La structure des semi-groupes idempotents (I)
Naoki Kimura

1. Introduction

La première étape dans l'étude des semi-groupes idempotents a été franchie par David McLean [3] et s'énonce comme suit.

Théorème 1. *Soit S un semi-groupe idempotent. Alors il existe un demi-treillis Γ et une famille disjointe de sous-semi-groupes rectangulaires de S indexée par Γ, $\{S_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$, tels que*

(i) $S = \bigcup\{S_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$

(ii) $S_\gamma S_\delta \subseteq S_{\gamma\delta}$ *pour* $\gamma, \delta \in \Gamma$.

Cependant, la structure de S n'est pas déterminée, en général, par la seule connaissance des structures de Γ et de tous les S_γ.

Dans cet article et les suivants, nous étudierons certains semi-groupes idempotents spéciaux qui sont définis par certaines identités, où le théorème de décomposition ci-dessus joue un rôle important. Cet article traitera principalement de l'étude des semi-groupes idempotents réguliers (pour la définition, voir ci-dessous), qui peuvent être considérés comme une classe assez générale de semi-groupes idempotents. Des caractérisations d'identités pour certains semi-groupes idempotents spéciaux sont également obtenues.

2. Bandes rectangulaires

Un *semi-groupe idempotent* ou *bande* [1] est un semi-groupe qui satisfait l'identité $a^2 = a$. Un semi-groupe satisfaisant l'identité

$$aba = a \quad (ab = a, ba = a)$$

est appelé *rectangulaire* (*singulier à gauche*, *singulier à droite*). Ces semi-groupes sont tous idempotents. Et un semi-groupe singulier à gauche (à droite) est rectangulaire. Réciproquement, nous avons le résultat suivant :

Lemme 2. *Un semi-groupe rectangulaire est le produit direct d'un semi-groupe singulier à gauche et d'un semi-groupe singulier à droite. De plus, cette factorisation est unique à isomorphisme près.*

Démonstration. Soit S un semi-groupe rectangulaire. Alors, puisque

$$xS \supseteq x(yS) = (xy)S \supseteq (xy)(xS) = (xyx)S = xS,$$

nous avons

$$\begin{cases} xyS = xS. \\ Sxy = Sy. \end{cases} \quad \text{(Dual)} \tag{1}$$

Par conséquent, nous avons aussi

$$\begin{cases}(xS)(yS) = (xS)(yxS) = (xSyx)S = xS. \\ (Sx)(Sy) = Sy.\end{cases} \qquad \text{(Dual)} \tag{2}$$

Soit A (B) l'ensemble de tous les sous-ensembles de S de la forme xS (Sx). Alors A (B) forme un semi-groupe singulier à gauche (à droite), par rapport à la multiplication usuelle induite par celle de S, compte tenu de (2).

Soit $p : S \to A$ ($q : S \to B$) l'application définie par

$$p(x) = xS \quad (q(x) = Sx).$$

Alors, d'après (1) et (2), p et q sont des homomorphismes surjectifs. Soit $r : S \to A \times B$ l'application définie par

$$r(x) = (p(x), q(x)).$$

Alors r est un homomorphisme. Prenons un élément quelconque de $A \times B$, disons (xS, Sy). Alors $r(xy) = (xyS, Sxy) = (xS, Sy)$, d'après (1). Ainsi r est surjective. D'autre part, si $r(z) = (xS, Sy)$, alors $zS = xS$ et $Sz = Sy$. Par conséquent, par rectangularité, nous avons

$$xy = (xSx)(ySy) = (zSz)(ySz) = z(SxyS)z = z.$$

Ainsi r est un isomorphisme entre S et $A \times B$, où A (B) est singulier à gauche (à droite).

Soit $r' : S \to A' \times B'$ un isomorphisme, où A' (B') est singulier à gauche (à droite). Définissons $p' : S \to A'$ et $q' : S \to B'$ par $r'(x) = (p'(x), q'(x))$, alors ce sont des homomorphismes surjectifs. Si $p(x) = p(y)$, c'est-à-dire $xS = yS$, alors

$$p'(xS) = p'(x)p'(S) = p'(x) \quad \text{et} \quad p'(yS) = p'(y).$$

Par conséquent $p'(x) = p'(y)$. Ainsi, nous avons un homomorphisme surjectif $f : A \to A'$ ($g : B \to B'$) tel que $p' = fp$ ($q' = gq$). Maintenant, f (et g) doit être injectif. En effet, soit $xS \neq yS$, et $f(xS) = f(yS)$. Alors $xyS = xS \neq yS$, donc $xy \neq y$. Mais

$$\begin{aligned} p'(xy) &= fp(xy) = f(xyS) = f(xS) = f(yS) = fp(y) = p'(y), \\ q'(xy) &= gq(xy) = g(Sxy) = g(Sy) = gq(y) = q'(y). \end{aligned}$$

Par conséquent $r'(xy) = r'(y)$, ce qui contredit l'hypothèse que r' est un isomorphisme. Ainsi f et g doivent être des isomorphismes. Ceci termine la preuve du lemme 1. □

Remarque : le A (B) défini ci-dessus est l'ensemble de tous les idéaux à droite (à gauche) minimaux de S.

Lemme 3. *Une bande est rectangulaire si et seulement si elle satisfait l'identité $abc = ac$.*

Démonstration. (1) *Suffisance.* Si une bande S satisfait l'identité ci-dessus, alors en posant simplement $c = a$, on prouve que S est rectangulaire.
(2) *Nécessité.* Supposons que S est une bande rectangulaire, alors $a(bc)a = a$. Par conséquent $abc = ab(cac) = (abca)c = ac$, ce qui prouve l'identité ci-dessus. □

Remarque : nous avons maintenant établi l'équivalence entre deux identités, $aba = a$ et $abc = ac$, sur les semi-groupes idempotents. Ainsi, l'une ou l'autre de ces identités peut définir la rectangularité. De plus, chacune des identités suivantes sur les bandes est équivalente à la rectangularité :

$$ax_1x_2\cdots x_na = a \qquad (n \geq 1), \tag{1}$$
$$ax_1\cdots x_{i-1}ax_i\cdots x_{j-1}ax_j\cdots x_na = a \qquad (1 < i < j < \cdots < n), \tag{2}$$
$$ax_1x_2\cdots x_nb = ab \qquad (n \geq 1), \tag{3}$$
$$ax_1\cdots x_{i-1}c_ix_i\cdots x_{j-1}c_jx_j\cdots x_nb = ab, \tag{4}$$

où c_k est soit a soit b pour chaque k $(1 < i < j < \cdots < n)$,

$$ax_1x_2\cdots x_nb = ax_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_r}b \qquad (1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n, r < n). \tag{5}$$

Ces faits soulèvent le problème de déterminer les conditions pour que des identités soient équivalentes à la rectangularité. Ceci sera discuté au §5 ci-dessous, et nous y trouverons que l'équivalence des identités ci-dessus avec la rectangularité n'est qu'un cas particulier du théorème 6.
Remarque : si nous considérons les deux identités, $aba = a$ et $abc = ac$, pour des semi-groupes généraux, alors elles ne sont pas équivalentes. La première définit une bande rectangulaire, mais la seconde définit une classe de semi-groupes un peu plus large qui contient les bandes rectangulaires.

