Zéros des fonctions zêta et symétrie

Nicholas M. Katz et Peter Sarnak

Résumé

Hilbert et Pólya ont suggéré qu'il pourrait exister une interprétation spectrale naturelle des zéros de la fonction zêta de Riemann. Si à l'époque il y avait peu d'éléments en faveur de cette idée, aujourd'hui les preuves sont tout à fait convaincantes. Premièrement, il y a les analogues en "corps de fonctions", c'est-à-dire les fonctions zêta des courbes sur les corps finis et leurs généralisations. Pour celles-ci, une interprétation spectrale de leurs zéros existe en termes de valeurs propres de Frobenius sur la cohomologie. Deuxièmement, les développements, tant théoriques que numériques, sur les distributions locales des espacements entre les grands zéros de la fonction zêta et de ses généralisations fournissent des preuves frappantes d'une telle connexion spectrale. De plus, les zéros de petite hauteur de diverses familles de fonctions zêta suivent les lois de distribution des valeurs propres des membres des groupes classiques. Dans cet article, nous passons en revue ces développements. Afin de présenter le contenu de manière fluide, nous ne suivons pas l'ordre chronologique des découvertes. De plus, en nous concentrant entièrement sur le sujet du titre, nous ignorons le corpus standard des travaux importants qui ont été réalisés sur la fonction zêta et les L-fonctions.

1. La loi de Montgomery-Odlyzko

Nous commençons par la fonction zêta de Riemann et quelques phénoménologies qui lui sont associées.

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \prod_{p} (1 - p^{-s})^{-1}, \tag{1}$$

le produit portant sur les nombres premiers, et elle converge pour $\mathrm{Re}(s) > 1$. Comme l'a montré Riemann [RI], $\zeta(s)$ admet un prolongement au plan complexe et satisfait une équation fonctionnelle

$$\xi(s) := \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \xi(1 - s); \tag{2}$$

$\xi(s)$ est entière, à l'exception de pôles simples en $s = 0$ et 1. Nous écrivons les zéros de $\xi(s)$ sous la forme

$$\frac{1}{2} + i\gamma. \tag{3}$$

D'après (1), il est clair que $|\mathrm{Im}(\gamma)| \leq 1/2$. Hadamard et de la Vallée Poussin, dans leurs preuves (indépendantes) du théorème des nombres premiers, ont établi que $|\mathrm{Im}(\gamma)| < 1/2$. La célèbre hypothèse de Riemann, "RH", affirme que $\gamma \in \mathbb{R}$. Dans ce qui suit, nous nous intéressons à des questions plus fines concernant la distribution des zéros. Supposons RH (inutile de préciser que, dans les expériences numériques rapportées ci-dessous, tous les zéros trouvés étaient sur la droite $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$) et ordonnons les ordonnées γ :

Bulletin (nouvelle série) de la Société américaine mathématique, volume 36, n° 1, janvier 1999, pages 1-26.
Révision de la traduction par des ia : Denise Vella-Chemla, octobre 2026.

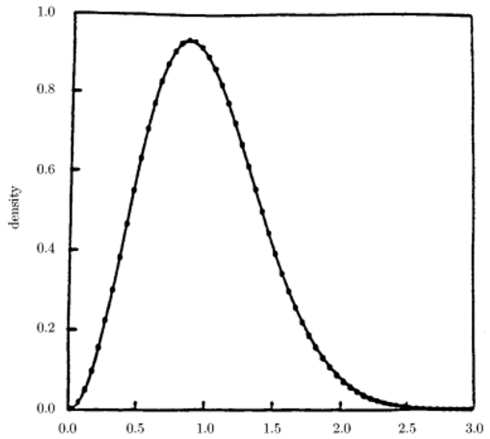


FIGURE 1 : Espacements entre plus proches voisins parmi 70 millions de zéros au-delà du 10^{20}-ième zéro de zêta, comparés à μ_1(GUE).

$$\cdots \gamma_{-1} \leq 0 \leq \gamma_1 \leq \gamma_2 \cdots \tag{4}$$

Alors $\gamma_j = -\gamma_{-j}, j = 1, 2, \ldots$, et en fait γ_1 est plutôt grand, étant égal à $14.1347\ldots$. Il est connu (et c'était apparemment déjà connu de Riemann) que

$$\#\{j : 0 \leq \gamma_j \leq T\} \sim \frac{T \log T}{2\pi}, \text{ lorsque } T \to \infty. \tag{5}$$

En particulier, l'espacement moyen entre les γ_j tend vers zéro lorsque $j \to \infty$. Afin d'examiner la loi (statistique) des espacements locaux entre ces nombres, nous renormalisons (ou "déplions", comme on dit parfois) de la façon suivante : Posons

$$\widehat{\gamma}_j = \frac{\gamma_j \log \gamma_j}{2\pi} \quad \text{pour } j \geq 1. \tag{6}$$

Les espacements consécutifs δ_j sont définis par

$$\delta_j = \widehat{\gamma}_{j+1} - \widehat{\gamma}_j, j = 1, 2, \ldots. \tag{7}$$

Plus généralement, les k-ièmes espacements consécutifs sont

$$\delta_j^{(k)} = \widehat{\gamma}_{j+k} - \widehat{\gamma}_j, j = 1, 2, \ldots. \tag{8}$$

À quelles lois (c'est-à-dire quelles distributions), s'il en existe, ces nombres obéissent-ils ?

Depuis le cours des années 1980 jusqu'à aujourd'hui, Odlyzko [OD] a réalisé une étude numérique vaste et profonde des zéros et en particulier de leurs espacements locaux. Il trouve qu'ils obéissent aux lois des espacements (mis à l'échelle) entre les valeurs propres d'une grande matrice unitaire typique. C'est-à-dire qu'ils obéissent aux lois de l'ensemble unitaire gaussien (ou de façon équivalente, circulaire) GUE (voir la section 2 pour les définitions). Dans la figure 1, l'histogramme des espacements δ_j pour $10^{20} \leq j \leq 10^{20} + 7.10^6$ est tracé en regard de la prédiction GUE (μ_1(GUE) - la distribution de Gaudin de la section 2). Au niveau phénoménologique, c'est peut-être la découverte la plus frappante concernant zêta depuis Riemann. Les grandes questions, auxquelles nous tentons

de répondre ici, sont : pourquoi en est-il ainsi et qu'est-ce que cela nous apprend sur la nature (par exemple spectrale) des zéros ? Et aussi, quelle est la symétrie derrière cette loi "GUE" ?

Les calculs d'Odlyzko ont été inspirés par la découverte en 1974 par Montgomery [MO2] que la "corrélation de paires" de zéros est, au moins pour une classe restreinte de fonctions test, égale à la corrélation de paires GUE R_2 (GUE) (voir la section 2). Précisément, il prouve que pour tout $\phi \in S(\mathbb{R})$ pour lequel le support de $\widehat{\phi}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) e^{-2\pi i x\xi} dx$ est contenu dans $[-1, 1]$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{1\le j\ne k\le N} \phi(\widehat{\gamma}_j - \widehat{\gamma}_k) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) R_2(\mathrm{GUE})(x) dx \tag{9}$$

où

$$R_2(\mathrm{GUE})(x) = 1 - \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^2. \tag{10}$$

La signification de l'intervalle $[-1, 1]$ est que $R_2(\mathrm{GUE})(\xi)$ change de caractère analytique en $\xi = \pm 1$, et cela signale que pour des ϕ dont le support est en dehors de $[-1, 1]$, il y aura de nouveaux termes "non diagonaux" (la contribution principale à la limite dans (9) pour ϕ restreint provient de la diagonale) contribuant au terme principal. Montgomery a conjecturé que (9) est valable sans aucune restriction sur le support de $\widehat{\phi}$, et dans [GO-MO], lui et Goldston donnent une équivalence de cette conjecture en termes de nombres premiers. Dans la figure 2, une comparaison de (9) pour des ϕ qui sont des fonctions caractéristiques de petits intervalles (c'est-à-dire l'histogramme) avec R_2(GUE) est présentée.

On peut examiner les généralisations triples et d'ordre supérieur du membre de gauche de (9) ; voir [R-S]. En effet, la connaissance des corrélations à n niveaux pour tout n détermine toutes les lois des espacements locaux (voir [K-S1]) et en particulier les k-ièmes espacements consécutifs. Dans [HE], Hejhal, utilisant la méthode de Montgomery, a établi que la corrélation triple est la corrélation triple GUE telle que déterminée par Dyson [DY]. Rudnick et Sarnak [R-S], par une méthode quelque peu différente (qui en fait ne fait pas appel à RH), établissent que toutes les corrélations d'ordre $n \ge 2$ sont telles que prédites par GUE. Tous ces résultats sont restreints comme dans (9) ; c'est-à-dire qu'ils ne sont prouvés que pour des fonctions test dont les transformées de Fourier sont restreintes de sorte que seuls les termes "diagonaux" soient responsables du terme principal. Une dérivation heuristique des corrélations à n niveaux sans aucune restriction sur la transformée de Fourier a été donnée par Bogomolny et Keating [B-K]. Les calculs des corrélations ci-dessus reposent sur la "formule explicite" (voir [R-S]) qui permet d'exprimer les corrélations en termes de sommes multiples sur les nombres premiers. La combinatoire qui fait passer de ces sommes sur les nombres premiers aux corrélations à n niveaux GUE est fascinante mais guère éclairante en ce qui concerne l'obtention d'un aperçu plus profond reliant les zéros et GUE.

La fonction zêta de Riemann n'est que la première d'un zoo de fonctions zêta et L pour lesquelles nous pouvons poser des questions similaires. Il y a les L-fonctions de Dirichlet $L(s, \chi)$ définies comme suit : $q \ge 1$ est un entier, $\chi : (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^* \to \mathbb{C}^*$ un caractère (primitif) et nous étendons χ à $\mathbb{Z}$ en le rendant périodique, et $\chi(m) = 0$ si $(m, q) \ne 1$. Alors

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s} = \prod_p (1 - \chi(p) p^{-s})^{-1}. \tag{11}$$

L'analogue de (2) est connu :

$$\xi(s,\chi) := \pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s+a_\chi}{2}\right)L(s,\chi) = q^{s-\frac{1}{2}}\epsilon_\chi\xi(1-s,\overline{\chi}) \tag{12}$$

où $a_\chi = 0$ si $\chi(-1) = 1$ et vaut 1 si $\chi(-1) = -1$, tandis que $|\epsilon_\chi| = 1$ et ϵ_χ est en fait une somme de Gauss unitarisée. q est appelé le *conducteur* de χ. La preuve de (11') est la même que pour zêta et repose sur la sommation de Poisson [DA]. Plus généralement, d'après les travaux de Godement et Jacquet [JA], si f est une forme automorphe *cuspidale* sur $GL_m/\mathbb{Q}$, $m \geq 1$, sa L-fonction (standard) $L(s,f)$ est entière (si f n'est pas la représentation triviale sur GL_1) et satisfait une équation fonctionnelle similaire à (2) (avec un conducteur et un facteur ϵ appropriés). Une telle L-fonction, $L(s,f)$, est donnée par un produit d'Euler de degré m :

$$L(s,f) = \prod_p L(s,f_p) \tag{13}$$

où

$$L(s,f_p) = \prod_{j=1}^{m}(1-\alpha_{j,f}(p)p^{-s})^{-1}. \tag{14}$$

Les $\alpha_{j,f}(p)$ sont les valeurs propres de l'algèbre de Hecke locale (en p) agissant sur f. Dans tous ces cas, on s'attend à ce que $L(s,f)$ satisfasse RH ; c'est-à-dire que ses zéros non triviaux soient sur la droite $\mathrm{Re}(s) = 1/2$. Les conjectures générales de Langlands [LA] affirment que toutes les L-fonctions sont des produits finis de ces L-fonctions standard (cuspidales), $L(s,f)$.

