

Traduction depuis le latin ¹ d'un texte de Carl Gustav Jakob Jacobi, de calcul de min-max dans des tableaux

Sur l'étude de l'ordre d'un système d'équations différentielles ordinaires C. G. J. Jacobi ²

1.

La recherche est axée sur la résolution du problème des inégalités.

Un système d'équations différentielles ordinaires est non canonique ³ si ses équations contiennent les différentielles d'ordre le plus élevé des variables dépendantes de telle sorte qu'il est impossible d'en calculer les valeurs. Cela se produit lorsqu'on trouve, dans le système proposé ou par élimination, des équations dépourvues de ces différentielles d'ordre le plus élevé. Dans ce cas, le nombre de constantes arbitraires introduites par l'intégration complète, ou l'ordre du système, est toujours inférieur à la somme des ordres les plus élevés des différentielles des variables individuelles dans les équations différentielles proposées. L'ordre du système est connu si, par dérivations et éliminations, il est possible de le réduire à une autre forme canonique qui lui est équivalente, de sorte que le retour au système proposé soit également évident à partir du système canonique. En effet, la somme des ordres les plus élevés des différentielles des variables dépendantes individuelles dans le système canonique correspond également à l'ordre du système non canonique proposé. Cependant, pour déterminer son ordre, il n'est pas nécessaire de le réduire à une forme canonique, mais le problème peut être résolu par les considérations suivantes. Supposons qu'entre la variable indépendante t et n variables dépendantes x_1, x_2, \dots, x_n , il existe n équations différentielles

$$u_1 = 0, u_2 = 0, \dots, u_n = 0, \quad (1)$$

que $h_k^{(i)}$ soit ainsi l'ordre le plus élevé auquel, dans l'équation $u_i = 0$, les différentielles de la variable x_k augmentent. Et tout d'abord, j'observe que la question peut être ramenée au cas plus simple où les équations différentielles proposées sont linéaires. En effet, en faisant varier l'équation (1), entre les variations

$$\delta x_1 = \xi_1, \delta x_2 = \xi_2, \dots, \delta x_n = \xi_n \quad (2)$$

on obtient un système d'équations différentielles linéaires

$$v_1 = 0, v_2 = 0, \dots, v_n = 0, \quad (3)$$

1. en ayant perdu le mien.

Denise Vella-Chemla, mai 2026. Je viens de découvrir que c'est le frère Moritz, de Carl Gustav Jakob, qui a inventé la galvanoplastie, et mes ancêtres, de la génération $n + 2$ à la génération $n + 4$ je crois, côté paternel 2 ou 3 fois donc, avaient une petite société de galvanoplastie, il était noté cette profession pour mon père : ouvrier galvanoplaste, ils devaient des bijoux par électrolyse.

2. (Extrait III des manuscrits posthumes de C. G. J. Jacobi publiés par C. W. Borchardt. p. 297-320.)

3. Le système, que l'on appelle ici *canonique* ou *forme canonique gaudens*, est identique à celui que l'on nomme, dans la théorie du nouveau multiplicateur, *forme normale predictum* (Journal de Crelle, vol. 29, p. 369. Conf. h. éd., vol. IV, p. 501), mais il diffère nettement de celui auquel Jacobi, dans ses *Commentatione nova methodus, aequat. diff. partiales primi ordinis integrandi* (Journal de Crelle, vol. 60, p. 121. Conf. h., vol. p. 128), donne le nom de canonique.

et, à nouveau, $h_k^{(i)}$ sera le degré le plus élevé auquel tendent les différentielles de $\xi_k = \delta x_k$ dans l'équation $v_i = \delta u_i = 0$. L'intégration complète de ces équations différentielles linéaires (3) est donnée si, pour les valeurs $k = 1, 2, \dots, n$, on pose

$$\xi_k = \delta x_k = \beta_1 \frac{\partial x_k}{\partial \alpha_1} + \beta_2 \frac{\partial x_k}{\partial \alpha_2} + \dots, \quad (4)$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ désignent les constantes arbitraires intervenant dans les valeurs de l'ensemble complet des variables x_1, x_2, \dots, x_n , extraites de l'intégration des équations (1), et β_1, β_2, \dots désignent les constantes arbitraires induites par l'intégration du système (3). Ainsi, le nombre de constantes arbitraires dans l'intégration complète des équations différentielles proposées (1) et des équations linéaires (3) est identique, ou encore l'ordre des deux systèmes est le même.

Pour déterminer l'ordre du système d'équations différentielles linéaires (3), on peut supposer que les coefficients sont constants. Dans ce cas, l'intégration complète s'obtient par la méthode classique, sans réduction à la forme canonique. Notons par le symbole

$$(\xi)_m$$

l'expression

$$A_0 \xi + A_1 \frac{d\xi}{dt} + A_2 \frac{d^2 \xi}{dt^2} + \dots + A_m \frac{d^m \xi}{dt^m} = (\xi)_m,$$

dans lesquelles $A_0, A_1, A_2, \dots, A_m$ sont des constantes, les équations (3) seront satisfaites, si nous fixons leurs coefficients constants, sous cette forme,

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1 = (\xi_1)_{h'_1} + (\xi_2)_{h'_2} + \dots + (\xi_n)_{h'_n} = 0, \\ v_2 = (\xi_1)_{h''_1} + (\xi_2)_{h''_2} + \dots + (\xi_n)_{h''_n} = 0, \\ \dots, \\ v_n = (\xi_1)_{h^{(n)}_1} + (\xi_2)_{h^{(n)}_2} + \dots + (\xi_n)_{h^{(n)}_n} = 0, \end{array} \right. \quad (5)$$

Mettons dans ces équations $\xi_k = C_k e^{\lambda t}$, C_k et λ , on obtient de (5) :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = C_1[\lambda]_{h'_1} + C_2[\lambda]_{h'_2} + \dots + C_n[\lambda]_{h'_n}, \\ 0 = C_1[\lambda]_{h''_1} + C_2[\lambda]_{h''_2} + \dots + C_n[\lambda]_{h''_n}, \\ \dots \\ 0 = C_1[\lambda]_{h^{(n)}_1} + C_2[\lambda]_{h^{(n)}_2} + \dots + C_n[\lambda]_{h^{(n)}_n}, \end{array} \right. \quad (6)$$

en désignant par $[\lambda]_m$ la fonction de la quantité λ et d'ordre intégral m .

En éliminant C_1, C_2, \dots, C_n , on obtient une équation algébrique dont les racines suggèrent les valeurs que peut prendre λ . À chaque racine ou valeur de λ correspond un système de valeurs de C_1, C_2, \dots, C_n , toutes multipliables par une même constante arbitraire. En reliant les valeurs de chaque variable correspondant à chaque racine, on obtient sa valeur complète. Comme les valeurs des variables individuelles ainsi obtenues sont affectées par les mêmes constantes arbitraires, l'intégration complète des équations (5) induit autant de constantes arbitraires qu'il y a de valeurs de λ . Par conséquent, l'ordre du système d'équations différentielles linéaires (3), voire des équations différentielles proposées (1), est égal au degré de l'équation algébrique qui définit λ . Cette équation peut être représentée ainsi :

$$0 = \Sigma \pm [\lambda]_{h'_1} [\lambda]_{h''_2} \dots [\lambda]_{h_n^{(n)}}, \quad (7)$$

et le degré du déterminant à droite sera égal au maximum des agrégats 1, 2, 3...n, parmi les suivants

$$h'_1 + h''_2 + \dots + h_n^{(n)}$$

On les obtient en modifiant les indices inférieurs ou supérieurs de toutes les manières possibles. De ce fait, nous avons déjà tiré cette proposition mémorable :

Proposition I. *Entre une variable indépendante t et n variables dépendantes x_1, x_2, \dots, x_n , il existe n équations différentielles*

$$u_1 = 0, u_2 = 0, \dots, u_n = 0,$$

telles que $h_k^{(i)}$ soit l'ordre le plus élevé auquel, dans l'équation $u_i = 0$, la variable différentielle x_k augmente. Si on appelle H le maximum de 1.2.3...n agrégats

$$h_1^{(i_1)} + h_2^{(i_2)} + \dots + h_n^{(i_n)},$$

que l'on peut obtenir en prenant pour tous les indices mutuellement différents 1, 2, ..., n ; H sera l'ordre du système d'équations différentielles proposé ou le nombre de constantes arbitraires que leur intégration complète induit.

