

Entretien de J.-P. Serre avec Mariana Cook, Paris, 2007

Je préfère fermer les yeux lorsque je réfléchis aux mathématiques. Le meilleur travail s'accomplit la nuit, dans un état de demi-sommeil. Il m'arrive de me coucher en me disant : "Ah, j'ai un beau lemme à démontrer - ou à infirmer". (Dois-je expliquer ce qu'est un "lemme" ? Un alpiniste a besoin de prises pour passer d'un niveau à l'autre. Les lemmes sont les "prises" du mathématicien.) Bien sûr, il faut ensuite mettre les choses par écrit, ne serait-ce que pour les publier. Parfois, on découvre alors que ce que l'on avait imaginé était faux, mais c'est rare.

Ma thèse (1950-1951) en est un cas typique. Il y avait une idée nouvelle, d'apparence simple mais très puissante (la "fibration de l'espace des lacets", trouvée la nuit, dans un train). Cette idée fondamentale ne suffisait pas : il y avait un volet technique nécessitant un lemme assez difficile. Pendant trois jours, je ne parvenais à visualiser la démonstration de ce lemme que lorsque j'étais allongé sur mon lit, les yeux fermés. Une fois cela fait, je l'avais suffisamment bien comprise pour pouvoir la rédiger ; ma thèse était pour l'essentiel terminée.

À cette époque, je travaillais dans la branche des mathématiques appelée "topologie". Deux ans plus tard, je me suis orienté vers autre chose : les fonctions de plusieurs variables complexes (le sujet de prédilection de mon directeur de thèse, Henri Cartan). Cela n'a pas duré longtemps. Au bout d'un an, j'ai été attiré par la géométrie algébrique, puis par la théorie des nombres, la théorie des groupes, etc. Résultat : aujourd'hui encore, je ne suis spécialiste d'aucun domaine !

Je crois devoir vous parler des diverses conjectures que j'ai formulées au cours des cinquante dernières années. (Qu'est-ce qu'une "conjecture" ? C'est une proposition que l'on ne peut pas démontrer, mais que l'on suppose vraie et intéressante.) J'en ai formulé un certain nombre, dont certaines étaient totalement erronées (lorsque j'avais moins de trente ans ; je suis devenu plus prudent avec l'âge). Plusieurs de ces conjectures ont fait l'objet de nombreuses études. Parmi elles figurent celles concernant la cohomologie galoisienne (formulées en 1962), baptisées "conjecture I" et "conjecture II"¹. La conjecture I est désormais un théorème (démonstré trois ans après que je l'ai formulée). Quant à la conjecture II, elle reste ouverte après quarante-cinq ans, mais la plupart des cas particuliers ont été démontrés. Peut-être s'avèrera-t-elle fautive dans les autres cas ? Je ne le pense pas, mais ce que j'espère vraiment, c'est qu'elle soit tranchée : oui ou non !

Si vous cherchez "conjecture de Serre" sur le Web, vous en trouverez probablement une autre (concernant les "représentations galoisiennes") que j'ai formulée au début des années 1970 (et sous une forme affinée au milieu des années 1980). Elle a connu un grand retentissement pour deux raisons : elle est liée au dernier théorème de Fermat (une mauvaise raison) et elle constitue une première étape vers un "programme de Langlands en caractéristique p " (une bonne raison). Elle semblait hors de portée jusqu'à il y a environ cinq ans, moment où quelqu'un a soudain eu une idée géniale et en a résolu une grande partie. Aujourd'hui, grâce à la contribution de plusieurs personnes, la conjecture n'est plus : elle est devenue un théorème. D'ailleurs, je vais bientôt assister,

1. Note de la transcriptrice : une présentation trouvée dans le résumé d'une conférence de Philippe Gille : *Les conjectures I et II de Serre ont été énoncées en 1962 dans le livre "Cohomologie galoisienne". Ce sont des conjectures d'annulation en cohomologie galoisienne non abélienne qui permettent notamment de classifier les groupes algébriques semi-simples pour des corps de dimension cohomologique 1 et 2, par exemple des corps de fonctions de courbes et de surfaces complexes.*

près de Marseille, à une conférence de deux semaines durant laquelle la démonstration sera résumée et expliquée (même deux semaines ne suffisent pas pour en exposer tous les détails).

Lorsque j'ai formulé la "conjecture de Serre" (sous sa forme affinée), j'avais choisi de l'exprimer dans un cadre qui m'était familier et qui se prêtait à une explication simple. Toutefois, à un niveau plus conceptuel, je savais qu'elle méritait d'être formulée autrement. Ces deux approches étaient certes analogues, mais pas équivalentes *a priori*.

Un conflit opposait ma décision consciente de choisir la facilité à mon intuition inconsciente que ce n'était pas "la bonne voie". Ce conflit me tourmentait et me rendait très malheureux ; je me souviens d'une nuit terrible où j'avais l'impression que les deux parties de mon cerveau s'affrontaient et tournaient en boucle sans fin. Puis, quelques mois plus tard, j'ai découvert un exemple montrant que les deux points de vue n'étaient pas équivalents, et que le bon n'était pas celui que j'avais retenu. Mais j'ai aussi constaté que, dans tous les cas vraiment intéressants, ils étaient équivalents. Curieusement, la découverte de ce "contre-exemple" m'a procuré un immense bonheur : les deux facettes de mon cerveau s'étaient réconciliées. Happy end.