

La classification des flots sur les facteurs de type II_1 et le problème du bicentralisateur de Connes

Cyril Houdayer Amine Marrakchi

Résumé

Nous résolvons deux problèmes ouverts de longue date en algèbres de von Neumann. Premièrement, nous montrons que tout flot extérieur à spectre de Connes plein sur le facteur hyperfini de type II_1 possède la propriété de Rokhlin. D'après les travaux de Masuda et Tomatsu, un tel flot est donc unique à conjugaison par cocycle près. Cela résout le problème de classification de Takesaki pour les flots sur le facteur hyperfini de type II_1 . En nous appuyant sur la théorie de type III, nous développons une machinerie de bicentralisateur pour les actions préservant la trace de groupes localement compacts. Dans le cas moyennable, nous relient la conjecture du bicentralisateur à la propriété de Rokhlin. Pour les groupes abéliens, nous prouvons un analogue du théorème de transitivité de Connes-Størmer et nous généralisons le théorème du commutant relatif de Connes-Takesaki. Un nouveau phénomène de résonance est révélé, qui nous permet de résoudre la conjecture du bicentralisateur pour les actions de $\mathbb{R}$. Nous revenons ensuite au monde de type III et utilisons ce nouveau phénomène de résonance pour résoudre la conjecture du bicentralisateur de Connes pour tous les facteurs de type III_1 .

à la mémoire de Uffe Haagerup

1. Introduction et énoncé des résultats principaux

La classification des facteurs injectifs à prédual séparable est l'un des accomplissements fondamentaux de la théorie des algèbres de von Neumann. Connes a prouvé que l'injectivité est équivalente à l'hyperfinitude et a classifié les facteurs injectifs de types II_1 , II_∞ et III_λ pour $\lambda \in [0, 1)$ [Co76]. En particulier, il existe un unique facteur injectif de type II_1 , noté R , son amplification infinie est l'unique facteur injectif de type II_∞ , et il existe un unique facteur injectif de type III_λ pour chaque $0 < \lambda < 1$. S'appuyant sur les travaux de Connes [Co85], Haagerup a achevé le cas le plus difficile

Ce texte est la traduction par l'ia deepseek, demandée en septembre 2026 par Denise Vella-Chemla, de l'article arxiv <https://arxiv.org/pdf/2609.11462>.

CH : École normale supérieure, Département de mathématiques et applications, Université Paris-Saclay, 45 rue d'Ulm, 75230 Paris Cedex 05, France.

CH is supported by ERC Advanced Grant NET 101141693

AM : CNRS, École normale supérieure de Lyon, Unité de mathématiques pures et appliquées, 46 allée d'Italie, 69364 Lyon, France

de la classification en établissant l'unicité du facteur injectif de type III_1 [Ha87].

Une fois les facteurs sous-jacents compris, un problème naturel consiste à classifier leurs automorphismes. Pour le facteur hyperfini de type II_1 , noté R , Connes a classifié les automorphismes arbitraires à conjugaison extérieure près [Co75]. Ici, la conjugaison extérieure signifie la conjugaison après une perturbation intérieure.

L'étape naturelle suivante consiste à remplacer le temps discret par le temps continu et à classifier les *flots*, c'est-à-dire les groupes à un paramètre continu $\alpha : \mathbb{R} \curvearrowright R$. L'analogue approprié de la conjugaison extérieure est la conjugaison par cocycle : deux flots α et β sont conjugués par cocycle s'il existe $\theta \in \text{Aut}(R)$ et une famille fortement continue d'unitaires $(u_t)_{t \in \mathbb{R}}$ tels que

$$u_{s+t} = u_s \alpha_s(u_t), \quad \beta_t = \theta \circ \text{Ad}(u_t) \circ \alpha_t \circ \theta^{-1} \quad (s, t \in \mathbb{R}).$$

Le problème de classification des flots sur le facteur hyperfini de type II_1 , noté R , à conjugaison par cocycle près a été promu par Takesaki depuis la fin des années 1970 [KP25]. Un invariant important pour un flot α est son spectre de Connes $\Gamma(\alpha)$, qui est un sous-groupe fermé de $\mathbb{R}$. Cet invariant a été introduit à l'origine par Connes pour classifier les facteurs de type III en sous-types III_λ , $\lambda \in [0, 1]$. Kawahigashi a classifié les flots dont le spectre de Connes est un sous-groupe propre de $\mathbb{R}$ à conjugaison stable près [Ka89]. Son travail est l'analogue pour les flots de la classification des facteurs injectifs de type III_λ , $\lambda \in [0, 1]$. Pour les flots extérieurs à spectre de Connes plein, qui correspondent au cas de type III_1 dans cette analogie, une conjecture a émergé, demandant si tous ces flots sont conjugués par cocycle. Kawahigashi a prouvé cette conjecture sous l'hypothèse supplémentaire que le flot fixe point par point une sous-algèbre de Cartan [Ka91].

Une étape importante pour résoudre cette conjecture sur les flots a été franchie par Masuda–Tomatsu [MT16]. Ils ont introduit une propriété abstraite pour les flots appelée la propriété de Rokhlin [MT16, Definition 4.1], inspirée par la propriété de Rokhlin pour les automorphismes individuels étudiée par Connes. Ils ont ensuite réussi à prouver qu'il existe un unique flot de Rokhlin sur le facteur hyperfini de type II_1 à conjugaison par cocycle près [MT16, Corollaries 7.9, 5.16 and 4.13]. Un modèle de cet unique flot de Rokhlin sur le facteur hyperfini de type II_1 est donné par le produit tensoriel infini

$$\sigma_t^\infty = \bigotimes_{n \in \mathbb{N}} \sigma_t \quad (t \in \mathbb{R})$$

où $\sigma : \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{M}_d(\mathbb{C})$ est un flot fidèle arbitraire avec $d \geq 3$.

Grâce aux travaux de Masuda–Tomatsu, la conjecture sur les flots peut être reformulée comme suit : tout flot extérieur à spectre de Connes plein possède-t-il la propriété de Rokhlin ?

Notre résultat principal résout cette conjecture par l'affirmative.

Théorème A. *Soit $\alpha : \mathbb{R} \curvearrowright R$ un flot sur le facteur hyperfini de type II_1 , noté R . Les assertions suivantes sont équivalentes. (i)(i)*

1. α possède la propriété de Rokhlin.
2. α est strictement extérieur, c'est-à-dire $R' \cap (R \rtimes_\alpha \mathbb{R}) = \mathbb{C}1$.
3. $\Gamma(\alpha) = \mathbb{R}$ et α est extérieur.

Récemment, nous avons prouvé le Théorème A pour les flots presque périodiques dans [HM26, Théorème A], mais c'était un cas très particulier et la preuve ne pouvait pas être adaptée à des flots arbitraires. Notre approche dans cet article est directement inspirée par la théorie des facteurs de type III et leur classification. L'analogie guidant notre travail présent est résumée dans le Tableau 1. En particulier, nous obtenons des analogues pour les flots de plusieurs théorèmes de structure pour les facteurs de type III, tels que le théorème du commutant relatif de Connes–Takesaki [CT77] et le théorème de transitivité de Connes–Størmer [CS78]. Un ingrédient crucial dans la preuve de Connes–Haagerup de l'unicité du facteur injectif de type III₁ est le soi-disant problème du bicentralisateur formulé par Connes pour les facteurs arbitraires de type III₁ [Co85] et résolu par Haagerup dans le cas injectif [Ha87]. Par analogie avec leurs travaux, nous développons une théorie du bicentralisateur pour les actions de groupes localement compacts arbitraires sur les facteurs de type II₁, que nous allons maintenant expliquer.

