What math means to me
Ce que les maths signifient pour moi
Larry Guth

Étudier les mathématiques occupe place importante pour moi. J'avais plusieurs motivations pour écrire ce texte. L'une d'elles est liée à l'ia. Les progrès de l'ia incitent la communauté mathématique à réfléchir à ce qui nous importe et aux orientations que nous souhaitons prendre à l'avenir. Lors du congrés ICM cet été, plusieurs intervenants nous ont encouragés à méditer sur nos objectifs et nos valeurs. Mais je songeais aussi depuis longtemps à écrire sur mon expérience personnelle en mathématiques. La situation actuelle m'a donné la motivation supplémentaire de le faire.

1. Les choses se mettent en place

Lorsque je discute avec des personnes qui ne sont pas mathématiciennes, elles décrivent souvent leur expérience des mathématiques comme une phase facile à l'école primaire, survie d'une phase déroutante et incompréhensible qui commence plus tard. La phase facile comprend le comptage, l'addition, la soustraction... Chacun vit cette transition à un moment différent et la décrit généralement comme abrupte.

Je ne perçois pas les mathématiques comme divisées en parties de cette manière. Pour illustrer ma vision des mathématiques, je pense que le comptage est un excellent exemple. Apprendre à compter n'est pas facile ; je crois que nous avons simplement oublié ce que c'était. Je me souviens de l'époque où mon fils apprenait à compter. Il était capable de réciter les nombres jusqu'à une trentaine environ. Nous étions assis avec un mètre ruban, et il voulait comprendre quel chiffre correspondait à quelle ligne du mètre ruban, et c'était très difficile pour lui.

Il arrive un moment où un enfant sait réciter les nombres de un à dix, mais est incapable de calculer combien de cuillères mettre sur la table pour que chacun en ait une. Pour qu'un enfant apprenne à compter les cuillères pour le repas, plusieurs éléments doivent être liés. Le nombre de personnes à table, le nombre de cuillères dans le tiroir et les nombres que nous récitons sont tous interdépendants, et l'enfant doit comprendre ces liens.

L'apprentissage du calcul provient d'une période particulière de l'enfance où le monde s'ouvre à mesure que l'enfant comprend davantage. La plupart d'entre nous n'en gardent qu'un vague souvenir. Ce qui est particulier avec les mathématiques, c'est que nous vivons des expériences similaires tout au long de notre vie.

Quand on apprend les mathématiques, tout s'éclaire.

Les images, les nombres et les équations se rejoignent lorsque nous apprenons les équations des droites et des cercles. Je trouve ce lien vraiment remarquable. Les droites et les cercles sont des formes fondamentales, utilisées par l'humanité depuis des millénaires, dessinées par les enfants dès la maternelle. Les nombres et les équations le sont aussi, mais ils semblent appartenir à un autre monde. Les enfants apprennent la multiplication pour répondre à des questions comme "S'il y a huit enfants dans la classe et qu'on leur donne quatre biscuits chacun, combien de biscuits faut-

il retirer du paquet de biscuits pour les leur donner ?". J'ignore comment lidée de multiplication s'est développée historiquement, mais peut-être pour des raisons similaires. Il est surprenant que ce problème de comptage de biscuits soit lié aux droites, et encore plus surprenant qu'il soit lié aux cercles. Pourtant, les cercles et les droites sont décrits par d'élégantes équations basées sur la multiplication et l'addition. Ce lien nous permet d' observer les cercles et les droites d'une manière complètement différente. De nombreux éléments doivent être réunis pour comprendre l'équation d'un cercle.

En calcul différentiel et intégral, on établit un lien entre la formule d'une fonction $y = f(x)$ et son apparence. On apprend notamment comment la pente de la courbe est liée à la formule de la fonction f. Plus tard, on découvre le lien entre l'aire sous la courbe et la notion de pente. De nombreux éléments doivent être réunis pour qu'un élève comprenne comment utiliser le calcul différentiel et intégral pour déterminer l'aire sous une parabole.