Un exemple classique et concret d'une forme sur $GL_2/\mathbb{Q}$ est $f = \Delta$:

$$\Delta(q) := q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24} = \sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)q^n. \tag{15}$$

Avec $q = e^{2\pi iz}$, $\Delta(z)$ est une forme cuspidale holomorphe de poids 12 pour $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$. C'est-à-dire que pour $z \in \mathbb{H}$, le demi-plan supérieur, nous avons

$$\Delta\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^{12}\Delta(z), \tag{16}$$

pour tous $a,b,c,d \in \mathbb{Z}, ad-bc = 1$. Sa L-fonction est

$$L(s,\Delta) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(n)}{n^{11/2}}n^{-s} = \prod_p\left(1-\frac{\tau(p)}{p^{11/2}}p^{-s}+p^{-2s}\right)^{-1}, \tag{17}$$

et elle est entière et satisfait

$$\xi(s,\Delta) = (2\pi)^{-s}\Gamma\left(s+\frac{11}{2}\right)L(s,\Delta) = \xi(1-s,\Delta). \tag{18}$$

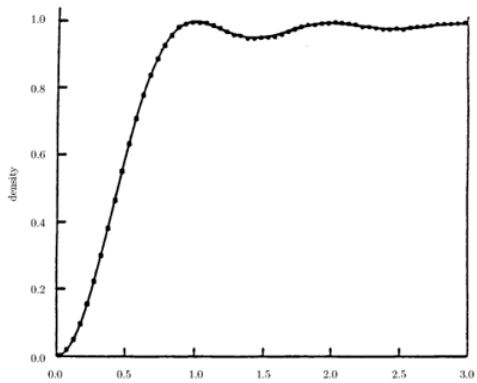


FIGURE 2 : corrélation de paires pour les zéros de zêta basée sur 8×10^6 zéros près du 10^{20}-ème zéro, versus densité conjectuée par GUE $1 - \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^2$.

Les fonctions $L(s, E)$ où $E/\mathbb{Q}$ est une courbe elliptique [SH1] sont d'autres exemples fondamentaux dans $GL_2/\mathbb{Q}$. La prescription du facteur local (de degré 2) à chaque nombre premier p est donnée en termes d'une analyse de E sur $\mathbb{F}_p$ (voir [SH1]). Une conjecture bien connue de Shimura et Taniyama, formulée précisément pour la première fois dans Weil [WE1], affirme que $L(s, E) = L(s, f)$

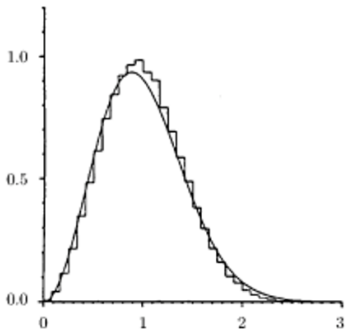


FIGURE 3 : Distribution des espacements entre plus proches voisins pour la L-fonction de Ramanujan, $N = 138693$.

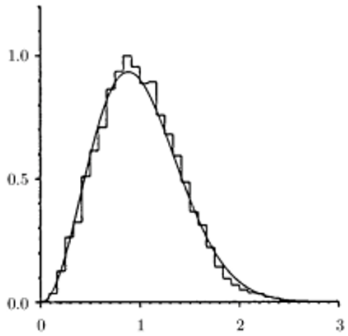


FIGURE 4 : Distribution des espacements entre plus proches voisins pour la L-fonction associée à $E : y^2 + y = x^3 - x, N = 5374$.

où f est une forme cuspidale holomorphe de poids 2 pour $\Gamma_0(N)$ où N est le conducteur de E (voir [SH1]). Ici $\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) : N|c \right\}$ et $f(z)$ satisfait :

$$f(\gamma z) = (cz + d)^2 f(z), \gamma \in \Gamma_0(N). \tag{19}$$

Les résultats de Rudnick et Sarnak [R-S] ont été obtenus dans le contexte général où f est une forme cuspidale automorphe pour $GL_m/\mathbb{Q}$. Ils montrent que les corrélations d'ordre $n \geq 2$ des zéros de $L(s, f)$ (là encore dans des domaines restreints) sont universellement celles de GUE ! L'expérimentation numérique de Rumely [RUM] pour les L-fonctions de Dirichlet et de Rubinstein [RUB] pour une variété de formes f sur $GL_2/\mathbb{Q}$ confirment fortement cette universalité (et confirment donc en particulier qu'aucune restriction sur les fonctions test n'est nécessaire). Par exemple, les espacements consécutifs pour les zéros de $L(s, \Delta)$ comparés à $\mu_1(\text{GUE})$ sont donnés dans la figure

3 et de même pour une $L(s, E)$ dans la figure 4.

Nous appelons ce phénomène - que les grands zéros de toute $L(s, f)$ fixée, f une forme cuspidale sur $GL_m/\mathbb{Q}$, obéissent aux lois d'espacement GUE - la "loi de Montgomery-Odlyzko".

2. Modèles de matrices aléatoires

Dans les années 1950 (voir [WI]), Wigner a suggéré que les raies de résonance d'un noyau lourd (dont la détermination par des moyens analytiques est intraitable) pourraient être modélisées par le spectre d'une grande matrice aléatoire. À cette fin, il a considéré divers ensembles (c'est-à-dire des distributions de probabilité) sur des espaces de matrices : en particulier, l'ensemble orthogonal gaussien, "GOE", et l'ensemble unitaire gaussien, "GUE". Ceux-ci vivent sur l'espace linéaire des matrices $N \times N$ réelles symétriques (resp. hermitiennes) et sont des ensembles invariants orthogonaux (resp. unitaires). Il a soulevé la question des distributions locales (mises à l'échelle) des espacements entre les valeurs propres des membres typiques de ces ensembles lorsque $N \to \infty$. La réponse a été fournie par Gaudin [GA] et Gaudin-Mehta [G-M], qui font un usage ingénieux des polynômes orthogonaux. Cette technique est un outil clé dans la dérivation des résultats ci-dessous. Plus tard, Dyson [DY] a introduit ses trois ensembles circulaires étroitement liés : COE, CUE, ainsi que CSE avec son ensemble symplectique gaussien associé, "GSE". Ces ensembles circulaires peuvent être réalisés comme les espaces symétriques riemanniens compacts (avec leur forme volume comme mesure de probabilité) $\mathrm{U}(N)/\mathrm{O}(N)$, $\mathrm{U}(N)$ et $\mathrm{U}(2N)/\mathrm{U}\,\mathrm{Sp}(2N)$, respectivement. Il a étudié la statistique des espacements locaux pour les valeurs propres des matrices de ces ensembles (dans leur réalisation standard, voir le tableau 1 ci-dessous) lorsque $N \to \infty$. Il montre que ces statistiques concordent avec les matrices correspondantes des ensembles GOE, GUE et GSE.

Or, ce qui précède ne représente que 3 des 11 espaces symétriques irréductibles compacts classiques de Cartan (nous ignorons le centre $\mathrm{U}(1)$ de $\mathrm{U}(N)$ qui, dans la limite $N \to \infty$, ne joue aucun rôle) (voir [HEL]). Que certains de ces autres modèles de matrices soient importants dans la théorie des L-fonctions deviendra clair ci-dessous. Apparemment, il existe aussi certains problèmes physiques qui nécessitent certains des autres espaces symétriques [A-Z]. Nous listons 6 des 11 types de symétrie : pour nos besoins de symétrie associée aux L-fonctions, seuls les 4 premiers ensembles du tableau 1 joueront un rôle. Ces 4 sont les groupes compacts classiques qui, avec une métrique bi-invariante, donnent les espaces symétriques dits de type II (voir [HEL]). La forme volume invariante sur $G(N)$ n'est autre que la mesure de Haar.

L'ensemble $\mathrm{U}(N)$ est le CUE de Dyson. L'espace symétrique dual non compact de $\mathrm{U}(N)$ est $\mathrm{GL}_N(\mathbb{C})/\mathrm{U}(N)$, qui est l'espace sur lequel vit GUE. De même, le dual non compact de $\mathrm{U}(N)/\mathrm{O}(N)$ est $\mathrm{GL}_N(\mathbb{R})/\mathrm{O}(N)$, c'est-à-dire GOE, et celui de $\mathrm{U}(2N)/\mathrm{U}\,\mathrm{Sp}(2N)$ est $\mathrm{U}^*(2N)/\mathrm{U}\,\mathrm{Sp}(2N)$ (voir [HEL], dont nous adoptons la notation), qui est l'espace pour GSE.

Symétrie de type G	réalisation de $G(N$ par des matrices
U	U(N), le groupe compact des matrices unitaires $N \times N$
SO (pair)	SO($2N$), le groupe compact des matrices unitaires (!) $2N \times 2N$ préservant la forme orthogonale I i.e. les matrices unitaires A vérifiant $A^t A = I$
SO (impair)	SO($2N+1$) et comme ci-dessus
Sp	USp($2N$), le groupe compact des matrices $2N \times 2N$ unitaires A vérifiant $A^t J A = J$, $J = \begin{bmatrix} 0 & I_N \\ -I_N & 0 \end{bmatrix}$
COE	U(N)/O(N), matrices symétriques unitaires $N \times N$ identifées avec les cosets ci-dessus via $B \to B^t B$
CSE	U($2N$)/USp($2N$), $2N \times 2N$ matrices unitaires vérifiant J$^t H^t J = H$ identifiées par $B \to BJB^t J^t$.

Soit $G(N)$ l'un quelconque des ensembles du tableau 1 réalisé comme matrices unitaires $A \in G(N)$. Soit dA la mesure invariante et $e^{i\theta_1(A)}, e^{i\theta_2(A)}, \ldots, e^{i\theta_N(A)}$ les valeurs propres de A. Nous les ordonnons

$$0 \leq \theta_1(A) \leq \theta_2(A) \cdots \leq \theta_N(A) < 2\pi. \tag{20}$$

Les distributions locales (mises à l'échelle) des espacements entre les valeurs propres de A sont définies comme suit :

- les k-ièmes espacements consécutifs $\mu_k(A)$ sont une mesure sur $[0, \infty)$

$$\mu_k(A)[a,b] = \frac{\#\{1 \leq j \leq N | \frac{N}{2\pi}(\theta_{j+k} - \theta_j) \in [a,b]\}}{N}. \tag{21}$$

  Le facteur d'échelle $N/2\pi$ normalise $\mu_k(A)$ pour avoir une moyenne égale à k.

- la corrélation de paires $R_2(A)$ mesure la distribution entre toutes les paires de valeurs propres de A. Pour $[a,b] \subset \mathbb{R}$ un intervalle compact

$$R_2(A)[a,b] = \frac{\#\{j \neq k | \frac{N}{2\pi}(\theta_j - \theta_k) \in [a,b]\}}{N}. \tag{22}$$

- les corrélations d'ordre supérieur peuvent être définies de manière similaire.

La question principale à laquelle il faut répondre ici est le comportement de ces mesures lorsque $N \to \infty$. Pour $G(N)$ l'un quelconque des espaces symétriques de type II ci-dessus, Katz et Sarnak [K-S1] établissent ce qui suit :

- fixons $k \geq 1$. Il existe des mesures $\mu_k(\mathrm{GUE})$ telles que pour tout $G(N)$ de type II

$$\lim_{N \to \infty} \int_{G(N)} \mu_k(A) dA = \mu_k(\mathrm{GUE}). \tag{23}$$

- une loi des grands nombres qui garantit que pour un $A \in G(N)$ typique (au sens de la mesure), $\mu_k(A)$ et $R_2(A)$ tendent vers $\mu_k(\mathrm{GUE})$ et $R_2(\mathrm{GUE})$ lorsque $N \to \infty$.

Précisément

$$\lim_{N\to\infty} \int_{G(N)} D(\mu_k(A), \mu_k(\mathrm{GUE}))dA = 0 \tag{24}$$

où $D(\nu_1, \nu_2)$ est la distance de Kolmogorov-Smirnov entre ν_1 et ν_2 ; c'est-à-dire

$$D(\nu_1, \nu_2) = \sup\{|\nu_1(I) - \nu_2(I)| : I \subset \mathbb{R} \text{ un intervalle}\}.$$

Pour $[a, b] \subset \mathbb{R}$ (compact)

$$\lim_{N\to\infty} \int_{G(N)} |R_2(A)[a, b] - R_2(\mathrm{GUE})[a, b]|dA = 0 \tag{25}$$

où

$$R_2(\mathrm{GUE})[a, b] = \int_a^b r_2(\mathrm{GUE})(x)dx$$

et $r_2(\mathrm{GUE})$ est donné en (10).