Dans ce qui précède, j'appelle la plus grande une valeur qui est inférieure à tout autre agrégat de la valeur proposée, de sorte que plusieurs plus grandes valeurs peuvent se produire, égales entre elles, correspondant à différents indices i_1, i_2, \dots, i_n du système.

Le degré de l'équation algébrique (7) n'est réduit que si, dans le déterminant de droite, le coefficient de plus haut degré λ s'annule. Le coefficient de plus haut degré λ est obtenu en substituant dans le déterminant, pour chaque fonction intégrale rationnelle $[\lambda]_{h_k^{(i)}}$, le coefficient $h_k^{(i)}$ -ième de plus haut degré que je noterai

$$[c]_{h_k^{(i)}},$$

et en ne conservant, parmi tous les termes du déterminant

$$\pm [c]_{h_1^{(i_1)}} [c]_{h_2^{(i_2)}} \dots [c]_{h_n^{(i_n)}}$$

que ceux pour lesquels la somme des indices

$$h_1^{(i_1)} + h_2^{(i_2)} + \dots + h_n^{(i_n)}$$

atteint la valeur maximale H . Par conséquent, la réduction de degré n'a lieu que si, pour deux ou plusieurs indices i_1, i_2, \dots, i_n , l'ensemble du système précédent atteint la même valeur maximale et que la somme des produits

$$\pm [c]_{h_1^{(i_1)}} [c]_{h_2^{(i_2)}} \dots [c]_{h_n^{(i_n)}}$$

des indices correspondants du système, pris avec leurs signes, s'annule. Dans les exemples précédents, $[c]_{h_k^{(i)}}$ était égal au coefficient du terme $\delta \frac{d^{h_k^{(i)}} x_k}{dt^{h_k^{(i)}}$ de la fonction u_i obtenu si

$$[c]_{h_k^{(i)}} = \frac{\partial u_i}{\partial \frac{d^{h_k^{(i)}} x_k}{dt^{h_k^{(i)}}$$

Si nous tenons cela pour acquis, la seconde proposition suivante en découle, complémentaire à la première :

Proposition II. *On appellera*

$$u_k^{(i)}$$

la dérivée partielle de u_i , prise par rapport à la variable x_k , la plus élevée dont la fonction u_i fait intervenir la dérivée (c'est-à-dire d'ordre $h_k^{(i)}$). De tous les termes du déterminant

$$\Sigma \pm u_1' u_2''^{(n)},$$

seuls $\pm u_1^{(i_1)} u_2^{(i_2)} \dots u_n^{(i_n)}$ sont conservés, dans lesquels la somme des ordres des dérivées des variables individuelles, selon lesquelles la dérivée partielle a été effectuée en chaque

$$u_1^{(i_1)}, u_2^{(i_2)}, \dots, u_n^{(i_n)}$$

atteint la valeur maximale H . Maintenant, si l'ensemble des termes du déterminant restant est désigné par le signe déterminant entre parenthèses en incluant ainsi

$$(\Sigma \pm u_1' u_2'' \dots u_n^{(n)}),$$

l'ordre du système d'équations différentielles

$$u_1 = 0, u_2 = 0, \dots, u_n = 0,$$

alors finalement il sera inférieur à cette valeur maximale H .

Nous avons découvert précédemment une nouvelle classe de formules, qui manque de détermination

$$(\Sigma \pm u_1' u_2'' \dots u_n^{(n)}).$$

Un indice de cette nature de quantité qui s'annule est que l'ordre du système d'équations différentielles

$$u_1 = 0, u_2 = 0, \dots, u_n = 0$$

subit une diminution particulière du fait de la nature de ces équations.

L'étude de l'ordre d'un système d'équations différentielles ouvre la voie à la recherche d'une méthode permettant de le réduire à une forme canonique. Toutefois, dans ce commentaire, il suffira d'examiner précisément la nature du maximum en question et la manière de le déterminer aisément.

2.

Sur la solution du problème des inégalités, sur lequel repose la détermination de l'ordre de tout système d'équations différentielles. Le schéma proposé permet de définir le canon. Pour tout canon donné, on détermine le plus simple.

L'étude précédente de l'ordre d'un système d'équations différentielles ordinaires a été ramenée au problème d'inégalité suivant, qui mérite également d'être considéré en soi :

Problème.

Soient nn quantités $h_k^{(i)}$ disposées selon le schéma du carré, de sorte qu'il y ait n séries horizontales et n séries verticales, chacune comportant n termes. Parmi ces quantités, on choisit n transversales, c'est-à-dire qu'on les place dans différentes séries horizontales et verticales, ce qui peut se faire de $1.2...n$ façons. Parmi toutes ces façons, il faut rechercher celle qui maximise la somme des nombres choisis.

Ayant disposé les quantités $h_k^{(i)}$ dans une figure carrée

$$\begin{array}{cccc} h'_1 & h''_2 & \dots & h'_n \\ h''_1 & h''_2 & \dots & h''_n \\ \dots & & & \\ h_1^{(n)} & h_2^{(n)} & \dots & h_n^{(n)}, \end{array}$$

je nommerai système le schéma proposé ; je nommerai schéma dérivé tout schéma qui en découle en ajoutant la même quantité

$$l^{(i)}$$

à chacun des termes de la i -ième série horizontale, la quantité à ajouter aux termes de la série horizontale, après quoi chacun des $1, 2...n$ agrégats transversaux, parmi lesquels le plus grand sera choisi, sera augmenté de la même quantité

$$l' + l'' + \dots + l^{(n)} = L,$$

pour former des agrégats individuels, il faut choisir un terme dans chaque série horizontale. Si la décision est prise sur ce point,

$$h_k^{(i)} + l^{(i)} = p_k^{(i)}$$

et l'agrégat transversal maximal $h_k^{(i)}$ formé à partir des termes

$$h_1^{(i_1)} + h_2^{(i_2)} + \dots + h_n^{(i_n)} = H,$$

devient la valeur de l'agrégat transversal maximal $p_k^{(i)}$ formé à partir des termes

$$p_1^{(i_1)} + p_2^{(i_2)} + \dots + p_n^{(i_n)} = H + L,$$

et vice versa. Par conséquent, pour trouver le but maximal, il en va de même que la question porte sur les quantités $h_k^{(i)}$ ou sur les quantités $p_k^{(i)}$.

Supposons que les quantités $l', l'', \dots, l^{(n)}$ soient déterminées de telle sorte que, les quantités $p_k^{(i)}$ étant disposées en une figure carrée comme les quantités $h_k^{(i)}$ et le plus grand terme choisi dans chaque série verticale, tous ces plus grands termes appartiennent à des séries horizontales différentes. Ainsi, si $p_k^{(i_k)}$ est appelé le plus grand des termes

$$p'_k, p''_k, \dots, p_k^{(n)},$$

en agrégeant

$$p_1^{(i_1)} + p_2^{(i_2)} + \dots + p_n^{(i_n)}$$

parmi tous les agrégats transversaux formés à partir des quantités $p_k^{(i)}$, celui-ci sera maximal. Par conséquent, dans ce cas, sans aucun problème, il existe également un agrégat transversal maximal formé à partir des quantités proposées $h_k^{(i)}$,

$$h_1^{(i_1)} + h_2^{(i_2)} + \dots + h_n^{(i_n)},$$

Le problème d'inégalités proposé est ainsi résolu, et les quantités $l', l'', \dots, l^{(i_n)}$, satisfaisant la condition susmentionnée sont trouvées.

