La magie des nombres entiers.
James Maynard

Pour le professeur James Maynard, plus un problème mathématique est difficile, plus il est attrayant. Le nouveau professeur de mathématiques Regius d'Oxford décrit comment il combine la créativité, la collaboration et la ténacité pour réaliser des percées mathématiques ; la joie d'enseigner les mathématiques ; et comment les mathématiciens devraient répondre à l'influence croissante de l'intelligence artificielle.

On suppose souvent que de grandes percées mathématiques se produisent lorsque les personnes douées ont des éclairs soudains d'inspiration.

Mais comme le dit le professeur James Maynard, c'est souvent loin d'être le cas. Et il devrait le savoir, ayant fait plusieurs percées lui-même.

"Les mathématiques ont une longue histoire intellectuelle cumulative", dit-il. "Nous apportons tous de très petites contributions, en nous appuyant sur le travail fantastique qui a été fait auparavant. C'est l'une des raisons pour lesquelles j'aime tant le sujet : le sentiment que je fais partie d'un continuum qui inclut les plus grands mathématiciens de l'histoire."

Des mots modestes pour quelqu'un qui s'est vu décerner une médaille Fields, largement considérée comme l'équivalent mathématique d'un prix Nobel, pour ses "contributions spectaculaires" à la théorie analytique des nombres.

La citation de la médaille Fields de Maynard décrit son travail comme "très ingénieux, conduisant souvent à des percées surprenantes sur des problèmes importants qui semblaient inaccessibles par les techniques actuelles". De tels problèmes apparemment insolubles, dont certains résistent aux mathématiciens depuis des siècles, sont devenus un thème déterminant de sa carrière.

De la "tête dans le noir" aux moments d'illumination, en passant par la joie d'enseigner et le pouvoir de la collaboration, Maynard réfléchit à ce qui motive la découverte mathématique et son amour durable pour le sujet.

"Je me considère comme faisant partie d'un énorme effort intellectuel collectif de mathématiciens du monde entier qui remonte à des siècles, un effort à l'échelle de l'humanité pour essayer de répondre à des questions fondamentales sur la façon dont notre monde fonctionne. Collectivement, nous nous appuyons tous sur tout ce qui est arrivé dans le passé."

La magie et le mystère des nombres premiers

La spécialité de Maynard est la théorie des nombres : les propriétés mathématiques des nombres entiers, les nombres que nous utilisons tous pour compter les objets du quotidien.

Comme il le dit, les nombres entiers sont si fondamentaux pour les mathématiques qu'il pourrait sembler que tout ce qu'il y a d'important à savoir à leur sujet aurait dû être découvert il y a des

milliers d'années.

"Mais il s'avère qu'il y a vraiment des questions fondamentales liées aux propriétés de nombres entiers qui ont contrecarré les meilleures tentatives des mathématiciens pour les résoudre pendant des milliers d'années."

Certains de ces problèmes sont si simples que vous pourriez les expliquer à un jeune enfant. L'un des exemples les plus célèbres concerne les écarts entre les nombres premiers tels qu'ils apparaissent le long de la ligne de nombre infinie.

La conjecture de l'infinitude de l'ensemble des nombres premiers jumeaux propose qu'il existe infiniment de nombreuses paires de nombres jumeaux, des nombres premiers séparés par un écart de longueur deux (comme 11 et 13). Mais les mathématiciens ne peuvent toujours pas prouver de manière concluante que c'est le cas.

En 2013, Yitang Zhang a fait une percée significative en prouvant qu'il existe une infinité de paires de nombres premiers séparés par un écart inférieur à 70 millions. Étudiant postdoctoral à l'Université de Montréal, Maynard a apporté l'une de ses premières contributions significatives sur le terrain plus tard cette année-là, en développant une nouvelle approche qui a réduit l'écart de 70 millions à 600, dans le cadre d'une collaboration mondiale ultérieure du groupe Polymath.

"J'étais exceptionnellement excité d'être impliqué dans cela", dit-il. "Je pense que cela m'a donné beaucoup de confiance car cela m'a fait croire que j'ai pu apporter de nouvelles contributions à la recherche dont mes collègues se souciaient."

Son approche s'est construite sur des méthodes de cribles, qui fonctionnent plutôt comme des versions de plus en plus sophistiquées de l'ancien crible d'Eratosthène. Ceux-ci éliminent successivement les nombres de candidats d'une liste en utilisant les conditions mathématiques choisies afin d'identifier où les nombres premiers pourraient se trouver. Les méthodes de cribles peuvent sembler faciles à réaliser, mais elles nécessitent généralement des résultats solides pour obtenir une preuve.

