

Traduction de l'intervention de Peter Sarnak au Congrès International des mathématiciens 2026 à Philadelphie

Je suis Nicholas Katz, de Princeton.

C'est pour moi un honneur et un privilège de présenter Peter Sarnak, professeur émérite à l'Institute for Advanced Study et Professeur à Princeton. L'incroyable étendue et la profondeur de ses connaissances font de lui la personne toute désignée pour donner une conférence sur le maître Jean-Pierre Serre.

[Applaudissements]

Merci, Nick. Ce n'est pas une tâche facile que de donner une conférence au sujet de Jean-Pierre Serre, mais je vais faire de mon mieux. J'aime les défis.

Le lien, le lien fort qui m'unit à Serre, c'est que nous sommes tous deux de grands passionnés de rugby. Si vous tapez "Serre rugby" dans Google, vous trouverez Paul Serre, un joueur de rugby très célèbre qui a joué pour la France au niveau international ; Paul Serre a eu une grande influence sur son neveu Jean-Pierre.

Moi, je viens d'Afrique du Sud. C'est un domaine où nous sommes champions du monde. Je suis donc naturellement un grand fan de rugby ; nous aimons discuter de rugby, regarder des matchs, et c'est un lien supplémentaire qui m'unit à Jean-Pierre Serre, au-delà des mathématiques.

Si vous poursuivez votre recherche Google, vous découvrirez que le neveu de Serre, Denis Serre, est un mathématicien très accompli spécialisé dans les équations aux dérivées partielles non linéaires. Voilà.

Je vais maintenant parler de Jean-Pierre Serre. Il est impossible de rendre justice à l'ampleur et à la richesse des contributions de Serre en une simple conférence d'une heure ; j'espère simplement vous donner un aperçu de son œuvre. Il s'agira, bien entendu, d'une sélection parmi ses théorèmes, ses théories, ses livres, ses rapports, ses conjectures et sa correspondance - en gros, je donnerai un ou deux exemples pour chaque catégorie.

Je mettrai tout à l'heure l'accent sur les travaux ultérieurs de Serre, qui me sont plus familiers, mais je dois évidemment commencer par le début : voici Serre en 1949, alors qu'il était étudiant. Sa reconnaissance fut extrêmement rapide, voire spectaculaire. La médaille Fields vient d'être annoncée¹, et son record de précocité demeure inégalé : Jean-Pierre Serre reste, à ce jour, le plus jeune lauréat de la médaille Fields, distinction qu'il a obtenue pour ses travaux en topologie algébrique et en géométrie algébrique connexe.

Référence de la vidéo : <https://www.youtube.com/watch?v=NK7R4Nnz2mgt=11s>.

Transcription en L^AT_EX et traduction : Denise Vella-Chemla, août 2026.

1. en juillet 2026.

Hermann Weyl, dans son allocution sur les travaux de Serre il y a 72 ans², lors du Congrès international des mathématiciens à Amsterdam, a déclaré à son sujet : “Jamais auparavant je n’ai été témoin d’une ascension aussi fulgurante d’une étoile dans le ciel des mathématiques que la vôtre” ; c’est un hommage considérable de la part d’une figure telle que Weyl.

Permettez-moi de dire quelques mots sur les travaux ayant valu la médaille Fields à Jean-Pierre Serre ; je serai assez bref sur ce point, car ce ne sont pas des sujets que je maîtrise parfaitement. Toutefois, je peux tout de même les évoquer pour vous.

Sa célèbre suite spectrale trouve son origine dans l’invention des suites spectrales par Leray ; elle a fourni un outil de calcul puissant pour déterminer, et également approximer, les groupes d’homologie et de cohomologie d’espaces fibrés, en fonction de la base, de la fibre et de l’application de projection. Jean-Pierre Serre a notamment appliqué sa méthode pour étudier les groupes d’homotopie, qui constituent l’un des problèmes les plus fondamentaux de la topologie algébrique. Il s’agit des groupes d’homotopie $\pi_i(S^n)$ des applications d’une sphère vers une sphère de dimension n , à équivalence d’homotopie près ; ces groupes possèdent une structure de groupe abélien dès que $i \geq 2$. Bien entendu, la sphère S^n est simplement connexe (sauf pour $n = 0$).

Ce que Serre a démontré grâce à sa suite spectrale - l’une de ses applications les plus spectaculaires - c’est que les groupes d’homotopie des sphères sont de type fini.

Ce résultat était inconnu auparavant ; il a d’ailleurs déterminé lesquels sont finis et lesquels ne le sont pas. Ainsi, si $i = n$, l’application degré fournit un invariant et le groupe d’homotopie est isomorphe à $\mathbb{Z}$. Il a également précisé dans quels cas le groupe est fini. Par exemple, si $n = 4m - 1$ et $i = 2m$ (comme pour $m = 1$, soit $n = 3$ et $i = 2$), il existe des applications de la sphère S^3 vers la sphère S^2 - la fibration de Hopf - qui fournissent un élément non trivial et un facteur isomorphe à $\mathbb{Z}$. Ces fibrations de Hopf généralisées produisent également un facteur $\mathbb{Z}$; le rang est donc exactement de 1 dans ces dimensions.

Dans les autres cas, Serre nous apprend que ces groupes sont finis. C’est un théorème incroyable qui lui a immédiatement valu une grande reconnaissance. Il fournit aussi des informations détaillées sur les composantes primaires pour un nombre premier p , sans toutefois décrire entièrement le groupe abélien fini ; c’est un sujet très étudié aujourd’hui, un domaine de recherche très actif. D’ailleurs, lors du congrès ICM de 2022, Wang, Isaksen et Xu ont donné une conférence remarquable - à voir absolument - intitulée “*Stable homotopy groups of spheres and motivic homotopy theory*”. Ils ont passé en revue ces développements qui vont bien au-delà... et peut-être que l’une des affirmations les plus frappantes qu’ils avancent - et qui, pour moi, est tout simplement incroyable - est la suivante : nous savons tous que Milnor a démontré que la sphère de dimension 7 possède des structures différentiables exotiques - il n’existe pas qu’une seule structure différentiable sur la sphère de dimension 7 - et l’un des résultats issus de tous ces développements merveilleux est que les sphères de dimension impaire ($S^1, S^3, S^5, S^7 \dots$) en possèdent bien plus d’une.

Je m’intéresse donc à celles qui possèdent une structure différentiable unique. Et il y a un autre cas, S^{61} - la sphère de dimension 61 - étonnamment, toutes les autres possèdent de multiples structures

2. Voir <https://www.mathunion.org/fileadmin/ICM/Proceedings/ICM1954.1/ICM1954.1.ocr.pdf>, p. 161.

en dimensions impaires.

En dimensions paires, la question reste ouverte, bien qu'il existe des conjectures visant à les classer. Très bien.