Une figure carrée⁴ dont les maxima de différentes verticales se trouvent simultanément dans différentes séries horizontales sera appelée canon par souci de concision. Il est clair que dans un tel canon, tous les termes peuvent être augmentés ou diminués de la même valeur; il s'ensuit que parmi les quantités $l', l'', \dots, l^{(n)}$, une ou plusieurs peuvent être nulles, tandis que les autres deviennent positives. Si $l^{(i)} = 0$, la série $p_1^{(i)}, p_2^{(i)}, \dots, p_n^{(i)}$ est identique à la série de la figure proposée $h_1^{(i)}, h_2^{(i)}, \dots, h_n^{(i)}$, la série du canon à laquelle correspond la quantité nulle l sera appelée par la suite la série invariable. Parmi toutes les solutions, il en existe une qui est la plus simple, c'est-à-dire celle où les quantités individuelles $l^{(i)}$ prennent les plus petites valeurs positives, de sorte qu'aucune autre n'est donnée pour laquelle certaines quantités $l^{(i)}$ prennent des valeurs inférieures tandis que les autres restent inchangées. Le canon correspondant à cette solution sera appelé le canon le plus simple, dont je traiterai la nature ci-après.

Dans tout schéma quadratique, je me réfère aux appellations suivantes, qu'il convient de bien comprendre. Par le terme "série", j'entends toujours la partie horizontale; si la discussion porte sur les éléments verticaux, cela sera clairement indiqué. Par le terme "maximum", j'entends toujours le terme, parmi tous les éléments verticaux, qui est le plus grand, ou en tout cas qui n'est inférieur à aucun autre. Ainsi, j'appellerai maximum d'une série le terme de la série horizontale qui est le plus grand parmi tous ceux qui lui sont associés sur le même élément vertical. Il est possible que la série n'ait pas de maximum, ou même plusieurs maxima différents les uns des autres.

4. une matrice.

Mais si la figure est construite comme un canon, chaque série possède assurément un maximum. S'il y en a plusieurs dans une même série, il est toujours permis de les choisir de sorte que tous les maxima des différentes séries appartiennent à des axes verticaux différents, c'est-à-dire qu'ils forment un système complet de maxima transversaux. Considérons, dans le canon le plus simple, le système de ces maxima et, s'il en existe plusieurs, choisissons-en un. Répartissons maintenant toutes les séries de manière quelconque en deux parties, la série J et la série K , de sorte qu'aucune quantité de la série K ne soit modifiée, c'est-à-dire qu'aucune des quantités l appartenant à la série K ne s'annule : je dis qu'est vérifié le

Théorème I. *Dans le canon le plus simple, il existe au moins un des maxima de la série K auquel il existe un terme égal placé sur la même verticale et appartenant à la série J .*

Autrement, il serait permis de réduire de la même manière toutes les quantités l appartenant à la série K , jusqu'à ce que l'une des quantités l disparaisse, ou que l'un des maxima de la série K devienne égal à un terme placé sur la même verticale et appartenant à la série J . Car, dans ce cas, les maxima des différentes séries ne cesseraient pas d'être des maxima, et la constitution du canon ne serait pas perturbée. Mais les quantités l proposées alors ne seraient pas les moins positives possible, et le canon ne serait donc pas le plus simple.

Si l'on choisit une série singulière pour la série K , il découle du théorème précédent le théorème ci-après :

Théorème II. *Dans le canon le plus simple de toute série invariable, l'autre terme de la même verticale est égal au maximum.*

Après avoir proposé le canon le plus simple, choisissons à nouveau un système complet de maxima transversaux. Dans toute série $\alpha_1^{\text{celle-ci}}$ à laquelle correspond la quantité non nulle l , prenons le maximum auquel, selon II sur la même verticale, est égal le terme de la série $\alpha_2^{\text{cette autre}}$, puis prenons à nouveau le maximum auquel, sur la même verticale, est égal le terme de la série $\alpha_3^{\text{cette autre}}$, et ainsi de suite. Si plusieurs termes sur la même verticale sont égaux à un maximum donné, le procédé prescrit peut être établi de plusieurs manières, mais on a aussi le

Théorème III. *Dans le canon le plus simple, parmi les différentes manières de passer d'une série donnée à d'autres par un processus prescrit, il en existe toujours une par laquelle on arrive à une série inchangée, c'est-à-dire une série à laquelle la valeur $l = 0$ correspond.*

Car dès que le théorème III n'est pas valable, les séries canoniques sont divisées en deux complexes, le premier englobant toutes les séries auxquelles il est permis de passer d'une série donnée par un processus prescrit, et le second toutes les séries auxquelles il n'est pas permis de passer, de sorte que toutes les séries non altérées se trouvent dans le second complexe.

Après cela, il est permis de prendre le premier complexe pour la série K et le second pour la série J du théorème I. Par conséquent, d'après le théorème I, il existe une transition de la série du premier complexe à celle du second, ce qui contredit l'hypothèse. Dès lors, l'affirmation selon laquelle le théorème III est faux est absurde.

Tout canon pour lequel les quantités $l', l'', \dots, l^{(n)}$ prennent respectivement les valeurs $m', m'', \dots, m^{(n)}$, que je suppose toujours positives ou nulles, je l'appellerai par souci de concision le canon

$$(m', m'', \dots, m^{(n)}).$$

Ceci étant établi, on a pour deux canons quelconques le

Théorème IV. *Étant donné deux canons, le premier $(f', f'', \dots, f^{(n)})$ et le second $(g', g'', \dots, g^{(n)})$, il y aura toujours un autre canon $(m', m'', \dots, m^{(n)})$ tel que chaque quantité $m^{(i)}$ soit soit égale à, soit inférieure à la plus petite des valeurs de $f^{(i)}, g^{(i)}$ elles-mêmes.*

Il en découle le corollaire suivant :

Corollaire. *Le canon le plus simple est unique s'il existe un système unique de quantités $l', l'', \dots, l^{(n)}$, qui fournissent le canon le plus simple.*

Soient les quantités $g^{(\alpha+1)}, g^{(\alpha+2)}, \dots, g^{(n)}$ supérieures respectivement à $f^{(\alpha+1)}, f^{(\alpha+2)}, \dots, f^{(n)}$, et les quantités restantes $g', g'', \dots, g^{(\alpha)}$, il existera toujours un autre canon $(m', m'', \dots, m^{(n)})$ tel que chaque quantité $m^{(i)}$ soit inférieure ou égale à la plus petite des valeurs $f^{(i)}, g^{(i)}$.

D'où découle le corollaire suivant :

Corollaire : *Le canon le plus simple est unique s'il existe un système unique de quantités $l', l'', \dots, l^{(n)}$ qui le définit.*

Puisque les quantités $g^{(\alpha+1)}, g^{(\alpha+2)}, \dots, g^{(n)}$ sont respectivement supérieures à $f^{(\alpha+1)}, f^{(\alpha+2)}, \dots, f^{(n)}$, les quantités $g', g'', \dots, g^{(\alpha)}$ sont respectivement égales ou inférieures aux quantités $f', f'', \dots, f^{(\alpha)}$. Nous appelons respectivement $q_k^{(i)}$ et $r_k^{(i)}$ les quantités qui constituent le premier et le deuxième canon, où l'on note généralement

$$r_k^{(i)} = q_k^{(i)} + g^{(i)} - f^{(i)},$$

et où il existe un système de maxima transversaux dans le premier canon,

$$q_1^{(i_1)}, q_2^{(i_2)}, \dots, q_n^{(i_n)},$$

où tous les i_1, i_2, \dots, i_n sont différents les uns des autres ; dans le deuxième canon, il existe également un système de maxima transversaux

$$r_1^{(i_1)}, r_2^{(i_2)}, \dots, r_n^{(i_n)}.$$

Pour tous les agrégats transversaux du deuxième canon, les agrégats correspondants du premier diffèrent de la même quantité

$$g' + g'' + \dots + g^{(n)} - \{f' + f'' + \dots + f^{(n)}\},$$

d'où, puisque l'agrégat

$$q_1^{(i_1)} + q_2^{(i_2)} + \dots + q_n^{(i_n)}$$

est maximum,

$$r^{(i_1)} + r_2^{(i_2)} + \dots + r_n^{(i_n)}$$

de sorte que leur ensemble puisse constituer le maximum. Par conséquent, puisque les termes i_1, i_2, \dots, i_n sont tous différents les uns des autres, ils constituent un système de maximums transversaux, CQFD.

