Soit $C_{0,0}^\infty(X)$ (respectivement $C_{0,0}^\infty(Y)$) le sous-espace de $C_0^\infty(X)$ constitué des fonctions à moyenne nulle (c'est-à-dire $\int_X \psi(z) \frac{dx dy}{y^2} = 0$) et dont le zéroième coefficient de Fourier $\int_0^1 \psi(z) dx$ est nul pour y assez grand (selon ψ). Ainsi $C_{0,0}^\infty(X)$ contient l'espace $C_{c,0}^\infty(X)$ des fonctions lisses sur X à support compact et à moyenne nulle, ainsi que $C_{cusp}^\infty(X)$, l'espace des fonctions lisses à décroissance rapide sur X qui sont cuspidales. Ce dernier est engendré par les formes cuspidales de Hecke-Maass. Il est connu [25] que si $\psi \in C_{0,0}^\infty(Y)$, ses fluctuations le long d'une orbite générique du flux géodésique obéissent à un théorème central limite. Précisément, $\frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T \psi(\mathcal{G}_t(g)) dt$ devient gaussien de moyenne 0 et de variance $V(\psi)$ donnée par la forme hermitienne non négative suivante sur $C_{0,0}^\infty(Y)$:

$$V(\psi_1, \psi_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Gamma \backslash \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})} \psi_1 \left(g \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix} \right) \overline{\psi_2(g)} dg dt. \quad (2)$$

L'intégrale en t dans (2) converge absolument en raison de la décroissance exponentielle des corrélations pour le flux $\mathcal{G}_t$ [26]. Nous appelons la variance $V(\psi)$ de l'"observable classique", la variance classique.

Puisque ω commute avec la représentation régulière, il découle de (2) et d'une intégration par parties que

$$V(\omega\psi_1, \psi_2) = V(\psi_1, \omega\psi_2) \quad \text{et} \quad V(R_{a_1}\psi_1, R_{a_2}\psi_2) = V(\psi_1, \psi_2), \quad (3)$$

où R est la représentation régulière donnée par

$$R_{g_1}\psi(\Gamma g) = \psi(\Gamma g g_1)$$

et

$$a_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_1^{-1} \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 & 0 \\ 0 & \alpha_2^{-1} \end{pmatrix}.$$

En particulier, V est diagonalisée par les sous-espaces invariants pour l'action régulière de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ sur $L_0^2(Y)$. En restreignant V à $C_{0,0}^\infty(X)$, nous voyons d'après (3) que

$$V(\psi_1, \Delta\psi_2) = V(\Delta\psi_1, \psi_2).$$

Ainsi sur $C_{0,0}^\infty(X)$, V est diagonalisée par les formes cuspidales de Maass ϕ_j (et les séries d'Eisenstein unitaires correspondantes). Dans l'Annexe A, nous calculons la valeur propre de V sur ϕ_j , elle est donnée par :

$$V(\phi_j) = \frac{\left| \Gamma\left(\frac{1}{4} - \frac{it_j}{2}\right) \right|^4}{2\pi \left| \Gamma\left(\frac{1}{2} - it_j\right) \right|^2}, \quad (4)$$

où $\lambda_j = \frac{1}{4} + t_j^2$.

Le problème des valeurs propres (1) donne les états propres pour la quantification du flux hamiltonien $\mathcal{G}_t$. La quantification fournit également un opérateur auto-adjoint $Op(\psi)$ sur $L^2(X)$, pour toute fonction réelle ψ dans $C_0^\infty(Y)$. Dans ce cas, une quantification “canonique” est donnée par Zelditch [32]. $Op(\psi)$ est l'observable quantique correspondant à l'observable classique ψ et $\langle Op(\psi)\phi_j, \phi_j \rangle$ donne la valeur de cette observable dans l'état ϕ_j . Notons que si $\psi \in C_0^\infty(X)$, alors $Op(\psi)$ est simplement l'opérateur de multiplication ($Op(\psi)h)(z) = \psi(z)h(z)$ et $\langle Op(\psi)\phi_j, \phi_j \rangle = \mu_{\phi_j}(\psi)$.

Comme mentionné auparavant, notre intérêt porte sur la relation entre l'observable classique $\psi(\mathcal{G}_t(g))$ lorsque $t \rightarrow \infty$ et les observables quantiques $\langle Op(\psi)\phi_j, \phi_j \rangle$ lorsque $\lambda_j \rightarrow \infty$. Il est connu [32] que leurs moyennes concordent. Pour $\psi \in C_0^\infty(Y)$,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{N(\lambda)} \sum_{\lambda_j \leq \lambda} \langle Op(\psi)\phi_j, \phi_j \rangle = \int_{\Gamma \backslash \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})} \psi(g) dg. \quad (5)$$

En étudiant les fluctuations, nous supposons que $\psi \in C_{0,0}^\infty(Y)$. Dans [6] et [5], il est proposé que pour de tels hamiltoniens classiquement chaotiques, la variance des observables quantiques $\langle Op(\psi)\phi_j, \phi_j \rangle$ corresponde à la variance classique $V(\psi)$ et que la distribution de ces nombres devienne gaussienne après normalisation par la racine carrée de la variance. Plus précisément, la variance quantique proposée est

$$S_\psi(\lambda) := \sum_{\lambda_j \leq \lambda} |\langle Op(\psi)\phi_j, \phi_j \rangle|^2 \sim V(\psi)N(\lambda)^{1/2}, \quad (6)$$

lorsque $\lambda \rightarrow \infty$.

Zelditch [33] a introduit ces sommes de variance quantique dans son traitement de l'ergodicité quantique pour cette surface. Il a établi la borne non triviale $S_\psi(\lambda) = O_\psi(\lambda/\log \lambda)$. Dans [23], nous avons montré que pour $\psi \in C_{0,0}^\infty(X)$ et tout $\epsilon > 0$, $S_\psi(\lambda) = O_\psi(\lambda^{1/2+\epsilon})$ et Jakobson [16] a étendu cette borne à tous les $\psi \in C_{0,0}^\infty(Y)$. L'analyse conduisant à ces bornes en $O(\lambda^{1/2+\epsilon})$ implique des termes non diagonaux provenant d'une application de la formule de trace de Kuznetsov. Ceux-ci

ont été traités en utilisant les inégalités de grand crible de Deshouillers et Iwaniec [3].

Afin de se débarrasser du ϵ et d'obtenir un comportement asymptotique pour $S_\psi(\lambda)$, on ne peut se contenter d'estimer ces termes non diagonaux. En fait, comme on le verra ci-dessous, ces termes contribuent au terme principal dans l'asymptotique.

Comme il ressort des sections ultérieures de cet article, l'analyse de ces sommes de variance quantique est assez délicate. Nous suivrons notre stratégie de [24], en examinant d'abord la variance quantique pour le problème très similaire où ϕ_j est remplacé par $f \in H_k$. C'est-à-dire, pour $\psi \in C_{0,0}^\infty(X)$, posons

$$\langle Op(\psi)f, f \rangle := \mu_f(\psi) = \int_X y^k |f(z)|^2 \psi(z) \frac{dx dy}{y^2}. \quad (7)$$

Les sommes de variance quantique correspondantes sont

$$\sum_{k \leq K, 2|k} \sum_{f \in H_k} |\mu_f(\psi)|^2.$$

Notons que k joue le rôle de $\sqrt{\lambda}$. La seule différence entre notre traitement de (7) et de $S_\psi(\lambda)$ en (6) est que pour le cas holomorphe, on utilise la formule de Petersson [12] à la place de la formule de Kuznetsov [21]. Cela simplifie l'analyse, en particulier en ce qui concerne les fonctions spéciales. Nous laissons les détails de l'analyse de l'asymptotique de $S_\psi(\lambda)$ pour un article ultérieur, bien que nous enregistrons ci-dessous le terme principal dans ce cas à des fins de comparaison.

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de cet article. Au vu de la formule de Petersson, il est commode de considérer une version pondérée des sommes de variance quantique. Les poids sont des poids arithmétiques variant modérément, donnés par des valeurs spéciales en $s = 1$ de fonctions L . Avec un peu plus d'effort [13], ces poids peuvent être supprimés, et ils n'ont aucun effet sur l'asymptotique finale. Pour $f \in H_k$ ou une forme cuspidale de Maass-Hecke, soit $L(s, f)$ et $L(s, \phi)$ les fonctions L standard correspondantes (partie finie), voir [14] par exemple. Les fonctions L complétées $\Lambda(s, f)$ et $\Lambda(s, \phi)$ sont entières et satisfont des équations fonctionnelles. Soient $\text{sym}^2(f)$ et $\text{sym}^2(\phi)$ les relevés carrés symétriques de f et ϕ respectivement vers des formes cuspidales sur $GL_3(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ [7]. Les fonctions L correspondantes, qui sont des produits d'Euler de degré 3, sont notées $L(s, \text{sym}^2(f))$ et $L(s, \text{sym}^2(\phi))$. Leurs fonctions L complétées $\Lambda(s, \text{sym}^2(f))$ et $\Lambda(s, \text{sym}^2(\phi))$ sont entières et satisfont une équation fonctionnelle reliant les valeurs en s et $1 - s$. Nous aurons également l'occasion d'utiliser les fonctions L de Rankin-Selberg $L(s, \text{sym}^2(f) \otimes \phi)$ de degré 6 et leur complétion $\Lambda(s, \text{sym}^2(f) \otimes \phi)$. Les poids en question sont $L(1, \text{sym}^2(f))$. Étant des valeurs spéciales en $s = 1$, elles satisfont les bornes [10]

$$k^{-\epsilon} \ll_{\epsilon} L(1, \text{sym}^2(f)) \ll_{\epsilon} k^{\epsilon}$$

pour tout $\epsilon > 0$.

Théorème 1. *Fixons $u \in C_0^\infty(0, \infty)$.*

(A) *Il existe une forme hermitienne non négative B_ω définie sur $C_{0,0}^\infty(X)$ telle que pour $\psi \in C_{0,0}^\infty(X)$ et $\epsilon > 0$,*

$$\sum_{2|k} u\left(\frac{k-1}{K}\right) \sum_{f \in H_k} L(1, \text{sym}^2(f)) |\mu_f(\psi)|^2 = B_\omega(\psi) \left(\int_0^\infty u(t) dt \right) K + O_{\epsilon, \psi}(K^{1/2+\epsilon}), \quad (8)$$

lorsque $K \rightarrow \infty$.

(B) B_ω satisfait les symétries

$$B_\omega(\Delta\psi_1, \psi_2) = B_\omega(\psi_1, \Delta\psi_2) \quad \text{et} \quad B_\omega(T_n\psi_1, \psi_2) = B_\omega(\psi_1, T_n\psi_2)$$

pour $n \geq 1$.

(C) En restreignant B_ω à $L^2_{\text{cusp}}(X)$, B_ω est diagonalisé par la base orthonormée $\{\phi_j\}$ des formes cuspidales de Maass-Hecke et la valeur propre de B_ω en ϕ_j est $\frac{\pi}{2}L(1/2, \phi_j)$.

Remarques

1. Un argument d'approximation simple dans (A) nous permet de prendre u comme fonction caractéristique d'un intervalle. Ainsi, lorsque $K \rightarrow \infty$,

$$\sum_{k \leq K, 2|k} \sum_{f \in H_k} L(1, \text{sym}^2(f)) |\mu_f(\psi)|^2 \sim B_\omega(\psi)K.$$

De plus,

$$\sum_{k \leq K, 2|k} \sum_{f \in H_k} L(1, \text{sym}^2(f)) \sim \frac{\zeta^2(2)}{48} K^2.$$

Ainsi, nous obtenons l'analogie pour les μ_f de l'asymptotique de $S_\psi(\lambda)$. Comme mentionné plus tôt, les méthodes de la preuve du Théorème 1 s'appliquent à $S_\psi(\lambda)$ et donnent

$$S_\psi(\lambda) \sim B(\psi)\sqrt{\lambda}$$

lorsque $\lambda \rightarrow \infty$. La forme hermitienne B sur $C_{0,0}^\infty(X)$ satisfait la même relation de symétrie (B) du Théorème 1. La seule différence est que la valeur propre de B en ϕ_j est donnée par $B(\phi_j) = \frac{1}{2}L(1/2, \phi_j)V(\phi_j)$. Par conséquent, les deux formes B et V sont diagonalisées par les ϕ_j et la variance quantique proposée (6) est correcte si l'on insère le facteur arithmétique subtil $L(1/2, \phi_j)$ aux valeurs propres de V .

2. Les nombres $L(1/2, \phi_j)$, qui sont essentiellement les valeurs propres de la forme hermitienne non négative B_ω , doivent satisfaire $L(1/2, \phi_j) \geq 0$. Ce fait non évident est tout à fait profond et utile (voir [14]). Il a été établi pour la première fois dans [17]. La présente preuve par les valeurs propres est intéressante de divers points de vue. Il y a beaucoup de preuves que les zéros d'une fonction L sont de nature spectrale (voir [18]). Ici, nous avons les nombres $L(1/2, \phi_j)$ lorsque ϕ_j varie dans la famille des formes propres de Maass-Hecke, comme étant les valeurs propres d'un opérateur non négatif.
3. Il est connu [15] qu'au moins 50% des ϕ_j pairs, c'est-à-dire ceux satisfaisant $\phi_j(-\bar{z}) = \phi_j(z)$, ont $L(1/2, \phi_j) \neq 0$. Pour les ϕ_j impairs, $L(1/2, \phi_j) = 0$ au vu du signe de l'équation fonctionnelle de $\Lambda(1/2, \phi_j)$, et aussi $\mu_f(\phi_j) = 0$ puisque tout f dans H_k est réel sur $y = 0$ et donc $\overline{f(-\bar{z})} = f(z)$. On peut montrer que (voir [22])

$$\sum_{k \leq K, 2|k} \sum_{f \in H_k} L^2(1, \text{sym}^2(f)) \sim \frac{\zeta(3)\zeta^9(2)}{48 \cdot \zeta(6)} K^2.$$

En combinant cela avec le Théorème 1 et l'inégalité de Cauchy, nous voyons que pour ϕ avec $L(1/2, \phi) \neq 0$,

$$\mu_f(\phi) = \Omega(k^{-1/2})$$

lorsque $k \rightarrow \infty$. Cela montre que le taux d'équidistribution pour les $\mu_f(\psi)$ dans le problème QUE, c'est-à-dire pour tout $\epsilon > 0$, $\mu_f(\psi) = O_{\epsilon, \psi}(k^{-1/2+\epsilon})$, tel que prédit par la formule de Watson (voir ci-dessous) et l'hypothèse de Riemann généralisée (GRH), est essentiellement optimal.