Étant donné que la réponse est universelle pour les espaces symétriques de type II, et puisque CUE est de ce type et, comme indiqué ci-dessus, CUE et GUE ont les mêmes statistiques d'espacement local, il s'ensuit que les espacements locaux de type II sont GUE (comme l'indique la notation en (21) et (22)). Gaudin, dans l'article original [GA], a exprimé les mesures $\mu_k(\mathrm{GUE})$ en termes d'un déterminant de Fredholm :

$$d\mu_k(\mathrm{GUE}) = \frac{d^2}{ds^2}\left(\sum_{j=0}^{k} \frac{k-j}{j!}\left(\frac{\partial}{\partial T}\right)^j \det(I + TK(s))\Big|_{T=1}\right) ds \tag{26}$$

où $K(s)$ est l'opérateur à trace sur $L^2[-s/2, s/2]$ dont le noyau est

$$K(x, y) = \frac{\sin \pi(x-y)}{\pi(x-y)}. \tag{27}$$

Il a également noté que (23) permet de calculer μ_k numériquement. En effet, les fonctions propres de l'équation intégrale

$$\int_{-s/2}^{s/2} K(x, y)f(y)dy = \lambda f(x) \tag{28}$$

sont les fonctions prolates-sphéroïdales [MEH]. On peut utiliser ceci pour calculer les valeurs propres $\lambda_j(s)$ et les fonctions propres $f_j(x, s)$ de (26) et, à partir de là, les densités des mesures $\mu_k(\mathrm{GUE})$. La densité de $\mu_1(\mathrm{GUE})$ est la courbe pleine de la figure 1. Remarquons que la densité s'annule au second ordre en $s = 0$, ce qui signifie que les valeurs propres d'un A typique dans un grand $G(N)$ tendent à se "repousser" mutuellement. Pour les ensembles COE et CSE, les mesures analogues $\mu_k(\mathrm{COE})$ et $\mu_k(\mathrm{CSE})$ ont été déterminées (voir Mehta [MEH]) ; elles sont tout à fait différentes de $\mu_k(\mathrm{GUE})$ ainsi que l'une de l'autre.

Alors que les résultats ci-dessus montrent que les espacements locaux entre toutes les valeurs propres d'un A typique dans tout $G(N)$ de type II sont universellement GUE lorsque $N \to \infty$, la distribution de la valeur propre la plus proche de 1 est sensible à la symétrie particulière G. Pour $k \geq 1$, soit

$\nu_k(G(N))$ la mesure sur $[0,\infty)$ qui donne la distribution de la k-ième valeur propre de A, lorsque A varie sur $G(N)$. C'est-à-dire

$$\nu_k(G(N))[a,b] = \text{Haar}\{A \in G(N) \mid \frac{\theta_k(A)N}{2\pi} \in [a,b]\}. \tag{29}$$

De même, on forme la densité à l'échelle à 1 niveau (ou plus généralement les densités à n niveaux) des valeurs propres de A près de 1. Pour un tel $A \in G(N)$ et $[a,b] \subset \mathbb{R}$, soit

$$\Delta(A)[a,b] = \#\{\theta(A) \mid e^{i\theta(A)} \text{ est une valeur propre de } A \text{ et } (\theta(A)N)/2\pi \in [a,b]\}. \tag{30}$$

La moyenne de $\Delta(A)$ est notée W ; c'est-à-dire

$$W(G(N)) = \int_{G(N)} \Delta(A) dA. \tag{31}$$

Dans [K-S1], il est montré qu'il existe des mesures $\nu_k(G)$ sur $[0,\infty)$ qui dépendent de la symétrie G telles que

$$\lim_{N\to\infty} \nu_k(G(N)) = \nu_k(G). \tag{32}$$

Pour les densités, nous avons

$$\lim_{N\to\infty} W(G(N))[a,b] = \int_a^b w(G)(x)dx \tag{33}$$

où

$$w(G)(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } G = \text{U ou SU} \\ 1 - \dfrac{\sin 2\pi x}{2\pi x} & \text{si } G = \text{Sp} \\ 1 + \dfrac{\sin 2\pi x}{2\pi x} & \text{si } G = \text{SO(pair)} \\ \delta_0 + 1 - \dfrac{\sin 2\pi x}{2\pi x} & \text{si } G = \text{SO(impair)}. \end{cases} \tag{34}$$

Comme pour les mesures $\mu_k(\text{GUE})$, les mesures $\nu_k(G)$ peuvent être exprimées en termes de déterminants de Fredholm [K-S1], et cela permet leur calcul numérique. Les densités de $\nu_1(\text{U})$, $\nu_1(\text{Sp})$ et $\nu_1(\text{SO(pair)})$ sont présentées dans la figure 5. De toute évidence, $\nu_1(\text{SO(impair)}) = \delta_0$, et il s'avère que $\nu_2(\text{SO(impair)}) = \nu_1(\text{Sp})$. Notons que Sp est unique en ce que la densité de ν_1 s'y annule (en fait au second ordre) en $s = 0$. Cela montre que les valeurs propres d'un A typique dans un grand $\text{U Sp}(2N)$ sont repoussées par 1.

Nous terminons cette section en remarquant que les mêmes questions pour le plus réductible des espaces symétriques compacts, $T^N = \text{U}(1) \times \text{U}(1) \cdots \times \text{U}(1)$, ont des réponses très différentes. Notons que T^N avec la mesure $\dfrac{dx_1}{2\pi}\dfrac{dx_2}{2\pi}\cdots\dfrac{dx_N}{2\pi}$ correspond à choisir $x_1, x_2, \ldots, x_N$ indépendamment au hasard (ou si nous les considérons comme des matrices, alors nous choisissons une matrice *diagonale* aléatoire). La statistique des espacements locaux pour ceux-ci a été beaucoup étudiée dans la littérature probabiliste. Il est bien connu [FE] que les espacements locaux pour ce modèle s'approchent d'un processus de Poisson lorsque $N \to \infty$. Les k-ièmes mesures d'espacements consécutifs convergent vers $\mu_k(T) = s^{k-1}e^{-s}ds/(k-1)!$ (notons que μ_1 n'a pas de répulsion en zéro), tandis que la corrélation de paires limite $R_2(T)$ est simplement la densité dr sur $\mathbb{R}$.

3. Corps de fonctions

On peut obtenir beaucoup d'aperçus sur la source de la loi de Montgomery-Odlyzko en considérant son analogue en corps de fonctions. Remplaçons le corps des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ par un corps k qui est une extension finie du corps $\mathbb{F}_q(t)$ des fonctions rationnelles en t à coefficients dans $\mathbb{F}_q$, le corps fini à q éléments. Par analogie avec la fonction zêta de Riemann, Artin [AR] a introduit une fonction zêta $\zeta(T, k)$. Elle est définie par le produit sur toutes les places v de k (voir [WE2])

$$\zeta(T, k) = \prod_v (1 - T^{\deg(v)})^{-1}. \tag{35}$$

On peut aussi considérer $\zeta(T, k)$ comme la fonction zêta d'une courbe non singulière C sur $\mathbb{F}_q$ dont le corps de fonctions est k. Par exemple, soit $C/\mathbb{F}_q$ une courbe plane donnée par une équation

$$f(X_1, X_2, X_3) = 0 \tag{36}$$

où f est non singulier et homogène de quelque degré et a des coefficients dans $\mathbb{F}_q$. Pour chaque $n \geq 1$, soit N_n le nombre de solutions projectives de (33) dans $\mathbb{F}_{q^n}$. La fonction zêta du corps de fonctions k de C est la même que la fonction zêta de la courbe C sur $\mathbb{F}_q$, qui est définie par

$$\zeta(T, C/\mathbb{F}_q) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_n T^n}{n}\right). \tag{37}$$

Ce point de vue géométrique est très puissant. Par exemple, le théorème de Riemann-Roch sur la courbe C joue le rôle de la formule de sommation de Poisson [SCH] et montre que

$$\zeta(T, C/\mathbb{F}_q) = \frac{P(T, C/\mathbb{F}_q)}{(1 - T)(1 - qT)} \tag{38}$$

où $P \in \mathbb{Z}[T]$ est de degré $2g$, g étant le genre de la courbe C. Il donne également l'équation fonctionnelle $P(T) = q^g T^{2g} P(1/qT)$. L'hypothèse de Riemann pour ces fonctions zêta, qui a été proposée et testée sur de nombreux exemples par Artin, affirme que tous les zéros se trouvent sur $|T| = 1/\sqrt{q}$. Cela a été prouvé par Weil. À ce jour, il existe plusieurs preuves différentes : Weil [WE3], [WE4], des preuves élémentaires par Stepanov [ST] et Bombieri [BO], et des preuves par Deligne [DE] qui ont l'avantage de s'appliquer de manière beaucoup plus générale. Une raison de pouvoir procéder dans le cadre des corps de fonctions est que l'on dispose d'une interprétation spectrale des zéros de $\zeta(T, C/\mathbb{F}_q)$. Le nombre N_n est le nombre de points fixes de la n-ième itérée de Frobenius (qui est l'opération consistant à élever les coordonnées des points de $\mathbb{F}_q$ sur C à la puissance q). Via une formule de trace de Lefschetz convenable, cela permet d'interpréter les zéros de $\zeta(T, C/\mathbb{F}_q)$ comme les inverses des valeurs propres de Frobenius agissant sur le premier groupe de cohomologie (à coefficients ℓ-adiques) de la courbe C.

Pour ce qui est de la distribution des zéros de ces fonctions zêta, nous les écrivons sous la forme

$$\rho_j = e^{i\theta_j}/\sqrt{q}, j = 1, 2, \ldots, 2g. \tag{39}$$

Ordonnons maintenant les θ comme en (19) et formons les mesures d'espacements locaux comme en (19'). Nous désignons par $\mu_k(C/\mathbb{F}_q)$ la k-ième mesure d'espacements consécutifs entre ses zéros.

Pour une $\zeta(T, C/\mathbb{F}_q)$ fixée, il y a $2g(C)$ zéros et il ne peut donc pas y avoir de loi d'espacement. Nous laissons donc le genre tendre vers l'infini. Cependant, cela seul ne conduit pas à une loi limite unique (ni même à l'existence d'une telle loi). Par exemple, considérons les courbes $C_f, f \geq 1$ données sous forme affine par $Y^2 = X^q - X$ sur le corps $\mathbb{F}_q, q = p^f, p \neq 2$. Le genre d'une telle courbe est $(q-1)/2$, et comme expliqué dans [K-S1], la mesure d'espacements consécutifs $\mu_1(C_f/\mathbb{F}_q)$ converge vers une masse ponctuelle δ_0 en zéro, lorsque $f \to \infty$. Dans [K-S1], nous considérons donc la courbe "typique" de grand genre sur un grand corps $\mathbb{F}_q$. Nous montrons que lorsque q et g tendent vers l'infini, les espacements locaux entre les zéros suivent le modèle GUE - c'est-à-dire que la loi de Montgomery-Odlyzko est valable pour ces fonctions zêta. Précisément, si $\mathcal{M}_g(\mathbb{F}_q)$ désigne l'ensemble (fini) des classes d'isomorphisme de courbes de genre g sur $\mathbb{F}_q$ et $k \geq 1$, alors

$$\lim_{g\to\infty} \lim_{q\to\infty} \frac{1}{\#\mathcal{M}_g(\mathbb{F}_q)} \sum_{C\in\mathcal{M}_g(\mathbb{F}_q)} D(\mu_k(C/\mathbb{F}_q), \mu_k(\mathrm{GUE})) = 0. \tag{40}$$

En particulier, puisque $D \geq 0$, nous avons que pour tout $\epsilon > 0$ et q et g suffisamment grands (g dépendant de q)

$$\#\{C \in \mathcal{M}_g(\mathbb{F}_q) | D(\mu_k(C/\mathbb{F}_q), \mu_k(\mathrm{GUE})) > \epsilon\} \leq \epsilon \#\{C \in \mathcal{M}_g(\mathbb{F}_q)\}; \tag{41}$$

c'est-à-dire que les fonctions zêta de presque toutes les courbes C satisfont la loi de Montgomery-Odlyzko lorsque q et g tendent vers l'infini.