Puisque les quantités $g^{(\alpha+1)}, g^{(\alpha+2)}, \dots, g^{(n)}$ sont respectivement supérieures à $f^{(\alpha+1)}, f^{(\alpha+2)}, \dots, f^{(n)}$, mais que les quantités $f', f'', \dots, f^{(n)}$ sont toutes supposées nulles ou positives, les quantités

$$g^{(\alpha+1)}, g^{(\alpha+2)}, \dots, g^{(n)}$$

sont toutes positives. Or, j'observe qu'il est impossible de trouver un maximum dans la série

$$(\alpha + 1)^{(ia)}, (\alpha + 2)^{(ia)}, \dots$$

ou dans une n -ième série du canon $(g', g'', \dots, g^{(n)})$ auquel il existe un terme égal, placé sur la même verticale, mais appartenant à l'une des autres séries. Soit un maximum dans la série $i_k^{(ia)}$, un terme égal à celui-ci dans la série i^{ia} , tel que

$$r_k^{(i_k)} = r_k^{(i)},$$

où i est l'un des nombres $1, 2, \dots, \alpha$, et i_k l'un des nombres $\alpha + 1, \alpha + 2, \dots, n$: d'après la formule donnée ci-dessus

$$q_k^{(i_k)} + g^{(i_k)} - f^{(i_k)} = q_k^{(i)} + g^{(i)} - f^{(i)},$$

où selon l'hypothèse faite $g^{(i_k)} - f^{(i_k)} > 0$ et $g^{(i)} - f^{(i)} \leq 0$. D'où

$$q_k^{(i_k)} < q_k^{(i)},$$

ce qui est absurde, puisque $q_k^{(i_k)}$ est le maximum parmi tous les termes de la même verticale $q'_k, q''_k, \dots, q_k^{(n)}$. Par conséquent, les quantités $g^{(\alpha+1)}, g^{(\alpha+2)}, \dots, g^{(n)}$ peuvent toutes diminuer de la même valeur, les autres restant inchangées, jusqu'à ce que dans une série $g^{(\alpha+1)}, g^{(\alpha+2)}, \dots$, un maximum soit trouvé, qui ne dépasse pas la valeur d'un autre terme de la cascade verticale appartenant à la série restante, ou jusqu'à ce que l'une des quantités $g^{(\alpha+1)}, g^{(\alpha+2)}, \dots, g^{(n)}$ disparaisse. Par cette diminution, aucun maximum, ni donc la nature du canon, n'est détruit. Si l'on obtient ainsi

$$(g', g'', \dots, g^{(n)}, g_1^{(\alpha+1)}, g_1^{(\alpha+2)}, \dots, g_1^{(n)})$$

et que parmi les quantités $g^{(\alpha+1)}, g^{(\alpha+2)}, \dots$, on ait

$$(m', m'', \dots, m^{(n)}, m^{(\alpha+1)}, m^{(\alpha+2)}, \dots, m^{(n)}),$$

où toutes les quantités entre crochets sont inférieures ou égales aux quantités correspondant à $f', f'', \dots, f^{(n)}$ et $g', g'', \dots, g^{(n)}$. CQFD.

Il découle du théorème IV le

Théorème V. *Il n'existe aucun canon donné pour lequel l'une des quantités l', \dots , prend une valeur inférieure à celle du canon le plus simple.*

En effet, si un tel canon était donné, un autre pourrait être obtenu par la méthode précédente, pour lequel l'une des quantités l', l'', \dots, l' prendrait certainement une valeur inférieure à celle du canon le plus simple, mais les autres ne prendraient pas de valeurs supérieures, ce qui est contraire à la définition du canon le plus simple. Puisque la plus petite valeur que peuvent prendre les quantités l', l'', \dots, l' est 0, il découle de la proposition V, comme corollaire, que

Théorème VI. *Une série qui reste inchangée dans n'importe quel canon est nécessairement la même dans le canon le plus simple.*

Pour déterminer si un canon est très simple ou non, on peut utiliser la proposition suivante :

Théorème VII. *Ayant proposé le canon et choisi un système de maxima transversaux, considérons d'abord la série invariable A , puis la série B , dont les maxima sont égaux aux termes de la même verticale appartenant à la série A ; puis la série C , dont les maxima sont égaux aux termes de la même verticale appartenant à la série B , et ainsi de suite. Si, en procédant de cette manière, nous pouvons épuiser toutes les séries du canon, alors le canon sera le plus simple.*

Soient les quantités l', l'', \dots, l' appartenant au canon proposé, et les quantités appartenant à l'autre canon. Considérons le même système de maxima transversaux que celui supposé avoir été choisi dans le Théorème proposé, auquel correspondra également le système de maxima transversaux de l'autre canon.

Supposons que le maximum de la série y dans l'autre canon ait une valeur inférieure à celle du canon proposé. Supposons que la série y appartienne au complexe C , de sorte que dans le canon proposé, le maximum de la série y soit égal au terme d'une série appartenant au complexe B , ce qui doit également être fait. Pour nommer les terminaux du canon proposé p et de l'autre q , il en sera ainsi :

où, si p est le maximum de la série y , alors q , puisque q est le maximum dans la verticale et donc qu'il faut faire

De plus, dans le canon proposé, le terme de la série ?? relatif au complexe A est égal au maximum de la série ??, et il est démontré de la même manière qu'il devient ($<$), ce qui est absurde, car selon l'hypothèse faite, l_1 est et que les nombres $l'_1, l''_1, \dots, l^{(n)}_1$ sont soit nuls, soit positifs. De même, la réduction à l'absurde se produit : à tout complexe A, B, C, D, \dots appartient la série γ^{ta} , à laquelle correspond dans l'autre canon une quantité $l^{(\gamma)}_1$ inférieure à celle du canon proposé $l^{(\gamma)}$. Par conséquent, si le canon est ainsi constitué et supposé dans VII, je ne peux prendre pour aucune autre quantité des l valeurs inférieures à celles du canon proposé; ou bien le canon proposé est le plus simple.

.....

Les antécédents contiennent également la solution au problème de la recherche du canon le plus simple, étant donné un canon quelconque. Il est permis de supposer que dans un canon donné, il existe au moins une série invariable; si elle n'est pas déjà trouvée, on peut l'obtenir en diminuant tous les l de la même valeur. Comme dans le théorème VII, on appelle A le complexe des séries invariables et on forme B et C les complexes qui y sont définis. En poursuivant ainsi, si toutes les

séries sont épuisées, le canon selon VII est déjà le plus simple. Mais supposons qu'il reste des séries sans maxima, pour lesquelles les termes de la même verticale appartenant aux complexes formés sont égaux. Alors, on diminue tous les termes des séries restantes (ou les quantités l appartenant à ces séries) de la même valeur, jusqu'à ce que l'une de ces quantités l s'annule ou qu'un maximum de la série diminue au point de trouver un terme égal dans la même verticale appartenant aux complexes formés. On obtient alors un nouveau canon, dans lequel le nombre de séries appartenant aux complexes formés par la règle indiquée a été augmenté. Si toutes les séries s'intègrent à ces complexes, le canon obtenu sera le plus simple. Sinon, il faudra extraire de nouveaux canons par la même méthode, réduisant ainsi le nombre de séries restantes parmi les complexes formables, jusqu'à atteindre finalement le canon où tous les complexes formables épuisent la série, soit le canon le plus simple recherché.

