

Positivité de Weil certifiée au-delà de la fenêtre unité : bornes de Schur par blocs exactes en source et de compensation de queue pour la fonction zêta de Riemann

Vincent Liu

2026

Abstract

Nous étudions la forme quadratique classique de Weil pour des fonctions lisses complexes arbitraires supportées dans un intervalle compact prescrit. Nous donnons des bornes de coercivité assistées par ordinateur de 2^{-151} sur l'intervalle de demi-largeur 1, et de 2^{-49162} sur l'intervalle de demi-largeur $17/16$. La seconde borne retient chaque puissance de nombre premier contributive, y compris 8, et combine une estimation quantitative du complément de bande de Fourier avec une contribution de queue de rang deux. Un argument de Schur par blocs sépare l'erreur croisée de projection du premier ordre de l'erreur de complément du second ordre. Des intervalles sources dirigés et des congruences positives réduisent le test de signe restant à deux matrices entières complètes d'ordre 224, certifiées par des inégalités exactes de résidu de Gram. Nous prouvons aussi qu'une localisation spécifiée par suppression de queue a une limite haute fréquence négative dès que la demi-largeur dépasse $\log 8/2$, et qu'aucune correction compacte fixée ne la répare. La positivité sur fenêtre fixée ne prouve pas l'hypothèse de Riemann.

1 Introduction

Le critère de positivité de Weil traduit l'hypothèse de Riemann en un énoncé de non-négativité pour une famille de fonctions test. Son quantificateur universel sur le support est essentiel. Une borne inférieure positive sur un intervalle compact fixé établit une instance restreinte du critère et une estimation spectrale pour cet intervalle. Elle ne contrôle pas un support arbitraire.

Le problème abordé ici est quantitatif : spécifier la forme classique sans changer ses termes de pôle, de nombres premiers ou archimédiens ; obtenir une borne inférieure positive pour toute fonction test lisse complexe sur un intervalle énoncé ; et exposer les étapes analytiques et d'arithmétique finie nécessaires pour vérifier la borne. La difficulté centrale est qu'une compression finie positive ne contrôle pas à elle seule le complément de dimension infinie ni son couplage à la compression.

Quatre résultats organisent l'article. Le Théorème A fournit la constante plus forte sur la fenêtre unité. Le Théorème B passe au-delà de cette fenêtre, où la puissance de nombre premier 8 est présente. Le Théorème d'Obstruction explique un échec structurel d'une stratégie de localisation. Le Théorème de Certification transfère une inégalité finie à erreur payée vers l'espace de Hilbert complet et donne sa fermeture exacte par certificat de Gram. Les preuves utilisent des opérateurs de comparaison bornés ; la forme non bornée originale n'est évaluée que sur son domaine lisse légal.

La contribution principale examinée ici est la borne explicite sur la plus grande fenêtre, avec sa chaîne complète de certificat source-à-signé. La borne est petite et n'est pas revendiquée optimale. L'obstruction est analytiquement indépendante et concerne une comparaison inférieure spécifiée, non une valeur négative de la forme de Weil complète. Les estimations par blocs sont des applications d'inégalités hilbertiennes classiques avec une séparation utile des ordres d'erreur.

1.1 Relation aux travaux existants

Notre normalisation s'accorde avec la formule explicite dans [1, Appendice B, équations (149)–(154)]. Son critère de positivité universel [1, Appendice C, Proposition 6.12, équation (156)] concerne tous les supports compacts admissibles. La comparaison archimédienne dans

1.2 Portée de la contribution

La contribution examinée ici est la borne explicite sur la fenêtre 17/16, avec les intervalles sources spécifiés, les directions de queue retenues et le certificat entier complet. Aucune revendication de priorité n'est faite pour la réduction en dimension finie, le contrôle rigoureux du complément infini, la positivité pour fonctions test complexes, la convolution de Legendre, ou un principe général de complément de Schur. Le théorème d'Obstruction séparé identifie un échec précis de la comparaison énoncée par suppression de queue.

2 Normalisation et forme classique de Weil

Pour $L > 0$, posons $\mathcal{D}_L = C_c^\infty((-L, L); \mathbb{C})$ et $\mathcal{H}_L = L^2((-L, L); \mathbb{C})$, avec la mesure de Lebesgue et le produit scalaire conjugué-linéaire en la première variable. Étendons les fonctions test par zéro et définissons

$$F_f(z) = \int_{\mathbb{R}} f(u) e^{-izu} du, \quad h_f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(v+x) \overline{f(v)} dv, \quad H_f(x) = \operatorname{Re} h_f(x).$$

Alors H_f est réelle et paire. Notons Λ la fonction de von Mangoldt, $\psi = \Gamma'/\Gamma$, et

$$A(t) = \operatorname{Re} \psi(1/4 + it/2) - \log \pi, \quad c_n = \frac{2\Lambda(n)}{\sqrt{n}}.$$

La forme classique de Weil, dans cette normalisation, est

$$Q(f) = \mathcal{P}(f) + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} A(t) |F_f(t)|^2 dt - \sum_{n \geq 2} c_n H_f(\log n), \quad \mathcal{P}(f) = 2 \operatorname{Re}(F_f(i/2) \overline{F_f(-i/2)}). \quad (1)$$

Pour $f \in \mathcal{D}_L$, la somme ne contient que $\log n < 2L$. L'expression du pôle est retenue pour des tests complexes arbitraires, y compris la contribution impaire négative. La formule (1) découle de la formule explicite classique appliquée à la partie paire de h_f . De façon équivalente, avec les zéros non triviaux distincts ρ comptés avec multiplicités m_ρ et $\gamma_\rho = (\rho - 1/2)/i$,

$$Q(f) = \sum_{\rho} m_\rho F_f(\gamma_\rho) \overline{F_f(\overline{\gamma_\rho})}. \quad (2)$$

La convergence absolue découle de la décroissance rapide de Fourier dans la bande $|\operatorname{Im} z| \leq 1/2$ et du comptage inconditionnel des zéros $O(T \log T)$. Pour une estimation explicite inconditionnelle du comptage des zéros impliquant cette borne d'ordre, voir [12, Corollaire 1]. Aucune hypothèse que γ_ρ soit réel n'entre dans (1) ou (2). Pour être complet, posons $\tilde{f}(u) = \overline{f(-u)}$, de sorte que $h_f = f * \tilde{f}$ et $h_f(-x) = \overline{h_f(x)}$. Fubini à support compact donne $\widehat{h}_f(z) = F_f(z) \overline{F_f(\bar{z})}$. La symétrie de l'équation fonctionnelle apparie γ_ρ avec $-\gamma_\rho$, en préservant les multiplicités, de sorte que la somme absolument convergente peut être évaluée sur la partie réelle paire H_f . Appliquons la formule explicite pour tests pairs [8, §2.1, équation (2.1)]. Sur l'axe réel sa transformée est $(|F_f(t)|^2 + |F_f(-t)|^2)/2$; le symbole est pair, et les évaluations du pôle donnent précisément (1). Ceci prouve la normalisation pour tests complexes sans supposer RH.

Sous RH, (2) est une somme de carrés non négatifs. La réciproque classique exige la non-négativité pour tous les supports compacts admissibles. Les deux intervalles fixés traités ici laissent ce quantificateur universel non résolu.

3 Théorème A — Coercivité sur la fenêtre unité

Théorème 3.1 (Théorème A). *Pour tout $f \in \mathcal{D}_1$,*

$$Q(f) \geq 2^{-151} \|f\|_2^2. \quad (3)$$

Proof. Posons $\beta_0 = 1/16$, $\Omega_0 = 2560$, et

$$\sigma_1(t) = A(t) - \sum_{n \in \{2,3,4,5,7\}} c_n \cos(t \log n).$$

La restriction du support supprime toute autre puissance de nombre premier. L'enveloppe inconditionnelle de la digamma

$$A(t) \geq \log \frac{|t|}{2\pi} - \frac{1}{|t|} \quad (|t| \geq 15/4) \quad (4)$$

et les bornes rationnelles sur les cinq coefficients impliquent $\sigma_1(t) > \beta_0$ pour $|t| \geq \Omega_0$. Par conséquent $Q \geq R_1$ sur $\mathcal{D}_1$, où la forme hermitienne bornée sur $\mathcal{H}_1$ est

$$R_1(f) = \beta_0 \|f\|^2 + \mathcal{P}(f) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_0}^{\Omega_0} (\sigma_1(t) - \beta_0) |F_f(t)|^2 dt. \quad (5)$$

Pour la projection orthogonale sur les ordres de Legendre $0, \dots, 2815$, les certificats complets de source et de résidu établissent une borne inférieure compressée $\ell = 2^{-150}$. Des estimations analytiques d'approximation établissent la borne inférieure $a = 1/32$ sur tout le complément orthogonal et la borne de norme du bloc croisé $b_0 = 2^{-83}$. Ce sont trois entrées séparées ; une valeur propre finie approchée n'en fournit aucune. L'Appendice A prouve les estimations analytiques et d'erreur de source. L'Appendice F consigne la vérification arithmétique fraîche complète du certificat fini retenu et les vérifications scalaires exactes séparées utilisées pour son transfert.

Pour $f = x + y$ dans la décomposition orthogonale,

$$R_1(f) \geq \ell \|x\|^2 - 2b_0 \|x\| \|y\| + a \|y\|^2.$$

Avec $\epsilon = 2^{-151} < \min(\ell, a)$, l'arithmétique exacte donne

$$(\ell - \epsilon)(a - \epsilon) - b_0^2 = 2^{-302}(2^{146} - 1 - 2^{136}) > 0.$$

La borne hermitienne deux par deux correspondante est au moins ϵI . Appliquons $Q \geq R_1$ seulement à la fonction lisse originale f . Aucune évaluation de la forme non bornée Q sur des extensions polynomiales par zéro discontinues n'est requise. $\square$

4 Théorème B — Coercivité sur la fenêtre 17/16

Théorème 4.1 (Théorème B). *Pour tout $f \in \mathcal{D}_{17/16}$,*

$$Q(f) \geq 2^{-49162} \|f\|_2^2. \quad (6)$$

Preuve et certificat de calcul. Posons $L = 17/16$, $\Omega = 256$. Comme $\log 8 < 2L < \log 9$, la liste complète des puissances de nombres premiers est $2, 3, 4, 5, 7, 8$, avec $\Lambda(4) = \Lambda(8) = \log 2$. Soit S_a la translation suivie de la compression à $(-L, L)$, $J_a = (S_a + S_a^*)/2$, et

$$M = \frac{7}{2}I - \sum_{n \in \{2,3,4,5,7,8\}} c_n J_{\log n}.$$

Soit K l'opérateur intégral compact auto-adjoint de noyau

$$k(u - v) = 2 \cosh((u - v)/2) + \frac{1}{2\pi} \int_{-256}^{256} (A(t) - 7/2) e^{it(u-v)} dt.$$

Sur le domaine lisse légal, (1) devient

$$Q(f) = \langle f, (M + K)f \rangle + T_{\text{tail}}(f), \quad T_{\text{tail}}(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{|t| > 256} (A(t) - 7/2) |F_f(t)|^2 dt. \quad (7)$$

Les entrées analytiques prouvées dans les Appendices B–C sont

$$mI \preceq M \preceq bI, \quad m = \frac{9617}{10400}, \quad b = \frac{63183}{10400}, \quad T_{\text{tail}}(f) \geq \tau \|f\|^2 + \langle f, Uf \rangle, \quad (8)$$

où $\tau = 2^{-49162}$. Pour spécifier U , soit B_{band} de noyau sinc $\sin(256(u-v))/[\pi(u-v)]$, défini continûment sur la diagonale. Posons $\delta = 2^{-49158}$, $S = I - B_{\text{band}} - \delta I$, et soient v_0, v_1 les deux premiers modes de Legendre normalisés. Alors

$$h_j = Sv_j, \quad U = 81|h_0\rangle\langle h_0| + 27|h_1\rangle\langle h_1|. \quad (9)$$

L'estimation quantitative du complément de bande donne $0 \preceq S \preceq I$. Avec $C = 123/1280$, l'estimation extérieure de la digamma donne $T_{\text{tail}} \succeq C(I - B_{\text{band}})$. Si $e_j = \langle v_j, (I - B_{\text{band}})v_j \rangle$, la complétion de carré complexe dans la forme positive de S , et la parité, donnent

$$\langle f, Sf \rangle \geq \sum_{j=0}^1 \frac{|\langle h_j, f \rangle|^2}{e_j - \delta}.$$

Des estimations intégrales explicites en $c = 256L = 272$ montrent

$$e_0 < \frac{50(c+1)}{157c^2}, \quad e_1 < \frac{50(3c^2+6c+2)}{157c^3}, \quad 81e_0 < C, \quad 27e_1 < C.$$

Conjointement avec $e_j > \delta$ et $C\delta > \tau$, ces inégalités impliquent la partie de queue de (8). L'Appendice B.1 prouve l'estimation quantitative du complément de bande indépendamment du calcul fini de signe.