1.1. Une théorie du bicentralisateur pour les actions préservant la trace

Soit $\alpha : G \curvearrowright (M, \tau)$ une action continue préservant la trace d'un groupe localement compact G sur une algèbre de von Neumann tracialement (M, τ) . Nous définissons le bicentralisateur de l'action, noté $B(M, \alpha)$, comme l'algèbre de tous les $a \in M$ tels que

$$\|x_i a - a x_i\|_2 \longrightarrow 0$$

pour tout filet borné $(x_i)_i$ dans M satisfaisant

$$\sup_{g \in K} \|\alpha_g(x_i) - x_i\|_2 \longrightarrow 0 \quad \text{pour tout compact } K \subset G.$$

Ainsi, le bicentralisateur enregistre ce qui commute asymptotiquement avec tous les éléments presque invariants. Si nous remplaçons τ par un état normal fidèle φ et prenons α comme le flot modulaire σ^φ , nous retrouvons le bicentralisateur $B(M, \varphi)$ défini par Connes [Co85].

Nous formulons deux conjectures mettant en évidence l'importance du bicentralisateur pour la classification des actions de groupes moyennables sur les facteurs injectifs.

Conjecture B. *Soit $\alpha : G \curvearrowright M$ une action continue d'un groupe localement compact sur un facteur de type II₁. Supposons que G soit moyennable. Alors les assertions suivantes sont équivalentes. (i)(i)*

1. α est fidèle et a un bicentralisateur trivial, c'est-à-dire $B(M, \alpha) = \mathbb{C}1$.
2. α est strictement extérieur, c'est-à-dire $M' \cap (M \rtimes_\alpha G) = \mathbb{C}1$.

Conjecture C. *Soit $\alpha : G \curvearrowright M$ une action continue d'un groupe localement compact sur un facteur de type II₁, noté M . Supposons que G soit moyennable et que M soit injectif. Alors les assertions suivantes sont équivalentes. (i)(i)*

1. α possède la propriété de Rokhlin.
2. α est fidèle et a un bicentralisateur trivial, c'est-à-dire $B(M, \alpha) = \mathbb{C}1$.
3. α est strictement extérieur, c'est-à-dire $M' \cap (M \rtimes_\alpha G) = \mathbb{C}1$.

De plus, lorsque G est à base dénombrable et M est séparable, il existe une unique action satisfaisant ces propriétés équivalentes à conjugaison par cocycle près.

Nous observons qu'un cas particulier de la Conjecture [B](#) lorsque G est discret a été résolu par Popa–Shlyakhtenko–Vaes [[PSV20](#), Lemmes 4.2 and 4.3] en utilisant le théorème d'indépendance libre approchée de Popa. Nous étendons leur argument au cas où G admet un sous-groupe ouvert compact (voir Théorème [2.23](#)). La Conjecture [C](#) est également connue pour être vraie lorsque G est discret, grâce au travail célèbre d'Ocneanu [[Oc85](#)]. Très récemment, Nishihara a aussi prouvé la Conjecture [C](#) lorsque G a un sous-groupe ouvert compact [[Ni26](#)]. Bien sûr, pour les deux conjectures, le cas le plus difficile est celui où G est connexe et non compact, une situation où l'on ne peut pas séparer le comportement à petite échelle du comportement à grande échelle. Nous mentionnons également le travail de Shimada qui a généralisé le travail de Masuda–Tomatsu sur les flots de Rokhlin pour classer les actions de groupes abéliens localement compacts arbitraires ayant la propriété de Rokhlin [[Sh14](#)].

Notre résultat principal suivant est le théorème établissant l'équivalence des assertions (i) et (ii) dans la Conjecture [C](#). Ce théorème est obtenu via la théorie des correspondances équivariantes et la technique de mise en œuvre des états binormaux dans les ultrapuissances [[Ma25](#), Théorème 2.1], ce qui nous permet de caractériser la propriété de Rokhlin et la trivialité du bicentralisateur en termes de faible contenance des correspondances équivariantes.

Théorème D. *Soit $\alpha : G \curvearrowright M$ une action continue d'un groupe localement compact moyennable sur un facteur injectif de type II_1 , noté M . Alors α possède la propriété de Rokhlin si et seulement si α est fidèle et $B(M, \alpha) = \mathbb{C}1$.*

Voir aussi le Théorème [3.17](#). En combinant ce théorème avec le travail de Shimada [[Sh14](#)], nous obtenons le corollaire suivant.

Corollaire E. *Un groupe abélien localement compact à base dénombrable admet une unique action minimale sur le facteur hyperfini de type II_1 , à conjugaison par cocycle près.*

Dans le cas $G = \mathbb{R}$, nous sommes en mesure de résoudre la conjecture du bicentralisateur en toute généralité, prouvant ainsi le Théorème [A](#).

Théorème F. *Soit $\alpha : \mathbb{R} \curvearrowright M$ un flot continu sur un facteur de type II_1 , noté M . Supposons que $\Gamma(\alpha) = \mathbb{R}$ et que α soit extérieur. Alors*

$$B(M, \alpha) = \mathbb{C}1.$$

Enfin, revenant au monde de type III_1 avec la nouvelle compréhension issue du monde de type II_1 , nous sommes en mesure de résoudre la conjecture du bicentralisateur de Connes pour les facteurs arbitraires de type III_1 . La preuve est essentiellement la même que celle du Théorème [F](#).

Théorème G. *Soit M un facteur de type III_1 muni d'un état normal fidèle φ . Alors*

$$B(M, \varphi) = \mathbb{C}1.$$

Le Théorème F est très spécifique au cas $G = \mathbb{R}$ et ne se généralise pas aux groupes abéliens localement compacts arbitraires, pas même à $\mathbb{R}^2$. En fait, l'implication

$$\alpha \text{ est extérieur et } \Gamma(\alpha) = \widehat{G} \implies M' \cap (M \rtimes_{\alpha} G) = \mathbb{C}1$$

est fausse pour les groupes abéliens localement compacts arbitraires. Le fait qu'elle soit vraie lorsque $G = \mathbb{R}$ est un petit miracle. Comme nous allons maintenant l'expliquer, c'est en étudiant cette question que nous avons finalement abouti au Théorème F et au Théorème G.

1.2. Le théorème du commutant relatif et la propriété de résonance

Pour un groupe discret agissant sur un facteur, les coefficients de Fourier rendent le passage de l'extériorité à l'extériorité stricte direct. Pour les actions de groupes continus, ces coefficients ne doivent pas nécessairement exister ponctuellement. L'extériorité exclut les contributions atomiques non triviales au commutant relatif, mais ne donne aucun contrôle direct sur son spectre continu sans hypothèses supplémentaires (voir par exemple [MV23, Théorème A] ou [Mo25, Corollaire B]).

Pour être plus précis, soit $\alpha : G \curvearrowright M$ une action continue d'un groupe abélien localement compact sur un facteur M . Alors il est facile de voir que α est extérieur si et seulement si la restriction de l'action duale

$$\widehat{\alpha} : \widehat{G} \curvearrowright M \rtimes_{\alpha} G$$

à $M' \cap (M \rtimes_{\alpha} G)$ est faiblement mélangeante. En général, le spectre atomique de

$$\widehat{\alpha}|_{M' \cap (M \rtimes_{\alpha} G)}$$

détecte les éléments de G qui agissent par automorphismes intérieurs.