Maintenant... euh, mon français n'est pas excellent, mais il y a un mot très important ici, qui est le mot "faisceau" (ou *sheaf* en anglais). Serre a écrit deux articles monumentaux qui ont changé l'orientation de la géométrie algébrique et de la théorie des faisceaux.

L'un est souvent appelé FAC, et l'autre GAGA - tout le monde l'appelle GAGA.

Le premier porte sur la cohomologie des faisceaux algébriques cohérents. La théorie de la cohomologie des faisceaux a été inventée ou développée par Cartan et Serre - peut-être qu'Oka en avait développé certains aspects auparavant. Le mot-clé "*cohérent*" impose une condition de finitude extrêmement importante pour développer la théorie et effectuer des calculs. Cartan était le directeur de thèse de Serre, et ensemble, ils ont élaboré la théorie de la cohomologie des faisceaux cohérents pour les espaces analytiques complexes, y compris les espaces compacts.

Dans son article de 1955 (FAC), Serre pose les bases d'une théorie beaucoup plus subtile : on ne travaille plus sur les nombres complexes, mais dans un cadre purement algébrique - une théorie aux répercussions considérables valable sur tout corps algébriquement clos. Il a appelé cela la théorie des faisceaux algébriques cohérents. Grâce à cela, on aboutit au résultat suivant : si l'on considère une variété projective dans $\mathbb{C}^n$ qui est algébrique, on dispose désormais de deux théories de la cohomologie : l'une issue de l'analyse complexe et l'autre issue de la géométrie algébrique. La question naturelle qui se pose alors est de savoir quel est le lien entre elles. Le célèbre théorème GAGA de Jean-Pierre Serre, datant de 1956, est décisif : il établit qu'elles coïncident et fournit une description complète de cette équivalence.

Il existe de nombreuses applications de ce théorème ; cela a ouvert un nouveau domaine des mathématiques, mais je vais en évoquer deux. La première est que ce théorème fournit une nouvelle démonstration du célèbre théorème de Chow. Le théorème de Chow stipule que toute sous-variété complexe compacte d'un espace projectif est nécessairement algébrique. La théorie que Jean-Pierre Serre a développée avec Cartan - qui implique inévitablement une part d'analyse, nécessairement sous-jacente - repose sur des éléments issus des travaux de Schwartz (notamment l'utilisation d'opérateurs compacts) ainsi que sur les théorèmes A et B de Cartan relatifs aux espaces affines, lesquels permettent cette identification et cette nouvelle démonstration du théorème de Chow.

Toutefois, parmi les nombreuses applications immédiates de ce théorème - auxquelles Weil et Serre attachaient une grande importance - citons le cas suivant : si l'on considère une variété projective X (pas nécessairement lisse) définie sur un corps de nombres K , et que l'on applique un automorphisme de Galois aux polynômes qui la définissent, on obtient un nouvel ensemble d'équations $X\sigma$; on peut alors comparer les points complexes de la variété initiale avec ceux de la nouvelle. C'est là qu'intervient la question posée par Weil : les nombres de Betti de X et de $X\sigma$ sont-ils identiques ?

Nous verrons un peu plus loin pourquoi cette question revêtait une importance capitale pour Weil.

Or, d'après le principe GAGA, la réponse est oui : non seulement les nombres de Betti sont identiques, mais les nombres de Hodge-Betti le sont également. Il s'agit là d'une application immédiate de GAGA ; en revanche, il est faux de dire que X et $X\sigma$ sont nécessairement homéomorphes. Serre en a fourni le premier contre-exemple, en présentant des variétés dotées de groupes fondamentaux différents. Ainsi, si les nombres de Betti sont identiques, la topologie, elle, ne l'est pas forcément. Ces deux articles ont inauguré la géométrie algébrique moderne en utilisant des méthodes topologiques ; ils ont eu un impact profond et durable, en commençant par les travaux de Grothendieck.

Lors du présent congrès, nous avons vu la poursuite de l'approche "GAGA" - notamment à travers les travaux de Baker et Brun, dont il a été question à plusieurs reprises, ainsi que l'exposé de Bakker sur "O-minimal GAGA".

Une conjecture de Griffiths représente le développement le plus récent dans cette lignée GAGA : il s'agit de démontrer le caractère algébrique d'un objet à partir de sa seule nature analytique complexe, ce qui constitue toujours une étape très délicate.

Ces travaux de Jean-Pierre Serre ont donc exercé une influence majeure dans de nombreuses directions, notamment ce que Serre a démontré dès ses débuts.

Bien, je souhaite maintenant dire quelques mots sur Serre et Weil.

La première rencontre de Serre avec André Weil a eu lieu à la fin des années 1940, alors que Serre était étudiant et que Weil donnait des conférences à Paris sur sa démonstration - qu'il avait, je crois, élaborée pendant la guerre - de l'analogue de l'hypothèse de Riemann pour les courbes sur des corps finis. Cela a eu un impact considérable sur Serre. Je pense qu'il ne comprenait pas exactement de quoi Weil parlait, mais il a immédiatement saisi qu'il s'agissait d'un domaine auquel il voulait se consacrer ; et c'est effectivement ce qu'il a fait au fil des ans.

Plus tard, lorsque Serre a séjourné à Princeton à la fin des années 1950 et dans les années 1960 - période durant laquelle Weil y travaillait également -, il a été profondément influencé par ce dernier, qu'il considère comme son mentor. En effet, durant cette période, les recherches de Serre se sont diversifiées pour inclure la théorie des nombres, les groupes discrets et la cohomologie. On verra que Serre privilégiait les problèmes très concrets, tout en développant des théories pour les résoudre - comme celle des groupes d'homotopie des sphères.

Maîtrisant un vaste éventail d'outils, cette diversification lui est venue tout naturellement ; je pense qu'il s'est alors éloigné de la topologie algébrique en tant que telle. Voici une photo de Serre : il est le deuxième en partant de la gauche. On y voit aussi Weil, à droite, que Serre regarde d'un air quelque peu agressif - je reviendrai sur quelques anecdotes à ce sujet. On aperçoit également, entre eux, Taniyama et Tamagawa, dont nous reparlerons un peu plus tard.

Bien. Pour ce qui est des conjectures de Weil, il s'agit d'analogues de l'hypothèse de Riemann en dimension supérieure - concernant des variétés projectives lisses sur des corps finis. Leur formulation est étroitement liée à la cohomologie de la variété, ce qui explique l'intérêt de Weil pour cette question.

Serre raconte qu'il a agi, vis-à-vis de Grothendieck, essentiellement comme un propagandiste ; il a notamment œuvré pour faire connaître les travaux de Grothendieck, dont la théorie fondamentale de la cohomologie a permis de démontrer les conjectures de Weil.