Nous terminons l'introduction par un aperçu de l'article. Comme dans [23] et [24], nous établissons (A) en utilisant les séries de Poincaré $P_{m,h}$ (voir la Section 2). Celles-ci forment un sous-espace dense de $C_{0,0}^\infty(X)$, et elles nous permettent d'analyser la quantité $\mu_f(P_{m,h})$ en termes de sommes sur les coefficients de Fourier de f . Cela nous permet à son tour d'exploiter la multiplicativité de ces coefficients, qui découle du fait que f est une forme propre de Hecke (un ingrédient crucial). Nous faisons ensuite la moyenne sur H_k , en utilisant la formule de Petersson (voir la Section 2). Cela introduit des termes diagonaux et non diagonaux. Les termes non diagonaux impliquent des sommes de Kloosterman standard. Ensuite, nous effectuons la somme lissée sur k en utilisant la sommation de Poisson. Une application des Lemmes 4.1 et 4.2 de [24] introduit un tordage arithmétique des sommes de Kloosterman qui deviennent des sommes de Salié. De cette manière, le terme principal (lorsque $K \rightarrow \infty$) est identifié et il contient une série infinie de sommes exponentielles $S_c(\gamma)$ discutée à l'Annexe B. Ces termes non diagonaux apparaissent comme une partie du terme principal assez compliqué qui est donné dans le Théorème 2 de la Section 2. Sous cette forme, la forme hermitienne B_ω est donnée en termes de ses valeurs sur les séries de Poincaré. À la Section 3, nous analysons B_ω . En utilisant l'expression en série obtenue dans le Théorème 2, nous vérifions directement les propriétés de symétrie (B) du Théorème 1 lorsque ψ_1, ψ_2 sont des séries de Poincaré. À la Section 4, la symétrie est étendue à $C_{0,0}^\infty(X)$. Avec ceci et le fait que ϕ_j est déterminé de manière unique par les valeurs propres λ_j et $\lambda_j(n)$, $n \geq 1$, nous en déduisons facilement que B_ω est diagonalisé par les ϕ_j . À la Section 5, nous calculons les valeurs propres de B_ω en ϕ_j . Pour ce faire, nous revenons à l'asymptotique originale du Théorème 1 avec $\psi = \phi$, une forme propre paire de Maass–Hecke. Pour une telle ϕ , nous utilisons l'identité de Watson [29] :

$$|\mu_f(\phi)|^2 = \left| \int_X y^k |f(z)|^2 \frac{\phi(z)}{y^2} \frac{dx dy}{y^2} \right|^2 = \frac{\Lambda(1/2, \text{sym}^2(f) \otimes \phi) \Lambda(1/2, \phi)}{\Lambda(1, \text{sym}^2(f))^2 \Lambda(1, \text{sym}^2(\phi))}. \quad (9)$$

Ainsi, la somme de variance quantique sur f se résume, après une analyse des facteurs archimédiens du membre de droite de (9), à moyenner $L(1/2, \text{sym}^2(f) \otimes \phi)$ sur f . En utilisant la théorie de Rankin–Selberg pour $GL(3) \times GL(2)$, nous pouvons exprimer ces valeurs en une série appropriée (voir la Section 5), après quoi le moyennage sur $f \in H_k$ et sur k pair peut être effectué. Contrairement au cas de la fonction générale ψ du Théorème 1, dans cette analyse pour ϕ , seuls les termes diagonaux contribuent au terme principal de la somme de variance. Cela conduit à la valeur propre, c'est-à-dire $B_\omega(\phi)$, prenant la forme simple énoncée dans la partie (C) du Théorème 1.

Pour conclure l'introduction, nous commentons le comportement gaussien proposé pour soit $\mu_f(\phi)$ lorsque f varie, soit $\mu_{\phi_j}(\phi)$ lorsque j varie, avec ϕ une forme de Maass–Hecke paire fixée. D'après (9) et une analyse des facteurs archimédiens dans (9), cela revient à la distribution des nombres $L(1/2, \text{sym}^2(f) \otimes \phi)$ lorsque f varie. Cette famille de fonctions $L, L(s, \text{sym}^2(f) \otimes \phi)$ avec $f \in H_k$,

$k \rightarrow \infty$, est une famille SO (paire) selon [18]. Ceci est montré dans [4] qui examine la distribution des zéros de bas niveau pour cette famille (notons que les signes des équations fonctionnelles pour cette famille auto-duale sont tous 1, mais la famille a une symétrie orthogonale plutôt que symplectique). Par conséquent, selon les conjectures de Keating et Snaith [19, (77)], les moments de ces valeurs spéciales devraient satisfaire

$$\frac{48}{K^2} \sum_{\substack{k \leq K \\ 2|k}} \sum_{f \in H_k} L^m(1/2, \text{sym}^2(f) \otimes \phi) \sim (\log K^2)^{m(m-1)/2} a(m) f_{SO(\text{even})}(m),$$

où

$$f_{SO(\text{even})}(m) = \frac{2^m}{\prod_{j=1}^{m-1} (2j-1)!!},$$

et $a(m)$ est un produit sur les nombres premiers spécifique à cette famille, qui peut être calculé pour tout m donné, mais pour lequel nous ne disposons pas d'une formule fermée simple.

Ainsi, si ces conjectures sont vraies, alors la distribution des nombres $L(1/2, \text{sym}^2(f) \otimes \phi)$ et donc de $|\mu_f(\phi)|^2$ n'est clairement pas gaussienne, du moins au sens de la convergence des moments.

Pour conclure, nous signalons au lecteur le récent preprint [20] où une anomalie similaire pour la variance quantique est trouvée pour le chat map.

3. Séries de Poincaré

Nous utilisons les mêmes notations que dans [24]. Pour $h(x) \in C_0^\infty(0, \infty)$, la série de Poincaré incomplète ($m \in \mathbf{Z}, m \neq 0$) est définie par

$$P_{h,m}(z) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} h(y(\gamma z)) e(mx(\gamma z)),$$

où

$$\Gamma_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Une forme cuspidale $f \in H_k$ a un développement de Fourier

$$f(z) = \sum_{r \geq 1} a_f(r) e(rz),$$

et nous définissons

$$\lambda_f(r) = \frac{a_f(r) r^{(-k+1)/2}}{a_f(1)}.$$

Notons par $L(s, \text{sym}^2(f))$ la fonction L du carré symétrique associée à f :

$$L(s, \text{sym}^2(f)) = \zeta(2s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_f(n^2)}{n^s},$$

et rappelons que, pour tout $\epsilon > 0$, les bornes suivantes sont valables :

$$k^{-\epsilon} \ll L(1, \text{sym}^2(f)) \ll k^\epsilon. \tag{10}$$

Puisque $\langle f, f \rangle = 1$, nous avons la relation

$$|a_f(1)|^2 = \frac{(4\pi)^{k-1}}{\Gamma(k)} \frac{2\pi^2}{L(1, \text{sym}^2(f))}. \quad (11)$$

Soient $m_1, m_2 \in \mathbf{Z}$, $m_1 m_2 \neq 0$ et $h_1, h_2 \in C_0^\infty(0, \infty)$. Rappelons que si $m_i > 0$, nous avons (voir Proposition 2.1 dans [24])

$$\langle \mu_f, P_{h_i, m_i}(z) \rangle = \frac{2\pi^2}{(k-1)L(1, \text{sym}^2(f))} \sum_{r \geq 1} \lambda_f(r) \lambda_f(r + m_i) h_i \left(\frac{k-1}{4\pi(r + m_i/2)} \right) + O(k^{-1+\epsilon}).$$

Sans perte de généralité, nous pouvons supposer $m_1 > 0, m_2 > 0$, puisque $\langle \mu_f, P_{h, m}(z) \rangle = \langle \mu_f, P_{h, -m}(z) \rangle$.

Ainsi, d'après la formule ci-dessus, (11) et la multiplicativité des valeurs propres de Hecke,

$$\begin{aligned} & \langle \mu_f, P_{h_1, m_1}(z) \rangle \overline{\langle \mu_f, P_{h_2, m_2}(z) \rangle} \\ &= \frac{2\pi^2}{(k-1)L(1, \text{sym}^2(f))} \frac{\Gamma(k-1)}{(4\pi)^{k-1}} \\ & \times \sum_{d_1 | m_1, d_2 | m_2} \sum_{r_1, r_2} \frac{a_f(r_1(r_1 + m_1/d_1)) \overline{a_f(r_2(r_2 + m_2/d_2))}}{(r_1(r_1 + m_1/d_1))^{(k-1)/2} (r_2(r_2 + m_2/d_2))^{(k-1)/2}} \\ & \times h_1 \left(\frac{k-1}{4\pi d_1(r_1 + m_1/(2d_1))} \right) \overline{h_2 \left(\frac{k-1}{4\pi d_2(r_2 + m_2/(2d_2))} \right)} + O(k^{-1+\epsilon}). \end{aligned}$$

Fixons $u \in C_0^\infty(0, \infty)$. D'après la formule ci-dessus et par la formule de Petersson (voir [11]) :

$$\frac{2\pi^2}{k-1} \sum_{f \in H_k} \frac{\lambda_f(m) \lambda_f(n)}{L(1, \text{sym}^2(f))} = \delta_{m,n} + 2\pi(-1)^{k/2} \sum_{c \geq 1} \frac{S(m, n; c)}{c} J_{k-1} \left(\frac{4\pi \sqrt{mn}}{c} \right),$$

nous avons

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{k \geq 1 \\ 2|k}} u \left(\frac{k-1}{K} \right) \sum_{f \in H_k} L(1, \text{sym}^2(f)) \langle \mu_f, P_{h_1, m_1}(z) \rangle \langle \mu_f, P_{h_2, m_2}(z) \rangle = \sum_{\substack{k \geq 1 \\ 2|k}} \frac{2\pi^2}{k-1} u \left(\frac{k-1}{K} \right) \\ & \sum_{\substack{d_1 | m_1 \\ d_2 | m_2}} \sum_{\substack{r_1(r_1 + m_1/d_1) \\ = r_2(r_2 + m_2/d_2)}} h_1 \left(\frac{k-1}{4\pi d_1(r_1 + m_1/(2d_1))} \right) \overline{h_2 \left(\frac{k-1}{4\pi d_2(r_2 + m_2/(2d_2))} \right)} \\ & - \sum_{\substack{d_1 | m_1 \\ d_2 | m_2}} \sum_{r_1, r_2 \geq 1} \sum_{c \geq 1} \frac{S(r_1(r_1 + m_1/d_1), r_2(r_2 + m_2/d_2); c)}{c} \\ & \sum_{\substack{k \geq 1 \\ 2|k}} 2\pi(-1)^{k/2} u \left(\frac{k-1}{K} \right) \frac{2\pi^2}{k-1} \times h_1 \left(\frac{k-1}{4\pi d_1(r_1 + m_1/(2d_1))} \right) \overline{h_2 \left(\frac{k-1}{4\pi d_2(r_2 + m_2/(2d_2))} \right)} \\ & J_{k-1} \left(\frac{4\pi \sqrt{r_1 r_2 (r_1 + m_1/d_1) (r_2 + m_2/d_2)}}{c} \right) + O(K^{1/2+\epsilon}). \end{aligned}$$

Nous évaluons les termes diagonaux au moyen de la formule de sommation de Poisson comme

$$\frac{K\pi}{4} \int_0^\infty u(\xi) d\xi \sum_{\substack{d_1 | m_1, d_2 | m_2 \\ m_1/d_1 = m_2/d_2}} \frac{1}{d_1 d_2} \int_0^\infty h_1(d_2 \eta) \overline{h_2(d_1 \eta)} \frac{d\eta}{\eta^2} + O(1), \quad (12)$$

où $r_1(r_1 + m_1/d_1) = r_2(r_2 + m_2/d_2)$ a au plus un nombre fini de solutions si $m_1/d_1 \neq m_2/d_2$, tandis que les solutions entières de $r_1(r_1 + m_1/d_1) = r_2(r_2 + m_2/d_2)$ sont seulement $r_1 = r_2$.

En appliquant les lemmes 4.1 et 4.2 de [24], nous déduisons que les termes non diagonaux sont égaux à

$$\begin{aligned} & -\frac{2\pi^{5/2}}{K} \sum_{\substack{d_1|m_1 \\ d_2|m_2}} \sum_{r_1, r_2 \geq 1} \sum_{c \geq 1} \frac{S(r_1(r_1 + m_1/d_1), r_2(r_2 + m_2/d_2); c)}{c} \\ & \times \int_0^\infty u \left(\frac{\sqrt{\Delta c^{-1}} y}{K} \right) \frac{K}{\sqrt{\Delta c^{-1}} y} h_1 \left(\frac{\sqrt{\Delta c^{-1}} y}{4\pi d_1(r_1 + m_1/(2d_1))} \right) \overline{h_2} \left(\frac{\sqrt{\Delta c^{-1}} y}{4\pi d_2(r_2 + m_2/(2d_2))} \right) \\ & \times \sin \left(\frac{\Delta c^{-1}}{2} + y - \frac{\pi}{4} \right) \frac{dy}{\sqrt{y}} + O(1) = \sum_{\substack{d_1|m_1 \\ d_2|m_2}} \sum_{r_1, r_2 \geq 1} \sum_{c \geq 1} \frac{S(r_1(r_1 + m_1/d_1), r_2(r_2 + m_2/d_2); c)}{c} J_{r_1, r_2, c} + O(1), \end{aligned}$$

où

$$\Delta = 8\pi \sqrt{r_1 r_2 (r_1 + m_1/d_1)(r_2 + m_2/d_2)}.$$

Les termes avec $c \gg K^\epsilon$ contribuent en $O(1)$, par intégration par parties. En faisant le changement de variable $t = \frac{\sqrt{\Delta c^{-1}} y}{K}$, nous voyons que $J_{r_1, r_2, c}$ est

$$-4\pi^{5/2} \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{\Delta}} \int_0^\infty \frac{u(t)}{t} \sin \left(\frac{\Delta c^{-1}}{2} + \frac{(tK)^2 c}{\Delta} - \frac{\pi}{4} \right) \times h_1 \left(\frac{tK}{4\pi d_1(r_1 + m_1/(2d_1))} \right) \overline{h_2} \left(\frac{tK}{4\pi d_2(r_2 + m_2/(2d_2))} \right) dt.$$

Notons

$$\begin{aligned} \frac{\Delta i}{2c} &= \frac{4\pi i}{c} \sqrt{r_1 r_2 (r_1 + m_1/d_1)(r_2 + m_2/d_2)} \\ &= \frac{2\pi i}{c} \left(2r_1 r_2 + \frac{m_2 r_1}{d_2} + \frac{m_1 r_2}{d_1} + \frac{1}{2} \frac{m_1}{d_1} \frac{m_2}{d_2} - \frac{1}{4} \left(\frac{m_1}{d_1} \right)^2 \frac{r_2}{r_1} - \frac{1}{4} \left(\frac{m_2}{d_2} \right)^2 \frac{r_1}{r_2} + \dots \right). \end{aligned}$$

Nous supposons d'abord que les fonctions test u, h_1, h_2 sont toutes à valeurs réelles et écrivons pour simplifier

$$J_{r_1, r_2, c} = \Im \left\{ e_c \left(2r_1 r_2 + \frac{m_2 r_1}{d_2} + \frac{m_1 r_2}{d_1} \right) f_c(r_1, r_2) \right\},$$

où $e_c(x) = \exp(2\pi i x/c)$.