En général, il n'y a aucune raison de croire que l'extériorité force α à être strictement extérieur, c'est-à-dire $M' \cap (M \rtimes_{\alpha} G) = \mathbb{C}1$, même si nous supposons que $\Gamma(\alpha) = \widehat{G}$. Mais malgré nos efforts, avec l'assistance du GPT-5.6 d'OpenAI, nous n'avons pas pu trouver de contre-exemple pour $G = \mathbb{R}$. Nous avons donc tenté d'obtenir un résultat positif en adaptant la preuve du théorème du commutant relatif de Connes–Takesaki, [CT77, Chapter II, Théorème 5.1], un résultat célèbre de la théorie modulaire. Avec l'aide du GPT-5.6 d'OpenAI, nous sommes arrivés au théorème suivant.

Théorème H. *Soit $\alpha : G \curvearrowright M$ une action continue d'un groupe abélien localement compact qui préserve une trace semifinie normale fidèle τ . Considérons l'action jointe*

$$\gamma : G \times \widehat{G} \curvearrowright M' \cap (M \rtimes_{\alpha} G)$$

donnée par

$$\gamma_{t,p}(x) = \widehat{\alpha}_p(u_t x u_t^*), \quad (t, p) \in G \times \widehat{G},$$

où $\widehat{\alpha}$ est l'action duale et $(u_t)_{t \in G}$ sont les unitaires implémentant l'action α dans le produit croisé. Alors nous avons

$$\ker(\gamma)^{\perp} \subset \mathcal{R}_G = \{(p, t) \in \widehat{G} \times G \mid p(t) = 1\}.$$

Nous appelons $\mathcal{R}_G$ l'ensemble de résonance. Ce théorème n'a aucune conséquence frappante lorsque G est un groupe abélien localement compact arbitraire. Mais lorsque $G = \mathbb{R}$, il s'avère que tout sous-groupe de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ contenu dans

$$\mathcal{R}_{\mathbb{R}} = \{(p, t) \in \mathbb{R}^2 \mid pt \in 2\pi\mathbb{Z}\}$$

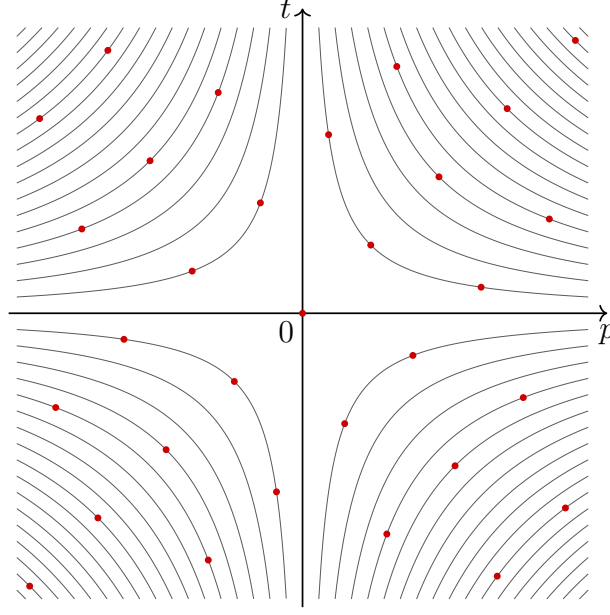


FIGURE 1 – En noir, l'ensemble de résonance

$$\mathcal{R}_{\mathbb{R}} = \{(p, t) \in \mathbb{R}^2 \mid pt \in 2\pi\mathbb{Z}\}.$$

Tout sous-groupe de $\mathbb{R}^2$ contenu dans $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}$ doit être discret (tel que le sous-groupe représenté par des points rouges) ou confiné à l'un des axes de coordonnées.

est soit contenu dans l'un des axes de coordonnées, soit discret. Dans ce dernier cas, cela force γ à avoir un spectre atomique. Voir la Figure 1. Lorsque $G = \mathbb{R}$, nous obtenons donc la dichotomie suivante.

Corollaire I. *Soit $\alpha : \mathbb{R} \curvearrowright M$ un flot sur un facteur M qui préserve une trace semifinie normale fidèle τ . Alors au moins l'une des assertions suivantes est vraie. (i)(i)*

1. On a

$$M' \cap (M \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}) = \mathcal{Z}(M \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}).$$

2. L'algèbre $M' \cap (M \rtimes_{\alpha} \mathbb{R})$ est engendrée par des unitaires de la forme $v^* u_t$, où $t \in \mathbb{R}$, $v \in \mathcal{U}(M)$ et $\alpha_t = \text{Ad}(v)$.

En particulier, si $\Gamma(\alpha) = \mathbb{R}$ et α est extérieur, alors α est strictement extérieur.

Pour les groupes abéliens localement compacts autres que $\mathbb{R}$, la dichotomie échoue, permettant des contre-exemples même sur le facteur hyperfini (voir la Sous-section 6.3.). L'implication d'extériorité stricte est donc un petit miracle de la géométrie unidimensionnelle.

Expliquons maintenant comment nous obtenons le Théorème F et le Théorème G. Pour une action d'un groupe abélien localement compact G à spectre de Connes plein, nous construisons une *action bicentralisatrice duale* canonique

$$\beta : \widehat{G} \curvearrowright B(M, \alpha).$$

Dans le cas des facteurs de type III_1 , cette action bicentralisatrice duale a été découverte dans [AHHM20] et a conduit à plusieurs développements, voir [Ma20, Théorème D] et [Ma25, Théorème E(3)]. Dans le cas des actions sur les facteurs de type II_1 à spectre de Connes plein, nous construisons l'action bicentralisatrice duale en prouvant d'abord un analogue du théorème de transitivité de Connes–Størmer, sous la forme d'un théorème d'annulation approchée de 1-cocycle.

De manière similaire aux résultats récents dans le cas de type III_1 [Ma26], nous montrons que l'action bicentralisatrice duale

$$\beta : \widehat{G} \curvearrowright B(M, \alpha)$$

est ergodique, et nous déterminons complètement son spectre ponctuel.

Maintenant, puisque l'action bicentralisatrice duale β commute avec $\alpha|_{B(M, \alpha)}$, nous pouvons considérer l'action bicentralisatrice jointe

$$\gamma = (\alpha|_{B(M, \alpha)} \times \beta) : G \times \widehat{G} \curvearrowright B(M, \alpha).$$

Inspirés par le Théorème H et avec l'aide technique cruciale de GPT-6, nous montrons que γ satisfait la propriété de résonance

$$\ker(\gamma)^\perp \subset \mathcal{R}_G.$$

Lorsque $G = \mathbb{R}$, cela implique que γ a un spectre purement ponctuel. Le Théorème F en découle, et il en va de même pour le Théorème G.

Combiné avec le théorème d'Isono [Is24, Corollaire B], le Théorème G règle également la conjecture de Haagerup–Størmer : tout automorphisme ponctuellement intérieur d'un facteur de type III_1 à prédual séparable est la composition d'un automorphisme intérieur et d'un automorphisme modulaire.

La Section 2. introduit le bicentralisateur d'une action préservant la trace et sa mise en œuvre dans les ultrapuissances. La Section 3. établit le lien avec la propriété de Rokhlin, et la Section 4. étudie les perturbations par cocycle et l'annulation approchée de cocycle. Dans la Section 5., nous construisons l'action bicentralisatrice duale pour les groupes abéliens. La Section 6. développe le cadre distributionnel et ses applications aux commutants relatifs et à l'extériorité stricte. La Section 7. utilise le phénomène de résonance révélé par la Section 6. pour achever la preuve de la conjecture sur les flots. La Section 8. adapte la preuve au problème du bicentralisateur de Connes.

Divulgarion des outils et des ressources computationnelles

À un stade exploratoire de ce projet, nous avons utilisé le modèle GPT-5.6 Sol d'OpenAI pour étudier si tout flot extérieur préservant la trace à spectre de Connes plein devait être strictement extérieur. Nous avons d'abord exploré avec le modèle d'éventuels contre-exemples parmi les constructions classiques et moins familières de flots. Lorsqu'aucun n'a résisté à l'examen, nous avons orienté la discussion vers l'adaptation du mécanisme distributionnel de Connes–Takesaki. Après d'autres interactions, le modèle a produit une preuve que nous avons ensuite vérifiée comme correcte. L'argument était néanmoins mystérieux et difficile à comprendre, avec peu d'indications sur la structure qui le sous-tendait.