Je reviens maintenant à cet ouvrage de 294 pages paru en 2001. Je parle donc de la correspondance entre Serre et Grothendieck ; vous pouvez voir ici une lettre de Grothendieck à Serre. Cette correspondance vaut la peine d'être lue. Vous y verrez à quel point les deux s'influençaient mutuellement.

Serre écrit beaucoup de lettres. J'en ai reçu un grand nombre de sa part, tout comme beaucoup de personnes ici présentes, j'en suis sûr. Il exige de vous la même qualité d'écriture que celle qu'il s'impose à lui-même. Il relèvera toujours des erreurs ou suggèrera des corrections, souhaitant que vous amélioriez votre texte. Beaucoup savent pertinemment que leurs articles se sont considérablement améliorés après avoir reçu une lettre de Serre. À l'époque, il écrivait à quiconque rédigeait un texte intéressant dont il avait pris connaissance. Nous sommes donc nombreux, comme je le disais, à être conscients de ce que nous lui devons.

Dans certains cas - et je vais maintenant parler un peu plus de Weil et de l'impact qu'il a eu sur Serre rédigeant un article où il le remerciait -, prenons le cas d'André Weil dans un article de 1960 intitulé *Algebras with involutions in the classical groups* : il y déclare que l'auteur a une grande dette envers "M. P.", le célèbre vainqueur de nombreuses courses cyclistes. Il ne précise pas qui est ce "M. P.", mais on devine aisément de qui il s'agit lorsqu'il évoque l'idée principale de la première partie de l'article. C'est une anecdote intéressante ; apparemment, Weil aimait taquiner Serre d'une manière ou d'une autre. L'une de ses façons de le taquiner consistait, lorsque Serre présentait quelque chose que Weil jugeait faux, à dire : "Ah, alors tu crois avoir démontré l'hypothèse de Riemann ?".

Le raisonnement sous-jacent étant que si l'on démontre une proposition fausse, alors cette fausseté implique n'importe quoi, y compris l'hypothèse de Riemann ; c'est ce qui s'est produit avec l'un des articles écrits par Serre.

Je crois que Weil était convaincu que c'était faux ; il s'agissait de savoir s'il existait une variété projective lisse définie sur un corps de caractéristique finie que l'on pouvait relever en caractéristique zéro. Serre a fourni un contre-exemple, et Weil a dit : "Ah, vous pensez avoir démontré l'hypothèse de Riemann ?", mais en fait, la démonstration de Serre était correcte.

Bien. Maintenant, je vais être beaucoup plus concret, car je vais décrire certains théorèmes et conjectures spécifiques. Prenons les matrices 2×2 de déterminant 1 à coefficients entiers : il s'agit du groupe modulaire, un groupe très important. C'est en quelque sorte la "mère" de tous les groupes arithmétiques et des formes modulaires.

En tant que groupe abstrait, $SL_2(\mathbb{Z})$ quotienté par $\{\pm 1\}$ est simple - et c'est facile à démontrer - le produit libre de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Il existe des sous-groupes de $SL_2(\mathbb{Z})$ qui sont très importants en théorie des nombres, ainsi que dans la théorie des formes modulaires et des formes automorphes en général ; ils sont définis comme suit : un sous-groupe Γ' contenant un sous-groupe de congruence principal $\Gamma(n)$ - c'est-à-dire qu'il existe un entier n tel que Γ' soit compris entre $\Gamma(1)$ et $\Gamma(n)$ - est

appelé sous-groupe de congruence. Ici, $\Gamma(n)$ est simplement le noyau de la réduction modulo n . Ce sont ces sous-groupes de congruence qui jouent un rôle décisif en théorie des nombres, et tout particulièrement pour les formes modulaires. Ainsi, pour en revenir à ce produit libre, il est très facile de constater - et c'était déjà connu de Hecke et Klein - qu'il en découle que la plupart des sous-groupes de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ne sont pas des sous-groupes de congruence.

Ce fut donc un véritable choc lorsque, simultanément, Bass, Lazard et Serre, ainsi qu'indépendamment Jens Mennicke - je les ai tous les quatre ici : Bass est celui en haut à gauche, Serre à sa droite, Lazard sous Bass, et Jens, Mennicke en bas à droite, tout à fait indépendamment, ont démontré que, dans le cas de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$, tout sous-groupe d'indice fini est un sous-groupe de congruence. C'est une observation remarquable, un fait marquant et, en réalité, utile pour résoudre de très nombreux problèmes. Serre a utilisé la théorie de la cohomologie pour le démontrer. On considère deux topologies sur les sous-groupes de Γ (ici, Γ serait $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ avec $n \geq 2$), à savoir celle définie par tous les sous-groupes d'indice fini ; à partir de la base d'ouverts associée, on forme une adhérence appelée "complétion profinie".

On effectue également une complétion à l'aide des sous-groupes de congruence, et l'on obtient une application continue de $\hat{\Gamma}$ vers $\bar{\Gamma}$, résultant du fait qu'une topologie est plus grossière que l'autre. Ensuite, en utilisant la théorie de la cohomologie à coefficients. C'est ici qu'intervient Lazard avec le cas de SL_2 sur les entiers p -adiques. Ils calculent le noyau de cette application. L'objectif est de montrer que $\hat{\Gamma} = \bar{\Gamma}$, ce qui signifierait que tout sous-groupe d'indice fini est un sous-groupe de congruence. Ils démontrent que ce noyau est trivial. Ils appliquent cette méthode à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_p)$ et à d'autres groupes SL_n , mais cela nécessite des calculs spécifiques pour $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_p)$. Le théorème concerne SL_n pour $n \geq 3$. Cela permet de poser le problème en toute généralité : quand la propriété de congruence des sous-groupes est-elle vérifiée ? Plus précisément, le problème se reformule ainsi : peut-on calculer ce noyau de congruence C ? Est-il fini, trivial ou infini ? S'il est infini, la propriété de congruence des sous-groupes n'est pas vérifiée. En revanche, s'il est fini et que l'on en connaît la valeur, on comprend essentiellement le problème.

Il existe un article remarquable qui résout cette question pour n'importe quel anneau d'entiers S . Oui, ils ont traité le cas général pour tout anneau R , avec les groupes SL_n ($n \geq 3$) et Sp_{2n} . Il restait donc le cas de SL_2 . Rappelons que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ne possède pas la propriété de congruence des sous-groupes ; Serre apporte une réponse complète à cette question dans un article magnifique. Au lieu de considérer $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, intéressons-nous à SL_2 sur un anneau quelconque. Il s'agit donc de matrices 2×2 dont les coefficients appartiennent à un anneau - qui n'est pas nécessairement $\mathbb{Z}$, mais qui peut inclure des inverses de nombres premiers (comme $1/p$) ou correspondre à l'anneau des entiers d'une extension quadratique. Serre apporte une réponse complète concernant la propriété de sous-groupe de congruence pour le groupe SL_2 sur un tel anneau : il calcule le noyau de congruence et démontre qu'il est fini si et seulement si le groupe des unités de l'anneau est infini. Le résultat est élégant, bien que la démonstration - en particulier pour l'équivalence "si et seulement si" - soit assez complexe et nécessite de faire appel à des notions avancées de topologie, notamment celle des variétés hyperboliques de dimension 3.