Exemplum.

Schema propositum.

	I	II	III	IV	V	VI	VII
I	7	7	4	15	14	6	1
II	8	8	7	6	11	14	10
III	6	11	15	16	15	23	10
IV	4	11	14	25	20	21	27
V	5	2	8	10	23	18	30
VI	1	8	3	9	6	20	17
VII	11	12	8	22	24	21	40

Canon propositus.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	l
I	12*	12	9	20	19	11	6	5
II	11	16*	15	14	19	22	18	8
III	9	14	18*	19	18	26	13	3
IV	5	12	15	26*	21	22	28	1
V	10	7	13	15	28*	23	35	5
VI	7	14	9	15	12	26*	23	6
VII	11	12	8	22	24	21	40*	0

Canon derivatus I.								
	I	II	III	IV	V	VI	VII	<i>l</i>
I	11*	11	8	19	18	10	5	4
II	10	15*	14	13	18	21	17	7
III	8	13	17*	18	17	25	12	2
IV	4	11	14	25*	20	21	27	0
V	9	6	12	14	27*	22	34	4
VI	6	13	8	14	11	25*	22	5
VII	11	12	8	22	24	21	40*	0

Canon derivatus II.								
	I	II	III	IV	V	VI	VII	<i>l</i>
I	11*	11	8	19	18	10	5	4
II	8	13*	12	11	16	19	15	5
III	6	11	15*	16	15	23	10	0
IV	4	11	14	25*	20	21	27	0
V	7	4	10	12	25*	20	32	2
VI	4	11	6	12	9	23*	20	3
VII	11	12	8	22	24	21	40*	0

Canon simplicissimus.								
	I	II	III	IV	V	VI	VII	<i>l</i>
I	11*	11	8	19	18	10	5	4
II	7	12*	11	10	15	18	14	4
III	6	11	15*	16	15	23	10	0
IV	4	11	14	25*	20	21	27	0
V	6	3	9	11	24*	19	31	1
VI	4	11	6	12	9	23*	20	3
VII	11	12	8	22	24	21	40*	0

À partir du schéma proposé, en ajoutant respectivement aux termes des différentes séries les nombres 5, 8, 3, 1, 5, 6, 0, on obtient un autre schéma dans lequel les termes parmi tous les mêmes maxima verticaux sont dans des séries horizontales différentes, ce qui est une propriété caractéristique du canon.

On propose d'étudier le canon le plus simple. Dans un canon donné, la série VII constitue le complexe *A*. En soustrayant l'unité aux termes des séries restantes, on obtient le canon I.

Dans le canon I dérivé, les séries IV et VII constituent le complexe *A*, la série I constitue le complexe *B*. Des termes restants, on soustrait 2, le canon II dérivé apparaît.

Dans le canon II dérivé, les séries III, IV et VII constituent le complexe *A*, les séries I et VI le complexe *B*; en soustrayant de la deuxième et de la cinquième la série unité, on obtient le dernier canon, ou le plus simple, auquel correspondent les *l* valeurs : 4, 4, 0, 0, 1, 3, 0. Ce qui, en ajoutant aux termes des séries de schémas différents amène au canon le plus simple. Les séries III, IV et VII constituent le complexe *A*, les séries I, II, V et VI constituent le complexe *B*; on constate que toutes ces séries complexes s'épuisent, ce qui est la propriété caractéristique du canon le plus simple.

Si aucun canon n'est donné, mais seulement les termes du schéma proposé qui constituent l'agrégat transversal maximal, le canon le plus simple est obtenu en ajoutant à chaque série la quantité

minimale nécessaire pour que son terme donné, relatif à l'agrégat transversal maximal, devienne égal à son maximum vertical. Ce processus, appliqué à toutes les séries et, si nécessaire, répété, devrait finalement permettre d'obtenir le canon le plus simple, car les incréments ajoutés aux séries ne dépassent pas ce qui est nécessaire pour que les termes donnés, dans chaque dimension verticale, atteignent leur maximum.

Exemplum.

	I	II	III	IV	V	VI	VII
I	11*	7	6	4	6	4	11
II	11	12*	11	11	3	11	12
III	8	11	15*	14	9	6	8
IV	19	10	16	25*	11	12	22
V	18	15	15	20	24*	9	24
VI	10	18	23	21	19	23*	21
VII	5	14	10	27	31	20	40*

	I	II	III	IV	V	VI	VII
I	19*	15	14	12	14	12	19
II	17	18*	17	17	9	17	18
III	16	19	23*	22	17	14	16
IV	21	12	18	27*	13	14	24
V	25	22	22	27	31*	16	31
VI	10	18	23	21	19	23*	21
VII	5	14	10	27	31	20	40*

Canon simplicissimus.

	I	II	III	IV	V	VI	VII
I	25*	21	20	18	20	18	25
II	21	22*	21	21	13	21	22
III	16	19	23*	22	17	14	16
IV	21	12	18	27*	13	14	24
V	25	22	22	27	31*	16	31
VI	10	18	23	21	19	23*	21
VII	5	14	10	27	31	20	40*

Les termes marqués d'un astérisque forment le plus grand agrégat transversal, c'est-à-dire, en reprenant le schéma proposé par le canon précédent, les séries horizontales en verticales, et les verticales en horizontales ; ceci fait, les termes constituant le plus grand ensemble transversal restent les mêmes, mais le schéma cesse d'être canon.

Série

I, II, III, IV, V,

j'ajoute relativement selon la règle donnée

8, 6, 8, 2, 7

ce qui produit le schéma dérivé.

Série

I, II

j'ajoute respectivement

6, 4,

on obtient ainsi le canon le plus simple recherché, dans lequel les séries III, IV, V, VI et VII restent inchangées, comme le montre le diagramme obtenu. Dans ce canon, les séries VI et VII constituent le complexe A , les séries III, IV et V le complexe B , et les séries I et II le complexe C . L'inclusion de toutes les séries confirme que ce canon est le plus simple.

Puisque, étant donné un canon, l'agrégat transversal maximal du schéma proposé est également connu, il est possible de rappeler les problèmes précédemment résolus pour étudier un autre problème, étant donné un canon quelconque, qui est très simple. Sa solution se déroule donc en deux étapes : l'une par soustractions successives, comme ci-dessus, l'autre par additions successives, comme lorsqu'on cherche, à partir d'un canon donné, l'agrégat transversal maximal du schéma proposé et que, connaissant ce résultat, on applique la méthode précédente.

3.

La solution au problème des inégalités évoqué dans le paragraphe précédent est ainsi trouvée.

Le schéma ayant été proposé, le canon est trouvé.

Il reste à démontrer comment étudier un canon quelconque ; car, où qu'il se trouve, nous avons vu que le plus simple s'obtient de diverses manières. Proposons donc le problème d'inégalités suivant, que l'on considère comme principal.

Problème.

Étant donné nn quantités $h_k^{(i)}$ où les indices i et k prennent les valeurs $1, 2, \dots, n$, trouver n quantités positives minimales.

$$l', l'', \dots, l^{(n)},$$

et, en posant

$$h_k^{(i)} + l^{(i)} = p_k^{(i)},$$

et pour chaque k choisi, le plus grand parmi les termes $p'_k, p''_k, \dots, p_k^{(n)}$,

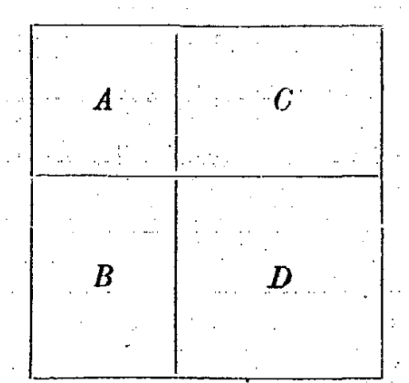
de la forme $p_k^{(i_k)}$, ces indices i_1, i_2, \dots, i_n étant chacun différent des autres.