En réduisant la sommation sur r_1, r_2 en classes de congruence modulo c , nous avons,

$$\begin{aligned} & \sum_{r_1, r_2 \geq 1} S(r_1(r_1 + m_1/d_1), r_2(r_2 + m_2/d_2); c) e_c \left(2r_1 r_2 + \frac{m_2 r_1}{d_2} + \frac{m_1 r_2}{d_1} \right) f_c(r_1, r_2) \\ &= \sum_{a, b \pmod{c}} S(a(a + m_1/d_1), b(b + m_2/d_2); c) e_c \left(2ab + \frac{m_2 a}{d_2} + \frac{m_1 b}{d_1} \right) \times \sum_{\substack{r_1 \equiv a \pmod{c} \\ r_2 \equiv b \pmod{c}}} f_c(r_1, r_2) \\ &= \frac{1}{c^2} \sum_u \sum_{v \pmod{c}} \left(\sum_{a, b \pmod{c}} S(a(a + m_1/d_1), b(b + m_2/d_2); c) e_c \left(2ab + \left(\frac{m_2}{d_2} + u \right) a + \left(\frac{m_1}{d_1} + v \right) b \right) \right) \\ & \quad \left(\sum_{r_1, r_2} f_c(r_1, r_2) e_c(-ur_1 - vr_2) \right). \end{aligned}$$

Ensuite, nous appliquons la formule de sommation de Poisson pour la somme en r_1, r_2 et obtenons

$$\sum_{r_1, r_2} f_c(r_1, r_2) e_c(-ur_1 - vr_2) = \sum_{l_1, l_2} B(l_1, l_2),$$

où

$$\begin{aligned} B(l_1, l_2) &= \iint_{\mathbf{R}^2} f_c(r_1, r_2) e_c(-ur_1 - vr_2) e(l_1 r_1 + l_2 r_2) dr_1 dr_2 \\ &= \iint_{\mathbf{R}^2} f_c(r_1, r_2) e((l_1 - u/c)r_1 + (l_2 - v/c)r_2) dr_1 dr_2. \end{aligned}$$

Nous pouvons supposer $|u| \leq c/2, |v| \leq c/2$, et par intégration par parties suffisamment de fois, nous voyons que

$$\sum_{l_1, l_2} B(l_1, l_2) = B(0, 0) + O(K^{-A}),$$

pour tout $A > 1$. Ainsi,

$$\sum_{r_1, r_2} f_c(r_1, r_2) e_c(-ur_1 - vr_2) = \iint_{\mathbf{R}^2} f_c(r_1, r_2) e_c(-ur_1 - vr_2) dr_1 dr_2 + O(K^{-A}).$$

Pour $(u, v) \neq (0, 0)$, par intégration par parties suffisamment de fois, nous déduisons (rappelons que $c \ll K^\epsilon$) que

$$\iint_{\mathbf{R}^2} f_c(r_1, r_2) e_c(-ur_1 - vr_2) dr_1 dr_2 \ll K^{-A},$$

pour tout $A > 0$. Ainsi, seul $(u, v) = (0, 0)$ contribue. De plus, nous pouvons autoriser $c \gg K^\epsilon$ dans la sommation en c puisque

$$\iint_{\mathbf{R}^2} f_c(r_1, r_2) dr_1 dr_2 \ll c^{-A} K^2,$$

pour tout $A > 0$.

Pour des d_i, m_i ($i = 1, 2$) fixés et un entier γ , notons

$$S_c(\gamma) = \sum_{a, b \pmod{c}} S(a(\gamma a + m_1/d_1), b(\gamma b + m_2/d_2); c) e_c \left(2\gamma ab + \left(\frac{m_2}{d_2} \right) a + \left(\frac{m_1}{d_1} \right) b \right),$$

et $S_c = S_c(1)$. Nous écrivons également $S_{c, m_1/d_1, m_2/d_2}$ pour S_c si nous devons indiquer la dépendance en d'autres paramètres. Évidemment, $S_{c, m_1/d_1, m_2/d_2} = S_{c, m_2/d_2, m_1/d_1}$. Ainsi, la contribution non diagonale est

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{d_1 | m_1 \\ d_2 | m_2}} \sum_{c \geq 1} \frac{S_c}{c^2} \iint f_c(r_1, r_2) dr_1 dr_2 + O(1) \\ &= -4\pi^{5/2} \sum_{\substack{d_1 | m_1 \\ d_2 | m_2}} \sum_{c \geq 1} \Im \left\{ \frac{S_c}{c^{5/2}} \bar{\zeta}_8 \int \frac{u(t)}{t} \right. \\ &\quad \left. \iint \frac{1}{\sqrt{\Delta}} e_c \left(\frac{1}{2} \frac{m_1}{d_1} \frac{m_2}{d_2} - \frac{1}{4} \left(\frac{m_1}{d_1} \right)^2 \frac{r_2}{r_1} - \frac{1}{4} \left(\frac{m_2}{d_2} \right)^2 \frac{r_1}{r_2} \right) e^{i(tK)^2 c / \Delta} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times h_1 \left(\frac{tK}{4\pi d_1(r_1 + m_1/(2d_1))} \right) \overline{h_2} \left(\frac{tK}{4\pi d_2(r_2 + m_2/(2d_2))} \right) dr_1 dr_2 dt \Big\} + O(1) \\
& = -\frac{2\pi^2}{\sqrt{2}} \sum_{\substack{d_1|m_1 \\ d_2|m_2}} \sum_{c \geq 1} \Im \left\{ \frac{S_c}{c^{5/2}} \overline{\zeta_8} \int \frac{u(t)}{t} \right. \\
& \quad \iint \frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}} e_c \left(\frac{1}{2} \frac{m_1}{d_1} \frac{m_2}{d_2} - \frac{1}{4} \left(\frac{m_1}{d_1} \right)^2 \frac{r_2}{r_1} - \frac{1}{4} \left(\frac{m_2}{d_2} \right)^2 \frac{r_1}{r_2} \right) e^{i(tK)^2 c/\Delta} \\
& \quad \times h_1 \left(\frac{tK}{4\pi d_1 r_1} \right) \overline{h_2} \left(\frac{tK}{4\pi d_2 r_2} \right) dr_1 dr_2 dt \Big\} + O(1) \\
& = -\frac{K\pi}{2\sqrt{2}} \left(\int_0^\infty u(t) dt \right) \sum_{\substack{d_1|m_1 \\ d_2|m_2}} \sum_{c \geq 1} \Im \left\{ \frac{S_c}{c^{5/2}} \overline{\zeta_8} e \left(\frac{1}{2c} \frac{m_1}{d_1} \frac{m_2}{d_2} \right) \right. \\
& \quad \iint e \left(-\frac{1}{4c} \left(\frac{m_1}{d_1} \right)^2 \frac{\xi}{\eta} - \frac{1}{4c} \left(\frac{m_2}{d_2} \right)^2 \frac{\eta}{\xi} + (d_1 d_2)^2 \xi \eta c \right) \frac{h_1(d_2 \xi)}{\sqrt{\xi}} \frac{\overline{h_2}(d_1 \eta)}{\sqrt{\eta}} \frac{d\xi d\eta}{\xi \eta} \Big\} + O(1) \\
& = -\frac{K\pi}{2\sqrt{2}} \left(\int_0^\infty u(t) dt \right) \sum_{\substack{d_1|m_1 \\ d_2|m_2}} \frac{1}{d_1 d_2} \sum_{c \geq 1} \Im \left\{ \frac{S_c}{c^{5/2}} \overline{\zeta_8} e \left(\frac{1}{2c} \frac{m_1}{d_1} \frac{m_2}{d_2} \right) \right. \\
& \quad \iint e \left(-\frac{1}{4c} \left(\frac{m_1}{d_1} \right)^2 \frac{\xi}{\eta} - \frac{1}{4c} \left(\frac{m_2}{d_2} \right)^2 \frac{\eta}{\xi} + (d_1 d_2)^2 \xi \eta c \right) \frac{h_1(d_2 \xi)}{\sqrt{\xi}} \frac{\overline{h_2}(d_1 \eta)}{\sqrt{\eta}} \frac{d\xi d\eta}{\xi \eta} \Big\} + O(1).
\end{aligned}$$

Par la multiplicativité de $S_c(\gamma)$:

$$S_{c_1 c_2, m_1/d_1, m_2/d_2}(\gamma) = S_{c_1, m_1/d_1, m_2/d_2}(\eta c_2) S_{c_2, m_1/d_1, m_2/d_2}(\gamma c_1), \quad \text{pour } (c_1, c_2) = 1,$$

et en utilisant le fait que $\overline{2c_2}/c_1 + \overline{c_1}/(2c_2) \equiv 1/(2c_1 c_2) \pmod{1}$ pour $(c_1, 2c_2) = 1$ ainsi que le résultat de l'appendice A, on peut vérifier que

$$S_c e \left(\frac{1}{2c} \frac{m_1}{d_1} \frac{m_2}{d_2} \right) \in \mathbf{R},$$

et par conséquent nous obtenons, sous l'hypothèse que les fonctions test u, h_1, h_2 sont toutes à valeurs réelles, le théorème suivant. Avant de l'énoncer, nous avons besoin d'un peu de notation supplémentaire. Pour un entier non négatif A , définissons $\|\cdot\|_A$ sur $C_c^\infty(0, \infty)$ par

$$\|h\|_A = \max_{\substack{0 \leq i \leq A \\ |j| \leq A \\ x \in (0, \infty)}} \left| \frac{h^{(i)}(x)}{x^j} \right|. \quad (13)$$

Théorème 2. *Pour $m_1, m_2 \in \mathbf{Z}, m_1 m_2 \neq 0, u, h_1, h_2 \in C_c^\infty(0, \infty)$ et $\epsilon > 0$, nous avons*

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{k \geq 1 \\ 2|k}} u \left(\frac{k-1}{K} \right) \sum_{f \in H_k} L(1, \text{sym}^2(f)) \langle \mu_f, P_{h_1, m_1}(z) \rangle \overline{\langle \mu_f, P_{h_2, m_2}(z) \rangle} \\
& = B_\omega(P_{h_1, m_1}, P_{h_2, m_2}) K \left(\int_0^\infty u(t) dt \right) + O(K^{1/2+\epsilon}),
\end{aligned} \quad (14)$$

où

$$\begin{aligned}
B_\omega(P_{h_1, m_1}, P_{h_2, m_2}) = & \frac{\pi}{4} \sum_{\substack{d_1 | m_1, d_2 | m_2 \\ |m_1|/d_1 = |m_2|/d_2}} \frac{1}{d_1 d_2} \int_0^\infty h_1(d_2 \eta) \overline{h_2}(d_1 \eta) \frac{d\eta}{\eta^2} \\
& - \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \sum_{\substack{d_1 | m_1 \\ d_2 | m_2}} \frac{1}{d_1 d_2} \sum_{c \geq 1} \frac{S_{c, |m_1|/d_1, |m_2|/d_2}}{c^{5/2}} \cos\left(\frac{1}{2c} \frac{|m_1|}{d_1} \frac{|m_2|}{d_2}\right) \\
& \times \iint \sin\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2c} \left(\frac{m_1}{d_1}\right)^2 \frac{\xi}{\eta} - \frac{\pi}{2c} \left(\frac{m_2}{d_2}\right)^2 \frac{\eta}{\xi} + 2\pi(d_1 d_2)^2 \xi \eta c\right) \\
& \times \frac{h_1(d_2 \xi)}{\sqrt{\xi}} \frac{\overline{h_2}(d_1 \eta)}{\sqrt{\eta}} \frac{d\xi d\eta}{\xi \eta}.
\end{aligned} \tag{15}$$

De plus, il existe une constante absolue A et $C(=C(\epsilon))$ telle que la constante implicite dans (14) est au plus

$$C((|m_1| + 1)(|m_2| + 1))^A \|h_1\|_A \cdot \|h_2\|_A, \tag{16}$$

et la série définissant B_ω converge absolument et satisfait

$$|B_\omega(P_{h_1, m_1}, P_{h_2, m_2})| \leq C((|m_1| + 1)(|m_2| + 1))^A \|h_1\|_A \cdot \|h_2\|_A. \tag{17}$$

(16) est prouvé en suivant la dépendance en h_1 et h_2 dans la dérivation de (14). (17) découle d'une intégration par parties dans l'intégrale double de (15), puis en estimant directement les termes.