Cependant, nous avons le lemme 3 suivant.

Un semi-groupe S est appelé *total* si chaque élément de S peut être écrit comme le produit de deux éléments de S, c'est-à-dire $S^2 = S$.

Lemme 4. *Un semi-groupe total est rectangulaire si et seulement s'il satisfait l'identité $abc = ac$.*

Démonstration. (1) *Suffisance.* Soit S total. Supposons l'identité $abc = ac$. Prenons $a \in S$, alors $a = xy$ pour certains éléments x, y. Alors

$$a^2 = (xy)^2 = (xy)(xy) = x(yx)y = xy = a.$$

Ainsi S est une bande. Par conséquent, d'après le lemme 2, S doit être rectangulaire. (2) *Nécessité.* Évidente, car tout semi-groupe rectangulaire satisfait l'identité donnée par le lemme 2. Ceci termine la preuve du lemme 3. □

Soit S un semi-groupe qui satisfait l'identité $abc = ac$. Considérons l'application $f : S \to S$ définie par $f(x) = x^2$. Alors f est un homomorphisme de S dans S, car

$$f(xy) = (xy)^2 = x(yx)y = xy = x(xy)y = x^2y^2 = f(x)f(y).$$

Soit R l'image de S sous f :

$$R = f(S) = \{x^2 : x \in S\}.$$

Alors, de toute évidence, $R^2 \subseteq R \subseteq S^2$. Réciproquement, tout élément de S^2 est idempotent, car $(xy)^2 = x(yx)y = xy$. Par conséquent, nous avons $R^2 = R = S^2$. Maintenant, puisque R est total, R est rectangulaire d'après le lemme 3.

Ainsi, en définissant S_r par $S_r = \{x : x \in S, x^2 = r\}$, S se décompose de la manière suivante :

$$S = \bigcup\{S_r : r \in R\}, \quad \text{où} \quad S_r S_t = \{rt\}.$$

En effet, si $x \in S_r, y \in S_t$, alors $x^2 = r, y^2 = t$ et donc $xy = x^2y^2 = rt$. Nous avons donc ce qui suit :

Théorème 5. *Soit S un semi-groupe satisfaisant l'identité $abc = ac$. Alors il existe un sous-semi-groupe rectangulaire R de S et une partition de S ayant R pour ensemble d'indices, tels que*

$$S = \bigcup\{S_r : r \in R\},$$

où

$$S_r \cap S_t = \emptyset, \text{ l'ensemble vide,} \quad \text{si } r \neq t,$$

$$r \in S_r,$$

et

$$S_r S_t = \{rt\}.$$

Ainsi, la partie "si" du lemme 3 est un cas particulier de ce théorème.

3. La structure des bandes régulières unilatérales

Une bande est dite (1) *régulière à gauche*, (2) *régulière à droite* ou (3) *régulière* si elle satisfait l'identité :

$$aba = ab, \tag{1}$$

$$aba = ba \tag{2}$$

ou

$$abaca = abca, \tag{3}$$

respectivement.

Alors les lemmes suivants sont évidents d'après ces définitions.

Lemme 6. *Une bande régulière à gauche (à droite) est régulière.*

Lemme 7. *Le produit direct de bandes régulières (à gauche, à droite) est aussi régulier (à gauche, à droite).*

Lemme 8. *Tout sous-semi-groupe d'une bande régulière (à gauche, à droite) est aussi régulier (à gauche, à droite).*

Lemme 9. *Une bande singulière à gauche (à droite) est régulière à gauche (à droite).*

Lemme 10. *Une bande rectangulaire est régulière.*

Lemme 11. *Une bande est singulière à gauche (à droite) si et seulement si elle est à la fois régulière à gauche (à droite) et rectangulaire.*

Lemme 12. *Une bande est commutative si et seulement si elle est à la fois régulière à gauche et à droite.*

Pour un semi-groupe total, nous avons ce qui suit.

Lemme 13. *Un semi-groupe total est une bande régulière à gauche (à droite) si et seulement s'il satisfait l'identité $aba = ab$ ($aba = ba$).*

Démonstration. La nécessité est triviale. Il suffit donc de prouver l'idempotence à partir de l'identité ci-dessus.

Soit S un semi-groupe total, c'est-à-dire $S^2 = S$. Alors tout élément $x \in S$ peut être écrit comme le produit de deux éléments de S, disons $x = ab$ pour certains $a, b \in S$. Par conséquent

$$x^2 = (ab)^2 = a(bab) = a(ba) = aba = ab = x.$$

Ainsi nous avons $x^2 = x$, ou S est idempotent. □

Soit S une bande. Alors, d'après le théorème 1, il existe un demi-treillis Γ et une famille disjointe de sous-semi-groupes rectangulaires de S indexée par Γ, $\{S_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$, tels que

(i) $S = \bigcup\{S_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$

(ii) $S_\gamma S_\delta \subseteq S_{\gamma\delta}$ pour $\gamma, \delta \in \Gamma$

(Voir McLean [3, p. 111], voir aussi A. H. Clifford [1, p. 501]).

De plus, Γ est déterminé de manière unique à isomorphisme près, et par conséquent il en va de même pour S_γ.

Nous appelons Γ le *demi-treillis de structure*, et S_γ le *(γ)-noyau*. Un homomorphisme $p : S \to \Gamma$ défini par $p(S_\gamma) = \gamma$ est appelé *naturel*. Aussi, dans ce cas, nous écrivons $S \sim \sum\{S_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$, et nous l'appelons la *décomposition en structure* de S.

Nous avons alors les corollaires suivants au théorème 1.