Solution.

La première opération, quasi-préparatoire, consiste à incrémenter le minimum de chaque série, si celle-ci ne présente aucun maximum, de sorte que l'un de ses termes soit égal au maximum situé sur la même verticale. On obtient ainsi un nouveau schéma, que j'appelle schéma préparé, dans lequel chaque série possède un ou plusieurs maxima. Il n'est pas nécessaire que les maxima des différentes séries du schéma préparé appartiennent à des verticales différentes. Cependant, au moins deux séries possèdent des maxima appartenant à deux verticales différentes, ce qui n'est pas le cas

si tous les maxima se trouvent dans une même série et, de plus, si, sur une même verticale, tous les termes sont égaux. Dans le cas contraire, le nombre de maxima transversaux est > 2 . Lorsque $n = 2$, le problème est résolu par cette première opération.

Dans le schéma préparé, je recherche le plus grand nombre de maxima transversaux. Le système de ces maxima peut être choisi de plusieurs manières ; il suffit d'en considérer un certain. Ce choix effectué, j'organise la solution du problème posé de façon à augmenter successivement le nombre de maxima transversaux, jusqu'à obtenir un schéma muni d'un système complet de n maxima transversaux, qui sera le canon recherché. Il suffit donc de démontrer que, par des augmentations appropriées de la série, le nombre de maxima transversaux peut être augmenté d'une unité.



Je divise le diagramme préparé en quatre espaces A, B, C et D , comme sur la figure ci-jointe. Supposons que les maxima transversaux choisis se trouvent tous dans l'espace A , de sorte que les séries auxquelles appartiennent ces maxima occupent les espaces A et C ; mais les séries verticales auxquelles elles appartiennent occupent les espaces A et B . J'appelle "supérieure" la série occupant les espaces A et C , et "inférieure" la série occupant les espaces B et D . De plus, j'appelle "gauche" la série occupant les espaces A et B , et "droites" la série occupant les espaces C et D .

Les termes de droite sont à droite. Or, dans l'espace D , aucun maximum n'est trouvé. Sinon, le nombre de maxima transversaux augmenterait, contrairement à l'hypothèse selon laquelle le nombre maximal de maxima transversaux a été choisi. Par conséquent, les verticales de droite ont leurs maxima en C ; mais les termes de la série inférieure dans leurs verticales seront des maxima en B , et chacun d'eux est égal au maximum de la même verticale placé en A , puisque dans l'espace A se trouvent les maxima de toutes les verticales de gauche, ainsi que de toutes les séries supérieures.

Ces éléments étant posés, je divise toutes les séries en trois classes, qui sont ainsi obtenues.

Je sélectionne, parmi les séries ci-dessus, celles qui, outre les maxima placés dans A , possèdent un ou plusieurs autres maxima dans C , pour lesquels il existe au moins une série. Supposons que les maxima de certaines de ces séries placés dans A soient égaux à un autre terme de la même verticale ; recherchons alors les maxima de la même série contenant ce terme, et si un autre terme de la même verticale est également égal à celui-ci, recherchons à nouveau les maxima de la même série contenant ce terme, et ainsi de suite. L'ensemble des séries ainsi obtenues, ajoutées à la série de départ, constituent la première classe.

Je dis que parmi les séries de première classe, il n'existe aucune série inférieure, ni donc aucune série supérieure à partir de laquelle il soit permis d'obtenir une série inférieure par la méthode indiquée. En effet, partant d'une série qui, outre son maximum en A , en possède un autre en C , considérons un système de maxima situés en A , que l'on peut atteindre par la méthode indiquée; le dernier de ces maxima, si possible, est égal au terme vertical du même maximum situé en B . Ces maxima situés en A sont tous, par hypothèse, transversaux, et l'on obtiendra à leur place un autre système de maxima transversaux si l'on substitue à chacun un terme vertical équivalent. Dans ce cas, le terme situé en B est substitué au dernier maximum, mais la première série de départ n'est plus utilisée. Par conséquent, en ajoutant le maximum de cette série situé en C au nouveau système de maxima, on augmente de un le nombre de maxima transversaux, ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle le nombre maximal de maxima transversaux a été choisi. En d'autres termes, la série inférieure serait ajoutée à la série supérieure, dans laquelle se trouve un terme égal au dernier maximum, tandis que la série de droite serait ajoutée à la série verticale de gauche, dans laquelle se trouve un maximum de la série de départ.

La seconde classe regroupe les séries supérieures qui n'appartiennent pas à la première classe et dont il n'est pas possible de passer aux séries inférieures, même par la méthode indiquée. Il se peut que cette classe n'existe pas.

Enfin, toutes les séries inférieures et leurs semblables appartiennent à la troisième classe.

Les séries supérieures permettent de passer aux séries inférieures selon la méthode traditionnelle. Ainsi, si le terme de la série inférieure est égal au maximum de la série supérieure dans la même verticale (ce qui est toujours le cas), cette série supérieure appartient à la troisième classe. La troisième classe, sauf si le schéma est déjà le canon lui-même, comprend au moins deux séries : une inférieure et une supérieure.

Ce que j'ai démontré plus haut à propos de la première classe, je l'énonce maintenant de la manière suivante : parmi les séries supérieures de la troisième classe, il n'existe aucune série qui possède un maximum placé dans C . J'utiliserai cette forme de proposition plus tard.

Les observations effectuées à cette occasion fournissent également une méthode pour déterminer le nombre maximal de maxima transversaux dans le diagramme établi. En effet, étant donné le système de maxima transversaux initialement présent, la classification même de la série indique si leur nombre peut être augmenté.

Après avoir effectué la classification prescrite ci-dessus, l'ensemble de la troisième classe est augmenté de la même quantité, et la plus petite différence entre le terminus d'une des séries de sa classe et le terminus le plus élevé de l'une des mêmes verticales appartenant à la série de la deuxième ou de la première classe.

Mais si le maximum appartient à la première classe, le nombre de maxima transversaux peut être augmenté. En effet, il existe une série supérieure qui, outre le maximum en A , en possède un autre en C , et à partir de laquelle la voie de passage indiquée est donnée à une série inférieure. Cette série est ajoutée au nombre de séries supérieures, tandis que le nombre de verticales gauches est

augmenté de la verticale droite dans laquelle se trouve ce maximum en C . Si ce terme de la série de troisième classe se trouve en D et est égal au maximum de la série de première classe, les maxima transversaux restent inchangés, à l'exception de l'ajout de ce terme. Si, en revanche, ce terme se trouve en B , tous les maxima formant la chaîne par laquelle la série munie du maximum placé en C descend vers la série inférieure doivent être modifiés. En effet, pour chacun de ces maxima transversaux, il faut substituer le terme de la même verticale qui lui est égal, et enfin ce terme dans B , avec les nouveaux maxima transversaux ainsi extraits, et par l'ajout du maximum de la première série placé dans C , comme je l'ai noté pour la première classe.

Si le maximum auquel le terme de la troisième classe est égal appartient à une série de la deuxième classe, rien ne change, si ce n'est que cette série passe en troisième classe, ainsi que toutes les autres séries de la deuxième classe, auxquelles elle est rattachée par la chaîne indiquée. En répétant l'opération, soit le nombre de maxima transversaux augmente, soit le nombre de séries de la deuxième classe diminue, d'où finalement, sauf si le nombre de maxima transversaux a augmenté précédemment, le nombre de maxima transversaux augmente.