Trois ingrédients clés entrent dans la preuve de (37). Le premier est la monodromie de la famille $\mathcal{M}_g$. Pour des raisons techniques, au lieu de la famille des courbes de genre g, on considère la famille $\mathcal{M}_{g,3K}$ des courbes de genre g munies d'une base de sections de $3K$, K étant la classe canonique de la courbe. La représentation de monodromie de π_1 de $\mathcal{M}_{g,3K}$ sur H^1 d'une courbe donnée a une image dont la clôture de Zariski (celle-ci étant la monodromie de cette famille) est le groupe symplectique plein $\mathrm{Sp}(2g)$ [K-S1]. Que cette monodromie soit symplectique en premier lieu est une conséquence du fait qu'elle préserve l'appariement d'intersection des cycles dans le premier groupe d'homologie d'une courbe. Via cette représentation, on peut associer à chaque $C \in \mathcal{M}_g(\mathbb{F}_q)$ une classe de conjugaison de Frobenius unitarisée $\theta(C/\mathbb{F}_q)$ dans $U\mathrm{Sp}(2g)$ telle que

$$P(T, C/\mathbb{F}_q) = \det(1 - \sqrt{q}T\theta(C/\mathbb{F}_q)). \tag{42}$$

Le deuxième ingrédient est le résultat principal de Deligne [DE] qui peut être utilisé pour montrer (voir [K-S1]) que pour toute fonction de classe continue f sur $U\mathrm{Sp}(2g)$

$$\lim_{q\to\infty} \frac{\displaystyle\sum_{C\in\mathcal{M}_g(\mathbb{F}_q)} \frac{f(\theta(C/\mathbb{F}_q))}{\#\mathrm{Aut}(C/\mathbb{F}_q)}}{\displaystyle\sum_{C\in\mathcal{M}_g(\mathbb{F}_q)} \frac{1}{\#\mathrm{Aut}(C/\mathbb{F}_q)}} = \int_{U\mathrm{Sp}(2g)} f(A)dA. \tag{43}$$

Le nombre de $C \in \mathcal{M}_g(\mathbb{F}_q)$ pour lesquels $\#\mathrm{Aut}(C/\mathbb{F}_q) \geq 2$ peut être montré comme étant d'ordre inférieur lorsque $q \to \infty$. En appliquant (40) avec la fonction continue $f(A) = D(\mu_k(A), \mu_k(\mathrm{GUE}))$, conjointement avec le troisième ingrédient - la loi des grands nombres (22) de la section 2 (appliquée avec $G(N) = U\mathrm{Sp}(2N)$) - on aboutit à (37).

On peut prouver des résultats similaires pour d'autres familles de fonctions zêta ou L de courbes ou de variétés V sur des corps finis ; voir [K-S1]. La loi universelle de Montgomery-Odlyzko est valable au moins si la monodromie de la famille est grande, c'est-à-dire si elle est (ou est proche de) l'un quelconque des $G(N)$ de type II du tableau 1.

Ainsi, dans le corps de fonctions, la source du phénomène GUE est clairement identifiée. C'est la monodromie (ou groupe de symétrie) de la famille et sa limite d'échelle, combinée à l'universalité de la statistique des espacements pour les espaces symétriques de type II. Cette dernière gomme la structure fine au point de ne même pas trahir le type de symétrie spécifique de la famille. Comme mentionné dans la section 2, les mesures ν_k sont plus sensibles, et nous exploitons cela ensuite.

4. Familles et zéros de petite hauteur

Le tableau suivant résume quelques analogies connues entre les fonctions zêta sur $\mathbb{Q}$ et les corps de fonctions.

		A	B
1	Type de fonction zêta	Corps de nombres $\zeta(s), L(s,\chi), L(s,f)$	Corps de fonctions $\zeta(T, C/\mathbb{F}_q), \zeta(T, V/\mathbb{F}_q)$, V une variété
2	Prolongement analytique et équation fonctionnelle	Établis via la sommation de Poisson ou les propriétés automorphes de f.	Établis à l'aide de Riemann-Roch et en général de la cohomologie étale.
3	Interprétation spectrale des zéros	?	Connue via l'action de Frobenius sur la cohomologie.
4	RH	Attendue	Prouvée, Weil, Deligne.
5	Loi de Montgomery-Odlyzko pour les espacements locaux entre les zéros	Attendue	Valable pour presque toutes les courbes.
6	Monodromie (ou symétrie) pour les familles et équidistribution	?	Connue via la représentation de π_1 de la famille sur les groupes de cohomologie.

Nous considérons l'entrée 5-A et les preuves en sa faveur décrites dans les sections 1 et 3 comme suggérant fortement une entrée "attendue" en 3-A. [1] Il convient également de noter que la première preuve de Deligne de 4-B est basée sur la monodromie d'une famille. Par exemple, pour établir RH pour $\zeta(T, V)$, V une hypersurface lisse dans $\mathbb{P}^N$, il procède en plaçant V dans une famille V_t (pour un exposé voir [KA1]). RH est établie pour tous les V_t à la fois en exploitant la monodromie de la famille qui recolle les V_t entre eux. Ainsi, une entrée positive en 6-A est très souhaitable. C'est le sujet de cette section.

Nous commençons par le corps de fonctions où la notion de famille a un sens précis. Considérons l'ensemble de toutes les extensions quadratiques $k = \mathbb{F}_q(t)$. Nous pouvons les réaliser comme suit : soit $H_n(\mathbb{F}_q)$ l'ensemble de tous les polynômes unitaires sans facteur carré de degré n à coefficients dans $\mathbb{F}_q$. Les extensions quadratiques sont $k_\Delta = k(\sqrt{\Delta})$ avec $\Delta \in H_n(\mathbb{F}_q)$. Pour chaque n, ces corps de fonctions correspondent à des courbes hyperelliptiques, $Y^2 = \Delta(X), \Delta \in H_n$ et forment une famille de courbes. Le genre $g = g(n)$ de k_Δ satisfait $n = 2g + 2$ si n est pair et $n = 2g + 1$ si n est

1. Une possibilité intéressante pour une interprétation spectrale des zéros a été suggérée par Connes [CO].

impair. Ainsi $\zeta(T, k_\Delta)$, qui peut s'écrire $L(T, \chi_\Delta)/(1-T)(1-qT)$ avec χ_Δ le caractère quadratique correspondant, a $2g(n)$ zéros d'angles $\theta_1(\Delta), \theta_2(\Delta), \ldots, \theta_{2g}(\Delta)$ que nous normalisons et ordonnons comme en (36) et (19). Pour $j \geq 1$ fixé, nous examinons la distribution de $\theta_j(\Delta)$ lorsque Δ varie sur $H_n(\mathbb{F}_q), n \to \infty$. Cela revient à étudier la distribution des zéros près du point central. En utilisant les techniques d'équidistribution décrites dans la section 3 conjointement avec les limites d'échelle ν (30) pour $\mathrm{U\,Sp}(2g)$ (la monodromie de cette famille hyperelliptique étant encore le groupe plein $\mathrm{Sp}(2g)$), on montre (voir [K-S1]) que pour $f \in C_b(\mathbb{R}_{\geq 0})$ une fonction test

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{q\to\infty} \frac{1}{\#H_n(\mathbb{F}_q)} \sum_{\Delta \in H_n(\mathbb{F}_q)} f\left(\frac{\theta_j(\Delta) 2g}{2\pi}\right) = \int_0^\infty f(x) d\nu_j(Sp)(x). \tag{44}$$

Nous conjecturons (bien que les techniques conduisant à (41) n'offrent rien en termes de preuve) que (41) est valable sans prendre la limite intérieure en q, c'est-à-dire

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\#H_n(\mathbb{F}_q)} \sum_{\Delta \in H_n(\mathbb{F}_q)} f\left(\frac{\theta_j(\Delta) 2g}{\pi}\right) = \int_0^\infty f(x) d\nu_j(Sp)(x). \tag{45}$$

Les équations (41) et (42) affirment que les distributions des zéros près de $T = 1/\sqrt{q}$ (le point central ou de symétrie) des extensions quadratiques k_Δ de $k = \mathbb{F}_q(t)$ suivent les lois limites d'échelle symplectiques.

Nous donnons un second exemple dans le corps de fonctions d'une famille pour laquelle la distribution des zéros près du point central est dictée par, et révèle en retour, le groupe de symétrie de la famille. Soit E/k une courbe elliptique d'invariant j non constant [SH1]. Pour chaque place v de k (c'est-à-dire chaque polynôme irréductible $p(t) \in \mathbb{F}_q[t]$ ou la place à l'infini - le corps résiduel "de degré" k_v est une extension finie de $\mathbb{F}_q$ de degré d_v. Soit E_v la courbe $E \otimes k_v$. En une place où E a bonne réduction, écrivons

$$|E_v| = |k_v| + 1 - \alpha_v - \beta_v \quad \text{avec } \alpha_v \beta_v = |k_v|. \tag{46}$$

La L-fonction de E/k est définie par

$$L(T, E) = \prod_v (1 - \alpha_v T^{d_v})^{-1} (1 - \beta_v T^{d_v})^{-1} \tag{47}$$

(pour les places v de k où E n'a pas bonne réduction, le facteur local est décrit dans [SH1]). $L(T, E)$ satisfait une équation fonctionnelle et l'hypothèse de Riemann [TA], [DE].

Par exemple, considérons la courbe de Legendre

$$E : Y^2 = X(X-t)(X-1). \tag{48}$$

Pour $\Delta \in \widehat{H}_n(\mathbb{F}_q)$, l'ensemble des $\Delta \in H_n(\mathbb{F}_q)$ sans zéros dans $\{0, 1\}$, le twist de E par χ_Δ a pour L-fonction

$$L(T, E \otimes \chi_\Delta) = \prod \left(1 - \alpha_v \chi_\Delta(v) T^{d_v}\right)^{-1} \left(1 - \beta_v \chi_\Delta(v) T^{d_v}\right)^{-1}, \tag{49}$$

et son degré est N où $N = 2n$ si n est pair et $2n-1$ si n est impair. Les zéros de $L(T, E \otimes \chi_\Delta)$ sont de module $1/q$, et nous les écrivons $q^{-1}e^{i\theta_1}, q^{-1}e^{i\theta_2}, \ldots, q^{-1}e^{i\theta_N}$ avec

$$0 \leq \theta_1(E \otimes \chi_\Delta) \leq \theta_2(E \otimes \chi_\Delta) \cdots \leq \theta_N(E \otimes \chi_\Delta) < 2\pi. \tag{50}$$

Notons par $\epsilon(E \otimes \chi_\Delta)(\pm 1)$ le signe de l'équation fonctionnelle. Chacune des deux valeurs est partagée approximativement également par les Δ de $\widehat{H}_n(\mathbb{F}_q)$ lorsque $n \to \infty$.

Soit $\widehat{H}_n^{\pm}(\mathbb{F}_q)$ ceux des $\Delta \in H_n(\mathbb{F}_q)$ avec ϵ égal à $+1$ et -1 respectivement. Comme dans le dernier exemple, on peut voir [KA2] calculer la monodromie de cette famille $L(T, E \otimes \chi_\Delta), \Delta \in \widehat{H}_n(\mathbb{F}_q)$. Elle est égale à $\mathrm{O}(N)$. [2] Comme ci-dessus, les techniques d'équidistribution conjointement avec (30) avec $G = O$ conduisent à : fixons $j \geq 1$ et $f \in C_0(\mathbb{R}_{\geq 0})$; alors (voir [K-S1])

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{q\to\infty} \frac{1}{\#\widehat{H}_n^+(\mathbb{F}_q)} \sum_{\Delta \in \widehat{H}_n^+(\mathbb{F}_q)} f\left(\frac{N\theta_j(E \otimes \chi_\Delta)}{2\pi}\right) = \int_0^\infty f(x) d\nu_j(\mathrm{SO(pair)})(x) \tag{51}$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{q\to\infty} \frac{1}{\#\widehat{H}_n^-(\mathbb{F}_q)} \sum_{\Delta \in \widehat{H}_n^-(\mathbb{F}_q)} f\left(\frac{N\theta_j(E \otimes \chi_\Delta)}{2\pi}\right) = \int_0^\infty f(x) d\nu_j(\mathrm{SO(impair)})(x). \tag{52}$$

C'est donc une famille avec une symétrie orthogonale et une distribution correspondante des zéros près du point central. Comme dans le premier exemple, nous conjecturons que (48) et (49) sont valables sans la limite intérieure en q - c'est-à-dire qu'elles sont valables pour un q fixé.