De nombreux domaines des mathématiques avancées tirent leur nom de la combinaison de deux éléments : topologie algébrique, géométrie différentielle, géométrie algébrique. La première branche des mathématiques que j'ai étudiée en tant que doctorant s'appelait topologie quantitative ce qui signifie la combinaison d'estimations quantitatives et de topologie. La branche des mathématiques que j'ai ensuite étudiée était l'analyse de Fourier. En analyse de Fourier, on apprend que toute fonction peut être représentée de deux manières différentes : la représentation dans l'espace physique et la représentation dans l'espace fréquentiel. L'analyse de Fourier consiste à examiner les fonctions selon ces deux perspectives très différentes. Ce qui est complexe d'un point de vue devient plus clair de l'autre. En combinant ces deux perspectives, nous parvenons à mieux comprendre les phénomènes. Mes étudiants de master et moi avons passé de nombreuses heures ensemble au tableau à représenter des fonctions dans l'espace fréquentiel et à essayer de comprendre à quoi elles se ressemblent dans l'espace physique, afin de voir comment. ces deux points de vue s'articulent

L'analyse de Fourier est utile pour comprendre les phénomènes oscillatoires, comme un pendule ou une corde vibrante. Initialement développée pour étudier des systèmes physiques tels que la propagation de la chaleur ou des ondes, elle s'avère aujourd'hui précieuse pour comprendre des phénomènes très différents, comme la distribution des nombres premiers, la structure des cristaux ou encore certains algorithmes rapides sur ordinateurs classiques et quantiques. La compréhension des liens entre les cordes vibrantes, les cristaux, les nombres premiers et les algorithmes rapides requiert la convergence de nombreux éléments Dans bien d'autres domaines, les mathématiciens peuvent aboutir à des conclusions similaires

Plus nous apprenons à connaître les questions, plus nous découvrons de liens entre elles.

Ces liens peuvent nous aider à répondre à des questions. Et les bonnes questions peuvent nous révéler des liens que nous n'avions pas perçus auparavant. Le monde des mathématiques est plus interconnecté que je ne l'imaginais en tant que jeune étudiant. À mesure que nous avançons dans nos études, les éléments s'assemblent pour former un tout plus vaste. Cette interconnexion et cette cohérence sont une caractéristique remarquable du monde mathématique et peut-être aussi de la nature. En pratiquant les mathématiques, nous cultivons cette capacité à comprendre le monde.

2. Confusion, frustration, doute et sentiment d'avoir tort

Dans le travail que nous effectuons au quotidien, nous ne sommes que rarement conscients de ce sentiment de connexion et de plénitude. Notre première impression est généralement empreinte de confusion, de frustration et de doute.

J'ai froissé des feuilles, gribouillé par-dessus des textes et enfoncé mon crayon jusqu'au fond de mes carnets. Il m'est arrivé de m'enthousiasmer pour une idée, puis de réaliser qu'elle n'avait aucun sens à cause d'une erreur commise trois semaines auparavant. Je me souviens, en tant qu'étudiant de troisième cycle, d'avoir parlé au téléphone avec mes parents et de leur avoir dit que je me sentais comme Bip Bip et Coyote. Mon expérience de la recherche me rappelle souvent Bip Bip et Coyote : élaborer une stratégie complexe, la mettre en œuvre, la voir dérailler, puis me prendre une boule de bowling en pleine tête ou me rendre compte que j'ai mis le pied dans le vide.

La recherche peut être comme un parcours sur des montagnes russes. Quand une idée m'enthousiasme, il m'arrive de fantasmer sur l'admiration que les gens porteront à mon travail - surtout si je travaille sur un problème célèbre comme le problème de Kakeya. Quand je réalise que l'idée n'est pas pertinente, je commence à douter de mes compétences et de l'utilité de mes recherches. Ces expériences sont essentielles à la pratique des mathématiques. Et parmi toutes ces expériences difficiles, je pense que l'expérience de l'erreur est particulièrement importante. On s'efforce de réussir quelque chose, on élabore une idée, on souhaite vraiment qu'elle soit vraie, puis on réalise qu'elle est fausse et on l'admet.

Ce travail acharné et cette expérience difficile peuvent nous apprendre à distinguer le sensé du non-sensé. Ils peuvent nous apprendre que la nature est ce qu'elle est et qu'elle se moque de nos souhaits. Ils peuvent nous apprendre à être honnêtes envers nous-mêmes.

L'expérience de l'erreur peut survenir dans tous les domaines d'activité et d'études, mais elle se manifeste différemment selon les disciplines. En mathématiques, nous avons beaucoup travaillé à définir clairement et précisément le vrai et le faux, ce qui, je pense, nous oblige à accepter nos erreurs.

En faisant des mathématiques, j'ai été confronté à l'erreur d'une manière que je n'avais pas toujours acceptée dans d'autres domaines d'études. Par exemple, je pense que mon expérience des mathématiques a contribué à faire de moi un meilleur écrivain. Au lycée et à l'université, j'adorais écrire. J'essayais de composer une phrase intéressante et originale. Puis j'essayais d'en ajouter une autre. Aujourd'hui, après avoir longtemps écrit sur les mathématiques, j'écris la première phrase et je la relis. "Suis-je vraiment convaincu de sa véracité ?" Généralement non. Je la raye. Je recommence.