Un examen plus attentif de la preuve montre en fait que si l'une des séries de Poincaré incomplètes P_{h_i, m_i} dans le Théorème 2 est remplacée par une série d'Eisenstein incomplète (c'est-à-dire $m_i = 0$) de moyenne nulle $\int_X P_{h_i, m_i} \bar{\nu} = 0$ (c'est-à-dire $\int_0^\infty h_i(y) y^{-2} dy = 0$), alors le Théorème 2 est encore valable sauf dans le cas $m_1 = m_2 = 0$. Pour le cas $m_1 = m_2 = 0$, (14) et (15) du Théorème 2 restent valables à condition que le terme

$$\frac{\pi}{4} \sum_{\substack{d_1 | m_1, d_2 | m_2 \\ m_1/d_1 = m_2/d_2}} \frac{1}{d_1 d_2} \int_0^\infty h_1(d_2 \eta) \overline{h_2}(d_1 \eta) \frac{d\eta}{\eta^2}$$

soit remplacé par

$$\frac{\pi}{4} \int_{1/A}^\infty \left(\int_0^\infty \int_0^\infty b_2(\xi) b_2(\eta) H_1\left(\frac{r}{\xi}\right) H_2\left(\frac{r}{\eta}\right) \frac{d\xi d\eta}{(\xi \eta)^2} \right) \frac{dr}{r^2},$$

où $H_i(\xi) = h_i''(\xi)\xi^2 + 2h_i'(\xi)\xi = (h_i'(\xi)\xi^2)'$, $h_i(\xi) = 0$ pour $0 < \xi \leq 1/A$, $i = 1, 2$, $2b_2(x) = B_2(x - [x])$, et $B_2(x) = x^2 - x + 1/6$ est le polynôme de Bernoulli de degré 2. Ceci découle de la formule d'Euler-MacLaurin de

$$\sum_{d_i \geq 1} h_i\left(\frac{k-1}{4\pi d_i r}\right) = - \int_0^\infty b_2(\xi) H_i\left(\frac{k-1}{4\pi \xi r}\right) \frac{d\xi}{\xi^2}, \quad \text{pour } r \geq 1,$$

qui s'annule si $r \geq A \frac{k-1}{4\pi}$.

Ceci est à son tour égal à

$$\begin{aligned} & \frac{\pi}{4} \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \int_0^\infty b_2(\xi) b_2(\eta) H_1 \left(\frac{r}{\xi} \right) H_2 \left(\frac{r}{\eta} \right) \frac{d\xi d\eta}{(\xi\eta)^2} \right) \frac{dr}{r^2} \\ &= \frac{\pi}{4} \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \int_0^\infty b_2(\xi) b_2(\eta) \frac{d^2}{d\xi^2} h_1 \left(\frac{r}{\xi} \right) \frac{d^2}{d\eta^2} h_2 \left(\frac{r}{\eta} \right) d\xi d\eta \right) \frac{dr}{r^2}. \end{aligned}$$

4. Propriétés de symétrie de B_ω

Soit $L_m = L_m^x$ l'opérateur différentiel sur $C_0^\infty(0, \infty)$ donné par

$$L_m h(x) = \left(x^2 \frac{d^2}{dx^2} - 4\pi^2 m^2 x^2 \right) h(x). \quad (18)$$

Si nous définissons le produit scalaire sur $C_0^\infty(0, \infty)$ par

$$(h_1, h_2) = \int_0^\infty h_1(x) \overline{h_2(x)} \frac{dx}{x^2}, \quad (19)$$

alors L_m est symétrique par rapport à $(\cdot)$, c'est-à-dire

$$(L_m h_1, h_2) = (h_1, L_m h_2).$$

Nous avons

$$\Delta(h(y)e(mx)) = (L_m h)(y)e(mx), \quad (20)$$

et par conséquent

$$\Delta P_{h,m} = P_{L_m h, m}, \quad (21)$$

où Δ est le laplacien hyperbolique. De plus, nous avons (voir la preuve du Théorème 6.9 dans [12])

$$T_n P_{h,m}(z) = \sum_{d|(m,n)} \left(\frac{d^2}{n} \right)^{1/2} P_{h\left(\frac{nz}{d^2}\right), \frac{mn}{d^2}}(z), \quad (22)$$

où T_n est le n -ième opérateur de Hecke (voir Section 8.5 dans [12]). Il s'avère que la forme bilinéaire $B_\omega(\cdot, \cdot)$, définie sur l'espace P engendré par tous les $P_{h,m}$, est auto-adjointe par rapport au laplacien Δ et aux opérateurs de Hecke $T_n, n \geq 1$:

$$B_\omega(\Delta P_{h_1, m_1}, P_{h_2, m_2}) = B_\omega(P_{h_1, m_1}, \Delta P_{h_2, m_2}), \quad (23)$$

$$B_\omega(T_n P_{h_1, m_1}, P_{h_2, m_2}) = B_\omega(P_{h_1, m_1}, T_n P_{h_2, m_2}). \quad (24)$$

La vérification de (23) est directe par (21), par changement de variables (lorsque $m_1 m_2 \neq 0$, pour symétriser le noyau intégral)

$$\xi \rightarrow \frac{m_2}{d_2} \xi, \quad \eta \rightarrow \frac{m_1}{d_1} \eta,$$

et en vertu du fait que

$$\left(\xi^2 \frac{d^2}{d\xi^2} - 4\pi^2 m_1^2 m_2^2 \xi^2 \right) K_{m_1, m_2, d_1, d_2}(\xi, \eta) = \left(\eta^2 \frac{d^2}{d\eta^2} - 4\pi^2 m_1^2 m_2^2 \eta^2 \right) K_{m_1, m_2, d_1, d_2}(\xi, \eta),$$

c'est-à-dire

$$\left(\xi^2 \frac{d^2}{d\xi^2} - 4\pi^2 m_1^2 m_2^2 \xi^2 \right) K_{m_1, m_2, d_1, d_2}(\xi, \eta) \text{ est une fonction symétrique en } \xi, \eta,$$

où

$$K_{m_1, m_2, d_1, d_2}(\xi, \eta) = \sqrt{\xi\eta} \sin \left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2c} \frac{m_1 m_2}{d_1 d_2} \frac{\xi}{\eta} - \frac{\pi}{2c} \frac{m_1 m_2}{d_2 d_2} \frac{\eta}{\xi} + 2\pi (d_1 d_2)^2 \frac{m_1 m_2}{d_1 d_2} \xi \eta \right).$$

Si $m_1 m_2 = 0$, nous désymétrisons alors le noyau intégral et utilisons un argument de continuité.

Afin de prouver (24), il suffit de le vérifier pour chaque T_p (p est un nombre premier), ce qui peut être vérifié par un calcul fastidieux, en utilisant (22) et l'évaluation explicite de $S_{c, m_1/d_1, m_2/d_2}(\gamma)$ dans l'appendice A. Pour les détails, voir l'appendice A.3.

5. Extension de B_ω et diagonalisation

Soit $P : \mathbf{H} \rightarrow X$ l'application de projection usuelle, et soit $\{D_{0j}\}_{0 \leq j \leq 3} \cup \{D_{k1} \cup D_{k2}\}_{k \geq 1}$ un système d'ouverts à fermetures compactes dans $\mathbf{H}$ dont les projections sur X forment un recouvrement ouvert localement fini de X (voir [9]), tel que la restriction $P|_{D_{kj}}$ est injective sauf pour D_{00} ou D_{01} ; D_{00} (resp. D_{01}) est un voisinage de i (resp. $\rho = e^{2\pi i/3}$) et la restriction $P|_{D_{00}}$ (resp. $P|_{D_{01}}$) est une application deux pour un (resp. trois pour un) sauf en i (resp. sauf en ρ). Nous choisissons ($k \geq 1$)

$$D_{02} = \{z, \Im(z) < 2, |\Re(z)| < 1/2, |z| > 1\},$$

$$D_{03} = \{z, \Im(z) < 2, -1/2 \leq \Re(z) < 0, |z| > 1\} \cup \{z, \Im(z) < 2, -1 < \Re(z) \leq -1/2, |z+1| > 1\},$$

$$D_{k1} = \{z, 3^k/2 < \Im(z) < 2 \cdot 3^k, -1 < \Re(z) < 0\},$$

$$D_{k2} = \{z, 3^k/2 < \Im(z) < 2 \cdot 3^k, -1/2 < \Re(z) < 1/2\}.$$

Soit $\{f_{kj}\}_{k \geq 0}$ la partition de l'unité subordonnée au recouvrement ci-dessus de X (voir [9]). Chaque f_{kj} peut être considérée comme une fonction automorphe par rapport à Γ . La restriction $f_{kj}|_{D_{kj}}$ a un support compact dans D_{kj} et nous l'étendons en une fonction Γ_∞ -périodique lisse $\tilde{f}_{kj}$ sur $\mathbf{H}$. Il existe $y_0 > 0$ tel que les $\tilde{f}_{kj}$ sont toutes supportées dans le demi-plan $y \geq y_0$, sur lequel $\tilde{f}_{kj}(z) = f_{kj}(z)$, sauf lorsque $k = 0$ et $j = 2$ ou 3 .

Soit ψ un élément fixé de $C_{0,0}^\infty(X)$. Nous avons

$$\psi(z) = \sum_{k,j} f_{kj}(z) \psi(z),$$

$$f_{kj}(z) \psi(z) = \frac{1}{n_{kj}} \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \setminus \Gamma} \tilde{f}_{kj}(\gamma z) \psi(\gamma z),$$

où

$$n_{kj} = \begin{cases} 2, & (k, j) = (0, 0), \\ 3, & (k, j) = (0, 1), \\ 1, & \text{sinon.} \end{cases}$$

En développant $\tilde{f}_{kj}(z)\psi(z)$ en sa série de Fourier en x , nous obtenons

$$\tilde{f}_{kj}(z)\psi(z) = \sum_{m \in \mathbf{Z}} h_{kjm}(y)e(mx).$$

Les $h_{kjm}(y)$ sont lisses à support compact, et puisque $\psi \in C_{0,0}^\infty(X)$, les h satisfont

$$h_{kjm}(y) \ll_A y^{-A}(|m| + 1)^{-A} \quad (25)$$

pour tout $A > 0$. Par conséquent

$$\begin{aligned} \psi(z) &= \sum_{k,j} \sum_{m \in \mathbf{Z}} \frac{1}{n_{kj}} P_{h_{kjm},m}(z) \\ &= \sum_{k,j} \sum_{m \neq 0} \frac{1}{n_{kj}} P_{h_{kjm},m}(z) + \sum_{k,j} P_{h_{kj0},0}(z) - \frac{1}{2} P_{h_{000},0}(z) - \frac{2}{3} P_{h_{010},0}(z) \\ &= \sum_{k,j} \sum_{m \neq 0} \frac{1}{n_{kj}} P_{h_{kjm},m}(z) + P_{H,0}(z) - \frac{1}{2} P_{h_{000},0}(z) - \frac{2}{3} P_{h_{010},0}(z), \end{aligned}$$

où $H(y) \in C_c^\infty(0, \infty)$ (rappelons que pour y suffisamment grand, le coefficient d'ordre zéro de ψ est nul) est défini par

$$H(y) = \sum_{k,j} h_{kj0}(y).$$

Ceci découle du fait que $\sum_{k,j} f_{kj}(z) = 1$, et que les $\tilde{f}_{kj}$ sont toutes supportées dans le demi-plan $y \geq y_0$, sur lequel nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{k,j} h_{kj0}(y) &= \int_0^1 \left(\sum_{k,j} \tilde{f}_{kj}(z) \right) \psi(z) dx \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{k,j} f_{kj}(z) + (\tilde{f}_{02}(z) - f_{02}(z)) + (\tilde{f}_{03}(z) - f_{03}(z)) \right) \psi(z) dx \\ &= \int_0^1 \left((\tilde{f}_{02}(z) - f_{02}(z)) + (\tilde{f}_{03}(z) - f_{03}(z)) \right) \psi(z) dx. \end{aligned}$$

De plus, nous avons

$$\int_X \left(P_{H,0}(z) - \frac{1}{2} P_{h_{000},0}(z) - \frac{2}{3} P_{h_{010},0}(z) \right) \tilde{\nu} = 0.$$

Écrivons

$$P_{H,0}(z) - \frac{1}{2} P_{h_{000},0}(z) - \frac{2}{3} P_{h_{010},0}(z) = P_{h,0}(z),$$

avec

$$h = H - \frac{1}{2} h_{000} - \frac{2}{3} h_{010}.$$

Nous avons alors

$$\psi(z) = \sum_{k,j} \sum_{m \neq 0} \frac{1}{n_{kj}} P_{h_{kjm},m}(z) + P_{h,0}(z), \quad (26)$$

avec

$$\int_X P_{h,0}(z) \tilde{\nu} = 0.$$

Il découle du théorème 2 et des commentaires qui le suivent, ainsi que de (25) et (26), que pour ψ et ϕ dans $C_{0,0}^\infty(X)$, nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{k \geq 1 \\ 2|k}} u \left(\frac{k-1}{K} \right) \sum_{f \in H_k} L(1, \text{sym}^2(f)) \langle \mu_f, \psi \rangle \overline{\langle \mu_f, \phi \rangle} \\ = B_\omega(\psi, \phi) K \left(\int_0^\infty u(t) dt \right) + O_{\psi, \phi, \epsilon}(K^{1/2+\epsilon}), \end{aligned} \quad (27)$$

où

$$\begin{aligned} B_\omega(\psi, \phi) &= \sum_{\substack{k_1, j_1, n_1 \neq 0 \\ k_2, j_2, n_2 \neq 0}} \frac{1}{n_{k_1 j_1} n_{k_2 j_2}} B_\omega(P_{h_{k_1 j_1 m_1}, m_1}, P_{h_{k_2 j_2 m_2}, m_2}) \\ &\quad + \sum_{k_1, j_1, n_1 \neq 0} \frac{1}{n_{k_1 j_1}} B_\omega(P_{h_{k_1 j_1 m_1}, m_1}, P_{h_{(\phi)}, 0}) \\ &\quad + \sum_{k_2, j_2, n_2 \neq 0} \frac{1}{n_{k_2 j_2}} B_\omega(P_{h_{(\psi)}, 0}, P_{h_{k_2 j_2 m_2}, m_2}) \\ &\quad + B_\omega(P_{h_{(\psi)}, 0}, P_{h_{(\phi)}, 0}). \end{aligned} \quad (28)$$

Compte tenu de (25) pour ϕ et ψ respectivement et de (17), nous voyons que la série (28) converge absolument. D'après (23), (24), (26) et (28), il s'ensuit que la forme bilinéaire $B_\omega(\psi_1, \psi_2)$ maintenant définie sur $C_{0,0}^\infty(X) \times C_{0,0}^\infty(X)$ satisfait

$$B_\omega(\Delta \psi_1, \psi_2) = B_\omega(\psi_1, \Delta \psi_2), \quad (29)$$

et pour $n \geq 1$,

$$B_\omega(T_n \psi_1, \psi_2) = B_\omega(\psi_1, T_n \psi_2). \quad (30)$$

Ceci achève la preuve des parties (A) et (B) du Théorème 1. Restreignons maintenant B_ω au sous-espace

$$C_{cusp}^\infty(X) = C_{0,0}^\infty(X) \cap L_{cusp}^2(X).$$

Si ϕ_1, ϕ_2 sont des formes propres de Hecke-Maass distinctes dans $C_{cusp}^\infty(X)$, alors pour $n \geq 1$

$$B_\omega(T_n \phi_1, \phi_2) = B_\omega(\phi_1, T_n \phi_2)$$

implique

$$\lambda_n(\phi_1) B_\omega(\phi_1, \phi_2) = \lambda_n(\phi_2) B_\omega(\phi_1, \phi_2).$$

D'après la théorie des opérateurs de Hecke et des coefficients de Fourier, il existe un n tel que $\lambda_n(\phi_1) \neq \lambda_n(\phi_2)$. Il s'ensuit que si ϕ_1 et ϕ_2 sont des formes paraboliques de Hecke-Maass distinctes, alors

$$B_\omega(\phi_1, \phi_2) = 0. \quad (31)$$

Ainsi, nous avons montré que B_ω est diagonalisée par la base orthonormée des formes paraboliques de Hecke-Maass dans $L_{cusp}^2(X)$. Dans la section suivante, nous calculons la valeur de B_ω sur une telle ϕ .