Un élément-clé de cette démonstration, comme des précédentes, réside dans l'existence d'éléments unipotents, que ce soit dans le groupe SL_2 sur l'anneau ou dans SL_n sur $\mathbb{Z}$ (ou tout autre groupe

similaire). Serre a formulé une conjecture remarquable - aujourd'hui presque entièrement résolue - concernant la validité de la propriété de congruence des sous-groupes ; des progrès considérables ont été réalisés par Raghunathan, Prasad, Platonov et Rapinchuk. Toutefois, le cas le plus élémentaire - un défi que je lance aux jeunes présents dans la salle - reste non résolu : celui des quaternions de Hamilton "classiques" dont les coordonnées appartiennent à un anneau donné. Si l'on considère les quaternions de Hamilton à coordonnées dans $\mathbb{Z}$, on obtient un groupe fini. (Il ne s'agit pas seulement des coordonnées : les inverses doivent également appartenir à l'anneau ; c'est ce que je désigne par $H^*(R)$). Si l'on s'autorise à introduire des dénominateurs à un endroit précis, le groupe agit alors sur un arbre. On peut alors faire appel à la magnifique théorie de Bass-Serre sur les groupes agissant sur des arbres pour comprendre la structure du groupe et démontrer que la propriété de congruence des sous-groupes ne s'applique pas. En revanche, si l'on considère au moins deux nombres premiers, Serre conjecture - une conjecture fascinante et encore largement ouverte - que la propriété de congruence devrait, elle, être vérifiée.

Passons maintenant à un autre sujet, qui prolonge l'étude de $SL_2(\mathbb{Z})$ et des formes modulaires : celui des représentations galoisiennes associées aux formes modulaires. La passion de Serre pour les formes modulaires remonte à 1953, lorsqu'il a assisté à une conférence³ et elle perdure encore aujourd'hui ; ses articles les plus récents, publiés l'an dernier, portent toujours sur ce thème. Il souligne d'ailleurs que, dans ce domaine, les énoncés les plus séduisants s'avèrent souvent vrais, ce qui confère au sujet un attrait tout particulier.

Ainsi, dans son compte-rendu des œuvres complètes de Serre (volumes 1, 2 et 3), Milton conclut en affirmant que Serre est l'un des maîtres de l'exposition mathématique. Dans de nombreux cas, la première présentation du sujet figure dans l'un de ses articles et demeure, à mes yeux, la meilleure. Il existe de nombreux ouvrages de ce type ; l'un d'eux traite des représentations associées aux courbes elliptiques, un livre qui a participé à la formation de bon nombre d'entre nous. Quant au théorème de l'image ouverte (1972) - qui formalise l'idée selon laquelle les groupes de Galois ont tendance à être "grands" -, il s'agit d'un article dédié à André Weil et qui reste l'un des plus cités de Serre. Considérons donc une courbe elliptique définie sur $\mathbb{Q}$ et soit G le groupe de Galois de $\overline{\mathbb{Q}}$ sur $\mathbb{Q}$. Nous allons ici étudier l'action sur les points de n -torsion, ce qui nous amène à considérer des extensions galoisiennes finies. En prenant les points de n -torsion (avec des coordonnées dans $\overline{\mathbb{Q}}$), on obtient une représentation du groupe de Galois sur ces points ; cette représentation correspond à un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. En termes élémentaires, ce théorème de l'image ouverte démontre que si E ne possède pas de multiplication complexe - c'est-à-dire si, en considérant la courbe sur les nombres complexes, le réseau associé reste invariant par multiplication par un nombre donné (ce qui caractérise des courbes très particulières, mieux comprises sous cet angle) -, alors, pour une courbe "typique", l'indice de l'image galoisienne dans $GL_2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est très élevé. En fait, cet indice est majoré par une constante effective indépendante de n , mais qui dépend de E .

Il s'agit d'un théorème fondamental en arithmétique des courbes elliptiques, aux implications profondes en géométrie diophantienne. Il existe des généralisations... ce théorème étend cela à une multitude de cas via une démonstration différente et il englobe bien d'autres aspects ; cela a donné naissance à une théorie fascinante sur la taille de ces grandes orbites de Galois - le groupe de Galois ayant tendance à agir selon de grandes orbites. Peut-être peut-on formuler une conjecture ou une

3. donnée, je crois, par ?

question ici : cette borne pourrait-elle être indépendante de la courbe elliptique ? En particulier, serait-il vrai que si l'on choisit un nombre premier ℓ (nous plaçant ainsi dans GL_2 sur ce corps fini), sachant que le plus grand nombre premier pour lequel on sait que ce groupe de Galois n'est pas le groupe complet est 37, alors peut-être qu'au-delà de 37, cela est toujours vrai ? Il existe des travaux de Marusia Belu Rebolledo qui réalisent des progrès significatifs à ce sujet sous certaines hypothèses. C'est donc une question très intéressante.

Bien. Passons maintenant aux formes holomorphes. C'est le thème central de cette partie de l'exposé. Prenons un sous-groupe de congruence - notion que je viens de définir - et considérons une forme holomorphe de poids 1 pour ce sous-groupe. Il s'agit d'une fonction définie sur le demi-plan supérieur à valeurs dans $\mathbb{C}$, telle que f transformée par une homographie vérifie une certaine relation impliquant $(cz + d)^1$. Le "poids 1" signifie que l'on a une puissance 1 pour tout élément $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ du groupe, sous réserve de certaines conditions de croissance. La dimension de cet espace est un mystère total. Le théorème de Riemann-Roch ne nous apporte aucune information. C'est précisément là que si Riemann-Roch s'annule, l'indice est nul. On peut l'appeler le théorème de Riemann-Roch-Serre, car il a donné une nouvelle démonstration du théorème classique de Riemann-Roch dans l'article que j'ai mentionné.

Donc dans le cas mentionné, Riemann-Roch ne donne aucune information et la question est : que sont ces formes modulaires ?

On peut décomposer l'espace de ces formes modulaires en espaces plus élémentaires. Donc, on ne considère pas seulement un sous-groupe congruent, mais ce sous-groupe congruent appelé le groupe de Hecke : vous considérez les matrices 2×2 pour lesquelles les deux éléments du coin inférieur gauche sont divisibles par un entier n et ensuite, au lieu d'avoir simplement $f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right)$, il y a un caractère du centre, un caractère qui provient directement des données.

