Traduction depuis l'allemand : Origine du concept d'arbre dans la littérature mathématique : un extrait du livre de D. König "Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Mit einer Abhandlung von L. Euler

Dans le quatrième chapitre, p. 63. Graphes circulaires.

§ 1. Arbres.

En un certain sens, les graphes les plus simples sont ceux qui ne contiennent aucun cycle, et donc (voir le théorème I 4) aucun chemin fermé. Si un graphe sans cycle est fini et connexe, on l'appelle un arbre [1] (voir fig. 26).

Les arbres vont maintenant être examinés plus en détail. Cependant, afin d'éviter toute répétition inutile, même les graphes infinis ou non connectés seront également pris en compte.

Le concept d'arbre a également été introduit par une autre définition (voir, par exemple, de Polignac [1]) ; pour montrer l'équivalence des deux définitions, nous démontrons que

---

1. Le développement de la théorie des arbres est en partie dû au fait que les graphes arborescents jouent un rôle dans certaines recherches en physique (voir chapitre IX, § 7) et en chimie (voir chapitre V, § 5). Kirchhoff [1, § 1] et von Staudt [1, pp. 20-21] furent les premiers à découvrir les arbres la même année, en 1847. Kirchhoff les découvrit en identifiant certains fils (arêtes) dans les branches de courant galvanique linéaire, après lesquels aucune figure fermée ne subsistait ; von Staudt parvint au concept d'arbres grâce à la démonstration élégante et exacte qu'il donna de la formule des polyèdres d'Euler. Indépendamment de Kirchhoff et de von Staudt, la longue série de travaux de Cayley [par exemple, Les travaux de Cayley sur les formes analytiques appelées "arbres" [1, 2, 3, 4, 7, 9] débutèrent en 1857. Il fut amené à ces travaux, en grande partie grâce à sa collaboration avec Sylvester, par le problème de la chimie organique visant à déterminer la forme et le nombre de certains composés chimiques. Cependant, les premiers travaux de Cayley [1] sur les arbres provenaient d'une autre source ; il souhaitait (suite aux recherches de Sylvester sur l'interchangeabilité des variables en calcul différentiel) définir une suite de processus de différentiation $A\partial_x + B\partial_y + ...$ (où $A, B, ...$ ou $x, y, ...$ sont des variables (selon les cas). Indépendamment de leurs prédécesseurs et l'un de l'autre, Listing [2, § 27] en 1862 et Jordan [1] en 1869 sont parvenus au concept d'arbre, fondé sur des spéculations purement mathématiques ("sans soupçonner la moindre incidence sur la doctrine chimique moderne", écrit Sylvester [1, p. 24] à propos de Jordan). Nous aborderons les travaux de Jordan, Cayley et Sylvester au chapitre suivant.
Le terme "arbre" provient de Cayley. Sylvester [4] souhaitait lui préférer le terme "ramification" et ne conserver le mot "arbre" que pour les arbres dont un nœud était désigné comme racine (voir ci-dessous, chapitre V, § 5). En français, outre "arbre", on utilise également les termes "ramification" et, chez Jordan [1], "assemblage (de lignes) à continuité simple".
Depuis 1921, le concept d'arbre joue un rôle important dans la nouvelle théorie des courbes (voir Menger [4, chapitre X] et la littérature qui y est citée, principalement polonaise et américaine). Cette théorie utilise les termes courbe arborescente, courbe acyclique (ou continue) et dendrite.

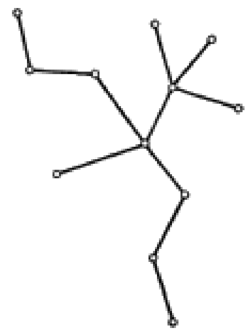

Fig. 26

Théorème 1 : *Un graphe fini est un arbre si et seulement si pour deux quelconques de ses nœuds, il existe un et un seul chemin qui relie ces deux points.*

Dans ce cas, le graphe est connexe et ne peut contenir de cycle $A_1A_2\ldots A_nA_1 \quad (n>1)$ car deux chemins différents $A_1A_2\ldots A_i$ et $A_iA_{i+1}\ldots A_nA_1 \quad (1<\mathrm{i}\leq n)$ relieraient les points A_1 et A_i. Réciproquement, si un arbre est un graphe connexe, alors deux nœuds quelconques sont reliés par un chemin. Cependant, deux chemins différents ne peuvent jamais relier les mêmes deux nœuds car alors — d'après le théorème 17 — un cycle existerait.

(La démonstration donnée ne s'applique qu'aux graphes au sens strict. Comme le montre la figure 27, un graphe comportant des boucles peut également satisfaire la condition du théorème, et un tel graphe n'est évidemment pas un arbre.

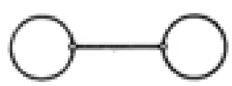

Fig. 27

Le même raisonnement conduit au résultat plus général suivant :

Théorème 2 : *Un graphe est un graphe acyclique connexe si et seulement si pour deux quelconques de ses nœuds, il existe un et un seul chemin qui les relie.*

L'énoncé suivant évoque également une caractéristique essentielle du dessin du cercle :

Théorème 3 : *Si G_1 et G_2 sont deux sous-graphes connexes du graphe sans cycle G, alors les arêtes qui sont contenues à la fois dans G_1 et G_2 forment également un graphe connexe G'.*