6. Valeurs propres de B_ω

Soit $\phi(z)$ une forme propre parabolique paire de Maass-Hecke pour le groupe modulaire Γ , de valeur propre du laplacien $\lambda_\phi = \frac{1}{4} + it_\phi$, et soit $L(s, \phi)$ la fonction L standard associée, dont on sait qu'elle admet un prolongement analytique à tout le plan complexe et satisfait l'équation fonctionnelle :

$$\Lambda_\phi(s) = \Lambda_\phi(1-s),$$

où

$$\Lambda_\phi(s) = \pi^{-s} \Gamma\left(\frac{s+it_\phi}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s-it_\phi}{2}\right) L(s, \phi).$$

Nous supposons que $\phi(z)$ est normalisée de sorte que son premier coefficient de Fourier $a_\phi(1) = 1$. D'après les travaux de Watson [29], nous avons

$$\begin{aligned} |\langle \mu_f, \phi \rangle|^2 &= \frac{\pi^2}{2 \cosh(\pi t_\phi)} \frac{|\Gamma(k - \frac{1}{2} + it_\phi)|^2}{(4\pi)^k \Gamma(k)} L^{-1}(1, \text{sym}^2(f)) |a_f(1)|^2 L(1/2, \phi \otimes f \otimes f) \\ &= \frac{\Gamma(k-1)}{(4\pi)^k} \frac{\pi^2}{2 \cosh(\pi t_\phi)} L^{-1}(1, \text{sym}^2(f)) |a_f(1)|^2 L(1/2, \phi \otimes f \otimes f) (1 + O(k^{-1})), \end{aligned}$$

en vertu du fait que pour toute bande verticale $0 < a \leq \Re(s) \leq b$, nous avons

$$\frac{\Gamma(s+k-1)}{\Gamma(k-1)} = (k-1)^s (1 + O_{a,b}(|s|+1)^2 k^{-1}), \quad (32)$$

par la formule de Stirling. Notons que

$$L(1/2, \phi \otimes f \otimes f) = L(1/2, \phi) L(1/2, \phi \otimes \text{sym}^2(f)).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{k \geq 1 \\ 2|k}} u \left(\frac{k-1}{K} \right) \sum_{f \in H_k} L(1, \text{sym}^2(f)) |\langle \mu_f, \phi \rangle|^2 \\ = \frac{\pi}{8} (1 + O(k^{-1})) \frac{L(1/2, \phi)}{\cosh(\pi t_\phi)} \sum_{\substack{k \geq 1 \\ 2|k}} u \left(\frac{k-1}{K} \right) \times \frac{\Gamma(k-1)}{(4\pi)^{k-1}} \sum_{f \in H_k} |a_f(1)|^2 L(1/2, \phi \otimes \text{sym}^2(f)). \end{aligned} \quad (33)$$

Définissons

$$\begin{aligned} \Lambda_{\phi,f}(s) &= \pi^{-3s} \Gamma\left(\frac{s+k-1+it_\phi}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+k-1-it_\phi}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+k+it_\phi}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+k-it_\phi}{2}\right) \\ &\quad \times \Gamma\left(\frac{s+1+it_\phi}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+1-it_\phi}{2}\right) L(s, \phi \otimes \text{sym}^2(f)), \end{aligned}$$

alors $\Lambda_{\phi,f}(s)$ admet un prolongement analytique à $\mathbf{C}$ en une fonction entière et satisfait l'équation fonctionnelle

$$\Lambda_{\phi,f}(s) = \Lambda_{\phi,f}(1-s).$$

Soit F la forme automorphe parabolique sur $GL(3)$ qui est le relevé de Gelbart-Jacquet de la forme parabolique f , avec les coefficients de Fourier $a_F(m_1, m_2)$, où

$$a_F(m_1, m_2) = \sum_{d|(m_1, m_2)} \lambda_F(m_1/d, 1) \lambda_F(m_2/d, 1) \mu(d),$$

et

$$\lambda_F(r, 1) = \sum_{s^2 t = r} \lambda_f(t^2).$$

Le produit de convolution de Rankin-Selberg $L(s, \phi \otimes \text{sym}^2(f))$ est représenté par la série de Dirichlet (voir [1,2]),

$$L(s, \phi \otimes \text{sym}^2(f)) = \sum_{m_1, m_2 \geq 1} \lambda_\phi(m_1) a_F(m_1, m_2) (m_1 m_2^2)^{-s}, \quad (34)$$

où $\lambda_\phi(r)$ est la r -ième valeur propre de Hecke de ϕ .

Nous avons

$$\Lambda_{\phi,f}(1/2) = \frac{2}{2\pi i} \int \Lambda_{\phi,f}(s + 1/2) \frac{ds}{s}.$$

Par conséquent,

$$L(1/2, \phi \otimes \text{sym}^2(f)) = 2 \sum_{m_1, m_2 \geq 1} \lambda_\phi(m_1) a_F(m_1, m_2) (m_1 m_2^2)^{-1/2} G_k(\pi^3 m_1 m_2^2), \quad (35)$$

où

$$\begin{aligned} G_k(\xi) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{(2)} \frac{\Gamma\left(\frac{(s+1/2)+k-1+it_\phi}{2}\right) \Gamma\left(\frac{(s+1/2)+k+it_\phi}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1/2+k-1+it_\phi}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1/2+k+it_\phi}{2}\right)} \\ &\quad \times \frac{\Gamma\left(\frac{(s+1/2)+k-1-it_\phi}{2}\right) \Gamma\left(\frac{(s+1/2)+k-it_\phi}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1/2+k-1-it_\phi}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1/2+k-it_\phi}{2}\right)} \\ &\quad \times \frac{\Gamma\left(\frac{(s+1/2)+1+it_\phi}{2}\right) \Gamma\left(\frac{(s+1/2)+1-it_\phi}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1/2+1+it_\phi}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1/2+1-it_\phi}{2}\right)} \xi^{-s} \frac{ds}{s} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{(2)} (1 + T_k(s)) \frac{\Gamma\left(\frac{(s+1/2)+1+it_\phi}{2}\right) \Gamma\left(\frac{(s+1/2)+1-it_\phi}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1/2+1+it_\phi}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1/2+1-it_\phi}{2}\right)} \left(\frac{4\xi}{(k-1)^2}\right)^{-s} \frac{ds}{s}, \end{aligned}$$

où

$$T_k(s) = \sum_{1 \leq r \leq 6} \frac{p_{r+1}(s)}{(k-1)^r} + O\left(\frac{(|s|+1)^8}{(k-1)^7}\right)$$

est une fonction analytique dans $\Re s \geq -2$, d'après la formule de Stirling. Ici $p_{r+1}(s)$ est un polynôme de degré au plus $r+1$. Notons

$$U_k(s) = (1 + T_k(s)) \frac{\Gamma\left(\frac{(s+1/2)+1+it_\phi}{2}\right) \Gamma\left(\frac{(s+1/2)+1-it_\phi}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1/2+1+it_\phi}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1/2+1-it_\phi}{2}\right)}.$$

Nous avons

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(k-1)}{(4\pi)^{k-1}} \sum_{f \in H_k} |a_f(1)|^2 L(1/2, \phi \otimes \text{sym}^2(f)) = \frac{\Gamma(k-1)}{(4\pi)^{k-1}} \sum_{f \in H_k} |a_f(1)|^2 \\ & \quad \times 2 \sum_{m_1, m_2 \geq 1} \lambda_\phi(m_1) a_F(m_1, m_2) (m_1 m_2^2)^{-1/2} G_k(\pi^3 m_1 m_2^2) \\ & = 2 \sum_{d \geq 1} \frac{\mu(d)}{d^{3/2}} \sum_{n_1, n_2 \geq 1} \lambda_\phi(d n_1) G_k(\pi^3 d^3 n_1 n_2^2) (n_1 n_2^2)^{-1/2} \times \frac{\Gamma(k-1)}{(4\pi)^{k-1}} \sum_{f \in H_k} |a_f(1)|^2 \lambda_F(n_1, 1) \lambda_F(n_2, 1) \\ & = 2 \sum_{d \geq 1} \frac{\mu(d)}{d^{3/2}} \sum_{s_1, s_2, t_1, t_2 \geq 1} \lambda_\phi(d s_1^2 t_1) G_k(\pi^3 d^3 s_1^2 t_1 s_2^4 t_2^2) (s_1^2 t_1 s_2^4 t_2^2)^{-1/2} \times \frac{\Gamma(k-1)}{(4\pi)^{k-1}} \sum_{f \in H_k} |a_f(1)|^2 \lambda_f(t_1^2) \lambda_f(t_2^2). \end{aligned}$$

Par la formule de Petersson, nous déduisons que

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{k \geq 1 \\ 2|k}} u \left(\frac{k-1}{K} \right) \frac{\Gamma(k-1)}{(4\pi)^{k-1}} \sum_{f \in H_k} |a_f(1)|^2 L(1/2, \phi \otimes \text{sym}^2(f)) \\ & = 2 \sum_{\substack{k \geq 1 \\ 2|k}} u \left(\frac{k-1}{K} \right) \sum_{d \geq 1} \frac{\mu(d)}{d^{3/2}} \sum_{s_1, s_2, t_1 \geq 1} \lambda_\phi(d s_1^2 t_1) G_k(\pi^3 d^3 s_1^2 s_2^4 t_1^3) (s_1^2 s_2^4 t_1^3)^{-1/2} \\ & \quad + 2 \sum_{d \geq 1} \frac{\mu(d)}{d^{3/2}} \sum_{s_1, s_2, t_1, t_2 \geq 1} \lambda_\phi(d s_1^2 t_1) (s_1^2 t_1 s_2^4 t_2^2)^{-1/2} \sum_{c \geq 1} \frac{S(t_1^2, t_2^2; c)}{c} \\ & \quad \times \sum_{\substack{k \geq 1 \\ 2|k}} 2\pi(-1)^{k/2} u \left(\frac{k-1}{K} \right) G_k(\pi^3 d^3 s_1^2 t_1 s_2^4 t_2^2) J_{k-1} \left(\frac{4\pi t_1 t_2}{c} \right). \end{aligned}$$

Le terme diagonal est (en écrivant $r = dt_1$)

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{\substack{k \geq 1 \\ 2|k}} u \left(\frac{k-1}{K} \right) \sum_{r \geq 1} r^{-3/2} \sum_{d|r} \mu(d) \sum_{s_2 \geq 1} s_2^{-2} \sum_{s_1 \geq 1} s_1^{-1} \lambda_\phi(r s_1^2) G_k(\pi^3 s_1^2 s_2^4 r^3) \\ & = 2 \sum_{\substack{k \geq 1 \\ 2|k}} u \left(\frac{k-1}{K} \right) \sum_{s_2 \geq 1} s_2^{-2} \sum_{s_1 \geq 1} s_1^{-1} \lambda_\phi(s_1^2) G_k(\pi^3 s_1^2 s_2^4). \end{aligned}$$

Maintenant

$$\sum_{s_1 \geq 1} s_1^{-1} \lambda_\phi(s_1^2) G_k(\pi^3 s_1^2 s_2^4) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(2)} \sum_{s_1 \geq 1} \frac{\lambda_\phi(s_1^2)}{s_1^{2s+1}} U_k(s) \left(\frac{4\pi^3 s_2^4}{(k-1)^2} \right)^{-s} \frac{ds}{s}.$$

Nous avons

$$\sum_{s_1 \geq 1} \frac{\lambda_\phi(s_1^2)}{s_1^s} = \frac{1}{\zeta(2s)} L(s, \text{sym}^2(\phi)).$$

En déplaçant la ligne d'intégration dans (18) vers $\Re(s) = -1/4 + \epsilon$, nous obtenons

$$\begin{aligned} & \sum_{s_1 \geq 1} s_1^{-1} \lambda_\phi(s_1^2) G_k(\pi^3 s_1^2 s_2^4) \\ &= \frac{1}{\zeta(2)} L(1, \text{sym}^2(\phi)) U_k(0) + \int \frac{1}{\zeta(2+4s)} L(1+2s, \text{sym}^2(\phi)) U_k(s) \left(\frac{4\pi^3 s_2^4}{(k-1)^2} \right)^{-s} \frac{ds}{s} \\ &= \frac{1}{\zeta(2)} L(1, \text{sym}^2(\phi)) U_k(0) + O(K^{-1/2+\epsilon}). \end{aligned} \quad (36)$$

Ainsi, les termes diagonaux contribuent

$$\frac{2K}{\zeta(2)} L(1, \text{sym}^2(\phi)) \int_0^\infty u(\xi) d\xi + O(K^{1/2+\epsilon}).$$

Puisque

$$G_k(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int U_k(s) \left(\frac{4\xi}{(k-1)^2} \right)^{-s} \frac{ds}{s},$$

nous pouvons écrire

$$G_k(\xi) = H\left(\frac{4\xi}{(k-1)^2}\right) + \sum_{1 \leq r \leq 6} \frac{1}{(k-1)^r} H_r\left(\frac{4\xi}{(k-1)^2}\right) + O\left(\frac{1}{(k-1)^7}\right).$$