En principe, dans ce cadre des corps de fonctions, tant que l'on peut calculer la monodromie de la famille et ses limites d'échelle, comme cela est fait dans les exemples ci-dessus, on obtient la distribution des espacements mis à l'échelle des zéros près du point central.

Passons au cadre des nombres rationnels. Les analogies des deux familles considérées ci-dessus sont suffisamment claires. La première consiste en les L-fonctions de Dirichlet $L(s, \chi)$ avec $\chi^2 = 1$. La seconde en $L(s, E \otimes \chi)$ où $E/\mathbb{Q}$ est une courbe elliptique et χ un caractère quadratique comme dans la première famille. La question correspondante concerne la distribution des zéros près de $s = 1/2$ (nous normalisons toujours les L-fonctions pour avoir l'équation fonctionnelle $s \to 1 - s$ de sorte que $1/2$ soit le point central) de ces L-fonctions. Nous examinerons un certain nombre de familles différentes $\mathcal{F}$. À chaque forme automorphe $f \in \mathcal{F}$, associons son conducteur c_f (voir la ligne au-dessus de (12)). Supposons en outre que les ensembles $\mathcal{F}_X = \{f \in \mathcal{F} | c_f \leq X\}$ soient finis et que l'asymptotique $\#\mathcal{F}_X$, lorsque X tend vers l'infini, puisse être déterminée. Écrivons les zéros non triviaux de $L(s, f)$ sous la forme

$$\frac{1}{2} + i\gamma_f, \tag{53}$$

et, en supposant RH, ordonnons-les

$$\cdots \leq \gamma_f^{(-2)} \leq \gamma_f^{(-1)} \leq 0 \leq \gamma_f^{(1)} \leq \gamma_f^{(2)} \ldots. \tag{54}$$

Pour $j \geq 1$, considérons la distribution des nombres

$$\frac{\gamma_f^{(j)} \log c_f}{2\pi} \tag{55}$$

2. La raison de cette différence entre les familles $L(s, \chi_\Delta)$ et $L(s, E \otimes \chi_\Delta)$ est que le Frobenius agit sur H^1 d'une courbe avec des coefficients qui sont orthogonalement auto-duaux dans le premier cas et symplectiquement auto-duaux dans le second. Par les propriétés standard du produit cup, l'auto-dualité sur un tel H^1 est renversée.

lorsque f varie sur $\mathcal{F}_X, X \to \infty$. C'est-à-dire que nous étudions la distribution du j-ième zéro le plus bas (le fait que la normalisation (52) soit appropriée deviendra clair à partir des résultats ci-dessous). Formons les analogues des mesures ν_k (voir (27)) et de la densité Δ et W ((28), (29))

$$\nu_j[X, \mathcal{F}][a, b] = \frac{\#\{f \in \mathcal{F}_X | \frac{\gamma_f^{(j)} \log c_f}{2\pi} \in [a, b]\}}{\#\mathcal{F}_X}. \tag{56}$$

Pour $\phi \in S(\mathbb{R})$ une fonction test, posons

$$\Delta(f, \phi) = \sum_{\gamma_f} \phi\left(\frac{\gamma_f \log c_f}{2\pi}\right) \tag{57}$$

et

$$W(X, \mathcal{F}, \phi) = \frac{1}{\#\mathcal{F}_X} \sum_{c_f \leq X} \Delta(f, \phi). \tag{58}$$

On peut aussi former des densités jointes à plusieurs variables (voir [K-S1]), et celles-ci déterminent les ν_j ainsi que toutes les distributions locales mises à l'échelle des zéros près de $s = 1/2$. Par analogie avec le corps de fonctions, nous pourrions nous attendre à ce que $\nu_j(X, \mathcal{F})$ et $W(X, \mathcal{F}, \phi)$ convergent vers $\nu_j(\mathcal{F})$ et $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) w(\mathcal{F})(x) dx$, où $\nu_j(\mathcal{F})$ et $w(\mathcal{F})$ correspondent au type de symétrie "$G(\mathcal{F})$". Si la famille $\mathcal{F}$ a un analogue en corps de fonctions, alors $G(\mathcal{F})$ et les $\nu_j(\mathcal{F}), w(\mathcal{F})$ correspondants peuvent être prédits par l'analyse décrite dans les deux exemples ci-dessus. Cette idée a été mise en œuvre et testée analytiquement et numériquement pour diverses familles, dont certaines sont les suivantes (pour le reste de cette section, nous supposons RH pour toutes les $L(s, f)$) :

I. La famille $\mathcal{F}$ des L-fonctions de Dirichlet $L(s, \chi)$, χ (primitif) de conducteur $c_\chi = q$ et χ quadratique (c'est-à-dire $\chi^2 = 1$). $L(s, \chi)$ est auto-duale (c'est-à-dire que son équation fonctionnelle renvoie à elle-même) et le signe ϵ_χ est égal à 1 pour tout χ.

   (a) La discussion de l'analogue en corps de fonctions suggère que $G(\mathcal{F}) = Sp$.

   (b) [K-S2] (voir aussi Ozluk-Snyder [O-S])

   $$W(X, \mathcal{F}, \phi) \to \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) w(Sp)(x) dx \text{ lorsque } X \to \infty$$

   pour tout $\phi \in S(\mathbb{R})$ dont la transformée de Fourier a son support dans $(-2, 2)$. La densité $w(Sp)(x)$ est donnée en (31').

   (c) Dans sa thèse récente [RUB], Rubinstein établit que les densités jointes d'ordre $n \geq 2$ convergent vers les densités Sp (voir [K-S1]) pour des fonctions test $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ dont les transformées de Fourier ont leur support dans un petit voisinage de 0.

   (d) Les expériences numériques de Rubinstein [RUB] pour q de taille 10^{12} donnent un excellent ajustement des ν_j et W avec les prédictions Sp. Par exemple, la densité des zéros (mise à l'échelle) comparée à $w(Sp)$ est donnée dans la figure 6. La distribution du zéro le plus bas $\nu_1(X, \mathcal{F})$ pour $q \sim 10^{12}$ est présentée dans la figure 7. Elle est comparée à $\nu_1(Sp)$. Notons que dans l'analyse I(b) ci-dessus, la convergence vers la limite se fait à une vitesse de $1/\log q$ et, de plus, il y a un terme de signe unique qui décale la réponse de cette quantité. Bien que ce terme disparaisse dans la limite $q \to \infty$, il affecte numériquement la moyenne, et les données présentées incorporent une renormalisation tenant

compte de cela. Selon les prédictions Sp, la valeur moyenne de $\frac{\gamma_\chi \log q_\chi}{2\pi}$ devrait être la valeur moyenne de $\nu_1(Sp)$ qui est $0.7827\ldots$. Les résultats numériques le confirment, bien que la convergence soit lente (comme $1/\log q$) et que l'approche se fasse par le haut.

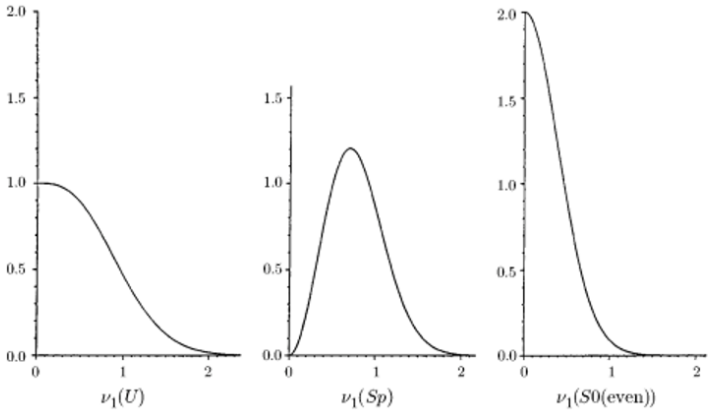


FIGURE 5

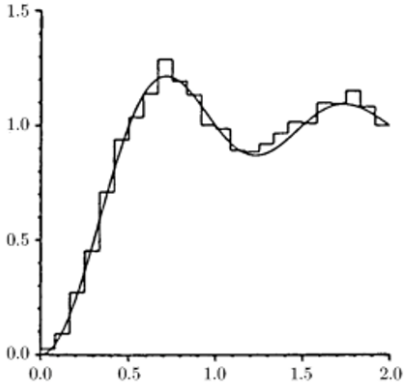


FIGURE 6 : Un niveau de densité pour $L(s, \chi_d), 10^{12} < |d| < 10^{12} + 200000,7243d$, moyenne du premier zéro au-dessus de 0 égale 0.8268, renormalisé pour avoir une moyenne de 0.78.

(e) La première personne à avoir calculé numériquement les zéros de $L(s, \chi)$ dans cette famille semble être Haselgrove. Il a trouvé que les zéros "repoussent" le point $s = 1/2$, et cela est appelé le phénomène de Haselgrove. [3]

II. La famille $\Delta \otimes \chi$ où Δ est la forme cuspidale de poids 12 en (15) et χ parcourt les caractères quadratiques. Le conducteur $c_{\Delta\otimes\chi}$ est q^2 et $\epsilon_{\Delta\otimes\chi}$ peut valoir à la fois $+1$ et -1. $L(s, \Delta \otimes \chi)$ est auto-duale.

(a) D'après des considérations sur les corps de fonctions, nous nous attendons à $G(\mathcal{F}) = O$ avec la précision que la sous-famille $\mathcal{F}^+$ avec $\epsilon = 1$ a une symétrie SO(pair) et $\mathcal{F}^-$ avec $\epsilon = -1$ une symétrie SO(impair).

(b) [K-S2] Pour cette famille ou plus généralement avec toute forme cuspidale GL_2, f (de

3. On peut effectuer tout ce qui précède pour $L(s, \chi), \chi^3 \equiv 1$ (ou tout autre ordre supérieur à 2). On trouve une symétrie *unitaire* et les zéros ne repoussent pas $s = 1/2$.

caractère central trivial) remplaçant Δ, nous avons

$$W(X, \mathcal{F}^+, \phi) \to \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) w(\mathrm{SO(pair)})(x) dx$$

et

$$W(X, \mathcal{F}^-, \phi) \to \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) w(\mathrm{SO(impair)})(x) dx$$

pour tout $\phi \in S(\mathbb{R})$ dont la transformée de Fourier est supportée dans $[-1, 1]$. Les densités $w(\mathrm{SO})(x)$ sont données en (31'). Le dernier cas s'applique en particulier à $L(s, E \otimes \chi)$ avec $E/\mathbb{Q}$ une courbe elliptique, ce qui est bien sûr cohérent avec l'exemple en corps de fonctions mentionné au début de cette section.

(c) Rubinstein [RUB] a montré que les densités à $n \geq 2$ niveaux convergent vers les densités orthogonales pour un $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ avec $\widehat{\phi}(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ supporté dans un petit voisinage de 0.

(d) Les expériences numériques (Rubinstein [RUB]) pour q de taille environ 500 000 donnent un excellent ajustement avec les prédictions orthogonales. Dans la figure 8, la densité de $\mathcal{F}^+$ est tracée en regard de $w(\mathrm{SO(pair)})$, et dans la figure 9 la densité de $\mathcal{F}^-$ en regard de $w(\mathrm{SO(impair)})$ (pour cette dernière il y a toujours un zéro en $s = 1/2$ et un δ_0 dans la densité ; ceux-ci sont supprimés). Dans la figure 10, $\nu_1(\mathcal{F}^+)$ est présentée en regard de $\nu_1(\mathrm{SO(pair)})$, et dans la figure 11 $\nu_2(\mathcal{F}^-)$ en regard de $\nu_2(\mathrm{SO(impair)})$.