Prenons E contenant les ordres de Legendre normalisés $0, \dots, 447$. Posons $r = 2^{-95}$, $p = 2^{-440}$. L'estimation de projection de bande $\sup_{|t| \leq 256} \|(I - P)e^{it\mu}\| < r$, le poids de bande absolu intégré < 896 , et la norme de projection du pôle $< p$, conjointement avec

$$\|h_0\| < 1/29, \quad \|h_1\| < 3/50, \quad \|(I - P)h_j\| < 10r,$$

donnent les trois bornes distinctes (??), avec

$$e = 1389r + p, \quad n = 896r^2 + p, \quad h = 11696r^2 + p. \quad (10)$$

Par exemple, la borne croisée de bande est $1344r$, la borne croisée de queue retenue est $< 45r$; la queue positive n'ajoute aucune contribution négative au complément, mais contribue au plus $10800r^2$ à sa norme. Celles-ci donnent (10) sans traiter toutes les erreurs comme une seule perturbation croisée d'ordre.

Le calcul de source fournit

$$\epsilon_A = \epsilon_B = 2^{-220}, \quad \epsilon_H = 2^{-204} + 2^{-220}, \quad \sigma = 92^{-512}. \quad (11)$$

L'allocation de noyau 2^{-204} inclut le seul paiement de reste de Binet ; elle se distingue de l'allocation d'arrondi matriciel. Toutes les matrices de (22) sont interprétées en coordonnées orthonormées. Les centres matriciels bruts sont des sommes d'extrémités d'intervalle divisées par 2^{257} .

Pour rendre la remise à l'échelle explicite, soit $\phi_j(u) = P_j(u/L)$, $\Gamma_{jj} = 2L/(2j+1)$, et

$$(J_{\text{raw}})_{ij} = \int_{-L}^L \int_{-L}^L \phi_i(u) k(u-v) \phi_j(v) dv du.$$

La troisième matrice brute stockée, notée J_0 , est le centre numérique certifié pour J_{raw} , et $H_0 = \Gamma^{-1/2} J_0 \Gamma^{-1/2}$. Dans la convention de source, $J_{\text{raw}} = L^2 K$, où

$$\mathcal{K}_{ij} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P_i(x) k(L(x-y)) P_j(y) dy dx.$$

Ainsi le facteur L^2 appartient au changement de variables brut, non à un facteur supplémentaire sur le centre orthonormé H_0 . La même normalisation de Gram s'applique aux tableaux bruts M et M^2 .

Choisissons $\mu = 29/32 < m$. Un essai fraîchement engendré X satisfait la borne exacte $\|X\| \leq 8$. Pour $R_X = E - MEX$, définissons

$$U_\mu(X) = X + X^* - X^*AX + \mu^{-1}(I - AX - X^*A + X^*BX).$$

Le développement direct donne

$$U_\mu(X) - G = R_X^*(\mu^{-1}I - M^{-1})R_X \succeq 0.$$

Remplacer A, B par leurs centres coûte au plus $\Delta_X = 4416/(29 \cdot 2^{220})$. Ainsi $W = U_{\mu,0}(X) + \Delta_X I \succeq G \succ 0$. Ceci prouve l'ordre inverse sans supposer un signe cible réussi ni un essai optimal.

Posons $\theta = 2^{-48}$, $\chi = 1$ dans (18). La matrice finie complète (22), avec (10)–(11), est représentée par deux matrices entières symétriques réelles K_s , chacune d'ordre 224, sous des congruences explicitement positives non singulières. Les formules de congruence et les identités de compilateur indépendantes sont données dans l'Appendice E. Ce sont des liens nécessaires entre les tableaux numériques et (22).

Pour chaque secteur, la reconstruction de source régénère l'essai, la matrice de congruence intermédiaire, la cible finale et la proposition de Gram triangulaire. Le vérificateur exact contrôle chaque entrée du résidu dans

$$2^{-b_s}K_s = 2^{-1024}F_sF_s^* + 2^{-480}I + E_s, \quad \max_i \sum_j |(E_s)_{ij}| < 2^{-481}, \quad (12)$$

où b_s est l'échelle binaire cible réelle enregistrée par l'exécution. L'équation (12) prouve $K_s \succ 2^{b_s-481}I$, y compris pour des vecteurs complexes. Aucun pivot en virgule flottante n'est utilisé comme certificat de signe. Les deux sorties de compilateur complètes doivent coïncider exactement avant que ce contrôle ne soit accepté.

La réflexion commute avec les décalages premiers appariés, le noyau réel pair, et (9) ; donc les deux secteurs de parité certifiés couvrent les 448 modes. Leurs congruences positives impliquent (22), et le Théorème de Certification donne $M + K + U \succeq 0$ sur $\mathcal{H}_L$. Enfin appliquons (7)–(8) seulement à la $f \in \mathcal{D}_L$ originale. Ceci prouve (6). Les vecteurs auxiliaires dans l'argument d'opérateurs bornés n'ont pas besoin d'appartenir au domaine lisse légal. $\square$

5 Théorème d'Obstruction — Puissance de nombre premier huit et rétention de queue

Théorème 5.1 (Obstruction). *Fixons un $\chi \in \mathcal{D}_1$ réel quelconque avec $\|\chi\|_2 = 1$. Pour $f \in \mathcal{D}_L$, définissons $f_y(u) = \chi(u)f(u+y)$,*

$$\mathcal{L}_\chi(f) = \int_{\mathbb{R}} Q(f_y) dy, \quad \mathcal{E}_\chi(f) = \mathcal{L}_\chi(f) - Q(f), \quad \mathcal{M}_\chi(f) = \int_{\mathbb{R}} R_1(f_y) dy,$$

et $\mathcal{D}_\chi = \mathcal{M}_\chi - \mathcal{E}_\chi$, avec R_1 comme dans (5). Si $L > \log 8/2$, il existe un $g \in \mathcal{D}_L$ réel non nul fixé tel que, pour $T_k = 2\pi k/\log 8$ et $f_k = e^{iT_k u}g(u)$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{D}_\chi(f_k)}{\|f_k\|^2} = \frac{1}{16} - \frac{\log 2}{2\sqrt{2}} < -\frac{1}{8}. \quad (13)$$

Aucun opérateur auto-adjoint compact borné fixé K_c sur $\mathcal{H}_L$ ne rend $\mathcal{D}_\chi(f) + \langle f, K_c f \rangle \geq 0$ pour toute $f \in \mathcal{D}_L$. Plus généralement, toute forme quadratique compensatrice $\mathcal{U}$ satisfaisant $\mathcal{D}_\chi + \mathcal{U} \geq 0$ obéit à

$$\liminf_k \frac{\mathcal{U}(f_k)}{\|f_k\|^2} \geq \frac{\log 2}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{16}. \quad (14)$$

Proof. Posons $\rho_\chi(x) = \int \chi(v+x)\chi(v) dv$. Elle est paire, supportée dans $(-2, 2)$, et $1 - \rho_\chi(x) = \|\chi(\cdot + x) - \chi\|^2/2 = O(x^2)$. Fubini donne $\int h_{f_y}(x) dy = \rho_\chi(x)h_f(x)$. Dans la formule explicite, les termes diagonaux s'annulent, laissant

$$\mathcal{E}_\chi(f) = \int_0^{2L} (1 - \rho_\chi(x)) \left(\frac{2e^{-x/2}}{1 - e^{-2x}} - 4 \cosh(x/2) \right) H_f(x) dx + \sum_{\log n < 2L} c_n (1 - \rho_\chi(\log n)) H_f(\log n). \quad (15)$$

Le noyau continu est intégrable en zéro parce que le facteur singulier est $O(x^{-1})$ et $1 - \rho_\chi(x) = O(x^2)$. Ainsi ce défaut définit une forme bornée sur l'espace de Hilbert fixé. De plus

$$Q = \mathcal{D}_\chi + \mathcal{S}_\chi, \quad \mathcal{S}_\chi = \mathcal{L}_\chi - \mathcal{M}_\chi \geq 0 \quad (16)$$

sur le domaine légal, par l'enveloppe extérieure utilisée pour (5).

Écrivons $a = \log 8 > 2$ et choisissons $d = \min(1/256, (L - a/2)/2) > 0$. Soit $\phi(u) = \exp[-1/(1 - (u/d)^2)]$ pour $|u| < d$, zéro sinon, et $g(u) = \phi(u + a/2) + \phi(u - a/2)$. Les bosses sont disjointes et à support compact dans $(-L, L)$. Leur autocorrélation est supportée dans les $2d$ -voisinsages de 0, $\pm a$, et $h_g(a) = \|g\|^2/2$.

Comme $\log 2 > 2d$, $\log(8/7) > 1/8 > 2d$, et $\log(9/8) > 1/9 > 2d$, le seul logarithme entier contribuant à (15) est $\log 8$. De plus, $\rho_\chi(a) = 0$ et $e^{iT_k a} = 1$. La contribution discrète à $\mathcal{E}_\chi(f_k)/\|g\|^2$ est donc $c_8/2 = \log 2/(2\sqrt{2})$. La partie continue tend vers zéro par le lemme de Riemann–Lebesgue.

L'opérateur de $R_1 - \beta_0 I$ a un noyau continu à bande finie plus des termes de pôle de rang fini, donc est compact. Pour chaque y , la fonction modulée f_y tend faiblement vers zéro ; la compacité fait tendre sa valeur quadratique compacte vers zéro. Les supports en y sont uniformément bornés, et la borne par une constante fixe fois $\|\chi(\cdot)g(\cdot + y)\|^2$ est intégrable. La convergence dominée, avec $\int \|f_y\|^2 dy = \|g\|^2$, prouve $\mathcal{M}_\chi(f_k)/\|g\|^2 \rightarrow \beta_0$. Ceci prouve la limite. Les inégalités élémentaires $\log 2 > 2/3$, $\sqrt{2} < 3/2$ donnent $\log 2/(2\sqrt{2}) - 1/16 > 23/144 > 1/8$.

Les f_k normalisées sont faiblement nulles dans $\mathcal{H}_L$, donc toute correction compacte fixée a une valeur quadratique normalisée nulle. Les équations (13)–(14) s'ensuivent. $\square$

Cette obstruction concerne la comparaison inférieure spécifiée. Elle ne donne pas un test de Weil négatif : la forme non négative omise dans (16) peut compenser le défaut. Ce n'est pas non plus une obstruction à tout fournisseur de queue non compact possible ni à toute méthode de positivité.