En appliquant les lemmes 4.1 et 4.2 de [24], nous déduisons que les termes non-diagonaux sont égaux à

$$\begin{aligned} & -2\pi^{1/2} \sum_{d \geq 1} \frac{\mu(d)}{d^{3/2}} \sum_{s_1, s_2, t_1, t_2 \geq 1} \lambda_\phi(ds_1^2 t_1) (s_1^2 t_1 s_2^4 t_2^2)^{-1/2} \sum_{c \geq 1} \frac{S(t_1^2, t_2^2; c)}{c} \\ & \times \int_0^\infty u\left(\frac{\sqrt{8\pi t_1 t_2 c^{-1} y}}{K}\right) H\left(\frac{4\pi^3 d^3 s_1^2 t_1 s_2^4 t_2^2}{8\pi t_1 t_2 c^{-1} y}\right) \sin\left(\frac{8\pi t_1 t_2 c^{-1}}{2} + y - \frac{\pi}{4}\right) \frac{dy}{\sqrt{y}} + O(1) \\ & = -2\pi^{1/2} \sum_{d \geq 1} \frac{\mu(d)}{d^{3/2}} \sum_{s_1, s_2, t_1, t_2 \geq 1} \lambda_\phi(ds_1^2 t_1) (s_1^2 t_1 s_2^4 t_2^2)^{-1/2} \sum_{c \geq 1} \frac{S(t_1^2, t_2^2; c)}{c} J_{c,d,s_1,s_2,t_1,t_2} + O(1). \end{aligned}$$

Nous pouvons supposer $d^3 s_1^2 t_1 s_2^4 t_2^2 \ll K^{2+\epsilon}$ puisque $H(\xi)$ a une décroissance exponentielle lorsque $\xi \rightarrow \infty$. Les termes avec $c \gg K^{2\epsilon}$ ainsi que les termes avec $t_1 t_2 \ll K^{2-\epsilon}$ contribuent en $O(1)$, par intégration par parties. Donc nous pouvons supposer $c \ll K^{2\epsilon}$ et $t_1 t_2 \gg K^{2-\epsilon}$. De plus, de $t_1 t_2^2 \ll K^{2+\epsilon}$ et $t_1 t_2 \gg K^{2-\epsilon}$, nous déduisons que $t_2 \ll K^{2\epsilon}$. En faisant le changement de variable $t = \frac{\sqrt{8\pi t_1 t_2 c^{-1} y}}{K}$, nous voyons que J_{c,d,s_1,s_2,t_1,t_2} est

$$2K \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{8\pi t_1 t_2}} \int_0^\infty u(t) \sin\left(\frac{8\pi t_1 t_2 c^{-1}}{2} + \frac{(tK)^2 c}{8\pi t_1 t_2} - \frac{\pi}{4}\right) H\left(\frac{4\pi^3 d^3 s_1^2 t_1 s_2^4 t_2^2}{(tK)^2}\right) dt.$$

D'après la borne de Hecke [12, Théorème 8.1]

$$\sum_{r \leq R} \lambda_\phi(r) e(r\alpha) r^{-1/2} \ll_\epsilon R^\epsilon,$$

où $\alpha \in \mathbf{R}$; la relation de Hecke

$$\lambda_\phi(r_1 r_2) = \sum_{d|(r_1, r_2)} \mu(d) \lambda_\phi(r_1/d) \lambda_\phi(r_2/d);$$

et la sommation par parties, nous déduisons que la contribution des termes non-diagonaux est $O(K^{4\epsilon})$. Nous concluons que

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{k \geq 1 \\ 2|k}} u \left(\frac{k-1}{K} \right) \sum_{f \in H_k} L(1, \text{sym}^2(f)) |\langle \mu_f, \phi \rangle|^2 \\ &= \frac{\pi K}{4} \int u(\xi) d\xi \frac{L(1/2, \phi)}{\cosh(\pi t_\phi)} L(1, \text{sym}^2(\phi)) + O(K^{1/2+\epsilon}). \end{aligned} \quad (37)$$

Ceci achève la preuve du Théorème 1, en vertu du fait que

$$L(1, \text{sym}^2(\phi)) = 2 \langle \phi, \phi \rangle \cosh(\pi t_\phi).$$

Remerciements

Les auteurs remercient Zeev Rudnick pour d'intéressantes discussions, et en particulier pour avoir attiré leur attention sur les références [6] et [5]. Ils remercient également le rapporteur pour la lecture attentive de l'article et pour ses suggestions utiles.

Appendice A

A.1. Variance classique

Nous évaluons la variance classique donnée par (4). Cette évaluation est générale et s'applique à tout $Y = \Gamma \backslash SL(2, \mathbf{R})$, où Γ est un réseau (pas nécessairement arithmétique). Supposons que $C_{0,0}(Y)$ consiste en des fonctions sur Y de moyenne nulle. La variance classique V est donnée par la forme bilinéaire symétrique

$$V(\psi_1, \psi_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_Y \psi_1(g) \psi_2 \left(g \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix} \right) dg dt. \quad (A.1)$$

De là, il est clair que V est diagonalisée par les sous-espaces irréductibles dans la décomposition de la représentation régulière droite de $SL(2, \mathbf{R})$ sur $L_{0,0}^2(Y)$. Si $\psi(g)$ est un élément de $L_{0,0}^2(Y)$ qui est $SO(2)$ -invariant à droite, alors ψ est une forme de Maass sur $\mathbf{H} = SL(2, \mathbf{R})/SO(2)$ de valeur propre $\lambda = \frac{1}{4} + t^2 > 0$. Nous évaluons le coefficient de matrice

$$F(g) \int_{\Gamma \backslash SL(2, \mathbf{R})} \psi(g_1) \psi(g_1 g) dg_1. \quad (A.2)$$

En tant que fonction sur $SL(2, \mathbf{R})$, F satisfait :

1. $F(k_1 g k_2) = F(g)$, pour $k_1, k_2 \in SO(2)$;
2. $\omega F = \lambda F$;
3. $F(e) = 1$. (Nous normalisons ψ de sorte que $\int_Y |\psi(g)|^2 dg = 1$.)

D'après la théorie des fonctions sphériques, ces propriétés déterminent F de manière unique. Plus précisément, F est donnée explicitement (voir [31, p. 143]) par

$$F\left(\begin{pmatrix} e^{r/2} & 0 \\ 0 & e^{-r/2} \end{pmatrix}\right) = P_{-\frac{1}{2} + it}(\cosh r),$$

où P_s est la fonction de Legendre associée. Par conséquent,

$$V(\psi, \psi) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{-\frac{1}{2} + it}(\cosh r) dr. \quad (\text{A.3})$$

Cette intégrale peut être calculée [8, p. 810] et donne

$$V(\psi, \psi) = \frac{|\Gamma(\frac{1}{4} + \frac{it}{2})|^4}{2\pi |\Gamma(\frac{1}{2} + it)|^2}.$$

A.2. Évaluation de la somme $S_c(\gamma)$

Pour $2 \nmid c$, nous avons

$$S_c(\gamma) = \epsilon_c c^{3/2} \left(\frac{\gamma}{c}\right) T\left(-4\overline{\gamma} \left(\frac{m_1}{d_1}\right)^2, -4\overline{\gamma} \left(\frac{m_2}{d_2}\right)^2; c\right) e_c\left(-2\overline{\gamma} \frac{m_1 m_2}{d_1 d_2}\right),$$

où

$$\epsilon_c = \begin{cases} 1, & c \equiv 1 \pmod{4}, \\ i, & c \equiv 3 \pmod{4}, \end{cases}$$

est le signe de la somme de Gauss, et

$$T(m, n; c) = \sum_{d \pmod{c}} \left(\frac{d}{c}\right) e\left(\frac{m\overline{d} + nd}{c}\right) \quad (\text{A.4})$$

est la somme de Salié [27].

Si $(c, 2n) = 1$, nous savons (voir [11, Lemme 4.9])

$$T(m, n; c) = \left(\frac{n}{c}\right) \epsilon_c c^{1/2} \sum_{y^2 \equiv mn \pmod{c}} e\left(\frac{2y}{c}\right).$$

Par conséquent, si $(p, 2n) = 1, 2 \nmid c$, alors $T(pm, n; p^2 c) = 0$.

Si $c = p^k$ et $k \geq 2t \geq 2$, nous écrivons $d = l + rp^{k-t}$, $l \pmod{p^{k-t}}$, $(p, l) = 1$, $r \pmod{p^t}$, alors $\bar{d} \equiv \bar{l} - r\bar{l}^2 p^{k-t} \pmod{p^k}$, et par conséquent

$$T(m, n; p^k) = \sum_{l \pmod{p^{k-t}}} \left(\frac{l}{p^k} \right) e \left(\frac{m\bar{l} + nl}{p^k} \right) \sum_{r \pmod{p^t}} e \left(\frac{(n - m\bar{l}^2)r}{p^t} \right). \quad (\text{A.5})$$

Pour $c = 2^l$ et $m_1/d_1 \not\equiv m_2/d_2 \pmod{2}$, nous avons

$$S_c(\gamma) = 0,$$

puisque pour $2 \nmid AB$,

$$\sum_{x \pmod{2^l}} e \left(\frac{Ax^2 + Bx}{2^l} \right) = 0.$$

D'autre part, pour $c = 2^l$ et $m_1/d_1 \equiv m_2/d_2 \pmod{2}$, nous avons

$$S_c(\gamma) = \frac{1}{4} \sum_{x \pmod{4c}, (2, x)=1} cG(\gamma x, c) e_{4c} \left(-\bar{\gamma} \left(\left(\frac{m_1}{d_1} \right)^2 x + \left(\frac{m_2}{d_2} \right)^2 \bar{x} \right) \right) e_{2c} \left(-\bar{\gamma} \frac{m_1 m_2}{d_1 d_2} \right),$$

où

$$G(n, 2^l) = \sum_{t \pmod{c}} e \left(\frac{nt^2}{2^l} \right) = \begin{cases} 0, & l = 1; \\ (1 + i^n)2^{l/2}, & 2 \mid l; \\ 2^{(l+1)/2} e^{\pi i n/4}, & 2 \nmid l > 1. \end{cases}$$

Soit

$$2^s = \left(\left(\frac{m_1}{d_1} \right)^2, \left(\frac{m_2}{d_2} \right)^2, 4c \right)$$

et nous supposons sans perte de généralité que $2^s \ll c$, et $2^s \parallel \left(\frac{m_2}{d_2} \right)^2$. Nous distinguons deux cas (notons que $2^{-s}(m_2/d_2)^2 \equiv 1 \pmod{8}$) :

(a) $2 \mid l$.

$$e_{2c} \left(\bar{\gamma} \frac{m_1 m_2}{d_1 d_2} \right) S_c(\gamma) = \frac{2^s c^{3/2}}{4} \left\{ S \left(\bar{\gamma}^2 \left(\frac{m_1 m_2}{d_1 d_2 2^s} \right)^2, 1; \frac{4c}{2^s} \right) + S \left(-\frac{c}{2^s} + \bar{\gamma}^2 \left(\frac{m_1 m_2}{d_1 d_2 2^s} \right)^2, 1; \frac{4c}{2^s} \right) \right\}.$$

(b) $2 \nmid l > 1$.

$$e_{2c} \left(\bar{\gamma} \frac{m_1 m_2}{d_1 d_2} \right) S_c(\gamma) = \frac{2^s c^{3/2}}{2\sqrt{2}} S \left(-\frac{c}{2^{s+1}} + \bar{\gamma}^2 \left(\frac{m_1 m_2}{d_1 d_2 2^s} \right)^2, 1; \frac{4c}{2^s} \right).$$

Ici $S(m, n; c)$ est la somme de Kloosterman usuelle.

A.3. Auto-adjointise des opérateurs de Hecke pour B_ω

Nous écrivons

$$B_\omega(P_{h_1, m_1}, P_{h_2, m_2}) = B_\infty(P_{h_1, m_1}, P_{h_2, m_2}) + B_f(P_{h_1, m_1}, P_{h_2, m_2}),$$

où

$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi}{4} \sum_{\substack{d_1|m_1, d_2|m_2 \\ |m_1|/d_1 \\ = |m_2|/d_2}} \frac{1}{d_1 d_2} \int_0^\infty h_1(d_2 \eta) \overline{h_2}(d_1 \eta) \frac{d\eta}{\eta^2} \\
&= p^{-1/2} B_\infty(P_{h_1, m_1}, P_{h_2(p), pm_2}) \\
&= B_\infty(P_{h_1, m_1}, P_p P_{h_2, m_2}).
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
B_f(P_{h_1, m_1}, P_{h_2, m_2}) &= -\frac{\pi}{2\sqrt{2}} \sum_{\substack{d_1|m_1 \\ d_2|m_2}} \frac{1}{d_1 d_2} \sum_{c \geq 1} \frac{S_{c, |m_1|/d_1, |m_2|/d_2}}{c^{5/2}} e \left(\frac{1}{2c} \frac{|m_1|}{d_1} \frac{|m_2|}{d_2} \right) \\
&\times \iint \sin \left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2c} \left(\frac{m_1}{d_1} \right)^2 \frac{\xi}{\eta} - \frac{\pi}{2c} \left(\frac{m_2}{d_2} \right)^2 \frac{\eta}{\xi} + 2\pi(d_1 d_2)^2 \xi \eta c \right) \frac{h_1(d_2 \xi)}{\sqrt{\xi}} \frac{\overline{h_2}(d_1 \eta)}{\sqrt{\eta}} \frac{d\xi d\eta}{\xi \eta}.
\end{aligned}$$