Corollaire 14. *Chaque noyau S_γ est un sous-semi-groupe rectangulaire maximal de S. De plus, tout sous-semi-groupe rectangulaire de S est contenu dans un et un seul noyau.*

Démonstration. Soit $S \sim \sum\{S_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ la décomposition en structure de S et soit $p : S \to \Gamma$ naturel. Si R est un sous-semi-groupe rectangulaire de S, alors $p(R)$ est aussi un sous-semi-groupe rectangulaire de Γ. Puisque Γ est un demi-treillis, $p(R)$ se réduit à un seul élément, disons $\gamma = p(R)$, et par conséquent $R \subseteq p^{-1}(\gamma) = S_\gamma$. À savoir, R est contenu dans un et un seul S_γ puisque les S_γ sont disjoints. D'autre part, S_γ est rectangulaire pour chaque $\gamma \in \Gamma$. Par conséquent, chaque noyau S_γ est un sous-semi-groupe rectangulaire maximal de S. □

Corollaire 15. *Pour tout homomorphisme (surjectif) $q : S \to \Delta$, où Δ est un demi-treillis, il existe un unique homomorphisme (surjectif) $f : \Gamma \to \Delta$, tel que $q = fp$, où $p : S \to \Gamma$ est naturel.*

Démonstration. Puisque $q(S_\gamma)$ est rectangulaire, il doit être un seul élément dans Δ. Nous avons maintenant une application $f : \Gamma \to \Delta$ définie par $f(\gamma) = q(S_\gamma)$. Il est alors facile de voir que $q = fp$. □

Corollaire 16. *Soit $q : S \to \Delta$ un homomorphisme surjectif, où Δ est un demi-treillis. Si $q^{-1}(\delta)$ est rectangulaire pour tout $\delta \in \Delta$, alors l'application f définie ci-dessus est un isomorphisme. Plus précisément, nous pouvons considérer Δ comme le demi-treillis de structure de S, $q^{-1}(\delta)$ comme le δ-noyau et q comme l'homomorphisme naturel, c'est-à-dire $S \sim \sum\{q^{-1}(\delta) : \delta \in \Delta\}$.*

Démonstration. Puisque $q^{-1}(\delta)$ est rectangulaire, il est contenu dans S_γ pour un certain γ d'après le corollaire 1 ci-dessus. Nous avons maintenant

$$\gamma = p(S_\gamma) \supseteq pq^{-1}(\delta) = p(fp)^{-1}(\delta) = pp^{-1}f^{-1}(\delta) = f^{-1}(\delta).$$

Par conséquent f doit être injectif. □

Théorème 17. *Une bande est régulière à gauche (à droite) si et seulement si ses noyaux sont tous singuliers à gauche (à droite) (Naoki Kimura [2, p. 117]).*

Démonstration. Soit $S \sim \sum\{S_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ la décomposition en structure d'une bande S.

(1) Soit S régulier à gauche. Alors chaque γ-noyau S_γ de S est rectangulaire. Il est aussi régulier à gauche par le lemme 6.

Par conséquent, S_γ doit être singulier à gauche par le lemme 9.

(2) Soit chaque noyau de S singulier à gauche. Soient $a \in S_\alpha, b \in S_\beta$. Alors $ab, ba \in S_{\alpha\beta} = S_{\beta\alpha}$. Ainsi, par la singularité à gauche de $S_{\alpha\beta}$, nous avons $aba = ab^2a = (ab)(ba) = ab$, ce qui prouve que S est régulier à gauche. □

4. La structure des bandes régulières

Soit Γ un demi-treillis. Soient A et B des bandes ayant Γ comme demi-treillis de structure. Soient $A \sim \sum\{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$, $B \sim \sum\{B_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ leurs décompositions en structure.

Formons le produit direct $D = A \times B$. Alors $C_\gamma = A_\gamma \times B_\gamma$ peut être considéré comme un sous-semi-groupe rectangulaire de D. Aussi $C = \bigcup\{C_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ est un sous-semi-groupe de D. De plus, la décomposition en structure de C est $C \sim \sum\{C_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$.

Soient $p : A \to \Gamma$, $q : B \to \Gamma$ les homomorphismes naturels. Alors

$$C = \{(x, y) : x \in A, y \in B, p(x) = q(y)\},$$

et $r : C \to \Gamma$ défini par $r(x, y) = p(x) = q(y)$ est l'homomorphisme naturel. Nous appelons C le *produit en épingle* (spined product) de A et B par rapport à Γ. Notez que ce produit dépend non seulement de A, B et Γ mais aussi des homomorphismes naturels p et q [2, p. 28].

Lemme 18. *Le produit en épingle d'une bande régulière à gauche et d'une bande régulière à droite est régulier.*

Démonstration. Puisque le produit en épingle de A et B est un sous-semi-groupe du produit direct de A et B, nous avons le lemme par les lemmes 4, 5 et 6. □

Nous allons maintenant prouver la réciproque de ce lemme qui joue un rôle essentiel dans le théorème de structure des bandes régulières.

Lemme 19. *Soit $S \sim \sum\{S_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ une bande régulière. Alors il existe une bande régulière à gauche $A \sim \sum\{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ et une bande régulière à droite $B \sim \sum\{B_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$, ayant toutes deux le même demi-treillis de structure Γ, telles que S soit isomorphe au produit en épingle de A et B par rapport à Γ.*

Démonstration. Soit $S \sim \sum\{S_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ une bande régulière. Puisque chaque γ-noyau S_γ est rectangulaire, nous pouvons supposer que $S_\gamma = A_\gamma \times B_\gamma$, où A_γ est singulier à gauche et B_γ est singulier à droite. Soit

$$A = \bigcup\{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\}, \quad B = \bigcup\{B_\gamma : \gamma \in \Gamma\}, \quad T = A \times B.$$

Alors S peut être identifié comme un sous-ensemble de T. Nous allons prouver que A et B peuvent être considérés comme des semi-groupes idempotents. Soit

$$a \in A_\alpha, c \in A_\beta, b, b' \in B_\alpha, d, d' \in B_\beta.$$

Alors $(a,b),(a,b') \in S_\alpha$, $(c,d),(c,d') \in S_\beta$. Posons $(e,f) = (a,b)(c,d)$, $(e',f') = (a,b')(c,d')$. Alors (e,f) et (e',f') appartiennent tous deux à $S_{\alpha\beta}$.