6 Théorème de Certification — Schur par blocs exact en source et fermeture exacte de Gram

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert complexe, $E : \mathbb{C}^d \rightarrow \mathcal{H}$ une isométrie, $P = EE^*$, et M, V des opérateurs auto-adjoints bornés. Supposons

$$mI \preceq M \preceq bI, \quad 0 < m \leq b.$$

Définissons

$$J = E^* V E, \quad R = V - E J E^*, \quad A = E^* M E, \quad B = E^* M^2 E, \quad G = E^* M^{-1} E, \quad D_M = B - A^2.$$

Sur la décomposition $\text{ran } E \oplus \text{ran}(I - P)$, supposons

$$\|R_{10}\| \leq e, \quad R_{11} \geq -nI, \quad \|R_{11}\| \leq h, \quad 0 \leq n < m, \quad (17)$$

où $e, h \geq 0$. L'identité $R_{00} = 0$ découle de la définition. Pour tous réels positifs θ, χ , posons

$$\alpha = e\theta + \frac{(1 + \chi)e^2}{m - n}, \quad \beta = \frac{e/\theta + n}{m^2} + \frac{(1 + \chi^{-1})h^2}{m^2(m - n)}. \quad (18)$$

Alors

$$G^{-1} + J \succeq \alpha I + \beta D_M \implies M + V \succeq 0 \text{ sur } \mathcal{H}. \quad (19)$$

Proof. Écrivons Comme $M_c \succeq mI$, l'inversion par blocs est légitime avant que tout signe cible ne soit connu. Elle donne $D_M = F^*F \succeq 0$, $G^{-1} = A - F^*M_c^{-1}F$. Posons

$$L_c = -M_c^{-1}F, \quad T = E + L_c = M^{-1}EG^{-1}.$$

Ici L_c prend ses valeurs dans le complément. Ainsi $E^*T = I$, $L_c^*L_c \preceq m^{-2}D_M$, et chaque $f \in \mathcal{H}$ a une représentation unique $f = Tc + y$, $E^*y = 0$. Dans ces coordonnées la forme bornée de $M + EJE^*$ a pour blocs diagonaux $G^{-1} + J$ et M_c , avec bloc croisé nul.

Comme $R_{00} = 0$, l'inégalité de Young donne

$$T^*RT \succeq -e\theta I - (e/\theta + n)m^{-2}D_M. \quad (20)$$

En effet sa valeur quadratique est $2\operatorname{Re}\langle c, R_{01}L_cc \rangle + \langle L_cc, R_{11}L_cc \rangle$. Le nouveau bloc croisé $Z = R_{10} + R_{11}L_c$ satisfait

$$Z^*Z \preceq (1 + \chi)e^2I + (1 + \chi^{-1})h^2m^{-2}D_M. \quad (21)$$

Le complément est au moins $(m - n)I$. Compléter son carré coûte au plus $(m - n)^{-1}Z^*Z$; (18), (20), et (21) paient exactement ce coût. L'hypothèse (19) rend donc la forme transformée non négative. Ceci prouve le résultat pour des scalaires complexes sans hypothèse de commutation. $\square$

Pour l'usage avec des intervalles sources, supposons que des centres hermitiens $A_0, B_0, H_0, \hat{U}$ approchent respectivement A, B, E^*KE, E^*UE , où $V = K + U$, avec des erreurs de norme d'opérateur $\epsilon_A, \epsilon_B, \epsilon_H, \sigma$ en coordonnées orthonormées. Si $W \succeq G \succ 0$, posons

$$\epsilon_D = \epsilon_B + (2b + \epsilon_A)\epsilon_A.$$

La matrice finie explicitement suffisante est

$$P_{\theta, \chi} = H_0 + \hat{U} + W^{-1} - (\epsilon_H + \sigma + \alpha + \beta\epsilon_D)I - \beta(B_0 - A_0^2). \quad (22)$$

Pour vérifier cette assertion, développons $A^2 - A_0^2 = A(A - A_0) + (A - A_0)A_0$; sa norme est au plus $(2b + \epsilon_A)\epsilon_A$. Donc $D_M \preceq B_0 - A_0^2 + \epsilon_D I$, tandis que $J \succeq H_0 + \hat{U} - (\epsilon_H + \sigma)I$ et $G^{-1} \succeq W^{-1}$. La non-négativité de (22) implique (19).

La condition à centres de source (22) admet aussi une fermeture exacte de Gram. Supposons qu'une cible hermitienne finie satisfasse $K_{\text{cert}} = \lambda B_c^* P_{\theta, \chi} B_c$, avec $\lambda > 0$ et B_c non singulière. Si l'arithmétique exacte vérifie

$$K_{\text{cert}} = aFF^* + dI + R_{\text{cert}}, \quad a \geq 0, \quad d > 0, \quad R_{\text{cert}} = R_{\text{cert}}^*, \quad \max_i \sum_j |(R_{\text{cert}})_{ij}| < d,$$

alors $P_{\theta, \chi} \succ 0$, et donc $M + V \succeq 0$. En effet la borne de somme de lignes absolue contrôle la norme du résidu hermitien ; le terme de Gram est semi-défini positif pour des vecteurs complexes. La congruence positive transfère le signe. Une procédure numérique peut proposer F , mais seule la recalcul de chaque entrée de résidu et de chaque ligne établit l'hypothèse. Chaque erreur de source et chaque congruence doivent être justifiées avant que cette fermeture ne soit appliquée.

Cet argument utilise l'inversion par blocs classique, les inégalités de Young et les compléments de Schur. Son utilité ici est l'erreur croisée séparée $O(r)$ et l'erreur de complément $O(r^2)$. Aucune revendication d'un nouveau principe général de complément de Schur n'est faite.

7 Signification mathématique et extensions ouvertes

Le Théorème B établit une borne inférieure coercive explicite pour toutes les fonctions test lisses complexes supportées dans un intervalle qui inclut l'interaction de la puissance de nombre premier huit. Son contenu mathématique est l'énoncé combiné de support, la comptabilité d'erreur et le certificat fini exact. Le Théorème A fournit une constante substantiellement plus grande sur un intervalle plus petit. Aucune constante n'est affirmée optimale.

Le Théorème d'Obstruction est indépendant du calcul fini de signe. Il exclut une stratégie de comparaison inférieure spécifique et toutes ses corrections compactes fixes, avec un défaut limite explicite. Il n'exclut pas d'autres estimations de queue non compactes, d'autres localisations, ou d'autres approches de RH.

Le Théorème de Certification sépare les erreurs de bloc croisé et de complément. Le bloc complémentaire inclut l'opérateur premier complet, et son inverse n'est utilisé qu'après qu'une borne inférieure d'opérateur positive a été prouvée. Ceci empêche l'usage circulaire du signe fini désiré. La version avec erreur de source et la fermeture exacte de Gram spécifient une méthode de certification suffisante, non un critère de positivité nécessaire.

Plusieurs questions subsistent. Une méthode utile d'expansion de support nécessiterait un contrôle analytique uniforme quand L croît, incluant toutes les puissances de nombres premiers nouvellement entrantes et la géométrie de queue changeante. Aucun argument à échelle non bornée de ce type n'est fourni ici. Des constantes de coercivité plus fines et des certificats plus petits peuvent être possibles, mais ni la monotonie des constantes inférieures certifiées ni l'optimalité computationnelle ne découlent des calculs présents.

Les intervalles sources et les certificats finis sont fournis avec un paquet reproductible accompagnant. L'Appendice F distingue la reconstruction fraîche de la plus grande fenêtre, la vérification complète du certificat retenu de la fenêtre unité, des routes séparées de vérification arithmétique et la reproduction humaine externe. Un traitement par assistant de preuve formel n'a pas été effectué. Les estimations explicites sur fenêtre fixée laissent la condition de support universel dans la positivité de Weil non résolue.

A Certificat analytique et fini de la fenêtre unité

Cet appendice fournit les bornes analytiques et la règle d'acceptation finie utilisées dans le Théorème A. Les paquets numériques retenus pour son cœur à 2816 modes n'ont pas été régénérés dans la présente reconstruction de source. Leurs contenus requis et la frontière de vérification actuelle sont énoncés dans l'Appendice F.

Les entrées classiques de Bessel sont la fonction génératrice, le développement de Jacobi–Anger à signes alternés et la représentation intégrale d'ordre entier [7, NIST, 10.12.1, 10.12.3 et 10.9.2]. La normalisation de Legendre, la formule de Rodrigues, la récurrence, les identités de dérivée et la représentation intégrale sont données dans [7, NIST, Tables 18.3.1, 18.5.1 et 18.9.2, 18.5.5, 18.9.2_1, 14.10.4–5 et 18.10.5]. La complétude découle de la densité des fonctions continues dans $L^2(-1, 1)$ et de l'approximation polynomiale uniforme sur $[-1, 1]$. Ces faits classiques fournissent la base analytique ; ils ne fournissent pas un certificat numérique fini.

A.1 Comparaison extérieure et taille de bande compacte

Soit $w = 1/4 + it/2$, $z = w + 1$, avec $t > 0$. L'identité de Binet et la récurrence de la digamma [7, NIST, 5.9.15 et 5.5.2] donnent

$$\psi(w) = \log z - \frac{1}{2z} - \frac{1}{w} - 2 \int_0^\infty \frac{u du}{(u^2 + z^2)(e^{2\pi u} - 1)}.$$

Ici $|u^2 + z^2| \geq 5t/4$, et le développement du dénominateur exponentiel positif donne $\int_0^\infty u/(e^{2\pi u} - 1) du = 1/24$. De plus $\operatorname{Re} \log z \geq \log(t/2)$, $\operatorname{Re}(1/(2z)) \leq 5/(2t^2)$ et $\operatorname{Re}(1/w) \leq 1/t^2$. Par conséquent

$$A(t) \geq \log \frac{t}{2\pi} - \frac{1}{15t} - \frac{7}{2t^2} \geq \log \frac{t}{2\pi} - \frac{1}{t} \quad (t \geq 15/4).$$

Les cinq coefficients premiers obéissent à

$$C_0 = \sum_{n \in \{2,3,4,5,7\}} c_n < \frac{624553959}{106092250} < \frac{59}{10}.$$

Pour cette comparaison rationnelle, utilisons $\sqrt{2} < 142/100$, $\sqrt{3} > 173/100$, $\sqrt{5} > 223/100$, $\sqrt{7} > 264/100$, et $\log 2 < 7/10$, $\log 3 < 11/10$, $\log 5 < 161/100$, $\log 7 < 39/20$. Le carré vérifie les racines ; les

douzièmes sommes partielles exponentielles aux bornes logarithmiques supérieures énoncées dépassent les entiers respectifs. Comme $e < 68/25$, $\pi < 22/7$ et $(44/7)(68/25)^6 < 2560$, la monotonie donne

$$|t| \geq 2560 \Rightarrow \sigma_1(t) > 6 - \frac{59}{10} - \frac{1}{2560} = \frac{51}{512} > \frac{1}{16}.$$

Pour l'estimation de bande compacte, posons $a = 1/4$, $b = t/2$. La série convergente de la digamma est

$$\operatorname{Re} \psi(a + ib) = -\gamma - \frac{a}{a^2 + b^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a}{k(k+a)} + \frac{b^2}{(k+a)((k+a)^2 + b^2)} \right).$$

Quand $|b| \leq 1280$, la première somme est inférieure à $1/2$; découpons la seconde en 1280, bornant sa partie initiale par $1 + \log 1280$ et sa queue par $1/2$. Ainsi $\operatorname{Re} \psi < 10$; la même série donne $\operatorname{Re} \psi \geq \psi(1/4) > -5$. Avec $0 < \log \pi < 2$ et $C_0 < 6$, ceci implique

$$\kappa_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-2560}^{2560} |\sigma_1(t) - 1/16| dt < 43520.$$