3. Poser des questions

Poser des questions est essentiel en mathématiques. Les questions permettent de mettre en lumière nos confusions. Elles peuvent mettre en lumière un exemple qui va à l'encontre de notre intuition, elle peut nous ouvrir les yeux sur de nouvelles connexions.

Quand on est bloqué sur une question, on essaie d'en poser une plus simple. Et si on est bloqué

sur cette question simple, on en pose d'autres, encore plus simples. J'ai entendu dire un jour cette phrase, pour illustrer ce processus d'incompréhension : "S'il y a quelque chose que je ne comprends pas, il y a généralement quelque chose de plus simple que je ne comprends pas non plus.". Je ne connais pas l'origine exacte de cette expression, mais elle me revient souvent à l'esprit. Pour moi, cet adage philosophique est un aspect important des mathématiques.

Cette recherche constante de questions plus fondamentales nous aide à établir des liens entre les choses. Nous restons attentifs à tout ce qui semble arbitraire. Si un aspect de la question paraît arbitraire, nous essayons de le généraliser et de poser une question plus simple, plus générale. Les questions A et B peuvent chacune présenter des aspects arbitraires qui les rendent très différentes. Mais si nous prenons soin d'éliminer ces aspects arbitraires et d'examiner le fond de la question, alors elles peuvent commencer à se ressembler.

J'animais un séminaire d'une journée pour étudiants de premier cycle sur la résolution de problèmes, intitulé "Vers un problème plus simple". L'objectif du séminaire était de montrer que, face à un problème complexe, lorsqu'on est complètement bloqué, on peut se tourner vers un problème plus simple qui éclaire la question initiale. Je voulais démontrer aux étudiants que, face, par exemple, au problème du dernier théorème de Fermat, ils ne doivent pas rester paralysés et dépassés, mais qu'ils peuvent commencer à l'aborder : ils peuvent se poser des questions plus simples et commencer à les résoudre, ce qui permet de mieux comprendre le problème global et, par conséquent, d'en formuler d'autres.

Ces questions sont importantes car, face à un problème trop important pour que nous puissions le résoudre, nous pouvons toujours interagir avec lui en posant des questions.

Face à un problème complexe, une approche consiste à rechercher un problème intermédiaire entre notre compréhension actuelle et notre objectif. Cependant, trouver un tel problème intermédiaire est souvent ardu. En biologie, on sait que l'organisme le plus simple est une cellule unique, pourtant extrêmement complexe. Il n'existe pas de demi-cellule à étudier comme exercice préparatoire. De nombreux problèmes mathématiques donnent une impression similaire : il n'est pas évident de les diviser en deux. Néanmoins, grâce à leur ingéniosité, les mathématiciens trouvent des problèmes plus simples qui édairent le problème initial.

Voilà un exemple tiré de mon expérience personnelle. Le problème de restriction est un problème complexe d'analyse de Fourier (ou d'équations aux dérivées partielles) qui traite des figures d'interférence apparaissant lors de la superposition de nombreuses ondes de fréquences différentes. Les mathématiciens confrontés à ce problème l'ont lié à un autre problème, le problème de Kakeya, un problème géométrique concernant la superposition de tubes dans l'espace. Le problème de Kakeya n'est pas, de prime abord, une simple moitié du problème de restriction ; il ne semble même pas relever du même domaine. Cependant, grâce à leur travail et à leur perspicacité, les mathématiciens du domaine ont compris que le problème de Kakeya est en réalité un problème plus simple, qui isole un aspect essentiel du problème de restriction.

Je pense que de nombreux aspects des mathématiques qui paraissent compliqués se sont développés comme des façons créatives d'aborder des questions plus fondamentales sur les points qui nous blo-

quaient. De l'extérieur, on pourrait croire que les mathématiciens parlent de choses très complexes et élaborent de nouvelles théories plus complexes que les précédentes. Bien que cela ne soit pas faux, je pense que, de l'intérieur, on a souvent l'impression inverse : nous essayons de trouver des questions plus fondamentales qui sous-tendent les questions précédentes auxquelles nous ne pouvons pas répondre. Raoul Bott a dit un jour "Un mathématicien est une personne qui aime aller au fond des choses".

Trouver une bonne question est un travail ardu, jalonné de faux départs et de brouillons, à l'image du reste du processus. Lorsqu'on pose une bonne question, on a l'intuition que tenter d'y répondre mènera à une idée intéressante. On ne l'a peut-être pas encore, mais la question est une sorte d'indice qui pourrait y conduire, un indice qu'on peut partager avec d'autres personnes qui pourront s'en inspirer.