Puisque $A_{\alpha\beta}$ est singulier à gauche et $B_{\alpha\beta}$ est singulier à droite, nous avons

$$(e,f)(e',f') = (e,f').$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned}
(e,f)(e',f') &= (a,b)(c,d)(a,b')(c,d') \\
&= (a,b'b)(c,d'd)(a,bb')(c,d) \quad \text{(par singularité à droite de } B_\alpha \text{ et } B_\beta) \\
&= (a,b')(a,b)(c,d')(c,d)(a,b)(a,b')(c,d') \\
&= (a,b')(a,b)(a,b')(c,d')(a,b)(c,d)(a,b)(a,b')(c,d') \\
&\qquad\qquad \text{(par usage répété de la régularité)} \\
&= (a,b'bb')(e,d')(a,b)(c,d)(a,bb')(c,d') \\
&= (a,b')(c,d')(a,b)(c,d)(a,b')(c,d') \\
&= (e',f')(e,f)(e',f') \qquad \text{(par définition)} \\
&= (e',f'). \qquad \text{(par rectangularité de } S_{\alpha\beta})
\end{aligned}$$

Donc

$$(e,f') = (e',f') \quad \text{ou} \quad e = e'.$$

Ainsi e est déterminé par a et c seulement, et ne dépend pas de b ou d. De même, f est aussi déterminé par b et d seulement.

Nous pouvons maintenant définir $m : A \times A \to A$, $n : B \times B \to B$ par

$$(m(a,c), n(b,d)) = (a,b)(c,d) = (e,f).$$

Ainsi A et B deviennent des systèmes multiplicatifs où m et n sont des multiplications sur eux, et A_γ et B_γ sont des sous-systèmes qui sont respectivement une bande singulière à gauche et une bande singulière à droite. Aussi $T = A \times B$ est un système multiplicatif.

Considérons les projections $p : T \to A$ définie par $p(a, b) = a$ et $q : T \to B$ définie par $q(a, b) = b$. Ce sont des homomorphismes. Par conséquent, les applications p et q avec leur domaine restreint à $S \subset T$ sont aussi des homomorphismes, et leurs images sont $A = p(S)$ et $B = q(S)$. Puisque les homomorphismes préservent toute relation définie par des identités, il en résulte que l'associativité et l'idempotence sont valables à la fois dans A et B, car S est une bande. Ainsi A et B sont toutes deux des bandes.

Puisque A_γ est singulier à gauche et B_γ est singulier à droite, ils sont rectangulaires, et puisque Γ est un demi-treillis,

$$A \sim \sum\{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\}, \quad B \sim \sum\{B_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$$

deviennent les décompositions en structure de A et B, d'après le corollaire 3 du théorème 1.

Ainsi, il existe une bande régulière à gauche A et une bande régulière à droite B telles que S soit le produit en épingle de A et B par rapport à Γ.

Les lemmes 12 et 13 prouvent ce qui suit : □

Théorème 20. *Une bande est régulière si et seulement si elle est le produit en épingle d'une bande régulière à gauche et d'une bande régulière à droite.* [1]

Corollaire 21. *Toute bande régulière est plongée dans le produit direct d'une bande régulière à gauche et d'une bande régulière à droite.*

Démonstration. Immédiatement à partir du théorème 4. □

Corollaire 22. *Soit S le produit en épingle de A et B par rapport à Γ et soit T le produit en épingle de C et D par rapport à Δ, où $A \sim \sum\{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ et $C \sim \sum\{C_\delta : \delta \in \Delta\}$ sont régulières à gauche, et $B \sim \sum\{B_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ et $D \sim \sum\{D_\delta : \delta \in \Delta\}$ sont régulières à droite.*

Soit $k : S \to T$ un homomorphisme, alors il existe un homomorphisme $h : \Gamma \to \Delta$ et des homomorphismes $f : A \to C$ et $g : B \to D$ satisfaisant (1) $k(a, b) = (f(a), g(b))$ et (2) $hp = rf$ et $hq = sg$, c'est-à-dire que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{p} & \Gamma \\ \xleftarrow{q} & B & \\ \downarrow f & & \downarrow h \\ & \downarrow g & \\ C & \xrightarrow{r} & \Delta \\ \xleftarrow{s} & D & \end{array}$$

est commutatif, où p, q, r et s sont les homomorphismes naturels.

1. Miyuki Yamada a également obtenu ce théorème, selon une récente communication qui m'a été faite par lui.

Démonstration. Soient $u : S \to \Gamma, v : T \to \Delta$ les homomorphismes naturels. Alors, puisque $vk : S \to \Delta$ est un homomorphisme, par le corollaire 2 du théorème 1, il existe un unique homomorphisme $h : \Gamma \to \Delta$ tel que $vk = hu$.

Par conséquent $v(k(S_\gamma)) = hu(S_\gamma) = h(\gamma)$, et donc $k(S_\gamma) \subseteq v^{-1}(\delta) = T_\delta$, où $\delta = h(\gamma)$. Maintenant, l'homomorphisme $k_\gamma : S_\gamma \to T_\delta$ définit uniquement des homomorphismes $f_\gamma : A_\gamma \to C_\delta$ et $g_\gamma : B_\gamma \to D_\delta$ tels que $k_\gamma(a, b) = (f_\gamma(a), g_\gamma(b))$, où k_γ est l'homomorphisme k avec son domaine restreint à S_γ.

Puisque A et B sont l'union des A_γ et B_γ pour $\gamma \in \Gamma$, f_γ et g_γ déterminent uniquement des applications $f : A \to C$ et $g : B \to D$, telles que

$$f(a) = f_\gamma(a) \quad \text{si } a \in A_\gamma,$$

et

$$g(b) = g_\gamma(b) \quad \text{si } b \in B_\gamma.$$

Il est alors évident que $k(a, b) = (f(a), g(b))$. Par conséquent, si $(a, b) \in S$, $(a', b') \in S$, alors nous avons

$$\begin{aligned}(f(aa'), g(bb')) &= k(aa', bb') = k((a, b)(a', b')) = k(a, b)k(a', b') \\ &= (f(a), g(b))(f(a'), g(b')) = (f(a)f(a'), g(b)g(b')),\end{aligned}$$

ce qui prouve que f et g sont des homomorphismes.

Puisque $(a, b) \in S_\gamma$ implique $(f(a), g(b)) = k(a, b) \in T_\delta$, où $\delta = h(\gamma)$, nous avons $rf(a) = \delta = h(\gamma) = hp(a)$, à savoir, $rf = hp$. De même, $sg = hq$. □

Corollaire 23. *Dans le corollaire 2, k est (1) injectif, (2) surjectif ou (3) bijectif, respectivement, si et seulement s'il existe h, f et g, tous étant (1) injectifs, (2) surjectifs ou (3) bijectifs, satisfaisant toutes les conditions du corollaire 2.*

Démonstration. Suffisance. Elle se prouve facilement en considérant l'application k définie par $k(a, b) = (f(a), g(b))$, dans chaque cas.