A.2 Le complément entier de Legendre

Pour la projection P_N sur les degrés inférieurs à N , l'ellipse de Bernstein de rayon $\rho > 1$ donne, par son développement de Laurent et la borne de Cauchy sur les coefficients,

$$\sup_{|t| \leq H} \|(I - P_N)e^{itu}\|_2^2 \leq \frac{8e^{H(\rho - \rho^{-1})}\rho^{-2N}}{(1 - \rho^{-1})^2}.$$

En effet les coefficients de Chebyshev sont bornés par $2e^{H(\rho - \rho^{-1})/2}\rho^{-j}$; sommer la queue géométrique et utiliser l'optimalité de la projection orthogonale prouve l'inégalité. En $H = 2560$, $\rho = 3/2$, $N = 2816$,

$$72e^{6400/3}(2/3)^{5632} < 72(68/25)^{2134}(2/3)^{5632} < 2^{-200}.$$

La dernière inégalité est une comparaison entière positive exacte après élimination des dénominateurs. L'évaluation du pôle est contrôlée séparément. La formule de Rodrigues, tous les termes de bord étant nuls, donne

$$\left| \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(u) e^{-izu} du \right| \leq \sqrt{2(2n+1)} \frac{|z|^n e^{|\operatorname{Im} z|}}{(2n+1)!!}.$$

Les majorants au carré en $|z| = H$ ont pour rapport adjacent $H^2/[(2n+1)(2n+3)]$. Sommer leur borne supérieure géométrique en $H = 1/2$, $N = 2816$ donne une valeur inférieure à 2^{-200} avant le facteur $e^{2|\operatorname{Im} z|} < 4$. Donc, avec $s = 2^{-100}$, l'évaluation résiduelle en fréquence réelle a une norme au plus s , et chaque évaluation résiduelle de pôle au plus $2s$. Les normes d'évaluation complètes sont inférieures à 2. La bande compacte contribue une déviation de complément au plus $\kappa_0 s^2$ et une norme croisée au plus $2\kappa_0 s$; le pôle contribue au plus $8s^2$ et $8s$. Par conséquent

$$R_{1,11} \succeq (1/16 - 2^{-184})I \succ (1/32)I, \quad \|R_{1,10}\| < 2^{-83}.$$

Ce sont des estimations sur tout vecteur du complément infini.

A.3 Un encadrement rigoureux des coefficients de Bessel

Pour x réel, prenons des coefficients rationnels réels $b_0, \dots, b_M$, posons $b_{-n} = (-1)^n b_n$ et mettons tous les autres coefficients à zéro. Définissons

$$S_b = b_0 + 2 \sum_{\substack{1 \leq n \leq M \\ n \text{ pair}}} b_n, \quad r_n = nb_n - \frac{x}{2}(b_{n-1} + b_{n+1}), \quad 1 \leq n \leq M+1.$$

Le résidu terminal $r_{M+1} = -xb_M/2$ est inclus. Le polynôme trigonométrique $p(v) = \sum b_n e^{inv}$ approche $y(v) = e^{ix \sin v}$, qui résout $y' = ix \cos(v)y$. Les coefficients résiduels et leurs partenaires réfléchis donnent

$$|p' - ix \cos(v)p| \leq 2 \sum_{n=1}^{M+1} |r_n|.$$

Le facteur intégrant a un module un sur la droite réelle. En intégrant de 0 à $v \in [-\pi, \pi]$, puis en prenant les coefficients de Fourier, on obtient pour tout entier n

$$|J_n(x) - b_n| \leq |1 - S_b| + 2\pi \sum_{n=1}^{M+1} |r_n| \leq |1 - S_b| + \frac{44}{7} \sum_{n=1}^{M+1} |r_n|.$$

Pour un intervalle de x , gardons les mêmes coefficients rationnels et maximisons les résidus affines absolus aux extrémités. Ceci encadre tout l'intervalle et ne suppose pas la stabilité d'une récurrence arrière.

A.4 Source du noyau et assemblage polynomial

Écrivons $w(t) = \sigma_1(t) - 1/16$ et $k_1(x) = \pi^{-1} \int_0^{2560} w(t) \cos(tx) dt$. Le développement de Jacobi–Anger donne

$$c_0 = \pi^{-1} \int_0^{2560} w(t) J_0(2t) dt, \quad c_{2j} = 2(-1)^j \pi^{-1} \int_0^{2560} w(t) J_{2j}(2t) dt,$$

avec des coefficients impairs nuls dans $k_1(2z) = \sum c_m T_m(z)$. Sur l'ellipse $\rho = 3/2$, le noyau est borné par $43520e^{6400/3}$. Les degrés rejetés $m \geq 5632$ ont une somme uniforme bornée par

$$6 \cdot 43520e^{6400/3} (2/3)^{5632} < 2^{-188}.$$

Les intervalles de coefficients retenus ont un rayon total au plus 2^{-173} . Ainsi l'incertitude de queue de noyau et de coefficients coûte au plus $2^{-187} + 2^{-172}$ en norme d'opérateur.

Pour une règle d'intégration vérifiable, utilisons l'ordre de Gauss 64, avec des largeurs de panneau $1/8$ sur $[0, 8]$, 2 sur $[8, 16]$ et 4 sur $[16, 2560]$: 704 panneaux et 45056 nœuds. L'extension holomorphe est

$$\tilde{A}(z) = \frac{\psi(1/4 + iz/2) + \psi(1/4 - iz/2)}{2} - \log \pi, \quad \tilde{w}(z) = \tilde{A}(z) - \sum_n c_n \cos(z \log n) - 1/16.$$

Les rayons des panneaux sont $1/4, 4, 8$, respectivement ; chaque demi-largeur divisée par le rayon vaut $1/4$. Pour $q_{\pm} = 1/4 \pm iz/2$, tous les disques satisfont $\operatorname{Re}(q_{\pm} + 64) > 60$ et $|q_{\pm} + 64| < 1400$. La formule de Binet donne

$$|\psi(q_{\pm} + 64)| \leq |\log(q_{\pm} + 64)| + \frac{1}{2|q_{\pm} + 64|} + \frac{1}{12 \operatorname{Re}(q_{\pm} + 64)^2} < 11,$$

en utilisant $\log 1400 < 8$ et un module d'argument principal < 2 . Sur les petits disques $\operatorname{Re} q_{\pm} \geq 1/8$, donc la récurrence donne $|\psi(q_{\pm})| < 523$. Sur les disques moyens $|\operatorname{Im} q_{\pm}| \geq 5/2$, donnant $11 + 128/5$; sur les grands disques $|\operatorname{Im} q_{\pm}| \geq 5$, donnant $11 + 64/5$. Ces bornes excluent tout pôle. Avec $\sum c_n < 6$, $\log \pi < 2$ et $|\cos(z \log n)| \leq n^{|\operatorname{Im} z|}$, les trois bornes de symbole sont inférieures à $523 + 2 + 6 \cdot 7^{1/4} + 1/16$, $11 + 128/5 + 2 + 6 \cdot 7^4 + 1/16$ et $26 + 6 \cdot 7^8 + 1/16$, toutes inférieures à 2^{26} . De plus $|J_n(2z)| \leq e^{2|\operatorname{Im} z|} \leq e^{16} < 2^{26}$, donc chaque intégrande de coefficient est borné par $M_G = 2^{52}$.

Pour un panneau de demi-largeur h , l'estimation de Cauchy borne la queue de Taylor à partir du degré 128 par $M_G 4^{-128}/(1 - 1/4)$. L'intégration et la quadrature de Gauss à poids positifs ont toutes deux une norme $2h$ et coïncident sur les degrés au plus 127. Leur différence est donc au plus $4h M_G 4^{-128}/(1 - 1/4)$. Sommer les largeurs de panneaux 2560 donne une erreur par coefficient au plus $(20480/3)2^{-204} < 2^{-191}$, et une erreur totale de coefficient inférieure à 2^{-179} .

Les erreurs de nœud, de poids, de symbole, de Bessel et d'arrondi dirigé sont séparément incluses dans les intervalles retenus. Le multiplicateur de nœud complet est $z_k = (\text{largeur de panneau}/2)\omega_k w(t_k)/\pi$. S'il est encadré avec centre $\tilde{z}$, rayon r_z , et erreur de Bessel E , l'erreur de produit est bornée par

$$\max(|z_{10}|, |z_{1i}|)E + r_z(1 + E).$$

Pour l'assemblage, posons $q(u) = \widehat{k}_1(u+1)$, et calculons ses coefficients de Legendre par récurrence de Clenshaw. Si chaque équation de récurrence a un résidu polynomial $e_k(u)$, alors l'erreur de sortie vaut $e_0 + \sum_{k \geq 1} e_k T_k((u+1)/2)$. Par conséquent sa norme uniforme est au plus $\tau_C = \sum_{k,j} |[P_j]e_k|$.

Soit $\widetilde{K}(u, v) = \sum a_{mn} P_m(u) P_n(v)$ le candidat réel symétrique sur le domaine triangulaire complet $m+n \leq 5630$, incluant des indices auxiliaires hors du cœur final. Ses coefficients de bord sont $b_j = \sum_k (-1)^k a_{jk}$; les coefficients de $(\partial_u + \partial_v)\widetilde{K}$ sont

B Réention quantitative de queue et bornes complètes de l'opérateur premier

Dans tout cet appendice $L = 17/16$, $\Omega = 256$ et $c = \Omega L = 272$.

B.1 Complément quantitatif de bande de Fourier

Posons $\mathcal{E}(f) = (2\pi)^{-1} \int_{|t| > 256} |F_f(t)|^2 dt$. Nous prouvons

$$\mathcal{E}(f) \geq \delta \|f\|^2, \quad \delta = 2^{-49158}.$$

Normalisons $\|f\| = 1$; la fonction nulle est immédiate. Le support borné donne $f \in L^1$ et la différentiation sous l'intégrale donne $|F_f^{(j)}(t)| \leq L^j \sqrt{2L} < 2L^j$. Si $\mathcal{E}(f) \geq 1/2$, l'assertion s'ensuit. Sinon l'intégrale de bande est supérieure à π , donc un certain $t_0 \in [-256, 256]$ satisfait $|F_f(t_0)| > \sqrt{\pi/512} > 1/16$.

Prenons $N = 4096$, $h = 1/32$, et des intervalles disjoints $I_j = [256+2jh, 256+(2j+1)h]$, $0 \leq j < N$. La borne de moyenne intégrale fournit $x_j \in I_j$ avec

$$|F_f(x_j)| \leq 16\sqrt{\mathcal{E}(f)}, \quad |x_j - x_k| \geq h|j - k|, \quad |t_0 - x_j| \leq 768.$$

Choisissons une phase constante de sorte que la partie réelle $G(t) = \operatorname{Re}(e^{-i\alpha} F_f(t))$ obéisse à $G(t_0) = |F_f(t_0)|$. Sa N -ième dérivée réelle est bornée par $2L^N$, permettant le théorème ordinaire du reste de Lagrange. La base de Lagrange satisfait

$$\sum_{j=0}^{N-1} |t_j(t_0)| \leq \frac{49152^{4095}}{4095!} < 2^{24570}.$$

Ceci utilise $m! \geq (m/e)^m$, $e < 3$, et $3 \cdot 49152 < 64 \cdot 4095$. Le reste est borné par

$$\frac{2(768L)^{4096}}{4096!} < 2(3/5)^{4096} < 2^{-2047} < 1/32.$$

Si t_0 est un nœud, le reste est nul. Par conséquent

$$\frac{1}{16} < 16\sqrt{\mathcal{E}(f)} 2^{24570} + \frac{1}{32}, \quad \sqrt{\mathcal{E}(f)} > 2^{-24579},$$

comme requis. Plancherel identifie $\mathcal{E}(f) = \langle f, (I - B_{\text{band}})f \rangle$, donc $I - B_{\text{band}} \geq \delta I$. Cette preuve s'applique à tout $\mathcal{H}_L$.