Nous considérons d'abord le cas particulier $p \nmid m_1 m_2$ en détail. Les cas généraux, comme nous le verrons plus tard, peuvent être traités de manière similaire par récurrence. Nous avons, d'après (22),

$$T_p P_{h, m}(z) = p^{-1/2} P_{h(p), pm}(z).$$

Ainsi, puisque les conditions $d_1|pm_1, d_2|m_2; |m_1|p/d_1 = |m_2|/d_2$ impliquent $p|d_1$, nous déduisons que

$$\begin{aligned}
B_\infty(T_p P_{h_1, m_1}, P_{h_2, m_2}) &= p^{-1/2} B_\infty(P_{h_1(p), pm_1}, P_{h_2, m_2}) \\
&= \frac{\pi}{4} p^{-1/2} \sum_{\substack{d_1|m_1, d_2|m_2 \\ |m_1|/d_1 = |m_2|/d_2}} \frac{1}{pd_1 d_2} \int_0^\infty h_1(pd_2 \eta) \overline{h_2}(pd_1 \eta) \frac{d\eta}{\eta^2} \\
&= p^{-1/2} B_\infty(P_{h_1, m_1}, P_{h_2(p), pm_2}) \\
&= B_\infty(P_{h_1, m_1}, T_p P_{h_2, m_2}).
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
B_f(T_p P_{h_1, m_1}, P_{h_2, m_2}) &= p^{-1/2} B_f(P_{h_1(p), pm_1}, P_{h_2, m_2}) \\
&= -\frac{\pi}{2\sqrt{2}} p^{-1/2} \sum_{\substack{d_1|pm_1 \\ d_2|m_2}} \frac{1}{d_1 d_2} \sum_{c \geq 1} \frac{S_{c, |m_1 p|/d_1, |m_2|/d_2}}{c^{5/2}} e \left(\frac{1}{2c} \frac{|m_1 p|}{d_1} \frac{|m_2|}{d_2} \right) \\
&\times \iint \sin \left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2c} \left(\frac{m_1 p}{d_1} \right)^2 \frac{\xi}{\eta} - \frac{\pi}{2c} \left(\frac{m_2}{d_2} \right)^2 \frac{\eta}{\xi} + 2\pi(d_1 d_2)^2 \xi \eta c \right) \frac{h_1(d_2 p \xi)}{\sqrt{\xi}} \frac{\overline{h_2}(d_1 \eta)}{\sqrt{\eta}} \frac{d\xi d\eta}{\xi \eta} \\
&= -\frac{\pi}{2\sqrt{2}} p^{-1/2} \sum_{\substack{d_1|m_1 \\ d_2|m_2}} \frac{1}{d_1 d_2} \sum_{c \geq 1} \frac{S_{c, |m_1 p|/d_1, |m_2|/d_2}}{c^{5/2}} e \left(\frac{1}{2c} \frac{|m_1 p|}{d_1} \frac{|m_2|}{d_2} \right) \\
&\times \iint \sin \left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2c} \left(\frac{m_1 p}{d_1} \right)^2 \frac{\xi}{\eta} - \frac{\pi}{2c} \left(\frac{m_2}{d_2} \right)^2 \frac{\eta}{\xi} + 2\pi(d_1 d_2)^2 \xi \eta c \right) \frac{h_1(d_2 p \xi)}{\sqrt{\xi}} \frac{\overline{h_2}(d_1 \eta)}{\sqrt{\eta}} \frac{d\xi d\eta}{\xi \eta} \\
&- \frac{\pi}{2\sqrt{2}} p^{-1/2} \sum_{\substack{d_1|m_1 \\ d_2|m_2}} \frac{1}{pd_1 d_2} \sum_{c \geq 1} \frac{S_{c, |m_1|/d_1, |m_2|/d_2}}{c^{5/2}} e \left(\frac{1}{2c} \frac{|m_1|}{d_1} \frac{|m_2|}{d_2} \right) \\
&\times \iint \sin \left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2c} \left(\frac{m_1}{d_1} \right)^2 \frac{\xi}{\eta} - \frac{\pi}{2c} \left(\frac{m_2}{d_2} \right)^2 \frac{\eta}{\xi} + 2\pi(pd_1 d_2)^2 \xi \eta c \right) \frac{h_1(d_2 p \xi)}{\sqrt{\xi}} \frac{\overline{h_2}(pd_1 \eta)}{\sqrt{\eta}} \frac{d\xi d\eta}{\xi \eta} \\
&= \Sigma_1 + \Sigma_2,
\end{aligned}$$

disons, où $\sum_1, \sum_2$ correspondent respectivement aux conditions $p \nmid d_1$ et $p|d_1$ dans la somme initiale.

En faisant le changement de variables $\xi \rightarrow \xi/p, \eta \rightarrow p\eta$ dans $\sum_1$, nous voyons que

$$\begin{aligned} \sum_1 &= -\frac{\pi}{2\sqrt{2}} p^{-1/2} \sum_{\substack{d_1|m_1 \\ d_2|m_2}} \frac{1}{d_1 d_2} \sum_{c \geq 1} \frac{S_{c, |m_1 p|/d_1, |m_2|/d_2}}{c^{5/2}} e\left(\frac{1}{2c} \frac{|m_1 p|}{d_1} \frac{|m_2|}{d_2}\right) \\ &\times \iint \sin\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2c} \left(\frac{m_1}{d_1}\right)^2 \frac{\xi}{\eta} - \frac{\pi}{2c} \left(\frac{m_2 p}{d_2}\right)^2 \frac{\eta}{\xi} + 2\pi(d_1 d_2)^2 \xi \eta c\right) \frac{h_1(d_2 \xi)}{\sqrt{\xi}} \frac{\overline{h_2}(d_1 p \eta)}{\sqrt{\eta}} \frac{d\xi d\eta}{\xi \eta}. \end{aligned}$$

De manière similaire,

$$B_f(P_{h_1, m_1}, T_p P_{h_2, m_2}) = p^{-1/2} B_f(P_{h_1, m_1}, P_{h_2(p), pm_2}) = \sum_1' + \sum_2,$$

où

$$\begin{aligned} \sum_1' &= -\frac{\pi}{2\sqrt{2}} p^{-1/2} \sum_{\substack{d_1|m_1 \\ d_2|m_2}} \frac{1}{d_1 d_2} \sum_{c \geq 1} \frac{S_{c, |m_1|/d_1, |m_2 p|/d_2}}{c^{5/2}} e\left(\frac{1}{2c} \frac{|m_1|}{d_1} \frac{|m_2 p|}{d_2}\right) \\ &\times \iint \sin\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2c} \left(\frac{m_1}{d_1}\right)^2 \frac{\xi}{\eta} - \frac{\pi}{2c} \left(\frac{m_2 p}{d_2}\right)^2 \frac{\eta}{\xi} + 2\pi(d_1 d_2)^2 \xi \eta c\right) \frac{h_1(d_2 \xi)}{\sqrt{\xi}} \frac{\overline{h_2}(d_1 p \eta)}{\sqrt{\eta}} \frac{d\xi d\eta}{\xi \eta}. \end{aligned}$$

Cependant, en vertu de l'appendice A.2, nous avons

$$S_{c, |m_1 p|/d_1, |m_2|/d_2} = S_{c, |m_1|/d_1, |m_2 p|/d_2}. \quad (\text{A.6})$$

Pour voir cela, rappelons la multiplicativité de $S_c(\gamma)$:

$$S_{c_1 c_2, m_1/d_1, m_2/d_2}(\gamma) = S_{c_1, m_1/d_1, m_2/d_2}(\eta c_2) \cdot S_{c_2, m_1/d_1, m_2/d_2}(\gamma c_1), \quad \text{pour } (c_1, c_2) = 1.$$

Nous écrivons $c = c_1 c_2 c_3$ si $p > 2$, où $c_1|p^\infty, c_2|2^\infty$, et $(c_3, 2p) = 1$; $c = c_1 c_2$ si $p = 2$, où $c_1|p^\infty, (c_2, 2) = 1$. Alors

$$S_{c_1 c_2 c_3, |pm_1|/d_1, |m_2|/d_2} = S_{c_1, |pm_1|/d_1, |m_2|/d_1}(c_2 c_3) \cdot S_{c_2, |pm_1|/d_1, |m_2|/d_2}(c_1 c_3) \cdot S_{c_3, |pm_1|/d_1, |m_2|/d_2}(c_1 c_2),$$

si $p > 2$;

$$S_{c_1 c_2, pm_1/d_1, m_2/d_2} = S_{c_1, |pm_1|/d_1, |m_2|/d_2}(c_2) \cdot S_{c_2, |pm_1|/d_1, |m_2|/d_1}(c_1)$$

si $p = 2$. Nous décomposons également $S_{c, |m_1|/d_1, |m_2 p|/d_2}$ de la même manière. D'après l'évaluation de l'appendice A.2 (pour $S_{c_3, |pm_1|/d_1, |m_2|/d_2}(c_1 c_2)$, en faisant le changement de variable $d \rightarrow p^2 d$ à l'intérieur de la somme $T(\cdot, \cdot; c_3)$), la formule (A.6) s'ensuit.

Ainsi, nous voyons que $\sum_1 = \sum_1'$, et par conséquent

$$B_f(T_p P_{h_1, m_1}, P_{h_2, m_2}) = B_f(P_{h_1, m_1}, T_p P_{h_2, m_2}).$$

Considérons maintenant le cas général par récurrence sur a avec $p^a || (m_1, m_2)$. Puisque

$$T_p P_{h, m}(z) = p^{-1/2} P_{h(p), pm}(z) + p^{1/2} P_{h(\cdot/p), m/p}(z),$$

où si $p \nmid m$, nous comprenons que $P_{h(\cdot/p), m/p}(z) = 0$, nous avons

$$\begin{aligned}
B_f(T_p P_{h_1, m_1}, P_{h_2, m_2}) &= p^{-1/2} B_f(P_{h_1(p), pm_1}, P_{h_2, m_2}) + p^{1/2} B_f(P_{h_1(\cdot/p), m_1/p}, P_{h_2, m_2}) \\
&= -\frac{\pi}{2\sqrt{2}} p^{-1/2} \sum_{\substack{d_1 | pm_1 \\ d_2 | m_2}} \frac{1}{d_1 d_2} \sum_{c \geq 1} \frac{S_{c, |m_1 p|/d_1, |m_2|/d_2}}{c^{5/2}} e \left(\frac{1}{2c} \frac{|m_1 p|}{d_1} \frac{|m_2|}{d_2} \right) \\
&\quad \times \iint \sin \left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2c} \left(\frac{m_1 p}{d_1} \right)^2 \frac{\xi}{\eta} - \frac{\pi}{2c} \left(\frac{m_2}{d_2} \right)^2 \frac{\eta}{\xi} + 2\pi (d_1 d_2)^2 \xi \eta c \right) \frac{h_1(d_2 p \xi)}{\sqrt{\xi}} \frac{\overline{h_2}(d_1 \eta)}{\sqrt{\eta}} \frac{d\xi d\eta}{\xi \eta} \\
&\quad - \frac{\pi}{2\sqrt{2}} p^{1/2} \sum_{\substack{d_1 | m_1/p \\ d_2 | m_2}} \frac{1}{d_1 d_2} \sum_{c \geq 1} \frac{S_{c, |m_1|/pd_1, |m_2|/d_2}}{c^{5/2}} e \left(\frac{1}{2c} \frac{|m_1|}{pd_1} \frac{|m_2|}{d_2} \right) \\
&\quad \times \iint \sin \left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2c} \left(\frac{m_1}{pd_1} \right)^2 \frac{\xi}{\eta} - \frac{\pi}{2c} \left(\frac{m_2}{d_2} \right)^2 \frac{\eta}{\xi} + 2\pi (d_1 d_2)^2 \xi \eta c \right) \frac{h_1(d_2 \xi/p)}{\sqrt{\xi}} \frac{\overline{h_2}(d_1 \eta)}{\sqrt{\eta}} \frac{d\xi d\eta}{\xi \eta}. \\
B_f(P_{h_1, m_1}, T_p P_{h_2, m_2}) &= p^{-1/2} B_f(P_{h_1, m_1}, P_{h_2(p), pm_2}) + p^{1/2} B_f(P_{h_1, m_1}, P_{h_2(\cdot/p), m_2/p}) \\
&= -\frac{\pi}{2\sqrt{2}} p^{-1/2} \sum_{\substack{d_1 | m_1 \\ d_2 | pm_2}} \frac{1}{d_1 d_2} \sum_{c \geq 1} \frac{S_{c, |m_1|/d_1, |m_2 p|/d_2}}{c^{5/2}} e \left(\frac{1}{2c} \frac{|m_1|}{d_1} \frac{|m_2 p|}{d_2} \right) \\
&\quad \times \iint \sin \left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2c} \left(\frac{m_1}{d_1} \right)^2 \frac{\xi}{\eta} - \frac{\pi}{2c} \left(\frac{m_2 p}{d_2} \right)^2 \frac{\eta}{\xi} + 2\pi (d_1 d_2)^2 \xi \eta c \right) \frac{h_1(d_2 p \xi)}{\sqrt{\xi}} \frac{\overline{h_2}(d_1 \eta)}{\sqrt{\eta}} \frac{d\xi d\eta}{\xi \eta} \\
&\quad - \frac{\pi}{2\sqrt{2}} p^{1/2} \sum_{\substack{d_1 | m_1 \\ d_2 | m_2/p}} \frac{1}{d_1 d_2} \sum_{c \geq 1} \frac{S_{c, |m_1|/d_1, |m_2|/pd_2}}{c^{5/2}} e \left(\frac{1}{2c} \frac{|m_1|}{d_1} \frac{|m_2|}{pd_2} \right) \\
&\quad \times \iint \sin \left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2c} \left(\frac{m_1}{d_1} \right)^2 \frac{\xi}{\eta} - \frac{\pi}{2c} \left(\frac{m_2}{pd_2} \right)^2 \frac{\eta}{\xi} + 2\pi (d_1 d_2)^2 \xi \eta c \right) \frac{h_1(d_2 \xi)}{\sqrt{\xi}} \frac{\overline{h_2}(d_1 \eta/p)}{\sqrt{\eta}} \frac{d\xi d\eta}{\xi \eta}. \\
&= I_A + I_B,
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
& B_f(P_{h_1, m_1}, T_p P_{h_2, m_2}) \\
&= p^{-1/2} B_f(P_{h_1, m_1}, P_{h_2(\cdot, p), m_2}) + p^{1/2} B_f(P_{h_1, m_1}, P_{h_2(\cdot/p), m_2/p}) \\
&= -\frac{\pi}{2\sqrt{2}} p^{-1/2} \sum_{d_1 | m_1, d_2 | p m_2} \frac{1}{d_1 d_2} \sum_{c \geq 1} \frac{S_{c, |m_1|/d_1, |m_2 p|/d_2}}{c^{5/2}} e\left(\frac{1}{2c} \frac{|m_1|}{d_1} \frac{|m_2 p|}{d_2}\right) \\
&\quad \times \iint_{\mathbf{R}^2} \sin\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2c} \left(\frac{m_1}{d_1}\right)^2 \frac{\xi}{\eta} - \frac{\pi}{2c} \left(\frac{m_2 p}{d_2}\right)^2 \frac{\eta}{\xi} + 2\pi(d_1 d_2)^2 \xi \eta c\right) \\
&\quad \times \frac{h_1(d_2 \xi)}{\sqrt{\xi}} \frac{\overline{h_2(d_1 p \eta)}}{\sqrt{\eta}} \frac{d\xi d\eta}{\xi \eta} \\
&\quad - \frac{\pi}{2\sqrt{2}} p^{1/2} \sum_{d_1 | m_1, d_2 | m_2/p} \frac{1}{d_1 d_2} \sum_{c \geq 1} \frac{S_{c, |m_1|/d_1, |m_2|/p d_2}}{c^{5/2}} e\left(\frac{1}{2c} \frac{|m_1|}{d_1} \frac{|m_2|}{p d_2}\right) \\
&\quad \times \iint_{\mathbf{R}^2} \sin\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2c} \left(\frac{m_1}{d_1}\right)^2 \frac{\xi}{\eta} - \frac{\pi}{2c} \left(\frac{m_2}{p d_2}\right)^2 \frac{\eta}{\xi} + 2\pi(d_1 d_2)^2 \xi \eta c\right) \\
&\quad \times \frac{h_1(d_2 \xi)}{\sqrt{\xi}} \frac{\overline{h_2(d_1 \eta/p)}}{\sqrt{\eta}} \frac{d\xi d\eta}{\xi \eta} \\
&= \text{II}_A + \text{II}_B,
\end{aligned}$$

disons.