Savoir que le résultat était vrai a changé la nature de notre tâche. Nous avons mis de côté l'argument original et reconstruit la preuve conceptuellement à partir de zéro. Cela a conduit à la théorie des distributions à valeurs dans les algèbres de von Neumann développée ici. Il a été particulièrement gratifiant de réaliser que le même cadre prouve à la fois le résultat préservant la trace et retrouve le théorème du commutant relatif de Connes–Takesaki en toute généralité d'un point de vue conceptuel nouveau.

La théorie du bicentralisateur pour les actions préservant la trace, y compris le lien avec la propriété de Rokhlin, le théorème d'annulation approchée de cocycle, l'action bicentralisatrice duale et le théorème du point fixe relatif, a été développée entièrement par les auteurs. L'IA n'a servi que d'aide à la rédaction dans cette partie du travail. En utilisant cette théorie, nous avons prouvé la conjecture sur les flots pour les flots minimaux ou les flots fixant une sous-algèbre abélienne maximale et certains produits tensoriels de flots, mais le cas général est resté hors de portée pendant un certain temps. Il était également clair pour nous dès le départ que toute solution du problème du bicentralisateur pour les flots sur les facteurs de type II_1 conduirait à une solution du problème du bicentralisateur de Connes pour les facteurs de type III_1 en adaptant l'argument.

L'idée décisive a été d'appliquer le mécanisme de résonance de la Section 6. à l'algèbre bicentralisatrice elle-même, équipée de son flot bicentralisateur joint. Nous avons formulé cette idée et demandé au modèle GPT-6 Astra d'OpenAI, récemment publié, de développer l'argument. Le modèle a produit une preuve, que nous avons vérifiée. Comme auparavant, l'argument était difficile à lire et obscurcissait la structure sous-jacente. Nous l'avons réécrit pour donner une preuve conceptuelle du cas général. L'ingrédient technique crucial dans la preuve, trouvé par GPT-6 Astra seul, est d'introduire un état tracial singulier sur l'algèbre du produit croisé qui lui a permis d'appliquer notre théorème du point fixe relatif pour les actions bicentralisatrices duales dans la représentation GNS de cet état. Nous avons vérifié tous les arguments et assumons l'entière responsabilité de ceux-ci.

TABLE 1 – Facteurs de type III et flots sur les facteurs de type II_1 .

Facteurs de type III M .	Flots sur les facteurs de type II_1 $\alpha : \mathbb{R} \curvearrowright N$.
Type III_1. $\Gamma(\sigma^\varphi) = \mathbb{R}$ pour un certain état normal fidèle φ [Co73]. Cela force σ^φ à être extérieur.	Spectre de Connes plein. $\Gamma(\alpha) = \mathbb{R}$. Mais α n'est pas nécessairement extérieur.
Théorème du commutant relatif de Connes–Takesaki. Si M est de type III_1 alors $M' \cap (M \rtimes_{\sigma^\varphi} \mathbb{R}) = \mathbb{C}1$ [CT77].	Extériorité stricte. Si $\Gamma(\alpha) = \mathbb{R}$ et α est extérieur alors $N' \cap (N \rtimes_\alpha \mathbb{R}) = \mathbb{C}1$. (Corollaire I).
Transitivité de Connes–Størmer. Sur un facteur de type III_1 , deux états normaux fidèles quelconques sont approximativement unitairement conjugués [CS78].	Notre théorème d'annulation approchée de 1-cocycle. Si $\Gamma(\alpha) = \mathbb{R}$, alors $Z^1(\alpha) = \overline{B^1(\alpha)}$: tout 1-cocycle pour α est un cobord approché (Théorème 5.6).
R_∞-stabilité. $M \cong M \overline{\otimes} R_\infty$ où R_∞ est le facteur d'Araki-Woods de type III_1 .	Propriété de Rokhlin. Le flot α possède la propriété de Rokhlin [MT16].
Unicité des facteurs injectifs R_∞-stables. Un facteur injectif séparable absorbant R_∞ est isomorphe à R_∞ [Co85].	Unicité des flots de Rokhlin sur les facteurs injectifs de type II_1. Il existe un unique flot de Rokhlin sur le facteur hyperfini de type II_1 à conjugaison par cocycle près [MT16].
Approche du bicentralisateur de Connes. Si M est injectif de type III_1 et $B(M, \varphi) = \mathbb{C}1$, alors $M \cong M \overline{\otimes} R_\infty$ [Co85].	Notre approche du bicentralisateur. Si N est injectif, $\Gamma(\alpha) = \mathbb{R}$ et $B(N, \alpha) = \mathbb{C}1$, alors α possède la propriété de Rokhlin (Théorème D).
Problème du bicentralisateur de Connes. Tout facteur de type III_1 M (pas nécessairement injectif) satisfait $B(M, \varphi) = \mathbb{C}1$ [Co85]. Le cas injectif a été résolu par Haagerup [Ha87]. Le cas général est résolu dans le Théorème G.	Notre théorème du bicentralisateur pour les flots. Tout flot extérieur α sur un facteur de type II_1 N (pas nécessairement injectif) avec $\Gamma(\alpha) = \mathbb{R}$ satisfait $B(N, \alpha) = \mathbb{C}1$. C'est le Théorème F.

2. Une théorie du bicentralisateur pour les actions préservant la trace

Nous introduisons les bicentralisateurs analytique et algébrique pour les actions préservant la trace, y compris leurs versions relatives pour les inclusions. Le bicentralisateur analytique décrit la commutation asymptotique avec les éléments presque invariants. Le bicentralisateur algébrique est défini au moyen des commutants après amplification. Nous conjecturons qu'ils coïncident pour les groupes moyennables et prouvons la trivialité du bicentralisateur pour les actions strictement extérieures de groupes moyennables ayant un sous-groupe ouvert compact, ainsi que pour les actions de Bogoljubov libres de groupes moyennables sur les facteurs gaussiens libres.

L'outil principal est une interprétation en ultrapuissance qui transforme les éléments presque invariants en points fixes et la commutation asymptotique en commutation exacte. La moyennisation donne alors une description de l'espérance conditionnelle sur le bicentralisateur. Nous développons aussi une mise en œuvre équivariante dans les ultrapuissances des états binormaux, qui reliera cette théorie aux correspondances dans la section suivante.

2.1. Ultrapuissances traciales et parties équicontinues

Nous rappelons la construction de l'ultrapuissance traciale et sa version équivariante. La construction indexée par les suites est standard. Voir, par exemple, [AH14, Section 3]. Les ultrapuissances équicontinues pour les flots continus ont été introduites dans ce contexte dans [MT16, Section 3].