De cette façon, $f(z)$ a un développement plus précis car le groupe a une transformation z se transforme en $z + 1$ et nous avons donc des coefficients et nous avons aussi qu'il existe une théorie des opérateurs de Hecke qui garantit que les coefficients sont multiplicatifs de la manière que j'ai écrite ici, on normalise le premier coefficient à un et dans un article dédié à Weil par Deligne et Serre en 1974, ils prouvent que si vous avez un tel f de poids un, cet f correspond d'une manière que je vais décrire à une représentation étrange et j'insiste sur le mot étrange : bidimensionnelle irréductible rangée.

Très bien. Alors voici Deligne et Serre. Ils regardent peut-être, mais je ne pense pas qu'ils puissent regarder la présente conférence en direct car je ne pense pas que les conférences soient diffusées en direct.

Laissez-moi vous raconter une histoire que Serre m'a racontée, confirmée par Deligne, et que je vais probablement enjoliver pour qu'ils puissent la nier. Donc, vers cette époque, en 1973, Jean-Pierre Serre subit sa première opération du genou.

Il était à l'hôpital, attendant l'arrivée des anesthésistes, et il pensait à tous les grands théorèmes qu'il pourrait prouver, à ce que le médecin allait lui administrer dans une minute. Il l'appela et ils commencèrent à discuter.

Serre lui exposait toutes ces idées, et Deligne essayait d'en placer une.

Finalement, il y parvint : "J'ai prouvé les conjectures de Weil."

Serre répondit :

"Quoi ? Vraiment ?

- Euh... bien sûr, c'est drôle."

Et là, Deligne expliqua cette merveilleuse idée, qui consiste à prendre une famille de nombres à gauche, et à utiliser ... et les puissances de tenseurs élevés pour localiser les zéros dans une famille, et ensuite déterminer individuellement chaque membre de la famille satisfaisant les conjectures de Weil. Et euh, 10 minutes plus tard, l'anesthésiste entre dans la chambre et dit : "Êtes-vous prêt, M. Serre ?". Et Serre répond à l'anesthésiste : "Je suis complètement détendu et prêt. Je peux prouver les conjectures mêmes. Endormez-moi."

Très bien. Ils ont donc écrit ce magnifique article ensemble. Je vous promets de vous dire à quel point la représentation de Galois est étrange. Nous avons donc une extension finie de $\mathbb{Q}$ et une représentation dans deux matrices complexes 2×2 et si nous avons une telle représentation du groupe de Galois, nous obtenons de nombreuses informations sur la façon dont les nombres premiers ordinaires se décomposent dans cette extension de Galois. Cela donne un élément de la classe de conjugaison de Galois dans le groupe de Galois d'une manière bien connue et ensuite la ligne de cette représentation préservera la conjugaison. Il y a un nombre très important, appelé le conducteur, dû à Artin qui a étudié cela en premier et qui mesure la complexité des lignes aux nombres premiers où il y a ramification mais aux nombres premiers où il n'y a pas de ramification, vous obtiendrez une classe de conjugaison dans les matrices complexes 2×2 et cela vous donnera de telles classes de conjugaison et le théorème de Deligne et Serre qui est assez remarquable est que si vous vous êtes donné une forme modulaire holomorphe de poids un, il existe une extension finie de Galois k telle que les coefficients sont la trace de Frobenius et le déterminant est le caractère. Ainsi, de façon remarquable, la forme modulaire holomorphe correspond de cette manière très explicite à un nombre impair. Le caractère impair est très important ici. Si l'on prend la conjugaison complexe, alors le déterminant de la ligne de c est -1 . Ici, c'est la notion d'impair. Donc, toute forme holomorphe de poids un pour le sous-groupe congruent, telle que je l'ai présentée, correspond à une représentation galoisienne. J'expliquerai un mot sur la preuve dans un instant. La réciproque, à savoir que toute représentation de Galois bidimensionnelle devrait apparaître de cette manière, est équivalente à la conjecture d'Artin.

C'est pourquoi Artin a établi ce théorème pour généraliser la fonction indicatrice et la fonction zêta résiduelle, et cette ligne devrait être entière si cette ligne l'est si la représentation est irréductible.

Et cette réciproque, la question de savoir si, en partant d'une représentation de Galois, on peut obtenir une telle forme, est appelée le théorème réciproque.

Et bien que Weil ne l'ait pas souligné, Langlands l'a souligné. Cela découle des arguments de Weil concernant le théorème réciproque.

Il s'agit donc d'un analogue de ce qu'on appelle la conjecture de Shimura-Taniyama pour les représentations de Galois associées aux courbes elliptiques sur $\mathbb{Q}$. Le théorème réciproque spécifie le niveau exact auquel, et c'est très important, vous trouverez la forme modulaire, car il y a un niveau qui est le conducteur. Cette conjecture est donc très falsifiable, et dès qu'une conjecture est très falsifiable, vous pouvez la vérifier. Il est plus probable, lorsque vous la vérifiez, qu'elle soit vraie, car vous l'avez soumise à des tests concrets. Et ces choses, comme vous le savez, se révéleront vraies. Je voudrais donc expliquer brièvement une étape de la démonstration de Deligne et Serre : elle commence par considérer que le produit de deux formes holomorphes est une forme holomorphe.

C'est un fait remarquable. Le produit de deux fonctions holomorphes est holomorphe et son poids est la somme des poids. Donc, si vous commencez par quelque chose de poids un, vous pouvez le multiplier par quelque chose de très explicite appelé série d'Eisenstein dont les coefficients peuvent être étudiés modulo p .

Et ensuite, lorsque vous multipliez les deux, vous pouvez comprendre, en développant simplement les règles de la multiplication, quelles sont les congruences modulo p du produit et vous obtenez alors une forme de poids un.

Et dans les formes de poids supérieur, il existe cette théorie remarquable qui commence par une croissance de Shimura et de Deligne et qui est celle utilisée ici pour construire ce corps k .

De plus, vous n'obtenez pas seulement cette forme modulaire dans ce cadre général. Dans ce cadre général, on utilise cette théorie, à partir de là, de toute forme modulaire holomorphe de niveau un nombre premier p ne divisant pas n , on peut faire une représentation par réduction modulo p , c'est-à-dire un nombre premier p situé au-dessus du nombre premier p qui est utilisé dans cette notation, mais appelons cela simplement la réduction de la représentation de Galois, cette image est finie ici car nous utilisons la topologie discrète à droite.

Ensuite, Serre a fait quelque chose de très important. Il a étudié en profondeur ce que sont les congruences. Il existe de nombreuses congruences entre différentes formes modulaires lorsque l'on fait varier le niveau et le poids.

Le conducteur de niveau est un invariant fondamental. Et Serre a introduit quelque chose d'extrêmement important, appelé le conducteur de Serre, que j'expliquerai dans un instant. Mais supposons que j'aie une extension finie de $\mathbb{Q}$ et une représentation dans $GL_2(\mathbb{F})$ où $\mathbb{F}$ est un corps fini de caractéristique p .