Nécessité. (1) Soit k injectif. Alors $k^{-1}(T_\delta)$ est rectangulaire s'il n'est pas vide, et donc il est contenu dans un seul S_γ par le corollaire 1 du théorème 1. Par conséquent, h est injectif. Il est maintenant facile de voir que f et g sont injectifs.

(2) Soit k surjectif. Alors

$$h(\Gamma) = h(u(S)) = vk(S) = v(T) = \Delta,$$

ce qui montre que h est surjectif. Il est maintenant évident que f et g sont surjectifs.

(3) Évident d'après (1) et (2).

Le cas (3) de ce corollaire peut être reformulé comme suit. □

Corollaire 24. *La décomposition d'une bande régulière en le produit en épingle d'une bande régulière à gauche et d'une bande régulière à droite est unique à isomorphisme près.*

5. Caractérisations par les identités

Soit $X = \{x, y, \cdots\}$ un ensemble dont les éléments seront appelés *variables*. Un *mot* est un élément du semi-groupe libre $F = F(X)$. Une paire de mots (P, Q) est appelée une *identité* et s'écrit $P = Q$.

Soit S une bande. On dit alors que S satisfait une identité $P = Q$ si $f(P) = f(Q)$ pour tout homomorphisme $f : F \to S$.

Une identité $P = Q$ est dite *impliquer* une identité $P' = Q'$ si toute bande satisfaisant $P = Q$ satisfait aussi $P' = Q'$. Ainsi, toute identité implique l'identité $x^2 = x$, c'est-à-dire l'idempotence. Si $P = Q$ implique $P' = Q'$ et $P' = Q'$ implique $P = Q$, alors les identités sont *équivalentes*.

Soit X' aussi un ensemble de variables. Soit $t_0 : X \to X'$ une transformation quelconque, alors elle induit un homomorphisme $t : F(X) \to F(X')$ qui coïncide avec t_0 sur X.

Il est facile de voir que $P = Q$ implique $t(P) = t(Q)$.

Lemme 25. *$P = Q$ implique $t(P) = t(Q)$ pour toute transformation de variables t_0.*

Les lemmes suivants sont également simples.

Lemme 26. *Si $P = Q$ implique $P = P'$ et $Q = Q'$, alors $P = Q$ implique $P' = Q'$.*

Lemme 27. *Si $P = Q$ implique $P' = Q'$, alors $P = Q$ implique à la fois $PP' = QQ'$ et $P'P = Q'Q$.*

Remarque : nous pouvons prendre le semi-groupe idempotent libre engendré par X au lieu du semi-groupe libre engendré par X. Cela ne fait aucune différence essentielle dans l'argument.

Une identité $P = Q$ est dite *homotypique* si P et Q contiennent explicitement les mêmes variables, sinon elle est dite *hétérotypique*. Ainsi, une identité $xy = x$ est hétérotypique, mais une identité $xy = yx$ est homotypique.

Si P est un mot $x_1x_2\cdots x_n$, alors nous appelons x_1 la *tête* de P et x_n la *queue* de P.

Théorème 28. *Une identité $P = Q$ est équivalente à la singularité à gauche (à droite) si et seulement si*[2]
(1) $P = Q$ est hétérotypique,
(2) P et Q ont les mêmes têtes (différentes),
(3) P et Q ont des queues différentes (les mêmes).

Démonstration. Suffisance. Soit $P = Q$ satisfaisant (1), (2) et (3) ci-dessus. Alors les mots P et Q sont exprimés par $x\cdots x_1$ et $x\cdots x_2$, respectivement, où x_1 est différent de x_2, et soit x_1 soit x_2, mais pas les deux, peut être le même que x. Par l'hypothèse (1), soit P soit Q contient une variable y, que l'autre ne contient pas. Supposons que P contient y.

Une transformation $X \to X$ définie par $y \to y$, toutes les autres variables $\to x$ envoie les mots P, Q vers P', Q' où P' est $x\cdots y\cdots x$ ou $x\cdots y$ ($\cdots$ représente des x, des y ou rien) et Q' est x^n pour un

2. La partie "seulement si" sera prouvée juste après la preuve du lemme 17.

certain entier positif n. Maintenant, toute bande satisfait les identités $P' = xyx$ ou $P' = xy$, selon que P' est $x \cdots y \cdots x$ ou $x \cdots y$, et $Q' = x$. Ainsi, en utilisant les lemmes 14 et 15, nous avons que $P = Q$ implique soit (i) $xyx = x$ soit (ii) $xy = x$.

Puisque (i) est la rectangularité, et que la rectangularité implique à la fois $P = xx_1$ et $Q = xx_2$ par le lemme 2, l'identité $P = Q$ implique $xx_1 = xx_2$ par le lemme 15. Il est maintenant facile de voir que l'identité $xx_1 = xx_2$ implique la singularité à gauche, par une transformation appropriée. (ii) montre elle-même la singularité à gauche.

Ainsi $P = Q$ implique la singularité à gauche.

Réciproquement, l'identité $xy = x$ implique toute identité de la forme

$$x \cdots y = x \cdots x \quad \text{ou} \quad x \cdots y = x \cdots z,$$

où x, y, z sont tous différents et $\cdots$ représentent une séquence quelconque de variables. Ainsi $xy = x$ implique toute identité satisfaisant les conditions du théorème. □

Théorème 29. *Une identité $P = Q$ est équivalente à la rectangularité si et seulement si*[2]
(1) $P = Q$ est hétérotypique,
(2) P et Q ont les mêmes têtes,
(3) P et Q ont les mêmes queues.

Démonstration. Soit $P = Q$ une identité satisfaisant (1), (2) et (3) ci-dessus. Alors nous pouvons supposer que le mot P est $x \cdots y \cdots z$ et Q est $x \cdots z$, où Q ne contient pas la variable y, tandis que z peut être le même que x. Maintenant, la transformation $y \to y$, toutes les autres variables $\to x$, implique l'identité $xyx = x$, qui est équivalente à la rectangularité.

Réciproquement, la rectangularité $xyx = x$ implique toute identité de la forme $x \cdots z = x \cdots z$ par le lemme 2. Ainsi elle implique toute identité satisfaisant les conditions ci-dessus. □

Remarque : il est facile de vérifier que toutes les identités mentionnées dans la Remarque 2 satisfont les trois conditions ci-dessus.