Soit I un ensemble dirigé et soit ω un ultrafiltre sur I . Nous écrivons $\lim_{i \rightarrow \omega} a_i = a$ lorsque le filet $(a_i)_{i \in I}$ converge vers a le long de ω . L'ultrafiltre ω est dit *cofinal* si

$$\{j \in I \mid j \geq i\} \in \omega \quad \text{pour tout } i \in I.$$

Soit (M, τ) une algèbre de von Neumann traciale, où τ est un état tracial normal fidèle, et posons $\|x\|_2 = \tau(x^*x)^{1/2}$. Définissons

$$\ell^\infty(I, M) = \left\{ (x_i)_{i \in I} \mid \sup_{i \in I} \|x_i\| < \infty \right\}$$

et

$$\mathcal{I}_\omega(M) = \left\{ (x_i)_{i \in I} \in \ell^\infty(I, M) \mid \lim_{i \rightarrow \omega} \|x_i\|_2 = 0 \right\}.$$

L'ensemble $\mathcal{I}_\omega(M)$ est un idéal bilatère fermé en norme de $\ell^\infty(I, M)$. L'*ultrapuissance traciale* de M par rapport à ω est

$$M^\omega = \ell^\infty(I, M) / \mathcal{I}_\omega(M).$$

Nous désignons par $(x_i)^\omega$ l'image de $(x_i)_{i \in I}$ dans M^ω . La formule

$$\tau^\omega((x_i)^\omega) = \lim_{i \rightarrow \omega} \tau(x_i)$$

définit un état tracial normal fidèle sur M^ω , et nous identifions M à la sous-algèbre de von Neumann de M^ω donnée par les suites constantes. L'espérance conditionnelle préservant la trace $E^\omega : M^\omega \rightarrow M$ est donnée par

$$E^\omega((x_i)^\omega) = \lim_{i \rightarrow \omega} x_i$$

où la limite est prise dans la topologie faible*.

Nous utiliserons la proposition suivante tout au long de cet article.

Proposition 2.1. *Soit $(f_i)_{i \in I}$ un filet de fonctions continues d'un espace localement compact X dans un espace de Hilbert H , avec $\sup_i \|f_i(x)\| < \infty$ pour tout $x \in X$. Si $(f_i)_{i \in I}$ est ω -équicontinu, c'est-à-dire que pour tout $x \in X$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage U de x tel que*

$$\{i \in I \mid \sup_{y \in U} \|f_i(x) - f_i(y)\|_2 \leq \varepsilon\} \in \omega$$

alors

$$f = (f_i)^\omega : X \ni x \mapsto (f_i(x))^\omega \in H^\omega$$

est continue. De plus, pour tout sous-ensemble compact $K \subset X$, nous avons

$$\limsup_{i \rightarrow \omega} \sup_{x \in K} \|f_i(x)\|_2 = \sup_{x \in K} \|f(x)\|_2.$$

Démonstration. Nous prouvons d'abord la continuité de f . Fixons $x \in X$ et $\varepsilon > 0$. Par ω -équicontinuité, il existe un voisinage U de x tel que

$$\left\{ i \in I \mid \sup_{y \in U} \|f_i(x) - f_i(y)\|_2 \leq \varepsilon \right\} \in \omega.$$

Donc, pour tout $y \in U$,

$$\|f(x) - f(y)\|_2 = \lim_{i \rightarrow \omega} \|f_i(x) - f_i(y)\|_2 \leq \varepsilon.$$

Ainsi $f : X \rightarrow H^\omega$ est continue.

Soit maintenant $K \subset X$ compact. Ponctuellement, nous avons

$$\|f(x)\|_2 = \lim_{i \rightarrow \omega} \|f_i(x)\|_2 \quad (x \in X),$$

et par conséquent

$$\sup_{x \in K} \|f(x)\|_2 \leq \limsup_{i \rightarrow \omega} \sup_{x \in K} \|f_i(x)\|_2.$$

Pour l'inégalité réciproque, fixons $\varepsilon > 0$. Pour tout $x \in K$, choisissons un voisinage U_x de x tel que

$$\left\{ i \in I \mid \sup_{y \in U_x} \|f_i(x) - f_i(y)\|_2 \leq \varepsilon \right\} \in \omega.$$

Choisissons $x_1, \dots, x_n \in K$ tels que

$$K \subset \bigcup_{k=1}^n U_{x_k}.$$

Après avoir intersecté un nombre fini d'éléments de ω , nous obtenons, pour ω -presque tout i ,

$$\sup_{y \in U_{x_k}} \|f_i(x_k) - f_i(y)\|_2 \leq \varepsilon, \quad \|f_i(x_k)\|_2 \leq \|f(x_k)\|_2 + \varepsilon$$

pour tout $1 \leq k \leq n$. Pour un tel i et $y \in K$, choisissons k avec $y \in U_{x_k}$. Alors

$$\|f_i(y)\|_2 \leq \|f_i(x_k)\|_2 + \|f_i(y) - f_i(x_k)\|_2 \leq \sup_{x \in K} \|f(x)\|_2 + 2\varepsilon.$$

Il s'ensuit que

$$\limsup_{i \rightarrow \omega} \sup_{x \in K} \|f_i(x)\|_2 \leq \sup_{x \in K} \|f(x)\|_2 + 2\varepsilon.$$

En faisant tendre $\varepsilon \rightarrow 0$, on prouve la seconde assertion. $\square$

Soit G un groupe localement compact et soit $\alpha : G \curvearrowright (M, \tau)$ une action continue préservant la trace. Ici, continuité signifie que $g \mapsto \alpha_g(x)$ est continue en $\|\cdot\|_2$ pour tout $x \in M$. Nous écrivons $K \Subset G$ lorsque K est un sous-ensemble compact de G , et $U \ll G$ lorsque U est un voisinage ouvert de l'identité.

Un filet borné $(x_i)_{i \in I}$ dans M est appelé (α, ω) -équicontinu si le filet de fonctions continues $(g \mapsto \alpha_g(x_i))_{i \in I}$ est ω -équicontinu. Nous définissons la *partie α -équicontinue* de l'ultrapuissance trachiale par

$$M_\alpha^\omega = \left\{ (x_i)^\omega \in M^\omega \mid (x_i)_{i \in I} \text{ est } (\alpha, \omega)\text{-équicontinu} \right\}.$$

Cette définition ne dépend pas du représentant choisi. Nous définissons aussi

$$M^{\omega, \alpha} = \left\{ (x_i)^\omega \in M^\omega \mid \limsup_{i \rightarrow \omega} \sup_{g \in K} \|\alpha_g(x_i) - x_i\|_2 = 0 \text{ pour tout } K \Subset G \right\}.$$

La proposition suivante découle facilement de la Proposition 2.1.

Proposition 2.2. *La partie α -équicontinue M_α^ω est une sous-algèbre de von Neumann de M^ω , et la formule*

$$\alpha_g^\omega((x_i)^\omega) = (\alpha_g(x_i))^\omega \quad (g \in G)$$

définit une action continue préservant la trace

$$\alpha^\omega : G \curvearrowright M_\alpha^\omega$$

telle que

$$M^{\omega, \alpha} = (M_\alpha^\omega)^{\alpha^\omega}.$$

De plus, pour tout $f \in L^1(G)$ et $(x_i)^\omega \in M^\omega$, nous avons

$$(\alpha_f(x_i))^\omega \in M_\alpha^\omega$$

et si $x = (x_i)^\omega \in M_\alpha^\omega$, nous avons la formule

$$\alpha_f^\omega(x) = (\alpha_f(x_i))^\omega.$$

Nous identifions $L^2(M^\omega)$ à son sous-espace canonique de $L^2(M)^\omega$.

Proposition 2.3. *L'espace de Hilbert $L^2(M_\alpha^\omega)$ est la partie U^α -équicontinue de $L^2(M^\omega)$, c'est-à-dire,*

$$L^2(M_\alpha^\omega) = \left\{ (\xi_i)^\omega \in L^2(M^\omega) \mid (g \mapsto U_g^\alpha \xi_i)_{i \in I} \text{ est } \omega\text{-équicontinue} \right\},$$

et

$$U_g^{\alpha\omega} \xi = (U_g^\alpha)^\omega \xi \quad (\xi \in L^2(M_\alpha^\omega), g \in G).$$

De plus, pour tout $f \in L^1(G)$ et $\xi \in L^2(M^\omega)$, nous avons

$$(U_f^\alpha)^\omega \xi \in L^2(M_\alpha^\omega),$$

et si $\xi \in L^2(M_\alpha^\omega)$, alors

$$U_f^{\alpha\omega} \xi = (U_f^\alpha)^\omega \xi.$$

Démonstration. Notons H_α le membre de droite de la première formule. La Proposition 2.1, appliquée à U^α , montre que H_α est un sous-espace fermé de $L^2(M^\omega)$. Puisque $M_\alpha^\omega \hat{1} \subset H_\alpha$, nous avons $L^2(M_\alpha^\omega) \subset H_\alpha$.