4. Comprendre le monde

Les mathématiques nous aident aussi à comprendre le monde, et notamment ses aspects les plus étranges, Jusqu'à présent, ma carrière s'est concentrée sur les mathématiques pures, et j'éprouve une certaine appréhension à l'idée d'écrire sur ce sujet important mais je vais tout de même tenter le coup.

Les mathématiques proviennent en partie de la volonté de comprendre le monde, en partie de la recherche de liens et de relations, en partie de la volonté de rendre les idées plus rigoureuses, en partie de la recherche de questions plus fondamentales, et en partie de bien d'autres choses encore. Ces différents aspects se complètent d'une certaine manière.

Lorsque l'on a découvert la mécanique quantique, elle nous a paru très étrange et contre-intuitive, en décalage avec notre expérience quotidienne. D'une certaine manière, elle était radicalement différente de tout ce que l'on avait connu jusqu'alors. Pourtant, la mécanique quantique peut être décrite mathématiquement. Et les mathématiques mises en œuvre sont en réalité similaires à celles découvertes antérieurement pour des raisons bien différentes : les matrices, les produits scalaires, les valeurs propres et les vecteurs propres, les équations aux dérivées partielles.

Il est vrai que la mécanique quantique est une réussite, et il existe aussi de nombreuses réussites moins éclatantes. Mais je reste convaincu que face à un phénomène nouveau et étrange, les mathématiques constituent un outil précieux pour le comprendre.

L'une des raisons pour lesquelles je pense que les mathématiques peuvent être utiles tient à la capacité de poser des questions fondamentales. S'intéresser à des questions plus fondamentales et plus générales peut aider à trouver des idées applicables à de nouvelles situations. Lorsque nous sommes confrontés à quelque chose de nouveau et d'étrange dans le monde et que nous essayons de le comprendre, cela nous oblige à poser des questions fondamentales et à repenser nos hypothèses de base. Parfois, les mathématiques peuvent nous y aider, car nous nous efforçons déjà depuis longtemps de poser ces questions fondamentales.

Cela a aussi à voir avec la façon dont les choses s'articulent. Il existe des structures fondamentales

qui apparaissent dans de nombreux domaines des mathématiques. Par exemple, les matrices, les produits scalaires, les valeurs propres et les vecteurs propres se retrouvent dans de nombreux domaines des mathématiques, aussi bien en mathématiques pures que dans des domaines scientifiques et techniques variés.

Voici un exemple modeste, tiré de ma propre expérience de mathématicien pur. J'ai longtemps travaillé sur un domaine de l'analyse de Fourier appelé découplage, qui aborde des questions de mathématiques pures concernant les EDP et la théorie des nombres. Après avoir étudié le découplage, je me suis intéressé à des sujets plus appliqués en analyse de Fourier et j'ai remarqué de nombreuses similitudes. Par exemple, j'ai constaté que certains calculs effectués par des mathématiciens purs pour résoudre un problème de théorie des nombres étaient très similaires à ceux réalisés par des scientifiques pour identifier des structures hélicoïdales à partir de diagrammes de diffraction des rayons X (ce qui a permis de découvrir la structure en double hélice de l'ADN). Par ailleurs, j'ai observé que la structure fondamentale du découplage est liée à celle de la transformée de Fourier rapide, un algorithme important utilisé par de nombreux scientifiques et ingénieurs.

Au fil de nos études, les concepts s'articulent pour former un tout plus vaste, englobant les mathématiques, les sciences et l'ingénierie. Des structures fondamentales se retrouvent dans tous ces domaines et les relient. Approfondir notre compréhension de ces structures nous permet, à terme, de mieux appréhender le monde.

5. Enseignement

Pendant longtemps, le métier de mathématicien a consisté à la fois à faire de la recherche et à enseigner. Cela pourrait paraître comme deux métiers fusionnés, mais ce n'est pas ainsi que je le vois. Tout ce que j'ai écrit porte en réalité sur la recherche et l'enseignement, et je pense qu'ils sont étroitement liés.

Quand l'enseignant et les élèves discutent de mathématiques, les choses se mettent en place (lentement !). L'apprentissage passe aussi par la confusion, la frustration, le doute et l'erreur. L'élève et l'enseignant cherchent à identifier la source de la confusion. Pour y voir plus clair, ils se posent des questions. Avec le temps, ils s'efforcent de trouver des questions qui abordent les notions les plus fondamentales. Quand un concept mathématique n'est pas clair, on se dit : si ce point n'était pas clair, il y avait probablement quelque chose de plus simple qui ne l'était pas non plus.