Alors Serre associe un poids que j'appellerai K_{Deligne} (pour poids de Deligne). Tout le monde l'appelle poids de Deligne. Cela a commencé en 1975. Cette conjecture a nécessité beaucoup d'ajus-

tements.

Apparemment, il a fait beaucoup de calculs ou plutôt, son maître a fait beaucoup de calculs pour lui et ensemble, la conjecture exacte a été formulée sous la forme suivante : il associe ce nombre K_{Deligne} , il dépendra du groupe d'inertie. Donc quelque chose dont il faut donner une description que je ne donnerai pas ici. Et il arrive à la conjecture suivante, une conjecture formulée en 1987 qui a été légèrement affinée à partir de certains travaux de Nick Katz concernant la réduction modulo p , non seulement en termes de simple réduction modulo p , mais aussi en termes de définition holomorphe des formes modulaires modulo p . Quoi qu'il en soit, Serre formule cette conjecture assez précise : étant donné une représentation irréductible sur $\overline{\mathbb{F}_p}$ en $\text{GL}_2(\mathbb{F}_p)$, où $\mathbb{F}_p$ est ce corps fini de caractéristique p , alors une telle K_{Deligne} est la réduction d'une forme holomorphe modulo p où ligne n est le ... de Artin, et le conducteur, la partie première à p du ... de Artin et du conducteur, et le poids de ligne k , ce nombre magique k étant le poids minimal pour lequel ces constructions peuvent être satisfaites. Il s'agit donc d'une conjecture très précise qui recèle une information considérable, tant en termes de ramification et de falsifiabilité. Comme je l'ai dit, cela nécessitait des ajustements.

Et c'est une conjecture profonde. Elle implique le théorème de la loi de Maslov et la conjecture de Maslov pour les représentations bidimensionnelles. C'est une conjecture profonde et permettez-moi donc de résumer l'historique de sa résolution.

Le théorème de Maslov a été résolu selon la séquence suivante.

Je serai très bref. Premièrement, la variance de la conjecture de Maslov implique que le théorème de Maslov est dû à des intuitions très pertinentes de Gerhard Fry.

La preuve du théorème de Maslov a suivi en deux étapes. Tout d'abord, Maslov et Libet ont prouvé une partie, je crois qu'ils l'ont appelée de la conjecture de Serre la réduisant ainsi aux conjectures de Shimura et Taniyama pour les courbes elliptiques, les célèbres travaux de Wiles et Taylor.

Wiles, qui a introduit la méthode de relèvement de modularité, a établi la modularité des courbes elliptiques semi-simples et avec elle le théorème de Wiles. Cependant, les techniques introduites par Wiles et Taylor ont été décisives et ont été beaucoup plus générales.

De nombreux théorèmes ont été démontrés, et en particulier la conjecture de Serre sous la forme que nous avons formulée ici. Les méthodes de relèvement de la modularité ont été largement développées et en lien avec ce problème, les contributions importantes de Kissen (?), puis une solution complète de la conjecture de Serre et de ses conséquences, mentionnées par Khare et Wintenberger.

Or, j'ai recroisé Chandrashekhar Khare et il a apparemment écrit un livre que j'ai commencé à lire, intitulé "*Chasing a Conjecture*", et c'est sa démonstration avec Wintenberger de cette conjecture. Très bien. Donc, tout ce qui a été vu jusqu'ici concernait le cas impair.

Je tiens à souligner que la seule façon d'intégrer des formes holomorphes est d'avoir une représentation p -adique impaire. Impair signifie que, sous la conjugaison complexe, le déterminant est égal à moins un.

Que se passe-t-il si le déterminant est égal à un ? Cela concerne la moitié des nombres. Eh bien, il s'avère que la géométrie algébrique ne semble pas si conviviale. Donc, contrairement au cas impair, l'attente dans cette théorie est que pour une représentation classique, qui est paire, elle devrait correspondre non pas à une équation du premier ordre, mais à une forme de Mass, avec k une forme automorphe. Donc, celles-ci sont, hormis un quart d'entre elles, probablement transcendantes et nous en savons beaucoup moins à leur sujet. Nous ne connaissons donc pas si cette conjecture est vraie ou fausse. Nous ne savons pas comment aborder cette conjecture en général pour les formes de Mass.

C'est pourquoi toute l'histoire au sujet de la conjecture de Serre jusqu'à présent et formulée concernait le cas impair, mais elle a des applications frappantes.

Et pourquoi le cas pair est-il si différent ? Si vous prenez le produit de deux fonctions holomorphes, il est holomorphe. Mais si vous prenez un produit de deux fonctions, il n'est pas particulièrement convivial. Et cela fait une grande différence. Par exemple, un certain argument n'est pas applicable. En revanche, nous connaissons l'*Art de la conjecture*. Dans ce cas, nous examinons une représentation d'une extension de Galois finie en matrices complexes 2×2 . Nous pouvons supposer qu'elle est irréductible. Nous pouvons l'examiner dans le groupe linéaire projectif. Nous savons alors quels sont les sous-groupes finis. Et ces sous-groupes finis correspondent aux symétries des solides classiques. Donc, le cas icosaédrique est celui qui n'est pas résoluble et nous connaissons cette conjecture grâce aux travaux de Saito et Shintani et surtout de Langlands si l'image, donc si la représentation bidimensionnelle irréductible dans $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ est résoluble, alors c'est le cas icosaédrique qui nous bloque.

Très bien. Donc, ceci était un exemple de la contribution de Serre, et notamment de sa conjecture, une conjecture très profonde qui a mené à la résolution d'un problème de longue date.

Serre était l'un des premiers membres de Bourbaki.

Il a présenté des dizaines de conférences, je devrais dire plus d'une douzaine, à commencer par la première en 1949-1950 sur les extensions de groupes localement compacts, les travaux d'Iwasawa, qui ont dû être réalisés alors qu'il était étudiant. On a donc ici un étudiant présentant les clés du séminaire Bourbaki.

D'ailleurs, les clés du séminaire Bourbaki sont absolument formidables. Nous devrions vraiment les présenter beaucoup plus largement. Elles expliquent vraiment les mathématiques de manière claire. Je discuterai de deux rapports. L'un date de 1995 où il discute des progrès et des problèmes de théorie de Galois et le second est son séminaire Bourbaki le plus récent, en 2018, où il discute notamment, comme dans les autres exposés du séminaire Bourbaki, du travail d'autres personnes.

Le premier sera donc un rapport sur les progrès concernant une conjecture de Weil, et le second concerne les travaux d'Abel, Chebychev et Robinson, et je vais l'expliquer plus en détail.