B.2 Poids extérieur et taille de bande compacte

L'Appendice A.1 donne $A(t) \geq \log(|t|/(2\pi)) - 1/|t|$ en $|t| \geq 15/4$. La comparaison rationnelle $(448/11)^5 > (68/25)^{18}$, conjointement avec $\pi < 22/7$ et $e < 68/25$, donne $\log(256/(2\pi)) > 18/5$. Par conséquent

$$|t| \geq 256 \Rightarrow A(t) - 7/2 > \frac{18}{5} - \frac{1}{256} - \frac{7}{2} = \frac{123}{1280} = C.$$

Ainsi $T_{\text{tail}} \geq C(I - B_{\text{band}})$, l'inégalité étant entendue aussi si l'intégrale de queue est infinie. Elle est finie sur le domaine lisse légal.

Pour $|t| \leq 256$, la série de digamma utilisée dans l'Appendice A donne $\operatorname{Re} \psi > -5$, donc $A > -7$. Pour une borne supérieure, découpons

$$\psi(z) = -\gamma + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+z} \right)$$

en $n = 256$. Les 256 premiers termes sont au plus $H_{256} < 33/5$. Pour $z = 1/4 + iy$, $|y| \leq 128$, la queue est au plus $128^2 \sum_{n=256}^{\infty} n^{-3} \leq 129/1024$. En supprimant les constantes négatives, on obtient $A < 7 < 10$. Par conséquent

$$\kappa = \frac{1}{2\pi} \int_{-256}^{256} |A(t) - 7/2| dt < 896.$$

B.3 Les deux directions retenues

Soit $S = I - B_{\text{band}} - \delta I$, $h_j = S v_j$ et $e_j = \langle v_j, (I - B_{\text{band}}) v_j \rangle$ où $v_0 = (2L)^{-1/2}$ et $v_1 = \sqrt{3/(2L)} u/L$. Alors $0 \leq S \leq I$; la parité donne $\langle v_0, S v_1 \rangle = 0$. L'intégration directe de Fourier donne

$$e_0 = \frac{2}{\pi} \int_c^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx, \quad e_1 = \frac{6}{\pi} \int_c^{\infty} \frac{(\cos x - \sin x/x)^2}{x^2} dx.$$

L'intégration par parties borne $|\int_c^{\infty} \cos(2x) x^{-2} dx| \leq c^{-2}$. Développer le second carré et borner son terme croisé donne

$$\frac{c-1}{\pi c^2} \leq e_0 \leq \frac{c+1}{\pi c^2}, \quad \frac{3(c-2)}{\pi c^2} \leq e_1 \leq \frac{6}{\pi} \left(\frac{1}{2c} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{3c^3} \right).$$

En particulier $e_0, e_1 > 2^{-11} > \delta$. La formule de Machin et les bornes alternées donnent $\pi > 16(1/5 - 1/375) - 4/239 > 157/50$. Ainsi

$$e_0 < \frac{50(c+1)}{157c^2}, \quad e_1 < \frac{50(3c^2 + 6c + 2)}{157c^3}.$$

Les inégalités $81e_0 < C$ et $27e_1 < C$ se réduisent respectivement aux différences entières positives 13473024 et 2251158528 après élimination de ces dénominateurs affichés.

Minimisons l'expression non négative $\langle f - z_0 v_0 - z_1 v_1, S(f - z_0 v_0 - z_1 v_1) \rangle$ sur les z_0, z_1 complexes. Les coefficients diagonaux positifs $e_j - \delta$ donnent

$$\langle f, S f \rangle \geq \sum_{j=0}^1 \frac{|\langle h_j, f \rangle|^2}{e_j - \delta}.$$

Comme $C\delta > \delta/16 = \tau$, ceci prouve

$$T_{\text{tail}}(f) \geq \tau \|f\|^2 + 81|\langle h_0, f \rangle|^2 + 27|\langle h_1, f \rangle|^2.$$

L'inégalité de contraction positive $\|h_j\|^2 \leq e_j$ donne $\|h_0\| < 1/29$, $\|h_1\| < 3/50$. Les comparaisons entières requises sont $11479650 < 11615488$ et $27948250000 < 28434714624$. Si les colonnes finies normalisées ont des erreurs au plus $\epsilon = 2^{-512}$, l'identité de différence de rang un donne

$$\|U_N - \hat{U}_N\| \leq 2(81/29 + 81/50)\epsilon + 108\epsilon^2 < 9\epsilon.$$

B.4 Borne de Schur pondérée incluant la puissance de nombre premier huit

Écrivons $a_n = \log n$, $w_n = \Lambda(n)/\sqrt{n}$ pour $n = 2, 3, 4, 5, 7, 8$, et $C_p = \sum_n w_n (S_{a_n} + S_{-a_n})$. Pour $q(u) = 1 + (5/8)(u/L)^2$, l'inégalité de Young pondérée et la translation du terme adjoint donnent

$$|\langle f, C_p f \rangle| \leq \int_{-L}^L r_q(u) |f(u)|^2 du, \quad r_q(u) = \sum_n w_n \frac{\mathbf{1}_I(u + a_n) q(u + a_n) + \mathbf{1}_I(u - a_n) q(u - a_n)}{q(u)}.$$

Ceci vaut pour f complexe, et r_q est paire. Pour $p = 2, 3, 5, 7$, utilisons

$$\log p = 2 \sum_{k=0}^{63} \frac{z_p^{2k+1}}{2k+1} + R_p, \quad z_p = \frac{p-1}{p+1}, \quad 0 < R_p \leq \frac{2z_p^{129}}{129(1-z_p^2)}.$$

Les numérateurs inférieurs et supérieurs sur la grille 10^{-6} sont respectivement

$$(693147, 693148), \quad (1098612, 1098613), \quad (1609437, 1609438), \quad (1945910, 1945911).$$

Les numérateurs racines inférieurs pour $n = 2, 3, 4, 5, 7, 8$, dans le même ordre, sont 1414213, 1732050, 2000000, 2236

Le carré de chaque extrémité vérifie son encadrement.

Pour $n = p^j$, soit $t_n^\pm = j\ell_p^\pm/L$ et $w_n^+ = \ell_p^+/(k_n/10^6)$, avec ces extrémités de logarithme et de racine. Le poids utilise $\log p$, tandis que le décalage utilise $j \log p$.

Les cellules suivantes sur $x = u/L \in [0, 1]$ autorisent des décalages négatifs légèrement tôt et retiennent le décalage positif légèrement tard. Elles bornent donc la vraie somme de lignes par au-dessus.

Extrémité gauche	Extrémité droite	Décalages négatifs	Décalages positifs
0	9028/265625	2	2
9028/265625	161897/531250	2, 3	2
161897/531250	369353/1062500	2, 3, 4	2
369353/1062500	546937/1062500	2, 3, 4	aucun
546937/1062500	88341/106250	2, 3, 4, 5	aucun
88341/106250	1016941/1062500	2, 3, 4, 5, 7	aucun
1016941/1062500	1	2, 3, 4, 5, 7, 8	aucun

Sur une cellule, définissons $W_q = \sum w_n^+$, $B_q = \sum_{\text{négatif}} w_n^+ t_n^- - \sum_{\text{positif}} w_n^+ t_n^+$, $D_q = \sum w_n^+ (t_n^+)^2$, avec multiplicité. Avec $a = 5/8$, $q_* = 83/32$,

$$(1 + ax^2)(q_* - r_q(Lx)) \geq a(q_* - W_q)x^2 + 2aB_q x + (q_* - W_q - aD_q).$$

Vérifions le quadratique aux deux extrémités et en son sommet intérieur lorsqu'il est convexe. Le calcul scalaire exact supplémentaire consigne les sept minima, obtenus par évaluation rationnelle aux deux extrémités et en tout sommet intérieur convexe. L'évaluation rationnelle directe donne des bornes inférieures strictes, dans l'ordre,

$$1, \quad 3/10, \quad 3/100, \quad 9/10, \quad 13/100, \quad 4/100, \quad 1/5.$$

Tous les minima dépassent $3/100$, et $1 + ax^2 \leq 13/8$. Ainsi $r_q < 83/32 - 6/325 = 26783/10400$, ce qui prouve

$$\frac{9617}{10400}I \leq M \leq \frac{63183}{10400}I.$$

Les extrémités de commutation de support ont mesure nulle, et la réflexion couvre la demi-droite négative.

C Erreurs de projection et de blocs séparés

Soit P la projection sur les degrés de Legendre inférieurs à 448, et $r = 2^{-95}$. L'ellipse de rayon $3/2$ a pour demi-axe imaginaire $5/12$. Pour $|t| \leq 256$, e^{itLx} y est borné par $e^{340/3}$. La troncature de Chebyshev et la meilleure approximation donnent

$$\sup_{|t| \leq 256} \|(I - P)e^{itu}\|^2 \leq 72Le^{680/3}(2/3)^{896} < \frac{153}{2}(68/25)^{227}(2/3)^{896} < 2^{-190}.$$

La dernière inégalité est exactement $153 \cdot 68^{227} \cdot 2^{1085} < 25^{227} 3^{896}$.

Pour $a_{\pm}(u) = e^{\pm u/2}$, les polynômes de Taylor de degré 447 donnent $\|(I - P)a_{\pm}\| < 3/448!$ et $\|a_{\pm}\| < 3$. Ici $L/2 < 1$, $e^{L/2} < 2$ et $\sqrt{2L} < 3/2$. L'opérateur de pôle est $|a_+\rangle\langle a_-| + |a_-\rangle\langle a_+|$. Par conséquent

$$\|K_{\text{pole}} - PK_{\text{pole}}P\| < 36/448! \leq 36/2^{447} < 2^{-440} =: p.$$

Comme $v_j \in \text{ran } P$, l'intégrale de rang un de bande, Cauchy-Schwarz et Plancherel donnent

$$\|(I - P)h_j\| = \|(I - P)B_{\text{band}}v_j\| \leq \frac{r}{2\pi} \int_{-256}^{256} |F_{v_j}(t)| dt \leq r\sqrt{256/\pi} < 10r.$$

Posons $V = K + U$, $J = E^*VE$, $R = V - EJE^*$. Son bloc fini s'annule exactement. Le bloc croisé de bande est inférieur à $896(3/2)r = 1344r$, et sa norme de complément inférieure à $896r^2$. Le bloc croisé de queue est inférieur à $10(81/29 + 81/50)r < 45r$. Le complément de queue est positif et a une norme inférieure à $10800r^2$. En ajoutant le paiement de pôle, on obtient

$$\|R_{10}\| < 1389r + p, \quad R_{11} \succeq -(896r^2 + p)I, \quad \|R_{11}\| < 11696r^2 + p.$$

La seconde estimation est une borne inférieure ; la troisième est une borne de norme. Leurs rôles différents sont préservés dans le Théorème de Certification.

D Arithmétique finie exacte en source

Toutes les opérations par intervalles ci-dessous sont dirigées vers l'extérieur. Une étiquette de précision seule n'est pas un certificat : chaque intervalle de sortie est contrôlé pour le confinement et la largeur par une route arithmétique séparée.