La percée de Zhang est venue par l'amélioration de l'apport à la méthode du crible, mais Maynard s'est concentré sur l'affinage de la méthode du crible lui-même. En fin de compte, cela signifiait que des informations plus faibles sur la distribution des nombres premiers pouvaient encore être utilisées pour parvenir à des conclusions solides sur les écarts entre eux.

Les questions sur la façon dont les nombres premiers sont distribués ont continué d'occuper une grande partie de la recherche de Maynard. Au cœur se trouve une question trompeusement simple : combien d'ordre est caché dans le modèle apparemment imprévisible des nombres premiers ?

"Les mathématiciens comprennent remarquablement bien la large distribution des nombres premiers, mais on en sait beaucoup moins sur la fiabilité de ces modèles lorsqu'ils sont examinés à des échelles plus fines", dit-il. "Par exemple, les nombres premiers restent-elles uniformément répartis lorsque les nombres sont séparés en différentes séquences arithmétiques ?"

Ces questions sont étroitement liées à l'hypothèse de Riemann, peut-être le problème non résolu le plus célèbre en mathématiques. Une preuve de l'hypothèse fournirait aux mathématiciens une information extraordinaire sur la façon dont les nombres premiers sont régulièrement distribués.

Au lieu de tenter de prouver directement l'hypothèse de Riemann, Maynard a développé de nouvelles techniques, y compris dans son travail avec le mathématicien Larry Guth, qui permettent aux mathématiciens d'établir des résultats plus forts sur la distribution des nombres premiers sans avoir d'abord à résoudre l'hypothèse de Riemann elle-même. En fin de compte, cela contribue à repousser les limites de ce qui peut actuellement être prouvé sur certains des objets les plus fondamentaux en mathématiques.

"Ma conviction est qu'il y a une raison sous-jacente pour laquelle l'hypothèse de Riemann est vraie, et donc elle sera définitivement résolue par l'humanité finalement", dit-il. "Le seul problème, c'est que nous n'avons actuellement aucune idée de ce qu'est cette raison !"

"Pour moi, la théorie des nombres a cette combinaison incroyablement excitante et convaincante des objets fondamentaux les plus fondamentaux en mathématiques et des problèmes qui ont été au-delà des efforts des meilleurs mathématiciens pendant des centaines d'années."

Attiré par les problèmes non résolus.

Plutôt que d'être intimidé par des problèmes qui sont restés irrésolus pendant des siècles, Maynard a été attiré par eux tout au long de sa carrière.

Sa fascination pour les mathématiques elle-même a commencé beaucoup plus tôt.

"Les maths ont toujours été ma matière préféré à l'école. J'ai trouvé vraiment convaincant qu'il n'ait pas de contraintes physiques, d'être alimenté par une pensée intellectuelle pure", dit-il. "Cela permet de découvrir des vérités compliquées et non évidentes inhérentes à l'Univers par le seul raisonnement. J'ai toujours trouvé cela extrêmement beau et puissant."

Un autre attrait, ajoute-t-il, est qu'une fois qu'une théorie mathématique est en place, elle reste vraie pour toujours. "Ce n'est pas le cas qu'une version plus récente et supérieure d'une théorie viendra et reléguera la théorie plus ancienne comme n'étant plus exacte. Contrairement à un record olympique, qui sera battu un jour, une fois qu'une vérité est découverte, elle sera toujours vraie."

Cette fascination précoce a conduit Maynard à terminer un diplôme de mathématiques au Queens' College de l'Université de Cambridge, avant de déménager à l'Université d'Oxford pour compléter son doctorat au Balliol College.

Au moment où il avait obtenu son diplôme et déménagé à l'Université de Montréal pour une bourse postdoctorale d'un an, il était devenu obsédé par le problème de la distribution des nombres premiers, bien qu'il ait averti par son mentor Andrew Granville de la difficulté des problèmes arithmétiques. Cette attitude est venue définir sa carrière ; une contrainte d'explorer les problèmes où les techniques mathématiques existantes semblent avoir atteint leurs limites.

Mais, dit-il, c'est bien plus que de résoudre des problèmes difficiles pour le bien de cela.

"J'aime travailler à proximité de ces problèmes très médiatisés sur lesquels les mathématiciens sont coincés depuis longtemps parce qu'ils agissent un peu comme un aiguiseur de couteau", dit-il. "Ils nous obligent à développer des techniques mathématiques plus aiguës qui pourraient alors avoir des applications plus larges. J'ai de la chance que la théorie des nombres ait plusieurs de ces problèmes."