Théorème 30. *Une identité $P = Q$ est équivalente à la trivialité, c'est-à-dire $x = y$, si et seulement si*[2]
(1) $P = Q$ est hétérotypique,
(2) P et Q ont des têtes différentes,
(3) P et Q ont des queues différentes.

Démonstration. Soit $P = Q$ une identité satisfaisant la condition ci-dessus. Alors elle implique à la fois les identités $zP = zQ$ et $Pz = Qz$, où z est une variable qui n'est contenue ni dans P ni dans Q, par le lemme 16. La première est équivalente à la singularité à gauche, tandis que la seconde est équivalente à la singularité à droite par le théorème 5. Ainsi $P = Q$ implique à la fois la singularité à gauche et à droite. Par conséquent, elle implique la trivialité.

Réciproquement, la trivialité implique toute identité. □

Lemme 31. *Tout demi-treillis satisfait toute identité homotypique.*

Démonstration. Soit $P = Q$ une identité homotypique quelconque dont les variables sont $x_1, \cdots, x_n$. Soit S un demi-treillis quelconque. Il est alors clair que S satisfait les deux identités, $P = x_1 x_2 \cdots x_n$ et $x_1 x_2 \cdots x_n = Q$. Ainsi S satisfait l'identité $P = Q$. □

Preuve de la nécessité dans les théorèmes 5, 6 et 7.

Soit $P = Q$ une identité qui est équivalente à la trivialité, à la singularité à gauche (à droite) ou à la rectangularité. Soit S le demi-treillis à deux éléments. Si $P = Q$ est homotypique, alors S satisfait cette identité par le lemme précédent. Mais S n'est ni rectangulaire, ni singulier à gauche (à droite), ni trivial. Donc cette identité ne peut pas être homotypique. Elle doit donc être hétérotypique. Cela prend en charge la partie (1) des théorèmes.

Soit A (B) la bande singulière à gauche (à droite) à deux éléments. Alors A (B) n'est ni singulière à droite (à gauche), ni triviale. Aussi A (B) satisfait toute identité $P = Q$ si les têtes (queues) de P et Q sont les mêmes.

(i) Supposons que $P = Q$ soit équivalente à la trivialité. Alors les têtes (queues) de P et Q doivent être différentes. Sinon, A (B), qui n'est pas triviale, satisferait cette identité. Ceci prouve la nécessité de (2) et (3) dans le théorème 7.

(ii) Supposons que $P = Q$ soit équivalente à la singularité à gauche (à droite). Alors les queues (têtes) de P et Q doivent être différentes. Sinon, B (A), qui n'est pas singulière à gauche (à droite), satisferait cette identité. Ceci prend en charge (3) du théorème 5.

Maintenant, les têtes (queues) de P et Q doivent être les mêmes. Sinon, cette identité est équivalente à la trivialité par le théorème 7, ce qui a déjà été complètement prouvé. Mais il existe une bande singulière à gauche (à droite) qui n'est pas triviale, par exemple A (B).

Ceci prend en charge (2) du théorème 5.

(iii) Supposons que $P = Q$ soit équivalente à la rectangularité.

Alors les têtes de P et Q sont les mêmes, et il en va de même pour leurs queues. Sinon, l'identité est équivalente à la trivialité, à la singularité à gauche ou à la singularité à droite par l'argument précédent. De plus, il existe une bande qui est rectangulaire mais ni singulière à gauche, ni singulière à droite, ni triviale, par exemple $A \times B$. Ceci termine la preuve de (2) et (3) du théorème 6.

Ainsi, la classification de toutes les identités hétérotypiques en quatre cas distincts est maintenant terminée.

Théorème 32. *Une identité $P = Q$ est équivalente à la commutativité si elle satisfait les conditions suivantes : (1) $P = Q$ est homotypique, (2) P et Q ont des têtes différentes, (3) P et Q ont des queues différentes.*

Démonstration. Soit $P = Q$ une identité satisfaisant les conditions (1), (2) et (3) ci-dessus. Nous pouvons alors supposer que le mot P est $x \cdots$ et Q est $y \cdots$, avec $x \neq y$. Ainsi $P = Q$ implique

$Pxy = Qxy$. Maintenant, la transformation : $y \to y$, toutes les autres variables $\to x$ sur cette dernière identité implique l'identité $xy = yxy$, qui est équivalente à la régularité à droite. De même, $P = Q$ implique la régularité à gauche. Ainsi, par le lemme 10, l'identité $P = Q$ implique la commutativité.

Réciproquement, la commutativité implique toute identité homotypique. □

Avant d'énoncer les conditions pour qu'une identité soit équivalente à la régularité à gauche ou à droite, nous allons introduire le concept de parties initiale et finale, par lequel nous pouvons réduire les deux membres d'une identité à des formes plus simples.

Si le mot P', disons $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}$, est le mot obtenu en écrivant toutes les variables distinctes du mot P, disons $x_1x_2\cdots x_n$, de gauche à droite, nous appelons P' la *partie initiale* de P et nous la notons $q(P)$. De même, nous pouvons définir la *partie finale* de P, $r(P)$, de manière duale par rapport à la gauche et à la droite. Ainsi, si le mot P est $xyxzx$, alors la partie initiale et la partie finale de P sont respectivement xyz et yzx, c'est-à-dire que $q(P)$ est xyz et $r(P)$ est yzx.

Lorsque P et Q ont les mêmes parties initiales (finales), nous disons que l'identité $P = Q$ est *coinitialitale* (*cofinale*). Notez que si une identité est coinitiale ou cofinale, alors elle doit être homotypique.

Théorème 33. *Une identité $P = Q$ est équivalente à la régularité à gauche (à droite), si elle satisfait les deux conditions suivantes :*
(1) $P = Q$ est coinitiale (cofinale),
(2) P et Q ont des queues (têtes) différentes.

Démonstration. Soit $P = Q$ satisfaisant les deux conditions ci-dessus. Alors, d'après (1), P et Q doivent avoir la même tête, disons x. D'après (2), l'un de P ou Q a une queue différente de x, disons que P est $x\cdots y$, où $y \neq x$.

Soit t_0 la transformation définie par $y \to y$, toutes les autres variables $\to x$. Alors nous avons deux identités $t_0(P) = xy$ et $t_0(Q) = xyx$. Nous avons donc la régularité à gauche, $xy = xyx$.

Réciproquement, il est évident que la régularité à gauche implique $P = P'$ pour tout mot P, où P' est la partie initiale de P. Ainsi la régularité à gauche implique toute identité coinitiale. Par conséquent, elle implique toute identité satisfaisant les conditions ci-dessus.