Selon que $p \mid (c, *, *)$ ou non dans $S_{c, *, *}$, nous décomposons en outre les sommes I_A, I_B, II_A, II_B en

$$I_A = I_{A1} + I_{A2}, \quad I_B = I_{B1} + I_{B2}, \quad II_A = II_{A1} + II_{A2}, \quad II_B = II_{B1} + II_{B2}.$$

Remarquons que si $p \mid (c, *, *)$, $S_{c, *, *} = 0$ à moins que $p^2 \mid c$. En écrivant $c = p^2 c_1$, nous avons

$$S_{c, |m_1|/d_1, |m_2|/p d_2} = S_{c_1, |m_1|/d_1, |m_2|/p d_2} p^2 \left(1 - \frac{\delta(p, c_1)}{p}\right),$$

(Note : selon la notation de l'article, les indices de S peuvent être adaptés selon le terme considéré).
où

$$\delta(p, c_1) = \begin{cases} 0, & \text{si } p \mid c_1, \\ 1, & \text{si } p \nmid c_1, \end{cases}$$

et écrivons en conséquence $I_{A1} = I'_{A1} - I''_{A1}$;

$$S_{c, |m_1|/p d_1, |m_2|/d_2} = S_{c_1, |m_1|/p^2 d_1, |m_2|/p d_2} p^2 \left(1 - \frac{\delta(p, c_1)}{p}\right),$$

et $I_{B1} = I'_{B1} - I''_{B1}$;

$$S_{c, |m_1|/d_1, |m_2 p|/d_2} = S_{c_1, |m_1|/p d_1, |m_2|/d_2} p^2 \left(1 - \frac{\delta(p, c_1)}{p}\right),$$

et $II_{A1} = II'_{A1} - II''_{A1}$;

$$S_{c, |m_1|/d_1, |m_2|/p d_2} = S_{c_1, |m_1|/p d_1, |m_2|/p^2 d_2} p^2 \left(1 - \frac{\delta(p, c_1)}{p}\right),$$

et $\Pi_{A1} = \Pi'_{B1} - \Pi''_{B1}$.

Nous voyons, par l'hypothèse de récurrence sur $(m_1/p, m_2/p)$, que $I'_{A1} + I'_{B1} = \Pi'_{A1} + \Pi'_{B1}$.

De plus, notons que si $p \nmid bc$, nous avons $S_{cp,ap,b} = p^2 S_{c,a,b}$ et $S_{ip^2,ap,b} = 0$. En utilisant ceci, ainsi que l'évaluation de $S_{c,*,*}$ dans l'appendice A.2, on peut facilement vérifier que (où $I_{A2}(p|d_1)$, par exemple, désigne la somme partielle de I_{A2} dans laquelle $p|d_1$)

$$\begin{aligned}
I_{A2}(p|d_1) &= \Pi_{A2}(p|d_2); \\
I_{A2}(p \nmid d_1, p \nmid d_2, p \nmid c) &= \Pi_{A2}(p \nmid d_2, p \nmid d_1, p \nmid c); \\
I_{A2}(p \nmid d_1, p \parallel d_2, p \nmid c) &= \Pi_{A2}(p \nmid d_2, p \parallel d_1, p \nmid c); \\
I_{A2}(p \nmid d_1, p^2|d_2, p \nmid c) &= I''_{A1}(p \nmid d_1, p^2|m_2/d_2); \\
I_{A2}(p \nmid d_1, p|c) &= I''_{A1}(p \nmid d_1, p \parallel m_2/d_2); \\
II''_{A1}(p \nmid d_2, p^2|m_1/d_1) &= \Pi_{A2}(p \nmid d_2, p^2|d_1, p \nmid c); \\
II''_{A1}(p \nmid d_2, p \parallel m_1/d_1) &= \Pi_{A2}(p \nmid d_2, p|c); \\
I''_{A1}(p|d_1) &= II''_{A1}(p|d_2); \\
I_{B2}(p|d_2) &= \Pi_{B2}(p|d_1); \\
I_{B2}(p \nmid d_2, p \nmid d_1, p \nmid c) &= \Pi_{B2}(p \nmid d_1, p \nmid d_2, p \nmid c); \\
I_{B2}(p \nmid d_2, p \parallel d_1, p \nmid c) &= \Pi_{B2}(p \nmid d_1, p \parallel d_2, p \nmid c); \\
I_{B2}(p \nmid d_2, p^2|d_1, p \nmid c) &= I''_{B1}(p \nmid d_2, p^3|m_1/d_1); \\
I_{B2}(p \nmid d_2, p|c) &= I''_{B1}(p \nmid d_2, p^2 \parallel m_1/d_1); \\
II''_{B1}(p|d_1) &= I''_{B1}(p|d_2); \\
\Pi_{B2}(p \nmid d_1, p^2|d_2, p \nmid c) &= II''_{B1}(p \nmid d_1, p^3|m_2/d_2); \\
\Pi_{B2}(p \nmid d_1, p|c) &= II''_{B1}(p \nmid d_1, p^2 \parallel m_2/d_2).
\end{aligned}$$

Nous déduisons de ce qui précède que

$$B_f(T_p P_{h_1, m_1}, P_{h_2, m_2}) = B_f(P_{h_1, m_1}, T_p P_{h_2, m_2}).$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned}
B_\infty(T_p P_{h_1, m_1}, P_{h_2, m_2}) &= p^{-1/2} B_\infty(P_{h_1(p), pm_1}, P_{h_2, m_2}) + p^{1/2} B_\infty(P_{h_1(\cdot/p), m_1/p}, P_{h_2, m_2}) \\
&= \frac{\pi}{4} p^{-1/2} \sum_{\substack{d_1 | m_1 p, d_2 | m_2 \\ |m_1|p/d_1 = |m_2|/d_2}} \frac{1}{d_1 d_2} \int_0^\infty h_1(pd_2 \eta) \overline{h_2}(d_1 \eta) \frac{d\eta}{\eta^2} \\
&\quad + \frac{\pi}{4} p^{1/2} \sum_{\substack{d_1 | m_1 p, d_2 | m_2 \\ |m_1|/pd_1 = |m_2|/d_2}} \frac{1}{d_1 d_2} \int_0^\infty h_1(d_2 \eta/p) \overline{h_2}(d_1 \eta) \frac{d\eta}{\eta^2} \\
&= A + B,
\end{aligned}$$

disons. De manière similaire

$$\begin{aligned}
B_\infty(P_{h_1, m_1}, T_p P_{h_2, m_2}) &= p^{-1/2} B_\infty(P_{h_1, m_1}, P_{h_2(p \cdot), p m_2}) + p^{1/2} B_\infty(P_{h_1, m_1}, P_{h_2(\cdot/p), m_2/p}) \\
&= \frac{\pi}{4} p^{-1/2} \sum_{\substack{d_1 | m_1, d_2 | m_2 \\ |m_1|/d_1 = |m_2|/p d_2}} \frac{1}{d_1 d_2} \int_0^\infty h_1(d_2 \eta) \overline{h_2}(p d_1 \eta) \frac{d\eta}{\eta^2} \\
&\quad + \frac{\pi}{4} p^{1/2} \sum_{\substack{d_1 | m_1, d_2 | m_2 p \\ |m_1|/d_1 = |m_2|/p d_2}} \frac{1}{d_1 d_2} \int_0^\infty h_1(d_2 \eta) \overline{h_2}(d_1 \eta/p) \frac{d\eta}{\eta^2} \\
&= A' + B',
\end{aligned}$$

disons. On peut facilement vérifier que

$$A(p|d_1) = A'(p|d_2); \quad A(p \nmid d_1) = B'(p \nmid d_1);$$

$$B(p \nmid d_2) = A'(p \nmid d_2); \quad B(p|d_2) = B'(p|d_1).$$

Ainsi,

$$B_\infty(T_p P_{h_1, m_1}, P_{h_2, m_2}) = B_\infty(P_{h_1, m_1}, T_p P_{h_2, m_2}).$$

Ceci achève la preuve que

$$B_\omega(T_p P_{h_1, m_1}, P_{h_2, m_2}) = B_\omega(P_{h_1, m_1}, T_p P_{h_2, m_2}).$$

Références

- [1] Bump D., Automorphic Forms on $GL(3, \mathbf{R})$, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1083, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [2] Bump D., The Rankin-Selberg method : a survey, in : Number Theory, Trace Formulas and Discrete Groups (Oslo, 1987), Academic Press, Boston, MA, 1989, pp. 49-109.
- [3] Deshouillers J.-M., Iwaniec H., Kloosterman sum and Fourier coefficients of cusp forms, *Invent. Math.* 70 (1982) 219-288.
- [4] Miller S., Duenez E., The low-lying zeros of a $GL(6)$ family of L-functions, preprint, 2004.
- [5] Eckhardt B., Fishman S., Keating J., Agam O., Main J., Muller K., Approach to ergodicity in quantum wave functions, *Phys. Rev. E* 52 (1995) 5893-5903.
- [6] Feingold M., Peres A., Distribution of matrix elements of chaotic systems, *Phys. Rev. A* (3) 34 (1) (1986) 591-595.
- [7] Gerbart S., Jacquet H., A relation between automorphic representations of $GL(2)$ and $GL(3)$, *Ann. Sci. École Norm. Sup. 4^e série* 11 (1978) 471-552.
- [8] Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M., Tables of Integrals, Series and Products, Academic Press, New York, 1965.
- [9] Helgason S., Differential Geometry and Symmetric Spaces, Pure and Applied Mathematics, vol. XII, Academic Press, New York, 1962.
- [10] Hoffstein J., Lockhart P., Coefficients of Maass forms and the Siegel zero, appendix by Goldfeld, D., Hoffstein, J., Lieman, D. An effective zero free region, *Annals of Math.* 140 (1994) 161-181.
- [11] Iwaniec H., Introduction to the Spectral Theory of Automorphic Forms, *Revista Matemática Iberoamericana*, Madrid, 1995.
- [12] Iwaniec H., Topics in Classical Automorphic Forms, Graduate Studies in Mathematics, vol. 17, AMS, 1997.
- [13] Iwaniec H., Luo W., SARNAK P., Low lying zeros of families of L-functions, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 91 (2001) 55-131.
- [14] Iwaniec H., Sarnak P., Perspectives on the analytic theory of L-functions, *Geom. Funct. Anal.* (2000) 705-741, Special Volume, Part II.
- [15] Iwaniec H., Sarnak P., The nonvanishing of central values of automorphic L-functions and Siegel's zero, *Israel J. Math.* A 120 (2000) 155-177.
- [16] Jakobson D., Equidistribution of cusp forms on $PSL_2(\mathbf{Z}) \backslash PSL_2(\mathbf{R})$, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 47 (3) (1997) 967-984.
- [17] Katok S., Sarnak P., Heegner points, cycles and Maass forms, *Israel J. Math.* 84 (1993) 193-227.
- [18] Katz N., Sarnak P., Random Matrices, Frobenius Eigenvalues and Monodromy, Colloquium Publications, vol. 45, AMS, 1999.

- [19] Keating J.-P., Snaith N. C., Random matrix theory and L-functions at $s = 1/2$, *Comm. Math. Phys.* 214 (1) (2000) 91-110.
- [20] Kurlberg P., Rudnick Z., On the distribution of matrix elements for the quantum cat map, preprint, 2003.
- [21] Kuznetsov N. V., Petersson's conjecture for cusp forms of weight zero and Linnik's conjecture, sums of Kloosterman sums, *Mat. Sb.* 111 (1980) 334-383.
- [22] Luo W., Values of symmetric square L-functions at 1, *J. Reine Angew. Math.* 506 (1999) 215-235.
- [23] Luo W., Sarnak P., Quantum ergodicity of eigenfunctions on $PSL_2(\mathbf{Z}) \backslash \mathbf{H}$, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 81 (1995) 207-237.
- [24] Luo W., Sarnak P., Mass equidistribution for Hecke eigenforms, *Comm. Pure Appl. Math.* 56 (7) (2003) 874-891.
- [25] Ratner M., The central limit theorem for geodesic flows on n -dimensional manifolds of negative curvature, *Israel J. Math.* 16 (1973) 181-197.
- [26] Ratner M., The rate of mixing for geodesic and horocycle flows, *Ergodic Theory Dynam. Systems* 7 (1987) 267-288.
- [27] Salie H., Über die Kloostermanschen Summen $S(u, v; q)$, *Math. Z.* 34 (1931) 91-109.
- [28] Sarnak P., Arithmetic quantum chaos, The R.A. Blyth Lecture, University of Toronto, 1993.
- [29] Watson T., Rankin triple products and quantum chaos, Thesis, Princeton University, 2001.
- [30] Serre J.-P., A Course in Arithmetic, Graduate Texts in Mathematics, vol. 7, Springer-Verlag, New York, 1973.
- [31] Terras A., Harmonic Analysis on Symmetric Spaces and Applications I, Springer-Verlag, New York, 1985.
- [32] Zelditch S., Uniform distribution of eigenfunctions on compact hyperbolic surfaces, *Duke Math. J.* 55 (1987) 919-941.
- [33] Zelditch S., On the rate of quantum ergodicity, I, Upper bounds, *Comm. Math. Phys.* 160 (1) (1994) 81-92.

(Manuscrit reçu le 28 février 2004 ; accepté le 31 août 2004.)

Wenzhi Luo
 Department of Mathematics,
 100 Mathematics Building,
 231 West 18th Avenue,
 Columbus, OH 43210-1174, USA

Peter Sarnak
 Courant Institute,
 251 Mercer Street,
 New York, NY 10012, USA
 Department of Mathematics,
 Princeton University,
 Princeton, NJ 08540, USA