Son travail a donc bien dépassé les écarts entre les nombres premiers.

En 2019, en collaboration avec Dimitris Koukoulopoulos, Maynard a prouvé la conjecture de Duffin-Schaeffer, un problème posé pour la première fois en 1941 dans le domaine de l'approximation diophantienne. D'une manière générale, cette conjecture demande à quel point les nombres irrationnels peuvent être approchés par fractions.

Duffin et Schaeffer avaient proposé un critère précis pour déterminer quand presque chaque nombre réel peut être approché à l'infini souvent par des fractions tirées d'un ensemble restreint. Leur conjecture a résisté à la preuve pendant près de huit décennies avant que Maynard et Koukoulopoulos ne la résolvent.

"Je trouvais que c'était une question très naturelle à poser, mais la chose qui m'a vraiment permis de travailler sur ce problème était la combinaison de différentes idées et techniques qui se sont réunies - la théorie ergodique et la théorie des mesures combinées à la combinatoire additive et à la théorie des nombres analytiques", explique Maynard. "J'ai trouvé cette combinaison complémentaire convaincante.

Trébucher dans le noir.

Recevoir une médaille Fields était "une surprise inattendue" pour Maynard, qui estimait qu'il était "tout à fait surréaliste de voir mon nom aux côtés de géants mathématiques que j'avais lus quand j'étais enfant".

Néanmoins, il a fait un choix conscient de ne pas laisser son prix changer fondamentalement sa vie quotidienne en tant que mathématicien. Comme il l'explique, cela implique généralement une fusion hautement créative de l'expérimentation et de l'intuition.

"Lorsque je commence à travailler sur un problème, ma première étape est de lire la littérature pour comprendre ce que sont nos techniques actuelles qui les limitent et signifie que nous ne pouvons pas faire de nouveaux progrès", dit-il. Plutôt que d'attaquer le problème de front, sa stratégie est de construire une "version de jouet" plus simple qui isole l'une de ces difficultés avec les techniques actuelles.

"Une énorme partie de mes recherches consiste à chercher mon chemin dans l'obscurité en essayant de deviner ce qu'est vraiment un objet étrangement en terme de forme et texture, en espérant qu'à un moment donné, mon intuition développera une compréhension de cet objet si grande que j'aurai

un moment d'illumination."

"Si je peux surmonter cette difficulté dans ce problème très dépouillé, alors je peux générer une technique plus flexible et adaptable qui peut ensuite être appliquée à la question plus vaste."

Cette méthode appelle à bloquer de grands morceaux de temps pour penser les choses intensément dans son bureau : "Juste moi avec un stylo et du papier, essayant différentes idées. Souvent, le problème devient si absorbant qu'il devient difficile de penser à autre chose".

"En ces temps, quoi que je fasse, je pense toujours à ce problème que j'essaie de résoudre", dit-il. "C'est comme si je collaborais avec un alter ego subconscient qui pense d'une manière différente de la mienne. Je vois cela comme un moyen important de développer mon intuition et d'avoir un sentiment pour ce qui se passe. Il est courant pour moi de terminer la journée de travail en me sentant très frustré parce que je n'ai pas réussi à résoudre le problème sur lequel je travaillais, puis alors que je rentre soudainement chez moi, tout s'éclaire et je vois exactement comment tout faire."

Parfois, il se réveille dans la nuit avec une idée, qu'il griffonne dans un cahier - bien qu'il estime qu'environ la moitié seulement de ces notes nocturnes s'avère vraiment utile le lendemain matin.

"Travailler sur des problèmes dans la théorie des nombres est un processus exceptionnellement créatif alors que vous testez les choses, construisez votre intuition, pensez à différentes façons de voir le problème et de mettre constamment à jour vos croyances. Les mathématiques sont souvent considérées comme un sujet très rigide et logique, mais je pense que mon travail quotidien a beaucoup en commun avec certains de mes collègues des sciences expérimentales ou des arts."

Ces longues heures de solitude, cependant, sont équilibrées en travaillant avec des collaborateurs, en faisant rebondir des idées sur des collègues et des "discussions sérendipiteuses" autour d'un café. Ces interactions, dit-il, sont souvent exceptionnellement utiles, "en particulier lorsque les gens apportent des perspectives différentes à la table. Il y a souvent des moments où j'ai l'impression d'avoir atteint une impasse complète, mais mon collaborateur regarde tout le problème d'une manière différente et il peut voir quelque chose que je ne peux pas voir du tout."