Le problème de trouver les conditions caractéristiques pour qu'une identité sur les bandes soit équivalente à la régularité reste ouvert. □

6. Bandes régulières libres

Par la *bande régulière (à gauche, à droite) libre* engendrée par un ensemble non vide X, nous entendons une bande S telle que
(1) il existe une application $i : X \to S$, qui est appelée l'application de plongement,
(2) $i(X)$ engendre S,

(3) S est régulière (à gauche, à droite),
(4) pour toute bande régulière (à gauche, à droite) T et toute application $j : X \to T$, il existe un homomorphisme $h : S \to T$ tel que $j = hi$.
Remarque : dans cette définition, l'application de plongement n'est pas supposée être injective, mais cette propriété est facilement prouvée dans ce cas. Il est également facile de voir que s'il existe deux telles bandes régulières libres pour un ensemble donné X, alors elles sont isomorphes en fixant chaque point de X point par point sous les applications de plongement. Donc, s'il existe une bande régulière (à gauche, à droite) libre, elle est unique à isomorphisme près. L'homomorphisme h dans (4) est aussi unique.

La bande commutative libre, c'est-à-dire le demi-treillis libre engendré par X, est définie de manière similaire.

Dans cette section, nous allons construire la bande régulière (à gauche, à droite) libre à partir d'un ensemble donné X.

Soit X un ensemble non vide. Soit S l'ensemble de tous les sous-ensembles non vides de X constitués d'un nombre fini de points. Nous avons alors ce qui suit :

Lemme 34. *L'ensemble S défini ci-dessus est le demi-treillis libre engendré par X sous la multiplication définie par $yz = y \cup z$, où $\cup$ désigne l'opération d'union.*

Démonstration. Il est évident que S forme un demi-treillis engendré par $\{\{x\} : x \in X\}$. Soit $i : X \to S$ défini par $i(x) = \{x\}$. Soit T un demi-treillis et $j : X \to T$ une application quelconque. Alors l'application $h : S \to T$ définie par $h(y) = j(x_1)j(x_2)\cdots j(x_n)$ où $y = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, est un homomorphisme par commutativité et par idempotence, satisfaisant $j(x) = h(\{x\}) = h(i(x))$, c'est-à-dire $j = hi$. Ainsi S est le demi-treillis libre engendré par X. □

Soit X un ensemble non vide. Soit $F = F(X)$ un semi-groupe libre engendré par X. Alors F est l'ensemble de toutes les séquences finies de points de X avec la multiplication par juxtaposition. Nous plongeons X dans F de manière naturelle sous $k : X \to F$.

Considérons les deux applications, la partie initiale $q : F \to F$ et la partie finale $r : F \to F$, définies dans la section précédente. Soient $A_0 = q(F) \subset F$, $B_0 = r(F) \subset F$ les images de F sous q, r. Notez que non seulement q et r ne sont pas des homomorphismes, mais aussi que A_0 et B_0 ne peuvent jamais être des sous-semi-groupes de F. Pour les faire former des bandes, nous définissons d'autres multiplications dans A_0 et dans B_0 comme suit :

$$m(a, a') = q(aa'), \text{ pour } a, a' \in A_0,$$

$$n(b, b') = r(bb'), \text{ pour } b, b' \in B_0.$$

Soient $a, a', a'' \in A_0$. Alors

$$m(m(a, a'), a'') = m(q(aa'), a'') = q(q(aa')a'') = q(aa'a'').$$

De même, $m(a, m(a', a'')) = q(aa'a'')$. Par conséquent, m est une multiplication associative sur A_0.

De plus, $m(a,a) = q(aa) = q(a) = a$ et

$$m(m(a,a'),a) = q(aa'a) = q(aa') = m(a,a').$$

Par conséquent, A_0 forme une bande régulière à gauche sous la multiplication m. De même, B_0 est une bande régulière à droite sous la multiplication n. Nous désignerons ces bandes par A et B au lieu de A_0 et B_0, en raison de la différence des multiplications.

Il est maintenant simple de voir que $q : F \to A$ et $r : F \to B$ sont toutes deux des homomorphismes surjectifs. Puisque F est engendré par $k(X)$, A et B sont engendrés par $i(X)$ et $j(X)$, respectivement, où $i = qk$ et $j = rk$.

Soit A' une bande régulière à gauche quelconque et $i' : X \to A'$ une application quelconque. Puisque F est le semi-groupe libre engendré par X, il existe un homomorphisme $f : F \to A'$ tel que $i' = fk$. Pour tout $w \in F$, nous avons $f(w) = f(q(w))$, car A' est régulière à gauche. Il existe donc un homomorphisme $h : A \to A'$ tel que $f = hq$. Par conséquent

$$i' = fk = (hq)k = h(qk) = hi.$$

Ainsi A est la bande régulière à gauche libre engendrée par X. De même, B est la bande régulière à droite libre engendrée par X.

Considérons le demi-treillis libre Γ engendré par X avec son plongement $c : X \to \Gamma$ (lemme 18). Alors, puisque Γ est à la fois régulier à gauche et à droite, il existe des homomorphismes $s : A \to \Gamma$ et $t : B \to \Gamma$ tels que $si = c = tj$. Il est évident que

$$s(a) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}, \text{ si } a = i(x_1)i(x_2)\cdots i(x_n).$$

Soient $A_\gamma = s^{-1}(\gamma)$ et $B_\gamma = t^{-1}(\gamma)$ pour $\gamma \in \Gamma$. Il est alors facile de voir que A_γ (B_γ) est singulier à gauche (à droite). Ainsi, par le corollaire 3 du théorème 1, $A \sim \sum\{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ et $B \sim \sum\{B_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ sont les décompositions en structure de A et B. Nous avons donc ce qui suit :

Théorème 35. *Soit X un ensemble non vide. Soit Γ le demi-treillis libre obtenu dans le lemme 18. Soit A (B) l'ensemble de tous les sous-ensembles finis non vides linéairement ordonnés de X avec la multiplication définie par la juxtaposition en supprimant toutes les deuxièmes lettres qui apparaissent dans l'expression du produit de juxtaposition lu de gauche à droite. Soient $s : A \to \Gamma$ ($t : B \to \Gamma$) l'application définie par $s(a)$ ($t(b)$) = l'ensemble de tous les points distincts contenus dans a (b). Soient $A_\gamma = s^{-1}(\gamma)$ et $B_\gamma = t^{-1}(\gamma)$ pour $\gamma \in \Gamma$. Alors A (B) est la bande régulière à gauche (à droite) libre engendrée par X et $A \sim \sum\{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ ($B \sim \sum\{B_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$) est sa décomposition en structure.*