Pour $R > 0$, soit

$$P_R : L^2(M) \longrightarrow \{a \in M \mid \|a\| \leq R\} : \xi \longmapsto \underset{\substack{a \in M \\ \|a\| \leq R}}{\operatorname{argmin}} \|\xi - a\|_2$$

la projection métrique dans L^2 tracial. L'application P_R est non expansive et U^α -équivalente. Donc, si $\xi = (\xi_i)^\omega \in H_\alpha$, alors

$$x_R = (P_R(\xi_i))^\omega \in M_\alpha^\omega.$$

Puisque $\xi \in L^2(M^\omega)$, son représentant satisfait

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{i \rightarrow \omega} \|\xi_i - P_R(\xi_i)\|_2 = 0.$$

Ainsi $x_R \rightarrow \xi$ en $\|\cdot\|_2$ quand $R \rightarrow \infty$, et $H_\alpha \subset L^2(M_\alpha^\omega)$, ce qui prouve la première assertion.

Soit maintenant $f \in L^1(G)$ et $\xi = (\xi_i)^\omega \in L^2(M^\omega)$. Posons $\xi_{i,R} = P_R(\xi_i)$. Alors

$$\|U_f^\alpha \xi_i - U_f^\alpha \xi_{i,R}\|_2 \leq \|f\|_1 \|\xi_i - \xi_{i,R}\|_2.$$

La même approximation montre que $(U_f^\alpha \xi_i)^\omega$ appartient à $L^2(M^\omega)$. De plus,

$$\|U_g^\alpha U_f^\alpha \xi_i - U_f^\alpha \xi_i\|_2 \leq \|f(g^{-1} \cdot) - f\|_1 \|\xi_i\|_2.$$

La continuité par translation dans $L^1(G)$ donne l'équicontinuité, et la première assertion place ce vecteur dans $L^2(M_\alpha^\omega)$.

Enfin, la formule

$$U_f^{\alpha\omega} \hat{x} = (U_f^\alpha \hat{x})^\omega \quad (x = (x_i)^\omega \in M_\alpha^\omega)$$

découle de la Proposition 2.2. Par densité, elle s'étend à tout $\xi = (\xi_i)^\omega \in L^2(M_\alpha^\omega)$. □

Nous terminons cette section par une remarque technique. Si nous faisons des hypothèses de dénombrabilité sur les algèbres de von Neumann et les groupes agissants, on n'a besoin de travailler qu'avec des ultrafiltres sur $I = \mathbb{N}$. Mais comme nous ne ferons pas de telles hypothèses de dénombrabilité, nous devons supposer que I est suffisamment grand. Nous supposerons cela implicitement tout au long de cet article, en nous appuyant sur la proposition suivante.

Proposition 2.4. *Fixons un cardinal infini κ et supposons qu'il existe un filet cofinal de sous-ensembles finis de κ indexé par I . (i)(i)*

1. Il existe un filet $(\varepsilon_i)_{i \in I}$ de nombres positifs qui converge vers 0.
2. Si la topologie d'un groupe localement compact G est κ -engendrée (admet une base de cardinalité inférieure à κ) alors il existe un filet croissant $(K_i)_{i \in I} \subseteq G$ qui est cofinal (pour tout $K \subseteq G$, il existe $i \in I$ tel que $K \subset K_i$) et un filet décroissant $(U_i)_{i \in I} \ll G$ qui est cofinal (pour tout $U \ll G$, il existe $i \in I$ tel que $U_i \subset U$).
3. Si M est κ -engendrée (engendrée par un ensemble de cardinalité inférieure à κ), alors il existe un filet croissant de sous-ensembles finis $(F_i)_{i \in I}$ de M tel que $\bigcup_{i \in I} F_i$ est une sous-algèbre *-fortement dense, auto-adjointe et $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ -linéaire de M .

2.2. Le bicentralisateur analytique d'une action préservant la trace

Soit G un groupe localement compact, soit $(M, \tau) \subset (N, \tau)$ une inclusion d'algèbres de von Neumann traciales, et soit $\alpha : G \curvearrowright (M, \tau)$ une action continue préservant la trace. Aucune extension de α à N n'est supposée.

Le *bicentralisateur analytique* $B(M \subset N, \alpha)$ est l'ensemble de tous les $a \in N$ tels que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $K \subseteq G$ et $\delta > 0$ satisfaisant

$$\sup_{g \in K} \|\alpha_g(u) - u\|_2 < \delta \implies \|ua - au\|_2 < \varepsilon \quad (u \in \mathcal{U}(M)). \quad (2.1)$$

C'est une sous-algèbre de von Neumann de N . Lorsque $M = N$, c'est le bicentralisateur $B(M, \alpha)$.

Proposition 2.5. *Soit $(x_i)_{i \in I}$ un filet borné dans M tel que*

$$\limsup_i \sup_{g \in K} \|\alpha_g(x_i) - x_i\|_2 = 0$$

pour tout $K \subseteq G$. Alors

$$\lim_i \|x_i a - a x_i\|_2 = 0$$

pour tout $a \in B(M \subset N, \alpha)$.

Démonstration. L'assertion découle de la définition pour les filets d'unitaires. Les filets bornés dans M satisfaisant la condition d'invariance asymptotique compacte-uniforme forment une C^* -algèbre unifère. Puisqu'une C^* -algèbre unifère est engendrée linéairement par ses unitaires, le résultat s'en suit. $\square$

Proposition 2.6. *Soit*

$$E_{B(M \subset N, \alpha)} : N \longrightarrow B(M \subset N, \alpha)$$

l'espérance conditionnelle préservant la trace. Pour tout $x \in N$, l'élément $E_{B(M \subset N, \alpha)}(x)$ est l'unique élément minimisant $\|\cdot\|_2$ dans

$$\bigcap_{\substack{K \in G \\ \delta > 0}} \text{conv} \left\{ u x u^* \mid u \in \mathcal{U}(M), \sup_{g \in K} \|\alpha_g(u) - u\|_2 < \delta \right\}.$$

Démonstration. Pour $K \in G$ et $\delta > 0$, notons $C_{K, \delta}(x)$ l'enveloppe convexe faible*-fermée dans l'énoncé et posons

$$C(x) = \bigcap_{K \in G, \delta > 0} C_{K, \delta}(x).$$

C'est un sous-ensemble convexe fermé non vide de $L^2(N, \tau)$, et il a donc un unique élément y minimisant $\|\cdot\|_2$.

Soit $(v_i)_i$ un filet dans $\mathcal{U}(M)$ qui est asymptotiquement α -invariant uniformément sur les sous-ensembles compacts. Pour $u, v \in \mathcal{U}(M)$,

$$\sup_{g \in K} \|\alpha_g(vu) - vu\|_2 \leq \sup_{g \in K} \|\alpha_g(u) - u\|_2 + \sup_{g \in K} \|\alpha_g(v) - v\|_2.$$

Il s'ensuit que tout point d'accumulation faible L^2 de $(v_i y v_i^*)_i$ appartient à $C(x)$ et a la même norme que y . Ainsi

$$\|v_i y v_i^* - y\|_2 \longrightarrow 0.$$

La négation de (2.1) produirait un filet pour lequel cela échoue, donc $y \in B(M \subset N, \alpha)$.