D.1 Moments intégrés de la digamma

Posons $b = 128$, $s = 1025/4$, $c_j = j + 1/4$, et

$$\theta_q = \frac{256}{\pi} \int_0^1 x^{2q} (A(256x) - 7/2) dx, \quad 0 \leq q \leq 1023.$$

Décalons l'argument de la digamma de 256 et développons l'intégrale de Binet jusqu'à 256 termes de Bernoulli. Sa partie finie est

$$a_{\text{fin}}(x) = \text{Re} \log(s + ibx) - \frac{1}{2} \text{Re}(s + ibx)^{-1} - \sum_{k=1}^{256} \frac{B_{2k}}{2k} \text{Re}(s + ibx)^{-2k} - \sum_{j=0}^{255} \text{Re}(c_j + ibx)^{-1} - \log \pi - \frac{7}{2}.$$

Le reste géométrique dans le dénominateur de Binet donne uniformément

$$|A(256x) - 7/2 - a_{\text{fin}}(x)| \leq \mathcal{R} = \frac{4 \cdot 513!}{6^{514} s^{514}} < 2^{-1034}.$$

Pour voir le contrôle du dénominateur, pour $z = s + iy$, $|y| \leq 128 < s$, on a $|u^2 + z^2|^2 = (u^2 + s^2 - y^2)^2 + 4s^2y^2 \geq (s^2 + y^2)^2 \geq s^4$. Développons $1/(u^2 + z^2)$ de façon finie et bornons le reste en utilisant cette inégalité, $|z| \geq s$, et $\int_0^\infty u^{513}/(e^{2\pi u} - 1) du = 513!\zeta(514)/(2\pi)^{514}$, avec $\zeta(514) < 2$ et $\pi > 3$. Ceci donne la constante conservatrice affichée. L'inégalité $513! \leq 257^{513}$, $6s > 2^{10}$, $257/(6s) < 1/5$ prouve sa borne en puissance de deux énoncée. C'est un reste fini, non la convergence d'une série asymptotique.

Sa contribution à chaque moment est inférieure à $256\mathcal{R}/[\pi(2q + 1)] < 2^{-1026}$ et est payée une fois. Posons $d = 2q$. L'intégration directe et la division rationnelle donnent

$$J_q(c) = \int_0^1 x^{2q} \text{Re}(c + ibx)^{-1} dx, \quad J_0(c) = \frac{\arctan(b/c)}{b}, \quad J_q(c) = \frac{c}{b^2(2q - 1)} - \left(\frac{c}{b}\right)^2 J_{q-1}(c).$$

Pour $H_{d,r} = \int_0^1 x^d \text{Re}(s + ibx)^{-r} dx$ et $E_r = \text{Re}(s + ib)^{-r}$, l'intégration de la dérivée de $x^{d+1}(s + ibx)^{-r}$ donne

$$H_{d,1} = J_q(s), \quad H_{d,r+1} = \frac{E_r - (d + 1 - r)H_{d,r}}{rs}.$$

Il n'y a pas de division par $d + 1 - r$. Le logarithme a sa branche principale sur le demi-plan droit ouvert. L'intégration par parties donne

$$\int_0^1 x^d \operatorname{Re} \log(s + ibx) dx = \frac{\log(s^2 + b^2)}{2(d+1)} - \frac{1}{(d+1)^2} + \frac{sJ_q(s)}{d+1}.$$

Par conséquent l'intégrale finie exacte $D_q = \int_0^1 x^d a_{\text{fin}}(x) dx$ est

$$D_q = \frac{\log(s^2 + b^2)/2 - \log \pi - 7/2}{d+1} - \frac{1}{(d+1)^2} + \left(\frac{s}{d+1} - \frac{1}{2} \right) J_q(s) - \sum_{k=1}^{256} \frac{B_{2k}}{2k} H_{d,2k} - \sum_{j=0}^{255} J_q(c_j).$$

Les constantes élémentaires sont encadrées par réduction de gamme et séries rationnelles. Pour $|z| < 1$, la série du logarithme $2 \sum_{k=0}^{N-1} z^{2k+1}/(2k+1)$ pour $\log((1+z)/(1-z))$ a une queue au plus $2|z|^{2N+1}/[(2N+1)(1-|z|^2)]$. La série alternée de l'arctangente a un reste au plus $|z|^{2N+1}/(2N+1)$; la réciprocity et la formule d'addition de la tangente réduisent les autres arguments positifs. L'identité de Machin fixe $\pi = 16 \arctan(1/5) - 4 \arctan(1/239)$ sans ambiguïté de branche. Les nombres de Bernoulli sont calculés exactement ; des comparaisons de carrés entiers encadrent les racines. Le producteur de source utilise des dyadiques dirigés à 6144 bits ; son oracle séparé à 6400 bits utilise une évaluation de Horner arrière et une construction différente des Bernoulli. Ils contrôlent les 1024 moments, y compris l'annulation et l'arrondi. Les intervalles finaux ont une largeur de trois unités sur la grille 2^{-1024} , donc leurs erreurs de milieu sont inférieures à 2^{-1023} .

Le producteur de source utilise des dyadiques dirigés à 6144 bits ; son oracle séparé à 6400 bits utilise une évaluation de Horner arrière et une construction différente des Bernoulli. Ils contrôlent les 1024 moments, y compris l'annulation et l'arrondi. Les intervalles finaux ont une largeur de trois unités sur la grille 2^{-1024} , donc leurs erreurs de milieu sont inférieures à 2^{-1023} .

D.2 Un encadrement de noyau d'opérateur complet

Soit $d_L = 2L = 17/8$, $\hat{\theta}_q = (\log_q + \text{hi}_q)/2^{1025}$, et définissons le polynôme rationnel

$$k_0(d_L y) = \sum_{q=0}^{1023} \frac{2L^{2q} + (-1)^q 544^{2q} \hat{\theta}_q}{(2q)!} y^{2q}.$$

Le théorème de Taylor sur l'intervalle réel donne une erreur de troncature à moments exacts au plus $914 \cdot 544^{2048}/2048! < 2^{-758}$. En effet $e < 68/25$ implique $e \cdot 544/2048 < 3/4$; utilisons $(3/4)^4 < 1/3$, $3^{512} > 2^{768}$ et $914 < 2^{10}$. Remplacer les moments ajoute moins de $2^{-1023} \cosh 544 < 2^{-207}$, puisque $e^{544} < 2^{816}$. Par conséquent

$$\sup_{|x| \leq 17/8} |k(x) - k_0(x)| < 2^{-206}, \quad \|K - K_0\| < (17/8)2^{-206} < 2^{-204}.$$

La dernière étape découle directement de Cauchy-Schwarz pour un noyau uniformément borné. Elle est indépendante de la dimension finie de la matrice. Le reste de Binet est déjà à l'intérieur des intervalles de moments.

D.3 Assemblage exact du noyau de Legendre

Écrivons $k_0(2Lt) = \sum a_q t^{2q}$, $\kappa_0(z) = k_0(Lz)$, et

$$\mathcal{K}_{ij} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P_i(x) \kappa_0(x-y) P_j(y) dy dx.$$

La matrice brute est $L^2 \mathcal{K}$. Les parités opposées s'annulent et la matrice est réelle symétrique. Définissons les moments de bord $b_j = \int_{-1}^1 \kappa_0(1-y) P_j(y) dy$. L'intégration de Rodrigues décalée donne

$$b_j = 2(-1)^j \sum_q a_q w_{2q,j}, \quad w_{m,j} = \frac{(m!)^2}{(m-j)!(m+j+1)!} \quad (0 \leq j \leq m),$$

avec zéro hors de cette plage. Le rapport $w_{m,j+1}/w_{m,j} = (m-j)/(m+j+2)$ découle de l'annulation des factorielles. Les deux lignes de départ sont

$$\mathcal{K}_{00} = 2(b_0 + b_1), \quad \mathcal{K}_{0j} = \frac{2(b_{j+1} - b_{j-1})}{2j+1} \quad (j \geq 2 \text{ pair}),$$

$$\mathcal{K}_{1j} = \frac{\mathcal{K}_{0,j-1} - \mathcal{K}_{0,j+1} + 2(b_{j+1} - b_{j-1})}{2j+1} \quad (j \geq 1 \text{ impair}).$$

Celles-ci découlent de l'intégration de la primitive de Legendre $(P_{j+1} - P_{j-1})/(2j+1)$, qui s'annule aux deux extrémités. Intégrer $(\partial_x + \partial_y)\kappa_0(x-y) = 0$ contre deux telles primitives donne

$$\mathcal{K}_{r,j} = \mathcal{K}_{r-2,j} - \frac{2r-1}{2j+1}(\mathcal{K}_{r-1,j+1} - \mathcal{K}_{r-1,j-1}).$$

Utilisons le domaine étendu $r \leq j$, $r+j \leq 894$, $r \leq 447$, incluant 895 départs et 99681 mises à jour ; extrayons le carré final ensuite. Ceci empêche une dépendance de bord non calculée.

Une route de départ indépendante utilise les coefficients clos

$$F_{m,j} = \frac{8(m+1)(m!)^2}{(m+1-j)!(m+j+2)!} \quad (j \text{ pair}, j \leq m),$$

$$T_{m,j} = -\frac{8(m+1)(m!)^2(m-j+1)(m+j+2)}{(m-j+2)!(m+j+3)!} \quad (j \text{ impair}, j+1 \leq m).$$

Alors $\mathcal{K}_{0j} = \sum a_q F_{2q,j}$, $\mathcal{K}_{1j} = \sum a_q T_{2q,j}$; les autres entrées de ces formules de départ sont nulles. La substitution de la formule de bord et l'annulation prouvent ces identités.

La somme $\sum |a_q| < 2^{826}$ borne la croissance intermédiaire. À la maille de travail 2^{-P} , les opérations extérieures sur coefficients et poids donnent un rayon de départ au plus $(7168 \sum |a_q| + 24578)2^{-P}$. Les rayons de récurrence satisfont $R_r \leq R_{r-2} + 2R_{r-1} + 2^{-P}$, donc chaque entrée étendue a un rayon inférieur à 2^{1435-P} . Le confinement réel et les largeurs de sortie finales sont néanmoins contrôlés séparément. C'est une borne d'arithmétique dirigée, non une revendication de stabilité en virgule flottante.

D.4 Carré premier complet et compression médiane

L'ensemble complet des décalages est

$$\mathcal{A} = \{0, \pm \log 2, \pm \log 3, \pm \log 4, \pm \log 5, \pm \log 7, \pm \log 8\},$$

avec les poids $w_0 = 7/2$, $w_{\pm \log n} = -\Lambda(n)/\sqrt{n}$. Ainsi $M = \sum_{a \in \mathcal{A}} w_a S_a$. Pour les fonctions de base brutes $p_i = P_i(u/L)$, soit $g_i = M p_i$. Les matrices brutes sont $\langle p_i, g_j \rangle$ et $\langle g_i, g_j \rangle$.

Pour chaque paire ordonnée a, b , utilisons

$$\ell_{ab} = \max(-L, -L-a, -L-b), \quad r_{ab} = \min(L, L-a, L-b),$$

et mettons la contribution à zéro si le recouvrement est vide. Sinon

$$O_{ij}(a, b) = \int_{\ell_{ab}}^{r_{ab}} P_i((u+a)/L) P_j((u+b)/L) du.$$

Les 169 paires ordonnées sont retenues dans $\sum_{a,b} w_a w_b O_{ij}(a, b)$. Remplacer cette intersection triple par un recouvrement à deux intervalles change M^2 et est invalide.

Les valeurs de départ sont $O_{00} = r - \ell$, $O_{10} = (r - \ell)(r + \ell + 2a)/(2L)$. Pour $j \geq 1$,

$$O_{0j} = L \left[\frac{P_{j+1}((u+b)/L) - P_{j-1}((u+b)/L)}{2j+1} \right]_{\ell}^r,$$

$$O_{1j} = \frac{j+1}{2j+1} O_{0,j+1} + \frac{j}{2j+1} O_{0,j-1} + \frac{a-b}{L} O_{0j}.$$

Pour $F_i = g_{i+1} - g_{i-1}$, l'annulation des extrémités de Legendre rend F_i continue aux extrémités internes du support, avec dérivée faible $(2i+1)g_i/L$. L'intégration par parties donne la même récurrence qu'en D.3 pour la matrice brute M , et pour la matrice brute M^2 ajoute

$$\frac{L}{2j+1} [F_i F_j]_{-L}^L$$

à la mise à jour de l'entrée $i+1, j$. Utilisons des traces unilatérales. Les décalages appariés donnent $[F_i F_j]_{-L}^L = [1 - (-1)^{i+j}] F_i(L^-) F_j(L^-)$; le terme de bord non nul ne doit pas être supprimé.