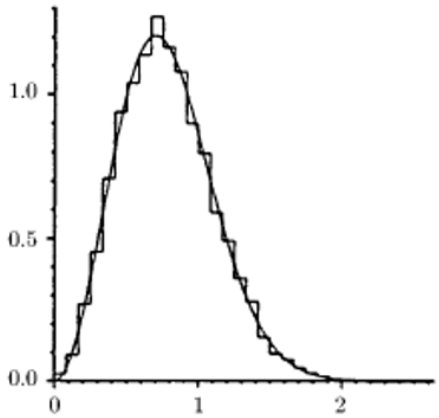


FIGURE 6 : premier zéro au-dessus de 0 pour $L(s, \chi_d), 10^{12} < |d| < 10^{12} + 200000,7243$ d,
moyenne du premier zéro au-dessus de 0 égale 0.8268,
renormalisée pour avoir une moyenne de 0.7827.

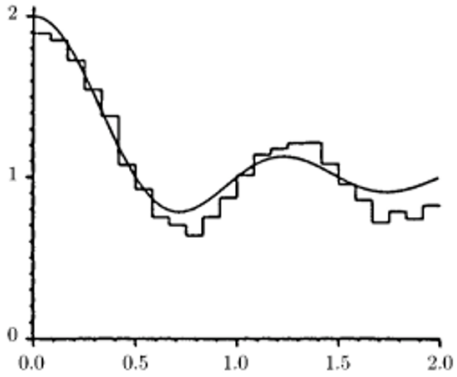


FIGURE 7 : densité de niveau 1 pour $L(s, \chi_d$ pair),
$350000 < |d| < 650000, 11464$ d,
moyenne du premier zéro au-dessus de 0 égale 0.2926,
renormalisée pour avoir une moyenne de 0.3214.

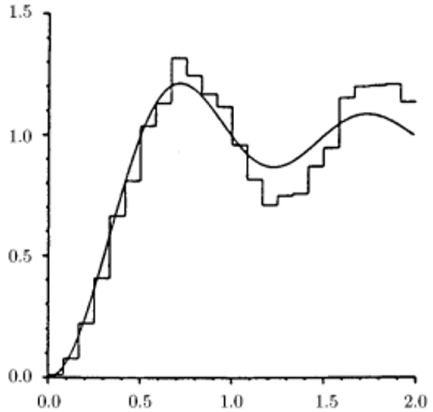


FIGURE 8 : densité de niveau 1 pour $L(s, \chi_d$ impair)
$350000 < |d| < 650000, 11390$ d,
moyenne du premier zéro au-dessus de 0 égale 0.7186,
renormalisée pour avoir une moyenne de 0.7827.

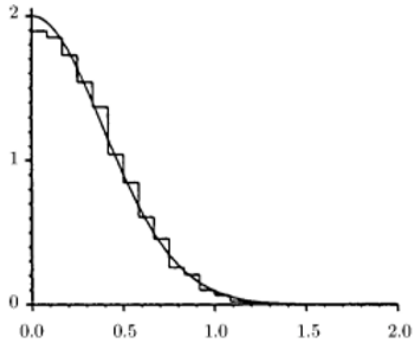


FIGURE 9 : premier zéro au-dessus de 0 pour $L(s, \chi_d$ pair)
$350000 < |d| < 650000, 11464$ d,
moyenne du premier zéro au-dessus de 0 égale 0.2926,
renormalisée pour avoir une moyenne de 0.3214.

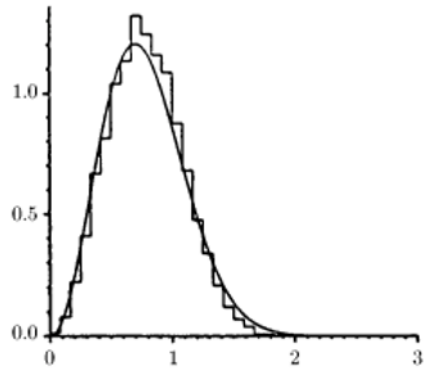


FIGURE 10 : premier zéro au-dessus de zéro 0 pour $L(s, \chi_d$ impair)
$350000 < |d| < 650000, 11390$ d,
moyenne du premier zéro au-dessus de 0 égale 0.7186,
renormalisée pour avoir une moyenne de 0.7827.

III. La famille $H(N)$ des formes de Hecke holomorphes de poids 2 pour $\Gamma_0(N)$ (comme en (18)). Par simplicité, nous supposons que N est premier. $L(s, f)$ a pour conducteur $c_f = N$ et est auto-duale. Comme dans la dernière famille, environ la moitié des f ont $\epsilon_f = 1$, l'autre moitié ayant $\epsilon_f = -1$. Soit $H^+(N)$ et $H^-(N)$ les ensembles correspondants. Nous avons $\#(H^+(N)) \sim \#(H^-(N)) \sim N/24$ lorsque $N \to \infty$.

(a) La symétrie attendue $G(\mathcal{F}) = O$, bien que nous n'ayons pas encore compris l'analogue en corps de fonctions.

(b) (Voir Iwaniec-Luo-Sarnak [I-L-S]) :

$$\frac{1}{\#(H^+(N))} \sum_{f \in H^+(N)} \Delta(\phi, f) \to \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) w(\mathrm{SO(pair)})(x) dx$$

$$\frac{1}{\#(H^-(N))} \sum_{f \in H^-(N)} \Delta(\phi, f) \to \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) w(\mathrm{SO(impair)})(x) dx$$

pour tout $\phi \in S(\mathbb{R})$ de support $\widehat{\phi} \subset (-2, 2)$.

IV. La famille des L-fonctions de carré symétrique (voir [SH1]) $L(s, \mathrm{sym}^2 f)$ où f est une forme propre de Hecke de poids entier pair k sur $\mathbb{H}$ pour $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ (comme en (15) ci-dessus). La dimension de cet espace de formes cuspidales est $\sim \dfrac{k}{12}$ lorsque $k \to \infty$. L'analogue (analytique) approprié du conducteur $c_{\mathrm{sym}^2 f}$ de $L(s, \mathrm{sym}^2 f)$ est k^2. Pour cette famille, la moyenne se fait sur toutes ces $\mathrm{sym}^2 f$ avec $c_{\mathrm{sym}^2 f} \leq X$. $L(s, \mathrm{sym}^2 f)$ est un produit d'Euler de degré trois, et par un théorème de Gelbart et Jacquet [G-J], ce sont les L-fonctions de formes cuspidales auto-duales sur GL_3. Le signe de l'équation fonctionnelle $\epsilon_{\mathrm{sym}^2 f}$ est égal à 1.

(a) Étant des formes auto-duales sur GL_3, nous nous attendons à $G(\mathcal{F}) = Sp$.

(b) Dans [I-L-S], il est prouvé que

$$W(X, \mathcal{F}, \phi) \to \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) w(Sp)(x) dx$$

lorsque $X \to \infty$, pour tout $\phi \in S(\mathbb{R})$ de support $\widehat{\phi} \subset (-\dfrac{4}{3}, \dfrac{4}{3})$.

Remarques.

1. Tous ces résultats confirment, dans la mesure où ils s'appliquent, les prédictions de la symétrie $G(\mathcal{F})$. Nous appelons la conjecture selon laquelle les sommes $W(X, \mathcal{F}, \phi)$ convergent vers la densité annoncée sans aucune restriction sur $\widehat{\phi}$, la *Conjecture de densité* pour $\mathcal{F}$.
2. Les preuves des résultats sur les densités procèdent toutes en exprimant $\Delta(f, \phi)$ via la formule explicite, en termes de sommes impliquant les valeurs propres de Hecke de f. La méthode utilisée pour moyenner de telles quantités sur $f \in \mathcal{F}$ pour les familles III et IV s'appuie fortement sur les outils développés dans Iwaniec-Sarnak [I-S] (voir aussi la section 5).
3. À l'exception de la famille II, tous les résultats permettent au support de $\widehat{\phi}$ d'être plus grand que $[-1, 1]$. Cela est assez significatif car $w(Sp)(\xi)$, $w(\mathrm{SO(pair)})(\xi)$ et $w(\mathrm{SO(impair)})(\xi)$ sont toutes discontinues en $\xi = \pm 1$. Cela signale que de nouveaux termes non diagonaux entrent comme termes principaux dès que le support de $\widehat{\phi}$ est plus grand que $[-1, 1]$. Ainsi, ce qui est montré ici va au-delà de tout ce qui a été établi pour les corrélations des grands zéros de $\zeta(s)$, comme discuté dans la section 1. Pour les familles III et IV, ces nouveaux termes proviennent d'une analyse de grande portée avec les sommes de Kloosterman (voir aussi [D-F-I] pour des analyses connexes). Que ces contributions non diagonales fondamentalement nouvelles donnent précisément les réponses $G(\mathcal{F})$ conjecturées est une preuve très satisfaisante pour cette image de symétrie, au moins pour ces familles.
4. D'autres familles pour lesquelles des résultats similaires ont été obtenus sont : la famille $L(s, f)$, f variant sur les formes cuspidales holomorphes de poids k pour $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ lorsque $k \to \infty$, avec symétrie $G(\mathcal{F}) = O$ [I-L-S]. La famille $L(s, f \otimes \chi_D)$ comme en II ci-dessus mais où f est maintenant une forme cuspidale auto-duale fixée quelconque sur $\mathrm{GL}_m/\mathbb{Q}$, dont la symétrie est Sp ou O selon que $L(s, \mathrm{sym}^2 f)$ a ou n'a pas de pôle en $s = 1$ [K-S2]. La famille $L(s, \chi)$, $\chi^n = 1, n \geq 3$. Ces L-fonctions ne sont pas auto-duales et la symétrie est U^{n-}, le sous-groupe du groupe unitaire dont les éléments ont leur déterminant une racine n-ième de 1 [KA3].

5. Applications

L'intérêt pour les zéros des L-fonctions réside dans leur influence fondamentale sur les problèmes arithmétiques. En particulier, la question de l'annulation d'une L-fonction en un point spécial de la droite critique se pose dans la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer [B-S] (qui, pour certains f, relie l'annulation de $L(s, f)$ et de ses dérivées aux rangs des courbes elliptiques et des variétés abéliennes (voir ci-dessous)), dans la correspondance de Shimura [SH2] et dans la théorie de la déformation spectrale (voir Phillips-Sarnak [P-S]). La distribution des zéros pour une famille $L(s, f)$ près de $s = 1/2$, comme discuté dans la section 4, a des applications immédiates à l'annulation en ce point. En faisant varier la fonction test ϕ dans la conjecture de densité pour l'une quelconque des familles $\mathcal{F}$ ci-dessus, on est conduit (en supposant la conjecture de densité) à :

$$\lim_{X \to \infty} \frac{\#\{f \in \mathcal{F}_X | \epsilon_f = 1, L\left(\frac{1}{2}, f\right) \neq 0\}}{\#\{f \in \mathcal{F}_X | \epsilon_f = 1\}} = 1 \tag{59}$$

et

$$\lim_{X\to\infty} \frac{\#\{f \in \mathcal{F}_X | \epsilon_f = -1, L'\left(\frac{1}{2}, f\right) \neq 0\}}{\#\{f \in \mathcal{F}_X | \epsilon_f = -1\}} = 1. \tag{60}$$

Les résultats de la section 4 sont des approximations de la conjecture de densité et donnent des approximations correspondantes de (56) et (57). Nous l'illustrons dans les cas des familles II(b) et III.