Bien, donc l'homologie : en 1962, Serre apprenait quelque chose, l'écrivait, et cela devenait le texte, il écrivait en posant toutes les bonnes questions.

Dans son premier séminaire Bourbaki, Serre passe donc en revue les progrès de la théorie de Galois, c'est un outil pour prouver ses principes. Nous sommes très désireux de généraliser un théorème de Hasse et Minkowski selon lequel si l'on peut résoudre une équation du second degré localement pour toute localisation sur $\mathbb{Q}_p$ et sur $\mathbb{R}$, alors on peut la résoudre sur $\mathbb{Q}$.

Ce sont le genre de théorèmes que nous affectionnons, et c'est ce que cette homologie tente de faire dans un cadre beaucoup plus général.

Il s'agit donc de principes de Hasse pour les variétés homogènes. Ce sont des variétés sur lesquelles on a un groupe linéaire homogène agissant sur un corps parfait K . Et nous voulons savoir si les variétés homogènes possèdent un point rationnel. Mais les variétés homogènes principales, c'est-à-dire celles pour lesquelles le stabilisateur sur la clôture algébrique est un point unique, les variétés homogènes principales possèdent un point rationnel K_G qui est encodé dans ce groupe d'homologie $H^1(K_G)$, $H^1(K_G)$ étant constitué des classes de tels espaces homogènes principaux. Serre, en 1962, formule donc deux belles conjectures sur les conditions dans lesquelles cela sera vrai selon le corps K .

La première conjecture affirme que $H^1(K_G)$ est nul pour tout groupe algébrique linéaire connexe G , si et seulement si la dimension cohomologique de K est au plus un, et la deuxième conjecture est presque la même chose : elle devrait être vraie pour tout groupe simplement connexe G si et seulement si la dimension cohomologique est au plus deux. La dimension cohomologique d'un corps, Serre l'a introduite, mais elle est aussi sous une forme ou une autre dans Katz : c'est le plus petit n pour lequel la cohomologie de la complétion du profini, $\text{Galois}(\overline{K})$, je considère les corps parfaits, sur tout module abélien fini, est nulle, le plus petit n tel que $\text{Galois}(\overline{K})$ définisse cette dimension cohomologique.

De nombreux progrès ont été réalisés sur cette conjecture, et le séminaire que Serre a donné en 1995 en donne un compte-rendu et soulève de nombreuses autres questions. Mais permettez-moi simplement de souligner que la conjecture est pratiquement résolue. Ainsi, la conjecture 1 a été résolue très peu de temps après sa formulation par Steinberg dans un magnifique article en 1965. Et il existe un nombreux travaux sur la conjecture 2 sur les corps des nombres. Elle est résolue. Je n'entrerai pas dans le détail des travaux de tous ceux qui y ont contribué. C'est une conjecture très importante, celle qui intéresse les théoriciens des nombres, mais elle est valable pour tous les domaines et des avancées importantes ont été réalisées par Quillen et Suslin en 1985, et une solution complète au moins pour les groupes classiques a été donnée par Eva Bayer-Fluckiger et Raman Parimala en 1995. C'est cette avancée que Serre relate dans cette étude. Ainsi, bien que la conjecture 2 ait été établie pour certains groupes exceptionnels, elle reste ouverte en général, mais pour les groupes classiques, elle est complètement résolue. En lien avec les principes de Hasse-Minkowski, et le groupe de Brauer, Serre, a posé en 1990 une question élémentaire et complexe qui a résisté aux efforts des mathématiciens pendant de nombreuses années : quelle est la densité des cubiques simples ? Voici une conique simple : elle possède six variables sur les rationnels et admet un point rationnel. On cherche donc la densité des t dans l'espace des t pour lesquels une telle conique admet un point rationnel.

Parfois, elle en admet un, parfois non. Et, d'après le théorème de Hasse-Minkowski, cela est donné

par un principe local-global.

Mais il existe une infinité de nombres premiers à vérifier. Il s'agit donc d'une question délicate.

Elle a été résolue récemment par Gamburd, Ghosh, Whang et moi-même.

Nous avons utilisé la dynamique homogène. Je tenais à le mentionner car ce sont les travaux d'Eskin que j'ai évoqués précédemment.

Le deuxième et dernier séminaire que je voulais expliquer porte sur les orbites de Galois des entiers algébriques (séminaire Bourbaki 2018).

Si vous n'avez pas suivi, je vais être beaucoup plus élémentaire.

[Rires]

Écoutez, il existe un théorème classique de Foata qui affirme que si K est un sous-ensemble de l'ensemble des nombres complexes, s'il n'est pas un sous-ensemble compact de cet ensemble et s'il contient une suite infinie d'entiers algébriques de degré croissant dont tous les conjugués appartiennent à K , alors le diamètre transfini est nécessairement supérieur ou égal à un.

On appelle aussi ce diamètre transfini la capacité. Le diamètre transfini est ce nombre que je définis ici. C'est le diamètre géométrique. Vous verrez pourquoi on l'appelle diamètre maintenant. J'essaie de placer n points dans K aussi éloignés que possible en moyenne géométrique. Il est facile de voir que cette suite, à mesure que j'augmente le nombre de points, diminue et converge vers un nombre appelé la capacité. Le diamètre transfini est un meilleur nom, compte tenu de la définition. Il existe une réciproque à ce théorème, due à Raphael Robinson : si K est inclus dans $\mathbb{R}$, et plus généralement, si le diamètre en question est supérieur à un, alors K contient une suite infinie et leurs conjugués.

Cette condition sur le diamètre égal à un est délicate mais décisive : vous pouvez donc faire quelque chose de remarquable avec cela.

Serre a donc ainsi donné des exposés sur les travaux d'autres personnes, mais lors de ces exposés, ensuite, il expose juste un tas de choses qui semblent être de la pure magie.

Par exemple, tout d'abord, si vous prenez une séquence de courbes et si vous prenez une séquence de milliards de variétés de période fixe sur un corps fini $\mathbb{F}_q$, les zéros de la fonction zêta en fonction des courbes de la variété se trouvent sur le cercle de rayon $\sqrt{q}$.

C'est ce fameux théorème de Weil qui s'avéra être le début de l'histoire de Serre. Donc tout ces zéros se trouvent sur le cercle de rayon la racine carrée. Si vous prenez une séquence de courbes dont le genre devient important et si vous demandez où se situent ces zéros, il s'avère qu'ils doivent couvrir un cercle de façon dense.

C'est un théorème de Weil et Drinfeld. Mais si vous autorisez un milliard, Serre montre que les seules variétés sont celles telles que cette condition de capacité est à la fois nécessaire et suffisante. Donc, tant que la capacité de votre sous-ensemble de ce cercle auquel appartiennent les zéros est plus gros que $\mathbb{Q}$, vous pouvez alors trouver une séquence de milliards de variétés dont les zéros sont bloqués sur ces points. Et parfois la capacité de ce nouvel ensemble est $\frac{1}{4}q$ qui est beaucoup plus petit que $\sqrt{q}$, soit un ensemble assez restreint. Ces capacités sont difficiles à calculer.