Les intervalles sources encadrent tous les décalages et poids. Une estimation directe de perturbation utilise $|P_i| \leq 1$, $|P'_i| \leq i(i+1)/2$ sur $[-1, 1]$: déplacer chaque décalage d'au plus η_a change la longueur de recouvrement d'au plus $2\eta_a$ et chaque argument polynomial d'au plus η_a/L . La perte d'extrémité et la borne intégrale lipschitzienne résultante, suivies d'une sommation pondérée finie, paient les erreurs de centre de source. L'évaluation dirigée paie les erreurs de récurrence et d'arrondi. Pour des rayons bruts symétriques r_{ij} , la borne

$$\epsilon_{\text{raw}} = \max \frac{\sum_j r_{ij}}{\Gamma_{ii}}$$

implique $-\epsilon_{\text{raw}}\Gamma \preceq \Delta \preceq \epsilon_{\text{raw}}\Gamma$, par l'inégalité de somme de lignes absolue pour des vecteurs complexes. Les allocations normalisées réelles sont 2^{-220} pour M et M^2 , et $2^{-204} + 2^{-220}$ pour le noyau.

D.5 Les colonnes de queue complètes

Soit $s_{1024}(x) = \sum_{k=0}^{1023} (-1)^k x^{2k} / (2k+1)!$. Le théorème de Taylor pour le sinus, incluant le coefficient nul de degré 2048, donne

$$\left| \frac{\sin x}{x} - s_{1024}(x) \right| \leq \frac{|x|^{2048}}{2049!}, \quad \|B_{\text{band}} - \tilde{B}\| \leq \frac{544^{2049}}{\pi 2049!} < 2^{-513}.$$

La dernière borne utilise $m! > (m/3)^m$, $1632/2049 < 4/5$, et $(4/5)^4 < 1/2$. La valeur diagonale découle par continuité.

Posons $p_\pi = 16A_{160}(1/5) - 4A_{160}(1/239)$, où $A_{160}(y) = \sum_{k=0}^{159} (-1)^k y^{2k+1} / (2k+1)$. La formule de Machin avec restes alternés donne $|p_\pi - \pi| < 2^{-646}$, $p_\pi > 2$. L'opérateur de bande polynomial rationnel $B_p = (\pi/p_\pi)\tilde{B}$ obéit donc à $\|B_{\text{band}} - B_p\| < 2^{-513} + 2^{-646}$.

Utilisons les coefficients de départ F, T de D.3 avec $a_k = (-1)^k 544^{2k} / (2k+1)!$. Pour les colonnes brutes

$$r_{j,n} = (1 - \delta)\Gamma_{jj}\mathbf{1}_{n=j} - \frac{289}{p_\pi} \sum_{k=0}^{1023} a_k \begin{cases} T_{2k,n}, & j=0, \\ F_{2k,n}, & j=1, \end{cases}$$

le facteur $289 = \Omega L^2$ vient du changement de variables brut. Les parités opposées sont exactement nulles. Cette formule est précisément la compression brute de $(I - B_p - \delta I)p_j$.

À la précision de travail 2048, les rapports de départ extérieurs dans $[0, 1]$ donnent un rayon brut inférieur à 2^{-1214} avant l'arrondi final. La grille de sortie 2^{-640} avec rembourrage extérieur a un rayon inférieur à 2^{-638} , bien en dessous de l'erreur de coordonnée autorisée 2^{-524} . Le producteur utilise des récurrences de départ ; l'oracle évalue indépendamment les quotients de factorielles et contrôle les 896 coordonnées, y compris 448 zéros de parité.

Comme $\Gamma_{nn}\Gamma_{jj} > 1/1024$ pour $n < 448$, $j \leq 1$, normaliser une erreur de coordonnée brute 2^{-524} donne une erreur de colonne totale inférieure à 2^{-514} . Ajouter l'erreur d'opérateur complet donne une erreur normalisée inférieure à 2^{-512} .

Avec des colonnes de milieu brutes $\hat{r}_j$, la mise à jour retenue correcte est

$$\hat{U}_{\text{raw}} = \frac{648}{17} (\hat{r}_0 \hat{r}_0^* + \hat{r}_1 \hat{r}_1^*), \quad \hat{U} = \Gamma^{-1/2} \hat{U}_{\text{raw}} \Gamma^{-1/2}.$$

En effet $81/\Gamma_{00} = 27/\Gamma_{11} = 648/17$. L'Appendice B.3 paie son erreur normalisée 92^{-512} . Seule cette mise à jour affichée est utilisée.

E Congruence positive et certificat entier complet de signe

Utilisons $\alpha, \beta, \epsilon_D$ du texte principal avec $\theta = 2^{-48}$, $\chi = 1$, et posons

$$\begin{aligned} S_0 &= 2^{257}, \quad C_w = 29^{2769}, \quad T_0 = 17 \cdot 29 \cdot 6076309112^{1282}, \\ \lambda_* &= \frac{1324960000 \cdot 2777}{6076309112^{95}} + 2^{-128}, \\ \Delta &= 9617^{2^{435}} - 325(8962^{250} + 1) > 0, \quad d_{\text{clear}} = 9617\Delta. \end{aligned}$$

Les coefficients intégraux exacts sont

$$c_0 = d_{\text{clear}} \frac{1770}{?} (\lambda_* - \alpha - \beta \epsilon_D), \quad c_1 = d_{\text{clear}} T_0 \beta S_0, \quad c_2 = \frac{17S_0}{?}.$$

Leurs longueurs binaires, conjointement avec celle de d_{clear} , sont 462, 1704, 1489, 1228, et $c_1 = 17S_0 c_2 > 0$. Sur chaque secteur de parité, soit $Q_d = \text{diag}(8(2j+1))$, et soient a, b_{raw} les centres entiers bruts M, M^2 . La matrice de Gram brute est $\Gamma = 17Q_d^{-1}$. Chaque $q_j = 8(2j+1)$ utilise le degré de Legendre original, plutôt que l'indice de secteur local. Écrivons l'essai $Y = Q_d Z / 2^{256}$ et $X = \Gamma^{1/2} Y \Gamma^{-1/2}$, avec Z entier. Son test de Frobenius exact est $\sum_{i,j} q_i q_j Z_{ij}^2 \leq 2^{518}$, contrôlé séparément dans chaque secteur. La norme d'opérateur de somme directe est le maximum des deux normes de secteur, donc $\|X\| \leq 8$.

Pour W dans le Théorème B, définissons $W_r = \Gamma^{1/2} W \Gamma^{1/2}$ et $V = C_w Q_d W_r Q_d$. Cette identité spécifie la congruence inverse à partir des centres de source et de l'essai ; elle précède tout signe cible. De façon équivalente, avec $R_0 = 2^{256}$, $y = 8$,

$$\begin{aligned} c_w &= 32S_0 R_0^2 + (61y^2 + 64y)2^{549}, \\ F_w &= 29 \cdot 17S_0 R_0 (Z + Z^*) - 29Z^* Q_d a Q_d Z + 32Z^* Q_d b_{\text{raw}} Q_d Z - 32R_0 (a Q_d Z + Z^* Q_d a), \\ V &= Q_d F_w Q_d + 17c_w Q_d. \end{aligned}$$

Ce sont des identités entières, et chaque colonne de V est divisible par l'entrée diagonale correspondante de Q_d . Soit

$$\begin{aligned} \gamma_* &= \epsilon_H + \sigma + \lambda_*, \quad R_* = \frac{j_{\text{raw}}}{S_0} + \tilde{U}_{\text{raw}} - \gamma_* \Gamma, \\ K_* &= T_0 V R_* + 289C_w T_0 V, \end{aligned}$$

où j_{raw}/S_0 est le centre de noyau brut et $\tilde{U}_{\text{raw}}$ est défini dans l'Appendice D.5 à partir des deux colonnes de milieu de queue. Les matrices $T_0 j_{\text{raw}}/S_0$, $T_0 \tilde{U}_{\text{raw}}$ et le scalaire $17T_0 \gamma_*$ sont intégraux. Le dénominateur diagonal restant s'annule parce que $V Q_d^{-1}$ est intégral, donc $V Q_d^{-1} V$ est intégral. Ces faits prouvent l'intégralité de K_* sans supposer que les dénominateurs de Gram impairs divisent T_0 . Ceci définit explicitement la cible intermédiaire, plutôt que de la traiter comme une entrée numérique inexpliquée. Avec

$$B_c = \frac{Q_d^{-1/2} V}{\sqrt{17C_w}},$$

l'identité est

$$K_{48} = d_{\text{clear}} 289 C_w^2 T_0 B_c^* P_{\theta_c} X_c = d_{\text{clear}} K_* + c_0 V Q_d^{-1} V - c_1 V b_{\text{raw}} V + c_2 V a Q_d a V.$$

Le scalaire est positif et B_c est non singulière parce que la borne supérieure inverse est positive avant que le signe cible ne soit testé. Le compilateur indépendant utilise plutôt $Y = V Q_d^{-1}$ et $F = a Q_d a - 17S_0 b_{\text{raw}}$, calculant

$$d_{\text{clear}} K_* + Y (c_0 Q_d + c_2 Q_d F Q_d) Y^*.$$

Le protocole de reproduction exige que les deux compilateurs opèrent sur les sources nouvellement engendrées et le nouvel essai ; aucun V , K_* , cible, direction ou facteur historique n'est utilisé comme

entrée numérique. Le compilateur intermédiaire a lui aussi une implémentation algébrique séparée et est contrôlé par égalité d’objet entier.

Si le calcul frais vérifie une échelle cible de 3353 bits dans les deux secteurs et les bornes de résidu complètes suivantes, la règle d’acceptation générale (12) se spécialise en

$$K_s = 2^{2329} F_s F_s^* + 2^{2873} I + R_s, \quad \max_i \sum_j |(R_s)_{ij}| < 2^{2848}.$$

Sous ces hypothèses explicitement vérifiables, $K_s > 2^{2872} I$. Le signe final dépend de ces inégalités entières complètes et de la congruence analytique, non de la routine de Cholesky approchée qui a proposé F_s .

F Protocole de reproduction et frontière de vérification

F.1 Sources admises et exécution

Pour le Théorème B, le répertoire de reproduction supplémentaire contient les programmes sources scientifiques, un manifeste SHA-256 des sources, un pilote de niveau supérieur et des vérificateurs par étape. Le nouveau calcul admet des constantes mathématiques de source et du code source. Les moments, matrices sources, matrices d’essai, cibles et facteurs précédemment engendrés sont exclus comme entrées scientifiques. Une comparaison avec des résultats plus anciens ne peut être effectuée qu’après que le nouveau résultat et ses hachages ont été gelés. Le Théorème A a la route de vérification distincte par proposition retenue décrite à la Section F.3.

L’interpréteur choisi est CPython 3.12.10. L’invocation documentée utilise `-I -S -B`, laisse les assertions activées et utilise la bibliothèque standard. Le pilote enregistre l’interpréteur, les hachages de source, les commandes d’étape, les codes de retour, les liens entrée-sortie et les hachages de certificat. Les crochets d’audit Python rejettent les accès non approuvés aux fichiers, la création de sous-processus et les opérations réseau à l’intérieur des étapes arithmétiques ; ces contrôles documentent les opérations Python observées et ne sont pas un bac à sable de système d’exploitation.