Soit $E/\mathbb{Q}$ une courbe elliptique donnée sous la forme

$$E : Y^2 = X^3 + AX + B. \tag{61}$$

Le twist de E par un entier sans facteur carré D est la courbe

$$E_D : DY^2 = X^3 + AX + B. \tag{62}$$

Nous supposons que E est modulaire de sorte que la L-fonction $L(s, E_D)$, qui est égale à $L(s, E \otimes \chi_D)$, soit aussi modulaire. La conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer affirme que l'ordre d'annulation de $L(s, E_D)$ en $s = 1/2$ est égal au rang du groupe des points $\mathbb{Q}$-rationnels sur E_D. Kolyvagin [K-L] a montré que si $L\left(\frac{1}{2}, E_D\right) \neq 0$, alors $\text{rang}(E_D) = 0$. Ceci, conjointement avec la conjecture de densité via (56), implique les conjectures suivantes de Goldfeld [GO] :

- le rang de E_D est nul pour 100 % des D avec $|D| \leq X$, $\epsilon_{E\otimes\chi_D} = 1$, lorsque $X \to \infty$.
- en supposant en outre la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer et en appliquant (57), on montre que le rang de E_D est égal à un pour 1 % des D avec $|D| \leq X$, $\epsilon_{E\otimes\chi_D} = -1$, lorsque $X \to \infty$.

L'approximation II(b) de la section 4 implique (en supposant RH pour les $L(s, E_D)$) que $\text{rang}(E_D) = 0$ pour au moins 25 % des D avec $\epsilon_{E_D} = 1$. Ce résultat est dû à Brumer et Heath-Brown [B-HB]. Un problème stimulant, qui est encore à la frontière des techniques connues (voir [P-P]), est de donner une preuve inconditionnelle que $\text{rang}(E_D) = 0$ pour une proportion positive des $|D| \leq X$, lorsque $X \to \infty$. (Pour certaines courbes E, un tel résultat est connu par des méthodes algébriques [HB], [WO]). Nous notons que pour cette famille $L(s, E \otimes \chi_D)$ (ainsi que pour certaines autres ci-dessous), contrairement au cas de $L(s, \Delta \otimes \chi_D)$ discuté en II, il y a beaucoup de D avec $\epsilon_{E\otimes\chi_D} = 1$ et $L\left(\frac{1}{2}, E \otimes \chi_D\right) = 0$. En choisissant d'abord X et Y puis D dans (59), Gouvea et Mazur [GO-MA] montrent qu'il y a au moins $X^{1/2}$ D avec $|D| \leq X$, $\epsilon_D = 1$ et $L\left(\frac{1}{2}, E \otimes \chi_D\right) = 0$, lorsque $X \to \infty$. Cela affecte certainement les résultats numériques pour la distribution des zéros de petite hauteur pour cette famille lorsque X est de taille modérée.

Passons à la famille en III. En choisissant $\phi \in S(\mathbb{R})$, $\phi(0) = 1$, $\phi \geq 0$, de support $\widehat{\phi} \subset (-2, 2)$ et pour lequel $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) w(\mathcal{F}, x) dx$ est minimisé (voir [I-L-S]), nous concluons des résultats en III (qui, rappelons-le, supposent RH pour $L(s, f)$) que pour N premier et suffisamment grand

$$\frac{\#\{f \in H^+(N) | L\left(\frac{1}{2}, f\right) \neq 0\}}{\#H^+(N)} > \frac{9}{16} \tag{63}$$

$$\frac{\#\{f \in H^-(N) | L'\left(\frac{1}{2}, f\right) \neq 0\}}{\#H^-(N)} > \frac{15}{16} \tag{64}$$

et

$$\frac{\#H_2(N)}{2} + \mathrm{o}(\#H_2(N)) \leq \sum_{f \in H_2(N)} \mathrm{ord}\left(\frac{1}{2}, L(s,f)\right) < \frac{99}{100}(\#H(N)) \tag{65}$$

où $\mathrm{ord}(s_0, L(s,f))$ est l'ordre d'annulation de $L(s,f)$ en $s = s_0$. Notons que $\#H(N) \sim \frac{N}{12}$ et, comme le fait remarquer Murty [MU] (et cela ne suppose pas RH), $\#H^+(N) \sim \#\frac{H(N)}{2}$. Ainsi, la borne inférieure en (62) est claire. Concernant la borne supérieure en (62), Brumer [BR] a établi un tel résultat avec 99/100 remplacé par 3/2. On peut réduire ce 3/2 à 1 sans faire appel à l'analyse "hors diagonale" qui conduit à III. Cependant, pour obtenir quoi que ce soit en dessous de 1 en (62), on s'appuie déjà sur les domaines étendus de III. Une remarque similaire s'applique à (60), l'analyse hors diagonale permettant la borne inférieure qui dépasse 50 %. Cela est significatif, comme cela deviendra clair à partir de ce qui suit.

On peut appliquer (60), (61) et (62) pour estimer le rang de la jacobienne $J_0(N)/\mathbb{Q}$ des courbes $X_0(N)$ (qui analytiquement est $\Gamma_0(N)\backslash\mathbb{H}$) en combinant ces résultats avec des résultats partiels connus vers les conjectures de Birch et Swinnerton-Dyer (Kolyvagin [K-L] et Gross-Zagier [G-Z]). Soit $M_0(N)/\mathbb{Q}$ le quotient de $J_0(N)$ considéré par Merel [MER]. Il correspond à ceux des $f \in H^+(N)$ pour lesquels $L\left(\frac{1}{2}, f\right) \neq 0$, et c'est sans aucun doute le plus grand quotient de $J_0(N)$ de rang nul. Il est très intéressant de connaître sa taille ([MA], [MER]). Brumer [BR] les a calculés pour $N \leq 10^4$, et sur la base de ses résultats, il conjecture que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\dim M_0(N)}{\#H^+(N)} = 1 \tag{66}$$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\mathrm{rang}(J_0(N))}{\dim J_0(N)} = \frac{1}{2}. \tag{67}$$

Notons que les conjectures de densité pour cette famille via (56) et (57) et [K-L] et [G-Z] impliquent ces conjectures de Brumer. De la même manière, (60),(61) impliquent (en supposant encore RH pour $L(s,f)$) que pour N grand

$$\dim M_0(N) > \frac{9}{16}\#H^+(N) \tag{68}$$

et

$$\mathrm{rang}(J_0(N)) > \frac{15}{32}\dim J_0(N). \tag{69}$$

De plus, si l'on suppose en outre la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer, alors (62) montre que pour N grand

$$\frac{\dim J_0(N)}{2} + \mathrm{o}(N) \leq \mathrm{rang} J_0(N) < \frac{99}{100}\dim J_0(N). \tag{70}$$

Il est remarquable que les résultats (65) et (66) puissent être établis inconditionnellement avec une qualité presque aussi bonne. Les techniques qui y parviennent sont assez différentes de et plus

sophistiquées que celles utilisées pour établir les résultats de densité pour la famille III, bien que les deux fassent usage des méthodes de moyennage sur une telle famille, développées dans [I-S]. Dans [DU], Duke examine les moyennes de $L\left(\frac{1}{2}, f\right)$ et $L^2(\frac{1}{2}, f)$ sur l'ensemble $H(N)$. Cela lui permet de montrer qu'au moins $N/(\log N)^2$ des $L\left(\frac{1}{2}, f\right)$ sont non nulles. En introduisant des "mollificateurs" et d'autres outils dans l'analyse du moyennage pondéré de $L\left(\frac{1}{2}, f\right)$ et $L^2(\frac{1}{2}, f)$, Iwaniec et Sarnak [I-S] montrent qu'étant donné $\epsilon_0 > 0$, il existe un $N_0 = N_0(\epsilon_0)$ effectif tel que pour $N > N_0$

$$\frac{\#\{f \in H^+(N) | L\left(\frac{1}{2}, f\right) \geq (\log N)^{-2}\}}{\#\{f \in H^+(N)\}} \geq \frac{1}{2} - \epsilon_0. \tag{71}$$

Ce résultat inconditionnel est assez proche du conditionnel (65) et le 50 % en (68) est d'une importance fondamentale. En effet, il est montré dans [I-S] que si (68) est valable avec un $c > \frac{1}{2}$ quelconque remplaçant $\frac{1}{2}$, alors il n'y a pas de zéros de Siegel ! (Un zéro de Siegel est un zéro d'une L-fonction de Dirichlet $L(s, \chi_q), \chi_q^2 = 1$ qui est très proche, en termes de q le conducteur de χ, de 1.) Le résultat précis que $c > \frac{1}{2}$ donnerait est qu'il existe un $c' > 0$ effectif tel que $L(1, \chi_q) \geq c'(\log q)^{-2}$.

En utilisant des variations des techniques ci-dessus parmi beaucoup d'autres idées, Kowalski et Michel [K-M1] et indépendamment VanderKam [V] ont montré que pour N grand

$$\text{rang}(J_0(N)) \geq B \dim J_0(N) \tag{72}$$

($[K - M1]$ montre que $B = 19/54$ fonctionne tandis que [V] établit le résultat avec $B = 1/100$). Dans un autre travail, Kowalski et Michel [K-M2] établissent la borne supérieure en (62) inconditionnellement avec 99/100 remplacé par 10.

Nous concluons cette section par un commentaire sur des familles plus générales $\mathcal{F}$ et la distribution des zéros de petite hauteur. Bien que la symétrie seule semble dicter les lois de cette distribution pour les familles discutées dans la section 4, une certaine prudence doit être exercée en général. Par exemple, considérons la famille $\mathcal{F}$ des classes d'isogénie de toutes les courbes elliptiques $E/\mathbb{Q}$ ordonnées par leurs conducteurs. Les analogues en corps de fonctions (comme dans l'exemple 2 de la section 4) suggèrent que la symétrie $G(\mathcal{F})$ de cette famille est O. En particulier (et cela peut être prouvé pour le corps de fonctions avec la réserve habituelle de laisser d'abord $q \to \infty$), zéro pour cent des E de $\mathcal{F}$ de conducteur au plus N ont un rang au moins deux, lorsque $N \to \infty$. Cependant, l'expérimentation numérique avec N de taille modérée pour cette famille et quelques autres familles de courbes elliptiques [K-Z], [SI2], [B-M] indique que ce pourcentage est positif et même qu'il n'est pas très petit. Il est prématuré de dire s'il s'agit d'un artefact d'une plage de calcul trop restreinte et dû à des effets comme l'existence de points de petite hauteur sur ces courbes (comme le résultat de Gouvea-Mazur [GO-MA]), ou si la distribution des zéros de petite hauteur pour une telle famille ne suit pas les prédictions O. Comprendre la source de ce "rang excédentaire" pour N modéré révèlera sans aucun doute des caractéristiques nouvelles très intéressantes.

6. Conclusion

Phénoménologiquement, on trouve que la distribution des grands zéros de toute L-fonction suit les lois universelles GUE, tandis que la distribution des zéros de petite hauteur de certaines familles suit les lois dictées par les symétries associées à la famille. Les analogues en corps de fonctions de ces phénomènes peuvent être établis, et la source de la symétrie est la monodromie de la famille et ses limites d'échelle. Les résultats analytiques concernant la distribution des grands zéros pour une L-fonction individuelle et des petits zéros d'une famille de L-fonctions, dans la mesure où ils peuvent être établis, confirment les découvertes ci-dessus.

Que, dans le cas des L-fonctions (sur $\mathbb{Q}$), il existe effectivement une sorte de groupe de monodromie sous-jacent qui recolle la famille et soit la source de la symétrie est une question fascinante. Notre conviction est qu'il en existe un. On peut imaginer qu'à chaque $L(s,f), f \in \mathcal{F}$, soit associée une interprétation naturelle des zéros de $L(s,f)$ comme les valeurs propres d'un opérateur $\mathrm{U}(f)$ sur un certain espace H. Lorsque f varie sur $\mathcal{F}$, ces $\mathrm{U}(f)$ deviennent équidistribués dans l'espace de tels opérateurs avec un type de symétrie donné. Pour les familles discutées dans la section 4, ces symétries sont identifiées. En particulier, la fonction zêta de Riemann se situe dans la famille I de la section 4 qui a une symétrie symplectique. Nous en déduisons que, dans l'interprétation spectrale proposée des zéros de la fonction zêta de Riemann, l'opérateur devrait préserver une forme symplectique ![4] Nous croyons que la compréhension plus approfondie de la source de telles symétries détient la clé pour trouver une interprétation spectrale naturelle des zéros.