Pour $z \in B(M \subset N, \alpha)$ et un unitaire presque invariant $u \in \mathcal{U}(M)$, la tracialité donne

$$|\tau(z^* u x u^*) - \tau(z^* x)| \leq \|u z - z u\|_2 \|x\|_2.$$

En utilisant (2.1), la convexité et la continuité faible*, nous obtenons

$$\tau(z^* y) = \tau(z^* x) \quad (z \in B(M \subset N, \alpha)).$$

Ainsi y est la projection orthogonale de x sur $L^2(B(M \subset N, \alpha), \tau)$, ce qui prouve l'assertion. $\square$

2.3. L'interprétation en ultrapuissance du bicentralisateur

Nous fixons un ultrafiltre cofinal ω sur un ensemble dirigé suffisamment grand. L'inclusion $M \subset N$ induit $M^\omega \subset N^\omega$.

Proposition 2.7. *Nous avons*

$$B(M \subset N, \alpha) = (M^{\omega, \alpha})' \cap N$$

et

$$(M^{\omega, \alpha})' \cap N^\omega \subset B(M \subset N, \alpha)^\omega.$$

Démonstration. Posons $P = M^{\omega, \alpha}$. Si $a \in B(M \subset N, \alpha)$ et $V = (v_i)^\omega \in \mathcal{U}(P)$, l'invariance asymptotique compacte-uniforme et (2.1) donnent $Va = aV$. Réciproquement, si $a \notin B(M \subset N, \alpha)$, choisissons $\eta > 0$, une exhaustion compacte $(K_i)_i$, des nombres positifs $\varepsilon_i \rightarrow 0$, et $v_i \in \mathcal{U}(M)$ tels que

$$\sup_{g \in K_i} \|\alpha_g(v_i) - v_i\|_2 < \varepsilon_i, \quad \|v_i a - a v_i\|_2 \geq \eta.$$

Alors $(v_i)^\omega \in P$ ne commute pas avec a , ce qui prouve l'égalité.

Soit $X = (x_i)^\omega \in P' \cap N^\omega$ et posons

$$\Delta_i = \sup \left\{ \|x_i - v x_i v^*\|_2 \mid v \in \mathcal{U}(M), \sup_{g \in K_i} \|\alpha_g(v) - v\|_2 < \varepsilon_i \right\}.$$

Un argument diagonal montre que $\Delta_i \rightarrow 0$ le long de ω . Sinon, des unitaires presque maximisants définiraient un élément de P ne commutant pas avec X . La Proposition 2.6 donne

$$\|x_i - E_{B(M \subset N, \alpha)}(x_i)\|_2 \leq \Delta_i.$$

Par conséquent $X \in B(M \subset N, \alpha)^\omega$. □

Nous rappelons l'identité de coin standard utilisée ci-dessous.

Proposition 2.8. *Soit $P \subset Q$ une inclusion d'algèbres de von Neumann et soit $e \in P$ une projection. Alors*

$$(P' \cap Q)e = (ePe)' \cap eQe.$$

Proposition 2.9. *Soit $e \in M^\alpha$ une projection non nulle et soit $\alpha^e : G \curvearrowright eMe$ l'action de coin. Alors*

$$B(M \subset N, \alpha)e = B(eMe \subset eNe, \alpha^e).$$

Démonstration. La définition donne $B(M \subset N, \alpha) \subset (M^\alpha)' \cap N$. Posons $P = M^{\omega, \alpha}$. Alors

$$(eMe)^{\omega, \alpha^e} = ePe$$

et la Proposition 2.7 donne

$$B(eMe \subset eNe, \alpha^e) = (ePe)' \cap eNe.$$

Cela donne une inclusion. Réciproquement, la Proposition 2.8 donne

$$(ePe)' \cap eN^\omega e = (P' \cap N^\omega)e \subset B(M \subset N, \alpha)^\omega e.$$

Si x appartient au bicentralisateur relatif du coin, écrivons $x = (a_i e)^\omega$ avec $a_i \in B(M \subset N, \alpha)$ et prenons la limite faible* ultrapuissance a de $(a_i)_i$. Alors $ae = x$. □

Proposition 2.10. *Soient $e, f \in M^\alpha$ des projections. Alors e et f sont équivalentes dans $M^{\omega, \alpha}$ si et seulement si*

$$E_{B(M \subset N, \alpha)}(e) = E_{B(M \subset N, \alpha)}(f).$$

Démonstration. Posons $P = M^{\omega, \alpha}$ et $Q = P' \cap N^{\omega}$, et soit T la trace à valeurs centrales de P . La restriction à P de l'espérance préservant la trace $E_Q : N^{\omega} \rightarrow Q$ est T . Par la Proposition 2.7, $Q \subset B(M \subset N, \alpha)^{\omega}$. Donc, pour $x \in M^{\alpha}$,

$$T(x) = E_Q(x) = E_Q(E_{B(M \subset N, \alpha)}(x)) = E_{B(M \subset N, \alpha)}(x).$$

La dernière égalité vaut parce que l'élément constant de droite appartient à Q . Le résultat découle du critère de trace à valeurs centrales pour l'équivalence des projections dans une algèbre de von Neumann finie. $\square$

2.4. Le bicentralisateur algébrique

Nous introduisons une généralisation du bicentralisateur algébrique de [Ma25, Section 6]. Dans toute cette sous-section, $M \subset N$ est une inclusion d'algèbres de von Neumann, G est un groupe localement compact, et $\alpha : G \curvearrowright M$ est une action continue. Nous désignons aussi par α le $*$ -homomorphisme normal

$$\alpha : M \longrightarrow L^{\infty}(G) \overline{\otimes} M, \quad \alpha(x)(g) = \alpha_{g^{-1}}(x).$$

Soient $\lambda, \rho : G \rightarrow \mathcal{U}(L^2(G))$ les représentations régulières gauche et droite de G respectivement. Avec le choix précédent pour α , nous avons

$$\lambda_g \alpha(x) \lambda_g^* = \alpha(\alpha_g(x)) \quad (g \in G, x \in M).$$

Définition 2.11. Le *bicentralisateur algébrique relatif* de l'inclusion $M \subset N$ est la plus petite sous-algèbre de von Neumann $B \subset N$ telle que

$$\alpha(M)' \cap (\mathbb{B}(L^2(G)) \overline{\otimes} N) \subset \mathbb{B}(L^2(G)) \overline{\otimes} B.$$

On le note $b(M \subset N, \alpha)$. Lorsque $M = N$, nous écrivons simplement $b(M, \alpha)$.

Posons

$$\mathcal{C}(M \subset N, \alpha) = \alpha(M)' \cap (\mathbb{B}(L^2(G)) \overline{\otimes} N).$$

Proposition 2.12. *Nous avons*

$$\mathbb{B}(L^2(G)) \overline{\otimes} b(M \subset N, \alpha) = \overline{\text{span}}^{w*} \{ \lambda_g X \mid g \in G, X \in \mathcal{C}(M \subset N, \alpha) \}.$$

Démonstration. Posons

$$\mathcal{A} = \overline{\text{span}}^{w*} \{ \lambda_g X \mid g \in G, X \in \mathcal{C}(M \subset N, \alpha) \}.$$

Puisque

$$\lambda_g \mathcal{C}(M \subset N, \alpha) \lambda_g^* = \mathcal{C}(M \subset N, \alpha)$$

pour tout $g \in G$, l'enveloppe linéaire définissant $\mathcal{A}$ est une $*$ -algèbre. En effet, pour $X, Y \in \mathcal{C}(M \subset N, \alpha)$ et $g, h \in G$,

$$(\lambda_g X)(\lambda_h Y) = \lambda_{gh}(\lambda_h^* X \lambda_h) Y,$$

et

$$(\lambda_g X)^* = \lambda_{g^{-1}}(\lambda_g X^* \lambda_g^*).$$

Ainsi $\mathcal{A}$ est une algèbre de von Neumann.