Cette éthique s'étend au-delà de l'Institut mathématique lui-même, ajoute-t-il. Au lieu d'être isolé, le système collégial d'Oxford l'encourage à interagir avec des collègues de nombreux sujets et départements différents.

"Je pense qu'il est très important pour les universitaires d'avoir à la fois une expertise étroite dans leur propre spécialité et une large appréciation des différentes perspectives dans différentes disciplines. Je trouve que l'apprentissage de différents points de vue de mes collègues est à la fois une pause rafraîchissante et très bénéfique pour mon travail. Même une idée vague dans une discipline sans rapport peut aider à stimuler une approche différente d'un problème mathématique."

Il se sent "exceptionnellement chanceux" d'avoir passé une si grande partie de sa carrière à Oxford. Ses postes comprennent Clay Research Fellow basé au Magdalen College, Supernumerary Fellow en mathématiques au St John's College et maintenant professeur au Merton College.

“J’ai beaucoup bénéficié d’avoir de brillants mentors et collègues à Oxford, ainsi que de l’environnement intellectuel unique ici. Il y a un vrai buzz à Oxford qui est incroyablement stimulant. Quand je passe devant les bureaux des gens, je sens qu’il y a peut-être une percée qui se produit juste derrière cette porte...”

Monter dans le leadership.

Cette année marque un nouveau chapitre pour Maynard alors qu’il devient professeur de mathématiques Regius à l’Université d’Oxford, succédant au premier responsable de la chaire, le professeur Sir Andrew Wiles.

L’Oxford Regius Professorship a été créé en 2016 dans le cadre des célébrations du 90e anniversaire de la reine Elizabeth II et est l’un des trois Regius Professorships of Mathematics au Royaume-Uni, les autres étant à St Andrews et Warwick. Ces titres souverains reconnaissent des universitaires exceptionnels, en plus de reconnaître d’excellents centres de recherche et d’enseignement.

Bien que “ravi” de sa nomination, Maynard reconnaît qu’il s’agit d’une période incertaine pour les mathématiques dans lesquelles il souhaite prendre une position de leadership.

Avec les capacités en évolution rapide de l’IA, il estime qu’il est essentiel que la communauté mathématique se rassemble pour déterminer comment elle naviguera “ce qui est susceptible d’être une période perturbatrice au cours des prochaines années”.

Cette année, par exemple, OpenAI a fait la une des journaux.

Il s’agit de l’un des sept problèmes de prix du millénaire publiés par l’Institut de mathématiques Clay, chacun d’entre permettant d’obtenir une récompense de 1 million à tout mathématicien qui en résoudrait un. Quelques semaines plus tard, OpenAI a publié 722 articles du jour au lendemain pour résoudre un large éventail de problèmes mathématiques - allant des progrès progressifs aux percées apparentes.

Pour Maynard, cependant, l’importance de l’IA n’est pas simplement de savoir si les machines peuvent produire des preuves correctes, mais comment elle façonnera l’avenir de la discipline elle-même.

“L’IA et les technologies avancées peuvent être en mesure de résoudre des problèmes très médiatisés, mais elles le font sans contribuer à notre compréhension humaine des mathématiques, ce qui compte le plus.”

“Sans aucun doute, l’IA et d’autres progrès technologiques vont changer bon nombre des aspects pratiques pour les mathématiciens : la façon dont nous enseignons les mathématiques aux étudiants de premier cycle, la façon dont nous formons les étudiants diplômés, le fonctionnement du système de revue et quels sont les bons moyens de récompenser les gens”, dit-il.

“Tout cela devra être légèrement ajusté, et cela nécessite de nombreuses parties prenantes différentes pour se réunir et y réfléchir attentivement. J’espère qu’en tant que professeur d’Oxford Regius, je pourrai jouer un rôle actif dans le rassemblement de différentes parties prenantes afin que nous puissions déterminer comment notre domaine peut s’adapter à ces défis et s’épanouir.”

Mais il reste optimiste quant à l’avenir de sa profession. Plutôt que de remplacer les mathématiciens par l’IA, il croit que de tels systèmes pourraient devenir des outils puissants qui pourraient “aider à accélérer la recherche de manière spectaculaire, nous permettant de nous concentrer sur les choses qui comptent vraiment”.

“L’objectif principal des mathématiques n’a jamais été de résoudre des problèmes de prix de haut niveau”, ajoute-t-il. “Vraiment, c’est seulement une approche pour développer ce qui est le plus important - développer une compréhension humaine des mathématiques. Cependant, si l’IA est soudainement capable de générer des réponses à des problèmes précédemment non résolus, en tant que domaine, nous pouvons avoir besoin de reconsidérer ce que nous apprécions et récompensons.”