Références

[A-Z] A. Altland, M. Zirnbauer, "Non-Standard Symmetry Classes in Mesoscopic Normal-Super-Conducting Hybrid Structures," *Cond-Mat*, 96/02137.

[AR] E. Artin, "Quadratische Körper in Gebiet der Höheren Kongruenz I and II," *Math. Zeit.*, **19**, 153-296, (1924).

[BO] E. Bombieri, "Hilbert's 8-th Problem an Analogue," *Proc. Symp. Pure Math. AMS XXVII*, 269-275, (1976). MR **55** :2913.

[BR] A. Brumer, "The Rank of $J_0(N)$", *Astérisque* **228**, 41-68, (1995). MR **96f** :11083.

[B-HB] A. Brumer, R. Heath-Brown, "The Average Rank of Elliptic Curves II," (preprint), (1992).

[B-K] E. Bogomolny, J. Keating, "Random matrix theory and the Riemann zeros. I. Three- and four-point correlations," *J. Nonlinearity*, **8**, 1115, (1995). MR **97b** :11132a.

[B-M] A. Brumer, O. McGuinness, "The Behavior of the Mordell-Weil Group of Elliptic Curves," *Bull. AMS* **23**, 375-382, (1990). MR **91b** :11076.

[B-S] B. Birch, P. Swinnerton-Dyer, "Notes on Elliptic Curves (I) and (II)," *J. Reine Angew Math.*, **212**, 7-25, (1963). **218**, 79-108, (1965). MR **26** :3669 ; MR **31** :3419.

[CO] A. Connes, "Formule de Trace en Géométrie Non-Commutative et Hypothèse de Riemann," *CR. Acad. Sci.*, Paris, **323**, 1, 1231-1236, (1996). MR **97k** :11124.

[DA] H. Davenport, "Multiplicative Number Theory," Springer Verlag, G.T.M., (1974). MR **82m** :10001.

[DE] P. Deligne, "La Conjecture de Weil I and II," *Publ. I.H.E.S.*, **43**, 273-307, (1974). **52**, 313-428, (1981). MR **49** :5013 ; MR **83c** :14017.

[DEN] C. Deninger, "Evidence for a Cohomological Approach to Analytic Number Theory," First European Math Congress, Vol. 1, (1992), 491-510, Birkhauser, (1994).

4. Apparemment, le formalisme cohomologique de Deninger [DEN] rend compte du fait que l'"opérateur" correspondant à $\zeta(s)$ préserve une forme antisymétrique.

[D-F-I] W. Duke, J. Friedlander, H. Iwaniec, "Representations by the Determinant and Mean Values of L-Functions," in Sieve Methods, Exponential Sums and their Applications in Number Theory, Cambridge University Press, 109-115, (1997). CMP **98** :15.

[DU] W. Duke, "The Critical Order of Vanishing of Automorphic L-Functions with Large Level," *Invent. Math.*, **119**, 165-174, (1995). MR **95k** :11075.

[DY] F. Dyson, "Statistical Theory of Energy Levels III," *J. Math. Phys.*, **3**, 166-175, (1962). MR **26** :1113.

[FE] W. Feller, "Introduction to Probability Theory and its Applications," John Wiley, Vol. II, (1966). MR **35** :1048.

[GA] M. Gaudin, "Sur la loi Limite de L'espacement de Valeurs Propres D'une Matrice Aleatoire," *Nucl. Phys.*, **25**, 447-458, (1961).

[GO] D. Goldfeld, "Conjectures on Elliptic Curves over Quadratic Number Fields," in Number Theory Conference, Carbondale & Spanger, L.N-M, **751**, 108-118, (1979). MR **81j** :12014.

[GO-MA] F. Gouvea, B. Mazur, "The square free sieve and the rank of elliptic curves," *JAMS* **4**, (1991), No. 1, 1-23. MR **92b** :11039.

[GO-MO] D. Goldston, H. Montgomery, "Pair Correlation of Zeros and Primes in Short Intervals," *Progress in Math.*, Vol. 70, Birkhauser, 183-203, (1987). MR **90h** :11084.

[G-J] S. Gelbart, H. Jacquet, "A Relation Between Automorphic Representations of GL(2) and GL(3)," *Ann. Sci. École Norm. Sup. 4*, **11**, 471-542, (1978). MR **81e** :10025.

[G-M] M. Gaudin, M. Mehta, "On the Density of Eigenvalues of a Random Matrix," *Nucl. Phys.*, **18**, 420-427, (1960). MR **22** :3714.

[G-Z] B. Gross, D. Zagier, "Heegner Points and Derivatives of L-Series," *Invent. Math.*, **84**, 225-320, (1980). MR **87j** :11057.

[HB] D. R. Heath-Brown, "The Size of Selmer Groups for the Congruent Number Problem II," *Invent. Math.*, **118**, 331-370, (1994). MR **95h** :11064.

[HE] D. Hejhal, "On the Triple Correlation of the Zeroes of the Zeta Function," *IMRN*, 293-302, (1994). MR **96d** :11093.

[HEL] S. Helgason, "Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces," Academic Press, New York, (1978). MR **80k** :53081.

[IW] H. Iwaniec, "Topics in Analytic Number Theory," Rutgers University Course, (1988).

[I-L-S] H. Iwaniec, W. Luo, P. Sarnak, "Low Lying Zeroes of Families of L-Functions," (preprint), (1998).

[I-S] H. Iwaniec, P. Sarnak, "The Non-Vanishing of Central Values of Automorphic L-Functions and Siegel's Zero," (preprint), (1997).

[JA] H. Jacquet, "Principal L-Functions of the Linear Group," *Proc. Sym. Pure Math.*, Vol. 33, A.M.S., Part 2, 63-86, (1979). MR **81f** :22029.

[KA1] N. Katz, "An Overview of Deligne's Work on Hilbert's Twenty-First Problem," *Proc. Symp. Pure Math. AMS XXVIII*, 537-557, (1976). MR **55** :5627.

[KA2] N. Katz, "Big Twists Have Big Monodromy" (in preparation), (1998).

[KA3] N. Katz, "Affine Cohomological Transformations, Perversity, and Monodromy," *JAMS* **6**, (1993), No. 1, 149-222. MR **94b** :14013.

[K-L] V. Kolyvagin and D. Lugachev, "Finiteness of the Shafarevich-Tate Group and the Group of Rational Points for some Modular Abelian Varieties," *Leningrad Math. J.*, **1**, No. 5, 1229-1253, (1990). MR **91c** :11032.

[K-M1] E. Kowalski, P. Michel, "Sur de Rang de $J_0(N)$," (preprint), (1997).

[K-M2] E. Kowalski, P. Michel, "Sur les Zeros de Fonctions l Automorphes de Grand Niveau," (preprint), (1997).

[K-S1] N. Katz, P. Sarnak, "Random Matrices, Frobenius Eigenvalue and Monodromy," AMS Colloq. series (to appear), (1999).

[K-S2] N. Katz, P. Sarnak, "Zeroes of Zeta Functions, their Spaces and their Spectral Nature," (1997 preprint version of the present paper).

[K-Z] G. Kramarz, D. Zagier, "Numerical Investigations Related to L-Series of Certain Elliptic Curves," *J. Indian Math. Soc.*, **52**, 51-69, (1987). MR **90d** :11072.

[LA] R. Langlands, "Problems in the Theory of Automorphic Forms," Springer, L.N.M., **170**, 18-86, (1970). MR **46** :1758.

[MA] B. Mazur, "Modular Curves and the Eisenstein Ideal," *Publ. Math. I.H.E.S.*, **47**, 33-186, (1977). MR **80c** :14015.

[MEH] M. Mehta, "Random Matrices," Second Edition, Academic Press, Boston (1991). MR **92f** :82002.

[MER] L. Merel, "Bornes pour la Torsion de Courbes Elliptiques sur les Corps de Nombres," *Invent. Math.*, **124**, 437-449, (1996). MR **96i** :11057.

[MO1] H. Montgomery, "Topics in Multiplicative Number Theory," L.N.M., **227**, Springer, (1971). MR **49** :2616.

[MO2] H. Montgomery, "The Pair Correlation of Zeroes of the Zeta Function," *Proc. Sym. Pure Math.*, **24**, AMS, 181-193, (1973). MR **49** :2590.

[MU] M. Murty, "The Analytic Rank of $J_0(N)/\mathbb{Q}$," Number Theory, (Halifax, NS), CMS Conf. Proc., **15**, 263-277, (1995). MR **96f** :11054.

[OD] A. Odlyzko, "The 10^{20}-th Zero of the Riemann Zeta Function and 70 Million of its Neighbors," (preprint), A.T.T., (1989).

[O-S] A. Ozluk, C. Snyder, "Small Zeroes of Quadratic L-Functions," *Bull. Aust. Math. Soc.*, **47**, 307-319, (1993). MR **94i** :11080.

[P-P] A. Perelli, J. Pomykala, "Averages Over Twisted Elliptic L-Functions," *Acta Arith.*, **80**, 149-163, (1997). MR **98c** :11044.

[P-S] R. Phillips, P. Sarnak, "On Cusp Forms for Cofinite Subgroups of $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$," *Invent. Math.*, **80**, 339-364, (1985). MR **86m** :11037.

[RI] B. Riemann, "Über die Anzahl der Primzahlen unter Einer Gegebenen Grösse," *Monatsb. der Berliner Akad.*, (1858/1860), 671-680.

[RUB] M. Rubinstein, "Evidence for a Spectral Interpretation of Zeros of L-Functions," Thesis, Princeton University, (1998).

[RUM] R. Rumely, "Numerical Computations Concerning ERH," *Math. Comp.*, **61**, 415-440, (1993). MR **94b** :11085.

[R-S] Z. Rudnick, P. Sarnak, "Zeroes of Principal L-Functions and Random Matrix Theory," *Duke Math. J.*, **81**, 2, 269-322, (1996). MR **97f** :11074.

[SA] P. Sarnak, "L-Functions," ICM Talk, Berlin, 1998.

[SCH] F. K. Schmidt, "Analytische Zahlen Theorie in Körpern der Charakteristik p," *Math. Zeit.*, **33**, 1-32, (1931).

[SH1] G. Shimura, "On the Holomorphy of Certain Dirichlet Series," *Proc. London Math. Soc. (3)*, **31**, 79-98, (1975). MR **52** :3064.

[SH2] G. Shimura, "On Modular Forms of Half-Integral Weight," *Ann. Math.*, **97**, 440-481, (1973). MR **48** :10989.

[SI1] J. Silverman, "The Arithmetic of Elliptic Curves," G.T.M., Springer, (1986). MR **87g** :11070.

[SI2] J. Silverman, "The Average Rank of a Family of Elliptic Curves," (preprint), (1997).

[ST] S.A. Stepanov, "The Number of Points of Hyperelliptic Curve Over a Prime Field," *Izv. Akad. Nauk. SSSR. Mat.*, **33**, 1171-1181, (1969). MR **40** :5620.

[TA] J. Tate, "On the Conjecture of Birch Swinnerton-Dyer and a Geometric Analogue," *Seminar Bourbaki*, Fev. (1966), Exp. 306). CMP **98** :09.

[TI] E. Titchmarsh, "The Theory of the Riemann Zeta Function," Oxford University Press, Second Edition, (1986). MR **88c** :11049.

[V] J. Vanderkam, "The Rank of Quotients of $J_0(N)$" (preprint), (1997).

[WE1] A. Weil, "Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen Durch Funktion Algleichungen," *Math. Ann.*, **168**, 149-156, (1967). MR **34** :7473.

[WE2] A. Weil, "Basic Number Theory," Third Edition, Springer, Berlin, (1974). MR **55** :302.

[WE3] A. Weil, "Sur les Fonctions Algébriques à corps de Constantes Fini," *C.R. Acad. Sci.*, Paris, **210**, 592-594, (1940). MR **2** :123d.

[WE4] A. Weil, "On the Riemann Hypothesis in Function Fields," *Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A.*, **27**, 345-349, (1941). MR **2** :345b.

[WI] E. Wigner, "Random Matrices in Physics," *Siam Review*, **9**, 1-23, (1967).

[WO] S. Wong, "Rank Zero Twists of Elliptic Curves," (preprint), (1996).