Corollaire 36. *La bande régulière à gauche (à droite) libre engendrée par n éléments est constituée de $\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} i! = n! \sum_{i=0}^{n-1} 1/i!$ éléments.*

Démonstration. Chaque A_γ est constitué de $i!$ éléments lorsque γ contient i éléments, puisque A_γ est constitué de toutes les permutations des points de γ. □

Soient A (B) et Γ la bande régulière (à gauche, à droite) libre et le demi-treillis libre engendrés par X avec les applications de plongement $i : X \to A$ ($j : X \to B$) et $c : X \to \Gamma$, respectivement. Puisque Γ est à la fois régulier à gauche et à droite, il existe des homomorphismes $s : A \to \Gamma$ et $t : B \to \Gamma$ tels que $si = c = tj$.

Soit C le produit en épingle de A et B par rapport à Γ avec s et t comme homomorphismes d'épingle. Alors C est le sous-ensemble de $A \times B$ constitué des éléments (a, b) tels que $s(a) = t(b)$. Maintenant, puisque $s(i(x)) = (si)(x) = c(x) = (tj)(x) = t(j(x))$, l'élément $(i(x), j(x))$ est dans C. Définissons $k : X \to C$ par $k(x) = (i(x), j(x))$.

Nous allons maintenant prouver que $k(X)$ engendre C.

Prenons un élément quelconque $(a, b) \in C$. Alors $s(a) = t(b) \in \Gamma$. Puisque A et B sont engendrés par X, nous avons

$$a = i(x_1)i(x_2)\cdots i(x_m), \quad b = j(y_1)j(y_2)\cdots j(y_n).$$

Ainsi

$$c(x_1)c(x_2)\cdots c(x_m) = s(a) = t(b) = c(y_1)c(y_2)\cdots c(y_n).$$

Par conséquent, le sous-ensemble constitué des points $x_1, x_2, \cdots, x_m$ coïncide avec celui constitué des points $y_1, y_2, \cdots, y_n$.

Puisque A est régulier à gauche, nous avons

$$i(x_1)i(x_2)\cdots i(x_m)i(y_1)i(y_2)\cdots i(y_n) = i(x_1)i(x_2)\cdots i(x_m) = a.$$

De même,

$$j(x_1)j(x_2)\cdots j(x_m)j(y_1)j(y_2)\cdots j(y_n) = j(y_1)j(y_2)\cdots j(y_n) = b.$$

Ainsi nous avons $(a, b) = k(x_1)k(x_2)\cdots k(x_m)k(y_1)k(y_2)\cdots k(y_n)$, ce qui prouve que $k(X)$ engendre C.

Ensuite, nous allons prouver que C est la bande régulière libre engendrée par X.

Soit C' une bande régulière quelconque et $k' : X \to C'$ une application quelconque. Puisque C' est régulière, elle est le produit en épingle d'une bande régulière à gauche A' et d'une bande régulière à droite B' par rapport à un demi-treillis Γ', où $s' : A' \to \Gamma'$ et $t' : B' \to \Gamma'$ sont les homomorphismes d'épingle. Maintenant, la liberté de A, B et Γ implique l'existence d'homomorphismes $f : A \to A'$, $g : B \to B'$ et $h : \Gamma \to \Gamma'$ tels que

$$fi = u'k', \quad gj = v'k', \quad hc = d'k', \tag{1}$$

où $u' : C' \to A'$, $v' : C' \to B'$ sont naturels et $d' : C' \to \Gamma'$ sont tels que

$$s'u' = d' = t'v'. \tag{2}$$

Soient $u : C \to A$, $v : C \to B$ naturels et $d : C \to \Gamma$ tels que $su = d = tv$. Prenons $(a, b) \in C$. Alors $s(a) = t(b)$ par définition. Puisque C est engendré par $k(X)$, il existe $x_1, x_2, \cdots, x_n \in X$ tels que

$$a = i(x_1)i(x_2)\cdots i(x_n), \quad b = j(x_1)j(x_2)\cdots j(x_n).$$

Posons $a' = f(a)$ et $b' = g(b)$. Alors par (1) et (2) nous avons

$$s'(a') = s'f(a) = \prod_{v=1}^{n} s'fi(x_v) = \prod_{v=1}^{n} s'u'k'(x_v) = \prod_{v=1}^{n} d'k'(x_v),$$
$$t'(b') = t'g(b) = \prod_{v=1}^{n} t'gj(x_v) = \prod_{v=1}^{n} t'v'k'(x_v) = \prod_{v=1}^{n} d'k'(x_v).$$

Ainsi $s'(a') = t'(b')$. Par conséquent $(a', b') \in C'$, c'est-à-dire que $(f(a), g(b)) \in C'$. Il existe donc une application $p : C \to C'$ définie par $p(a, b) = (f(a), g(b))$.

Il est maintenant facile de voir que p est un homomorphisme. De plus, pour $x \in X$, nous avons par (1)

$$k'(x) = (u'k'(x), v'k'(x)) = (fi(x), gj(x)) = pk(x),$$

car $k(x) = (i(x), j(x))$, et par conséquent $k' = pk$. Ceci termine la preuve que C est la bande régulière libre engendrée par X. Nous avons donc ce qui suit :

Théorème 37. *Soit X un ensemble non vide. Soient A, B et Γ la bande régulière à gauche libre, la bande régulière à droite libre et la bande commutative libre engendrées par X, respectivement, de sorte que Γ soit considéré comme le demi-treillis de structure de A et B. Alors la bande régulière libre engendrée par X est le produit en épingle de A et B par rapport à Γ.*

Corollaire 38. *La bande régulière engendrée par n éléments distincts est constituée de*

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (i!)^2 = n! \sum_{i=1}^{n} \frac{i!}{(n-i)!}$$

éléments.

Démonstration. Chaque $A_\gamma \times B_\gamma$ est constitué de $(i!)^2$ éléments lorsque γ contient i éléments. □

Références

1. A. H. Clifford, *Bands of semigroups*, Proc. Amer. Math. Soc. **5** (1954), 499–504.
2. Naoki Kimura, *On semigroups*, Dissertation, Tulane University (1957), 1–133.
3. David McLean, *Idempotent semigroups*, Amer. Math. Monthly **61** (1954), 110–113.

Tulane University and Tokyo Institute of Technology