La reconstruction complète engendre les moments, les encadrements de source premiers, toutes les matrices sources et colonnes de queue, les inverses d’essai, deux cibles finies complètes et les facteurs de Gram proposés. Des routes séparées vérifient le confinement des moments, les intervalles matriciels, les coordonnées de queue, les deux compilations de congruence et chaque ligne de résidu de Gram. Le mode de vérification reconstruit les artefacts gelés en utilisant ces routes arithmétiques sans régénérer les propositions d’essai et de facteur. Les deux modes exigent des hachages exacts de source et d’artefact ; aucun mode ne remplace les arguments analytiques des Appendices A–E.

F.2 Décomptes et acceptation exacte

La reconstruction numérique fraîche initiale a vérifié 1024 moments, 13 centres d’opérateur premier, 169 paires de décalages ordonnées, 151200 intervalles de matrice source stockés, 896 coordonnées de queue dont 448 zéros de parité, 100352 coordonnées cibles complètes et 448 lignes de résidu de Gram. Ce sont des contrôles de couverture observés sur les objets engendrés, non des prémisses mathématiques ni un substitut à la vérification de chaque objet.

La règle d’acceptation finie est (12), appliquée aux deux secteurs complets après accord exact des deux compilateurs cibles. La reconstruction complète de source et l’admission scalaire ont réussi le 14 septembre 2026 à 12:44:36 UTC en 614,437 secondes. Une vérification complète subséquente de l’oracle source et du certificat gelé a réussi à 12:55:48 UTC en 430,172 secondes. Les deux commandes ont contrôlé les 448 lignes exactes de Gram et recalculé 56 assertions scalaires. Les échelles cibles, bornes de résidu, identités de source et hachages de certificat final sont enregistrés dans les manifestes d’exécution gelés accompagnants. Une revue de preuves séparée a contrôlé les dimensions réelles, les inégalités entières exactes et les liaisons de fichiers inchangés après vérification.

F.3 Vérification du certificat de la fenêtre unité

Le Théorème A utilise le certificat source et résiduel à 2816 modes décrit dans l'Appendice A. Chaque parité a 1408 lignes et 991936 entrées triangulaires stockées. Son répertoire supplémentaire séparé contient 19 programmes sources et 15 paquets scientifiques retenus. Les reçus de succès historiques sont exclus. La relecture fraîche complète s'est terminée avec succès le 14 septembre 2026 à 13:37:31 UTC, contrôlant les 45056 nœuds de quadrature, 126877696 contributions de coefficients, toute la construction de projection et de pôle, 1983872 cellules résiduelles triangulaires inférieures, 1864839680 termes de multiplication-accumulation et les 2816 lignes pondérées.

Le calcul scalaire exact séparé contrôle 72 relations, dont quatre contrôles de rejet, couvrant tout le complément et les queues de pôle, les estimations extérieures et de bande compacte, les allocations d'erreur de source et le déterminant direct pour $\epsilon = 2^{-151}$. Un pilote final recontrôle ces valeurs scalaires et lie la couverture finie complète et les hachages de fichiers immuables à l'admission analytique revue. Il ne répète pas l'arithmétique finie coûteuse. L'Appendice A prouve les arguments d'acceptation et de transfert ; ces arguments et les contrôles arithmétiques complets sont tous deux nécessaires. Cette route vérifie les propositions retenues, tandis que le mode complet du Théorème B régénère ses propositions à partir des programmes sources admis.

F.4 Feuilles rationnelles exactes

Les sept minima quadratiques de Schur pondérée de l'Appendice B, dans l'ordre des cellules, sont

$$\begin{array}{r} \frac{63078308690088722167419421}{46629832811703592187500000}, \quad \frac{3813197089461086778481}{11798365401697500000000}, \\ \frac{14052234435606996453439231}{36869891880304687500000000}, \quad \frac{556135837359374620609133827}{614498198005078125000000000}, \\ \frac{185291114176543858868682565972601}{137405914211862102773437500000000}, \quad \frac{478080898957095265117522763061920868427}{1090625504795845110824775117187500000000}, \\ \frac{706322764151580996738656306131567997370085069}{3427505138503553110305318011534765625000000000}. \end{array}$$

Ces valeurs sont obtenues en substituant des extrémités rationnelles et, le cas échéant, un sommet rationnel dans les quadratiques affichées. Les estimations de projection, les comparaisons de fourniture de queue et le déterminant à deux blocs de la fenêtre unité sont aussi des contrôles scalaires exacts. Ils se distinguent des grands calculs de matrice source et de Gram.

F.5 Disponibilité et responsabilité

Le paquet de source et de certificat est fourni localement pour revue. Un identifiant d'archivage public et une licence de données/code finalisée n'ont pas été fournis. Une exécution dans un nouveau répertoire de sortie avec des routes de contrôle séparées se distingue d'une reproduction par un chercheur externe, et se distingue aussi d'une réécriture de chaque composant arithmétique à partir des premiers principes. Aucune reproduction humaine externe ni formalisation complète par assistant de preuve n'est affirmée. Vincent Liu est l'auteur humain responsable. La Déclaration sur l'IA et les logiciels et la Déclaration de vérification humaine et de responsabilité approuvées par l'auteur sont reproduites intégralement ci-dessous. L'IA n'est pas un auteur.

F.6 Déclaration sur l'IA et les logiciels

Des outils d'intelligence artificielle générative, notamment OpenAI ChatGPT et OpenAI Codex, ont été utilisés durant ce projet comme outils de soutien à la recherche. Leurs usages ont inclus l'assistance au remue-ménages mathématique, la formulation et la comparaison de stratégies de preuve, l'organisation et la rédaction d'arguments mathématiques, l'aide à la recherche bibliographique, la préparation et la révision du texte du manuscrit, la génération et la revue de code informatique, et l'assistance à la conception de flux de vérification et de reproductibilité.

Les suggestions mathématiques, dérivations, codes, résumés et références générés par l'IA n'ont pas été traités comme autorité mathématique ou comme preuve indépendante. Les affirmations mathématiques utilisées dans le manuscrit devaient être soutenues par des arguments explicites, la littérature mathématique citée, ou les certificats assistés par ordinateur et procédures de vérification documentés accompagnant le travail. Les références et les affirmations dépendant des sources ont été revues contre les sources citées plutôt qu'acceptées uniquement à partir de sorties générées par l'IA.

Les portions assistées par ordinateur du travail ont été implémentées principalement en Python et incluent la reconstruction de source, l'arithmétique exacte et par intervalles, la construction de matrices, les calculs de résidus, la vérification exacte de certificat entier de Gram, et les contrôles de reproductibilité. Le paquet de preuve computationnelle enregistre les fichiers sources pertinents, paramètres, contrôles et données de certificat nécessaires pour auditer les composants assistés par ordinateur. Le manuscrit distingue les arguments analytiques des énoncés dont la vérification dépend du calcul.

1. Les systèmes d'intelligence artificielle et les outils logiciels ne sont pas auteurs de ce travail et n'assument aucune responsabilité pour ses affirmations mathématiques. Le ou les auteurs humains nommés ont revu le manuscrit et les preuves computationnelles dans la mesure spécifiée dans la Déclaration de vérification humaine et de responsabilité et la documentation de reproductibilité accompagnantes. Le ou les auteurs humains conservent la responsabilité finale des affirmations mathématiques, de l'interprétation des résultats computationnels, des citations, des déclarations d'originalité et de la version soumise du manuscrit.
2. Aucun usage d'intelligence artificielle ou de logiciel mathématique n'est présenté comme preuve indépendante que l'hypothèse de Riemann a été prouvée ou réfutée. Les résultats revendiqués dans ce manuscrit se limitent aux théorèmes explicitement énoncés de positivité de Weil sur fenêtre fixée et aux résultats analytiques et assistés par ordinateur associés.

F.7 Déclaration de vérification humaine et de responsabilité

Le ou les auteurs humains ont revu les énoncés mathématiques, les dépendances entre théorèmes, les définitions, les normalisations et les arguments de preuve principaux présentés dans ce manuscrit. Les composants assistés par ordinateur, y compris la reconstruction de source, les calculs par intervalles et en arithmétique exacte, et les contrôles finaux de certificat, ont été examinés à travers les procédures documentées de vérification et de reproductibilité décrites dans les matériaux accompagnants.

Le ou les auteurs ont aussi revu l'interprétation du manuscrit des résultats computationnels et la distinction entre certificats computationnels finis, positivité de Weil sur fenêtre fixée, et l'énoncé de positivité universelle apparaissant dans le critère de Weil pour l'hypothèse de Riemann.

Les outils d'intelligence artificielle et les logiciels mathématiques ont été utilisés comme aides à la recherche et à la rédaction, comme divulgué séparément dans ce manuscrit. Ils ne sont pas auteurs et n'assument pas la responsabilité des résultats. Le ou les auteurs humains nommés ont revu le matériel produit avec une telle assistance dans la mesure décrite dans les déclarations de vérification et de divulgation accompagnantes.

Le ou les auteurs nommés approuvent le manuscrit final et acceptent l'entière responsabilité de ses affirmations mathématiques, citations, présentation des preuves computationnelles, et conformité aux exigences du journal en matière d'intégrité de la recherche et de reproductibilité. Aucune affirmation n'est faite dans ce manuscrit que l'hypothèse de Riemann a été prouvée ou réfutée.

References

- [1] Alain Connes and Caterina Consani. *Weil positivity and trace formula, the archimedean place*. Selecta Mathematica (N.S.) **27** (2021), article 77. DOI: 10.1007/s00029-021-00689-4.
- [2] Alain Connes and Caterina Consani. *Spectral triples and ζ -cycles*. L'Enseignement Mathématique **69** (2023), no. 1–2, 93–148. DOI: 10.4171/LEM/1049.
- [3] Nicholas Hale and Alex Townsend. *An algorithm for the convolution of Legendre series*. SIAM Journal on Scientific Computing **36** (2014), no. 3, A1207–A1220. DOI: 10.1137/140955835.

- [4] Masatoshi Suzuki. *Weil’s quadratic form via the screw function*. arXiv:2606.09096v2, 17 August 2026. Versioned source.
- [5] Hiroyuki Yoshida. *On Hermitian forms attached to zeta functions*. In *Zeta Functions in Geometry*, Advanced Studies in Pure Mathematics **21** (1992), 281–325. DOI: 10.2969/aspm/02110281.
- [6] Xuefeng Zhu. *Weil positivity in compact windows: a finite reduction, certified two-sided bounds, and a Landau–Widom decay law*. arXiv:2608.24827v2, 2 September 2026. Versioned source.
- [7] National Institute of Standards and Technology. *NIST Digital Library of Mathematical Functions*, version 1.2.7, 15 June 2026. DLMF. Chapters 1, 5, 10, 14, 18 and 25, with exact identity locations stated in the text; accessed 14 September 2026.
- [8] Levent Alpoge and Ralph Furman. *More than two thirds of the zeta zeros are simple and on the critical line*. arXiv:2608.13637v1, 13 August 2026. Versioned source. Only §2.1, equation (2.1), is used here.
- [9] Siegfried M. Rump. *Verification methods: Rigorous results using floating-point arithmetic*. Acta Numerica **19** (2010), 287–449. DOI: 10.1017/S096249291000005X.
- [10] S. Zimmermann and U. Mertins. *Variational bounds to eigenvalues of self-adjoint eigenvalue problems with arbitrary spectrum*. Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen **14** (1995), no. 2, 327–345. DOI: 10.4171/ZAA/677.
- [11] G. R. Barrenechea, L. Boulton and N. Boussadi. *Local two-sided bounds for eigenvalues of self-adjoint operators*. Numerische Mathematik **135** (2017), 953–986. DOI: 10.1007/s00211-016-0822-1.
- [12] Timothy Trudgian. *An improved upper bound for the argument of the Riemann zeta-function on the critical line II*. arXiv:1208.5846v2, 5 September 2012. Corollary 1, p. 2.