Bref, il s'agit d'un théorème remarquable. Il utilise la théorie de Honda-Tate pour produire les variétés. Et cela a amené Serre à une question fantastique et je souhaite expliquer quelques points remarquables des développements récents.

Serre demande si ces couches peuvent devenir denses, voyons cela maintenant.

En général, vous avez un ensemble K et vous regardez la possibilité dont nous venons de discuter où nous avons une suite d'entiers algébriques qui deviennent de plus en plus grands et dont tous les conjugués se trouvent dans le dual de l'ensemble. Pourquoi ne pas prendre une mesure et ajouter une masse δ à chacun des conjugués et diviser par le nombre qui est une mesure de probabilité dans votre ensemble fixe K .

Il n'est pas nécessaire que ce soit un cercle et vous prenez une limite au fur et à mesure que vous parcourez tous les nombres algébriques dont le degré augmente et qui sont restreints à l'ensemble K . Quelles sont les mesures limites possibles ? Et il y a une condition nécessaire découverte par Smith et exploitée de façon très fine par Serre qui est que toute limite faible doit satisfaire que l'intégrale du logarithme de la valeur absolue de Q contre cette mesure limite faible doit être ≥ 0 pour tout Q qui est à coefficients entiers. Et dans une perspective très perspicace, la question que pose Jean-Pierre Serre est "Ne serait-ce pas également une condition suffisante pour l'existence de ceci ?". Cela clarifierait la façon de classer les mesures, mais bien sûr, il n'est pas facile de voir quelles mesures ont cette propriété mais Serre a posé cette question et elle a été brillamment résolue par Alexander Smith il y a quelques années : lorsque K est contenu dans $\mathbb{R}$ et par Bryce Orloski and Naser Talebizadeh Sardari dans le cas général.

Et c'est tout à fait vrai, et Jean-Pierre Serre a posé cette question parce qu'il comprenait qu'il y aurait de belles applications de cette propriété. Je veux donner ici l'application suivante.

Voici donc une question soulevée par Schur, Siegel et Smyth. Examinons les nombres algébriques strictement positifs entiers. Cela signifie donc que leur conjugué sont positifs et ce sont des entiers algébriques et prenons la somme de leurs traces divisée par leur nombre, ce sont les moyennes de la trace de ces nombres lorsque n tend vers l'infini et la perspicacité de Serre résidait dans le fait que si cette conjecture que Smith a prouvée est vraie, alors vous pouvez fabriquer cette moyenne en moins de deux et pendant 70 ans, ce résultat était le meilleur. Je crois que Siegel l'a déjà écrit.

La meilleure séquence a donné la valeur deux, il y avait ce choix et les gens débattaient de savoir si le membre était inférieur à deux ou non. Et Smith a résolu le problème grâce à cet ouvrage fondamental. En fait, Smith, Orloski et Sardari ont maintenant estimé ce nombre mystérieux, et il est inférieur à deux selon leurs limites inférieures et on voit bien qu'ils sont assez proches.

Donc, euh... là..., Smith, Serre, Sardari, il semble que ce soit un problème qui se pose si votre nom de famille commence par S, je n'ai rien à ajouter. C'est juste pour vous.

Très bien. Plus tôt cette année, a été terminé le cinquième volume des Œuvres de Jean-Pierre Serre de 1998 à 2025 et cette somme est apparue il y a quelques semaines. Ces volumes contiennent toujours de magnifiques articles. J'ai fait référence à au moins un des articles de ce volume V. Un autre article, dans ce volume, est un Rapport d'Oberwolfach.

Il y est question d'un groupe dû à Conway et Radin dans leurs pavages apériodiques de $\mathbb{R}^3$. Il y a un groupe engendré par deux rotations et il a toutes sortes de magnifiques propriétés et personne ne comprenait pourquoi ce groupe avait toutes ces merveilleuses propriétés. Par exemple, si vous prenez la double couverture, car le groupe orthogonal n'est pas simplement connecté, si vous prenez le D simplement en connectant le double couvercle SU_2 , vous obtenez un groupe appelé groupe de Clifford et ce groupe : si jamais vous achetez un ordinateur quantique, ce qui, soit dit en passant, ne fait pas pour l'instant, à ma connaissance, grand-chose. Mais si vous achetez un ordinateur quantique et si vous voulez coder quelque chose, vous devrez coder avec ces portes universelles appelées portes de Clifford et T, et il s'agit de ce même groupe qui possède également des propriétés incroyables.

Et ce que Serre observe dans ce rapport d'Oberwolfach, c'est que ce groupe est en fait un groupe arithmétique. C'est assez subtil et c'est de l'arithmétique et cela démasque toute la structure que les gens trouvaient ingénieuse et ce que Radin et Conway recherchaient, c'était le profil typique de Serre.

Très bien. Chacun des 20 livres de Serre est un chef-d'œuvre d'exposé. Nous savons tous que beaucoup d'entre nous ont été formés aux mathématiques en étudiant les livres de Jean-Pierre Serre. Ils vont de son livre le plus cité *Champs locaux* dont la première édition est parue en 1962, la seconde en 1968, à sa récente monographie qui explique comment si vous avez une variété X et si vous faites varier p , l'objet obtenu variera, ce que nous avons bien sûr constaté et déjà abordé indirectement par les fonctions zêta et les conjectures de Weil mais dans cette monographie, Serre pose toute une série de nouvelles questions et de merveilleuses questions, dont certaines concernent les articulations entre différents articles, comme celles avec sa longue histoire avec son ami et collaborateur Armand Borel. Weil apparaît dans les œuvres complètes de Borel et Weil et Borel étaient très proches et on se rappelle que Weil était le père de Serre en mathématiques, son mentor, tandis que Borel était son frère aîné. Et nous devons à Borel qui a communiqué aux travaux de Serre-Leray sur le spectre des séquences après que Serre ait abandonné la classe de Leray. Donc pour ceux qui abandonnent un cours, vous voyez que vous pouvez encore y arriver .

[Rires]

Et même sur ce sujet, il y a cette conférence qui était célèbre.

Il est donc clair que Serre joue dans le ciel mathématique le rôle d'une étoile qui continue de briller.

Le 15 septembre 2026 sera le jour du 100e anniversaire de Jean-Pierre Serre et je crois que je peux parler au nom de nous tous ici, ainsi qu'au nom des mathématiciens du monde entier en remerciant Serre pour ses propos profonds et pour tous ses dons qu'il nous a faits et qui continuent de façonner les mathématiques modernes.

Merci, Jean-Pierre Serre !

[Applaudissements]