Nous arrivons ainsi à un schéma dépourvu des séries de la deuxième classe, puisqu'elles ont toutes migré vers la troisième classe. Cependant, par l'opération prescrite, nous obtenons assurément l'augmentation des maxima transversaux. Si nous y sommes parvenus, pour les divers cas possibles, qu'il serait long d'énumérer, il faut effectuer une nouvelle répartition des maxima transversaux dans les trois classes assignées. Cette répartition étant faite, la même opération doit être répétée jusqu'à l'obtention du canon, dans lequel toutes les séries inférieures ont migré vers les séries supérieures, les séries verticales vers la gauche.

Mais par la méthode décrite à nos prédécesseurs, nous avons extrait non seulement le canon, mais le canon le plus simple. Pour le démontrer, je montrerai que les quantités auxquelles les séries sont augmentées sont les plus petites nécessaires à l'obtention du canon. Premièrement, concernant l'opération préparatoire, j'observe que les termes du canon sont supérieurs ou égaux aux termes correspondants du diagramme donné, puisque ce dernier vise à extraire le canon en ajoutant uniquement des quantités positives ou nulles à chaque série. Ainsi, dans chaque colonne du canon, le maximum est supérieur ou égal au maximum de la même colonne du diagramme donné. Or, dans le canon, chaque série possède un maximum, et donc un terme, supérieur ou égal au maximum de la même colonne du diagramme donné. Il faut donc augmenter chaque série du diagramme donné dépourvue de maximum d'une quantité telle que l'un de ses termes soit supérieur ou égal au maximum de la même colonne. Si l'on note les quantités par lesquelles les termes d'une série diffèrent des maxima de la même verticale, la quantité par laquelle on incrémente la série ne doit pas être inférieure à la plus petite de ces quantités. Ainsi, en incrémentant une série dépourvue de maximum de la plus petite quantité qui rend l'un de ses termes égal au maximum de la même verticale, on ne l'a certainement pas incrémentée au-delà de ce qui est nécessaire pour former le canon.

Une fois la préparation effectuée, si le canon apparaît déjà, il est assurément le plus simple ; car nous avons vu que les plus petites quantités positives ont été ajoutées à la série du schéma proposé, rendant ainsi possible l'émergence du canon. Mais si le canon n'apparaît pas encore, il a fallu procéder à la répartition de la série dans les trois classes assignées. Je vais maintenant démontrer que, pour obtenir le canon, aucune des séries de la troisième classe ne peut rester inchangée.

Dans la démonstration, j'appellerai S le schéma préparé et K le canon extrait. Je suppose toujours, ce qui était déjà nécessaire pour la classification des séries, que dans S se trouve un certain système de maxima transversaux dans l'espace A , tel que si plusieurs systèmes de ce type sont donnés dans l'espace A , il en faut en choisir un. De même, dans K , je suppose que si plusieurs systèmes de transversales maximales sont donnés, il en faut en choisir un.

Considérons dans S toutes les séries supérieures de la troisième classe non modifiées, si elles sont données, ou celles auxquelles aucune quantité n'est ajoutée pour former le canon K , ou encore celles qui sont identiques dans l'ensemble K . Appelons H le complexe de ces séries et considérons leurs maxima transversaux choisis dans l'ensemble K . J'affirme que le système de ces maxima dans S et K se trouve sur les mêmes verticales. En effet, soit M l'un de ces maxima dans K , placé dans la série non modifiée; à celui-ci correspond dans S un terme égal à la même série et à son maximum vertical. Car lorsqu'un S atteint K par additions positives, les termes verticaux de chacun dans S sont inférieurs ou égaux aux termes correspondants dans K . Par conséquent, si leur maximum dans K est égal au même terme vertical dans S , il doit a fortiori être le maximum parmi les mêmes termes verticaux dans S . Le terme M doit exister dans l'espace A , puisque la série supérieure de la troisième classe, selon les propriétés des classes établies, ne possède pas de termes maximaux dans sa verticale dans C . Appelons V le complexe des verticales dans lesquelles se trouvent les maxima de la série H dans S , et supposons que la verticale dans laquelle se trouve M n'appartienne pas aux verticales V . Dans S , le maximum $N = M$ appartenant aux transversales maximales choisies dans l'espace A sera conservé; par conséquent, le maximum N sera placé dans une série qui n'appartient pas à la série H . Car les transversales maximales choisies pour H se trouvent dans les verticales V , mais N lui-même est supposé être dans une verticale qui n'appartient pas aux verticales V . Cette nouvelle série doit elle-même être supérieure, appartenant à la troisième classe; puisque le maximum N se situe dans l'espace A , et d'après la définition traditionnelle des classes, si l'on considère que tous les termes maximaux des autres séries sont de même qualité dans la même verticale, les séries dans lesquelles ils se trouvent appartiennent à la même classe. Or, si l'on ajoutait une quantité non nulle de la série pour former le canon K , le terme correspondant à N dans K serait supérieur à N lui-même et donc également supérieur au terme M placé dans la même verticale, ce qui est impossible, puisque M est maximal dans sa propre verticale. Par conséquent, cette série elle-même devrait être inchangée, ce qui est absurde, car on suppose que toutes les séries H sont des séries inchangées de la troisième classe. Par conséquent, M se situe nécessairement dans l'une des verticales V ; ce qui, puisque cela est également vrai pour les maxima M , implique que le système des maxima transversaux de la série H dans K choisi se situe dans les mêmes verticales que le système des maxima transversaux de la même série H dans S choisi, q. d. e⁵.

Si l'on considère dans S les termes correspondant aux maxima de la série H dans K et égaux à ces maxima, ils formeront dans S un autre système de termes de maxima transversaux, appartenant aux mêmes séries horizontale et verticale que les maxima de la série H . Ceci n'est possible que si les termes des deux systèmes, placés sur la même verticale, sont égaux. D'où le corollaire suivant : si, dans S , on considère un maximum d'une série supérieure de troisième classe, alors, sur la même verticale, il existe dans K un maximum d'une série supérieure de même classe, égal à ce maximum. Or, je suppose que les maxima dans S , comme dans K , appartiennent toujours au système de

5. Quod demonstrandum erat = CQFD, ce qu'il fallait démontrer.

maxima transversaux choisi.

De plus, la proposition précédente se démontre par la même raison si H désigne l'ensemble des séries invariables de la deuxième classe ; en effet, c'est pour ces séries seules que la proposition a une certaine force et une certaine signification. Car il n'existe aucune série invariable de la troisième classe.

Premièrement, il est clair qu'il n'existe pas de séries inférieures invariables. En effet, s'il existait une série inférieure invariable, soit M son maximum dans le système K des maxima transversaux choisis ; le même terme dans S serait alors le maximum parmi tous ses axes verticaux et serait donc équivalent au maximum d'une série supérieure de la troisième classe placée sur le même axe vertical et associée aux maxima transversaux⁶. Or, d'après le corollaire précédent, sur le même axe vertical, il devrait exister dans K un maximum d'une série supérieure associée aux maxima transversaux, ce qui impliquerait la présence de deux maxima transversaux sur le même axe vertical dans K , l'un dans la série supérieure, l'autre dans la série inférieure, ce qui contredit la notion de maxima transversaux.

Je vais maintenant démontrer que si la série supérieure de la troisième classe existe sans modification, la série inférieure peut également être considérée comme inchangée, ce qui est impossible, mais il sera prouvé que ni la série supérieure ni la série inférieure de la troisième classe ne peuvent être considérées comme inchangées.