Mais peu importe combien d’IA s’intègre dans les mathématiques, pour Maynard, il reste un plaisir nettement humain à passer de la confusion à la compréhension - ce qui est l’une des raisons pour lesquelles il trouve l’enseignement des mathématiques “exceptionnellement enrichissant”.

“Plutôt que de simplement dire le résultat aux étudiants, j’aime “lever le couvercle” et expliquer comment les mathématiciens l’ont inventé en premier lieu”, dit-il. “C’est un moment brillant où leurs visages s’illuminent parce qu’ils l’obtiennent soudainement. Ce concept qui semblait légèrement étranger et intimidant pour eux semble maintenant soudainement complètement naturel et simple.”

“Les mathématiques peuvent souffrir de l’impression que beaucoup des progrès importants ont été réalisés par des génies il y a des centaines d’années, plutôt que d’être un domaine très dynamique et actif dont tout le monde peut s’inspirer.”

Ces moments fournissent un contrepoint efficace à sa vie de recherche, ajoute-t-il.

“En recherche, vous passez généralement de longues périodes sans rien démontrer, avec de rares moments intermittents d’illumination”, dit-il. “Alors que l’enseignement vous donne un retour positif instantané lorsque vous contribuez à la compréhension d’une autre personne. Je suis également toujours étonné de voir comment les sujets d’enseignement que je connais toujours me mettent un peu au défi de les enseigner, de sorte que je sens que je comprends un peu mieux le domaine d’études en l’ayant enseigné à d’autres personnes.”

Le côté humain des mathématiques.

Penser intensément aux mathématiques toute la journée - que ce soit dans la recherche ou l’enseignement - peut rendre difficile le “changement” de travail en dehors, admet Maynard.

“Quand mon esprit est complètement obsédé par un problème, même lorsque je rentre chez moi,

je dépense peut-être inconsciemment 90% de mon effort intellectuel en pensant aux mathématiques", dit-il. "Pendant le dîner, il faut parfois me rappeler que je suis censé avoir une conversation appropriée plutôt que de dériver et de penser aux mathématiques." Ses jeunes enfants, cependant, fournissent un remède efficace pour cela : "Ils me forcent plus ou moins à laisser tomber toutes les mathématiques quand j'interagis avec eux, donc c'est une pause rafraîchissante".

Se rendre à des conférences de mathématiques lui donne également l'occasion de se livrer à ses trois grandes passions, la photographie, le café et l'art moderne.

"Si je visite une nouvelle ville, mes trois priorités sont de visiter une galerie d'art moderne, de trouver un café prétentieux et hors de prix et d'utiliser mon appareil pour prendre des photos", dit-il.

"L'une de mes façons préférées de photographier une ville, ce sont les paysages urbains nocturnes ; ceux-ci donnent une vue sur toute la ville, mais soulignent également l'affaire et l'activité qui se déroulent à travers toutes les lumières et le mouvement."

Ceci convient particulièrement à quelqu'un dont le travail consiste en la recherche continue de nouvelles façons de regarder des objets familiers, ces intérêts offrent différentes façons d'observer et de s'engager avec le monde. Mais ils soulignent aussi quelque chose que Maynard dit qu'il a pris étonnamment longtemps à apprécier : malgré toute son abstraction, les mathématiques sont une activité intensement humaine.

"J'avais l'habitude de supposer qu'être un mathématicien signifiait travailler seul la plupart du temps dans mon bureau", dit-il. "Il m'a fallu beaucoup de temps pour réaliser à quel point c'est plus une activité sociale, je discute d'idées avec des collègues, je partage des discussions pleines de sérendipité autour d'un café ou je collabore avec d'autres dans le monde entier. Et avec chaque étudiant diplômé que je conseille, je finis par avoir un style de travail et une relation complètement différents, parce que nous sommes tous des humains différents avec des personnalités différentes."

Pour Maynard, cette dimension humaine est inséparable de l'effort intellectuel de plusieurs siècles qui l'a attiré pour la première fois en mathématiques. Maintenant, alors qu'il occupe le poste de professeur Regius à l'université où il a terminé son doctorat et a passé une grande partie de sa carrière, il se trouve dans une position non seulement pour contribuer à cette entreprise par ses propres recherches, mais pour aider à façonner ce qui vient ensuite.

"C'est une communauté très généreuse et accueillante, dit-il, et cette communauté est très spéciale."