Partager des idées de cette manière est une source de joie.

L'enseignant explique la leçon à l'élève, qui la reformule avec ses propres mots. L'enseignant se rend compte que sa première explication était confuse et essaie une autre approche. L'élève repère alors une incohérence et reformule la question.

Nous continuons, éclaircissant peu à peu les choses, voyant progressivement comment tout s'imbrique et savourant l'émerveillement que suscite l'ensemble.

L'enseignant partage ce qu'il comprend et ce qu'il ne comprend pas. Ensemble, ils contemplent les

aspects étranges du monde, les choses que personne ne comprend encore. L'enseignant peut alors soumettre à l'élève une question qui, selon lui, pourrait mener à une découverte intéressante. Ils se demandent ce que l'élève apprendra un jour.

6. Choisir le sujet de travail

Chaque mathématicien a la possibilité de choisir son sujet de travail.

Au début de leur apprentissage des mathématiques, les élèves reçoivent souvent des instructions de lire ces sections d'articles, de résoudre ces exercices, de réfléchir à ces problémes. Mais l'apprentissage des mathématiques ne se résume pas à cela. Un moment crucial survient lorsqu'un élève commence à consacrer du temps à l'étude personnelle des mathématiques. Durant ce temps d'étude, il choisit ses sujets de réflexion. C'est à ce moment-là qu'il développe ses propres intérêts et son propre point de vue.

Parfois, choisir un sujet de travail est facile. Il arrive qu'on trouve rapidement une direction qui nous intéresse et qu'on s'y consacre avec plaisir pendant longtemps. On n'a alors plus à se soucier de la question.

Mais parfois, choisir sur quoi travailler peut être source de confusion et de frustration. On peut se retrouver avec beaucoup de papiers froissés. On peut avoir des doutes. Cette confusion et ces papiers froissés ne signifient pas que nous ne faisons pas le travail correctement. Les confusions et les feuilles froissées font partie intégrante du travail de mathématicien.

Les doctorants et leurs directeurs de thèse ont toujours collaboré sur ces questions. La plupart des doctorants, à un moment ou un autre de leur parcours, traversent une période difficile. Leur travail perd alors tout son sens. Ils ignorent peut-être pourquoi. L'étudiant et son directeur de thèse discutent ensemble pour tenter de comprendre la situation. Le rôle du directeur de thèse est notamment d'être présent, d'écouter et d'aider l'étudiant à trouver une voie qui lui corresponde.

Et il est utile de réfléchir à ces questions même si vous ne vous sentez ni frustré ni confus.

La question de savoir sur quoi travailler n'est pas une question que l'on cherche à résoudre pour s'en débarrasser et passer à autre chose. Elle est bien plus importante. Le poète Rainer Maria Rilke a prononcé une phrase célèbre sur le fait de "vivre dans les questions".

> "*Soyez patient à l'égard de tout ce qui dans votre cœur est encore irrésolu, et tentez d'aimer les questions elles-mêmes comme des pièces closes et comme des livres écrits dans une langue fort étrangère. Ne cherchez pas pour l'instant des réponses, qui ne sauraient vous être données ; car vous ne seriez pas en mesure de les vivre. Or, il s'agit précisément de tout vivre. Vivez maintenant les questions. Peut-être en viendrez-vous à vivre peu à peu, sans vous en rendre compte, un jour lointain, l'entrée dans les réponses.*"

Cette citation m'a toujours rappelé la démarche mathématique. Parfois, elle me fait penser à certaines questions mathématiques qui peuvent préoccuper un mathématicien pendant longtemps.

Mais elle s'applique encore davantage à la question du choix d'un sujet de recherche.

Voici donc ce que je suggère :

Réfléchissez à différentes pistes à explorer et demandez-vous : "Est-ce que cela a du sens pour moi ?" !

Si oui, foncez.

Sinon, continuez d'explorer d'autres pistes. Mais ne vous arrêtez pas complètement en attendant de trouver la voie idéale. Essayez un peu de ceci, un peu de cela.

Prenez le temps de réfléchir à ce sur quoi vous souhaitez travailler. Faites un brainstorming (*littéralement : prise d'assaut des cerveaux*). Discutez-en avec vos mentors et vos amis.

Consacrez du temps à l'expérimentation et à la réflexion. N'oubliez pas que les deux aspects sont importants.

La réflexion fait partie intégrante de la vie d'un mathématicien.