Supposons qu'il existe une série supérieure non modifiée de la troisième classe, que je note s . Selon la définition de la troisième classe, si s est une série supérieure de la troisième classe, il existe des séries $s, s_1, s_2, \dots, s_{m-1}$ telles que leurs maxima $M, M_1, M_2, \dots, M_{m-1}$, choisis parmi le système de maxima transversaux, aient chacun, sur la même verticale, un terme égal à N_i dans la série suivante, et finalement M_{m-1} est égal, sur la même verticale, au terme N_{m-1} de la série inférieure. Ainsi, N_i et M_{i+1} appartiennent à la même série, et M_i et N_i sont égaux sur la même verticale. Maintenant, si les séries supérieures sont de la troisième classe puisque s reste inchangé, d'après le corollaire précédent, K prendra la valeur maximale M de même ordre de grandeur et sera placé sur la même verticale. Par conséquent, la série s_1 ne peut être augmentée pour former le canon, car sinon le terme N augmenterait et la valeur maximale M , placée sur la même verticale, serait plus grande. Ainsi, la série s doit rester inchangée, et il est démontré de même que ni les séries s_2, s_3, \dots, s_{m-1} ni s_m ne sont inchangées, ce qui, comme nous l'avons vu, est impossible.

Puisqu'aucune série de la troisième classe ne peut rester inchangée pour former le canon, soit f la plus petite quantité par laquelle ces séries doivent être augmentées, de sorte qu'après l'ajout de toutes les quantités, il en existe nécessairement une dans le nouveau schéma qui n'a plus besoin d'être augmentée pour former le canon, mais qui reste inchangée. Soit g la plus petite quantité par laquelle les séries de la troisième classe de S sont augmentées, de sorte que l'un de leurs termes soit égal au maximum du terme vertical correspondant placé dans la série de la deuxième ou de la première classe. Si $f' < g$ et que toutes les séries de la troisième classe sont augmentées de la quantité f' , dans le nouveau schéma, la répartition des séries en classes n'est pas modifiée, mais chaque terme appartient à la même classe que dans S . Il ne sera donc pas possible d'avoir $f' < g$; car sinon, il existerait un schéma dans lequel certaines séries de la troisième classe resteraient inchangées, ce

6. Voir ci-dessus la définition de la troisième classe aux pages 209 et 210.

qui est impossible. On constate donc que la quantité minimale dont il faut accroître la série de la troisième classe pour que l'un de ses termes soit égal au maximum du terme correspondant placé verticalement dans la série de la première ou de la deuxième classe est inférieure ou égale à la quantité minimale dont il faut accroître la série de la troisième classe pour former le canon. Découle la règle traditionnelle selon laquelle on n'utilise jamais d'additions supérieures à celles nécessaires à la formation d'un canon, et par conséquent, le canon obtenu par notre règle est le plus simple.

Exemplum.

Schema propositum.

11	7	6	4	6	4	11
11	12	11	11	3	11	12
8	11	15	14	9	6	8
19	10	16	25	11	12	22
18	15	15	20	24	9	24
10	18	23	21	19	23	21
5	14	10	27	31	20	40

Schema praeparatum.

<u>19*</u>	15	14	12	14	12	19	t
17	<u>18*</u>	17	17	9	17	18	t
15	<u>18</u>	<u>22</u>	<u>21</u>	16	13	15	t
<u>19</u>	10	16	25	11	12	22	t
<u>19</u>	16	16	21	25	10	25	t
10	<u>18</u>	<u>23</u>	21	19	<u>23*</u>	21	
5	14	10	<u>27</u>	<u>31</u>	20	<u>40*</u>	

DIFFERENTIALIUM VULGARIIUM CUJUSCUNQUE.

215

Schema derivatum I.

<u>20*</u>	16	15	13	15	13	20	t
18	<u>19*</u>	18	18	10	18	19	
16	<u>19</u>	<u>23*</u>	22	17	14	16	
<u>20</u>	11	17	26	12	13	23	t
<u>20</u>	17	17	22	26	11	26	t
10	18	<u>23</u>	21	19	<u>23*</u>	21	
5	14	10	<u>27</u>	<u>31</u>	20	<u>40*</u>	

Schema derivatum II.

<u>21*</u>	17	16	14	16	14	21	t
18	<u>19*</u>	18	18	10	18	19	
16	<u>19</u>	<u>23*</u>	22	17	14	16	
<u>21</u>	12	18	<u>27*</u>	13	14	24	
<u>21</u>	18	18	23	27	12	27	t
10	18	<u>23</u>	21	19	<u>23*</u>	21	
5	14	10	<u>27</u>	<u>31</u>	20	<u>40*</u>	

Schema derivatum III.

<u>22*</u>	18	17	15	17	15	22	t
18	<u>19*</u>	18	18	10	18	19	t
16	<u>19</u>	<u>23*</u>	22	17	14	16	
21	12	18	<u>27*</u>	13	14	24	
<u>22</u>	<u>19</u>	19	24	28	13	28	t
10	18	<u>23</u>	21	19	<u>23*</u>	21	
5	14	10	<u>27</u>	<u>31</u>	20	<u>40*</u>	

Canon simplicissimus.

<u>25*</u>	21	20	18	20	18	25	
21	<u>22*</u>	21	21	13	21	22	
16	19	<u>23*</u>	22	17	14	16	
21	12	18	<u>27*</u>	13	14	24	
<u>25</u>	<u>22</u>	22	<u>27</u>	<u>31*</u>	16	31	
10	18	<u>23</u>	21	19	<u>23*</u>	21	
5	14	10	<u>27</u>	<u>31</u>	20	<u>40*</u>	

Dans le diagramme proposé, les trois premières séries et la cinquième ne possèdent pas de terme maximal. À ces séries, on a ajouté respectivement les plus petits nombres 8, 6, 7 et 1 permettant d'obtenir un terme maximal. Dans le diagramme ainsi obtenu, j'ai souligné tous les termes maximaux de chaque axe vertical et j'ai marqué d'un astérisque les plus grandes transversales sélectionnées. Ensuite, à côté de la lettre t , j'ai indiqué les séries de la troisième classe ainsi identifiées. En effet, toutes les séries α , dépourvues de terme marqué d'un astérisque (que j'ai qualifiées d'inférieures), en font partie ; puis les séries β , qui possèdent un terme marqué d'un astérisque dans l'axe vertical où est souligné un terme de la série α ; si les séries possèdent d'autres termes soulignés en plus des termes marqués d'un astérisque, on recherche de nouveaux termes marqués d'un astérisque dans les mêmes axes verticaux, qui appartiennent à la série γ , et ainsi de suite : toutes les séries α, β, γ , etc., ainsi identifiées, forment aisément la troisième classe. Il est clair, cependant, que la règle en découlant exige seulement que la série de la troisième classe soit connue, et qu'il n'est pas nécessaire de faire une distinction entre la première et la deuxième classe. Car la règle n'impose rien.

Cela exige au moins que toutes les séries de la troisième classe sont simultanément augmentées d'une valeur minimale, de sorte que l'un de leurs termes soit égal au terme maximal de la série restante d'une étoile située sur la même verticale. L'opération consiste donc entièrement à augmenter les séries, à choisir les termes transversaux maximaux et à redistribuer les séries de la troisième classe après chaque augmentation. Il faut poursuivre ce processus jusqu'à ce qu'il n'existe plus de séries de la troisième classe, auquel cas on obtient le canon le plus simple.

La tâche de réécrire l'ensemble du schéma après chaque modification peut être accélérée par diverses techniques. Notamment, pour passer d'un schéma à l'autre, il suffit de ne considérer que les termes les plus importants de chaque colonne et ceux qui les suivent immédiatement ; il suffit donc de les noter. De plus, comme l'ordre des séries n'est pas à respecter, il suffit de supprimer uniquement les séries à augmenter et d'inscrire les séries augmentées sous les séries restantes. Mais ces procédés, et d'autres encore, utiles pour traiter un grand nombre de nombres, sont mieux laissés à l'appréciation de chacun.