L'algèbre $\mathcal{C}(M \subset N, \alpha)$ contient $L^\infty(G) \otimes 1$, et $\mathcal{A}$ contient chaque λ_g . Puisque

$$\left(L^\infty(G) \cup \{ \lambda_g \mid g \in G \} \right)'' = \mathbb{B}(L^2(G)),$$

nous avons $\mathbb{B}(L^2(G)) \otimes 1 \subset \mathcal{A}$. Il existe donc une unique sous-algèbre de von Neumann $B \subset N$ telle que

$$\mathcal{A} = \mathbb{B}(L^2(G)) \overline{\otimes} B.$$

Puisque $\mathcal{C}(M \subset N, \alpha) \subset \mathcal{A}$, la définition donne $\mathfrak{b}(M \subset N, \alpha) \subset B$. Réciproquement,

$$\mathcal{C}(M \subset N, \alpha) \subset \mathbb{B}(L^2(G)) \overline{\otimes} \mathfrak{b}(M \subset N, \alpha),$$

donc chaque $\lambda_g X$ dans l'enveloppe définissante de $\mathcal{A}$ appartient au même produit tensoriel. Donc $B \subset \mathfrak{b}(M \subset N, \alpha)$, ce qui prouve la formule. $\square$

Ce qui suit est l'analogue de [Ma25, Proposition 6.7].

Proposition 2.13. *Nous avons*

$$\mathfrak{b}(M \subset N, \alpha) \subset (M^\alpha)' \cap N.$$

Démonstration. Soit $a \in M^\alpha$. Alors $\alpha(a) = 1 \otimes a$, donc tout $X \in \mathcal{C}(M \subset N, \alpha)$ commute avec $1 \otimes a$. Il en va de même de chaque λ_g , et donc de l'enveloppe linéaire faible*-fermée de la Proposition 2.12. Par conséquent $\mathbb{B}(L^2(G)) \overline{\otimes} \mathfrak{b}(M \subset N, \alpha)$ commute avec $1 \otimes a$, ce qui prouve l'assertion. $\square$

Proposition 2.14. *Soit $x \in N$. Supposons qu'il existe $g \in G$ tel que*

$$\alpha_g(y)x = xy \quad (y \in M).$$

Alors $x \in \mathfrak{b}(M \subset N, \alpha)$.

Démonstration. Soit $\rho : G \rightarrow \mathcal{U}(L^2(G))$ la représentation régulière droite, avec

$$(\rho_g \xi)(s) = \Delta(g)^{1/2} \xi(sg) \quad (\xi \in L^2(G), s \in G).$$

Nous affirmons que

$$\rho_g \otimes x \in \mathcal{C}(M \subset N, \alpha).$$

En effet, pour $y \in M$ et $s \in G$, appliquons la relation supposée à $\alpha_{g^{-1}s^{-1}}(y)$ pour obtenir

$$\alpha_{s^{-1}}(y)x = x\alpha_{g^{-1}s^{-1}}(y).$$

Il s'ensuit que

$$\alpha(y)(\rho_g \otimes x) = (\rho_g \otimes x)\alpha(y),$$

ce qui prouve l'affirmation.

Par la Proposition 2.12,

$$\rho_g \otimes x \in \mathbb{B}(L^2(G)) \overline{\otimes} \mathfrak{b}(M \subset N, \alpha).$$

Puisque ρ_g est un opérateur non nul, il s'ensuit que $x \in \mathfrak{b}(M \subset N, \alpha)$. $\square$

Proposition 2.15. *Soit $M \subset N \subset P$ une inclusion intermédiaire d'algèbres de von Neumann. Alors*

$$\mathbf{b}(M \subset N, \alpha) \subset \mathbf{b}(M \subset P, \alpha) \cap N.$$

S'il existe une espérance conditionnelle normale $E : P \rightarrow N$, alors l'égalité est vraie et E se restreint en une espérance conditionnelle de $\mathbf{b}(M \subset P, \alpha)$ sur $\mathbf{b}(M \subset N, \alpha)$.

Démonstration. Posons $\mathcal{H} = L^2(G)$ et, pour $Q \in \{N, P\}$, posons

$$\mathcal{C}_Q = \alpha(M)' \cap (\mathbb{B}(\mathcal{H}) \overline{\otimes} Q).$$

Puisque $\mathcal{C}_N \subset \mathcal{C}_P$, nous avons

$$\mathbf{b}(M \subset N, \alpha) \subset \mathbf{b}(M \subset P, \alpha).$$

Supposons qu'il existe une espérance conditionnelle normale $E : P \rightarrow N$. Soit $\tilde{E} = \text{id}_{\mathbb{B}(\mathcal{H})} \otimes E$. Puisque E est N -bimodulaire et $\alpha(M) \subset L^\infty(G) \overline{\otimes} N$, nous avons

$$\tilde{E}(\mathcal{C}_P) \subset \mathcal{C}_N.$$

De plus,

$$\tilde{E}(\lambda_g X) = \lambda_g \tilde{E}(X) \quad (g \in G, X \in \mathcal{C}_P).$$

La Proposition 2.12 implique donc

$$\tilde{E}(\mathbb{B}(\mathcal{H}) \overline{\otimes} \mathbf{b}(M \subset P, \alpha)) \subset \mathbb{B}(\mathcal{H}) \overline{\otimes} \mathbf{b}(M \subset N, \alpha).$$

Si $x \in \mathbf{b}(M \subset P, \alpha) \cap N$, alors $\tilde{E}(1 \otimes x) = 1 \otimes x$. D'où $1 \otimes x \in \mathbb{B}(\mathcal{H}) \overline{\otimes} \mathbf{b}(M \subset N, \alpha)$, ce qui prouve l'inclusion réciproque. $\square$

Nous obtenons ensuite la formule de coin relative, correspondant à [Ma25, Proposition 6.8].

Proposition 2.16. *Soit $e \in M^\alpha$ une projection non nulle, et soit*

$$\alpha^e : G \curvearrowright eMe$$

l'action de coin. Alors

$$\mathbf{b}(eMe \subset eNe, \alpha^e) = e \mathbf{b}(M \subset N, \alpha) e.$$

Démonstration. Posons $p = 1 \otimes e \in \alpha(M)$. Puisque

$$\alpha^e(eMe) = p\alpha(M)p,$$

l'identité de commutant relatif de coin donne

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(eMe \subset eNe, \alpha^e) &= (p\alpha(M)p)' \cap p(\mathbb{B}(L^2(G)) \overline{\otimes} N)p \\ &= p\mathcal{C}(M \subset N, \alpha)p. \end{aligned}$$

La projection p commute avec chaque λ_g . Donc la Proposition 2.12 donne

$$\begin{aligned} \mathbb{B}(L^2(G)) \overline{\otimes} \mathbf{b}(eMe \subset eNe, \alpha^e) &= p(\mathbb{B}(L^2(G)) \overline{\otimes} \mathbf{b}(M \subset N, \alpha))p \\ &= \mathbb{B}(L^2(G)) \overline{\otimes} e \mathbf{b}(M \subset N, \alpha) e. \end{aligned}$$

En annulant le premier facteur tensoriel, on prouve la formule. $\square$

Le bicentralisateur algébrique relatif est particulièrement explicite lorsque l'action sur M est implémentée par des unitaires dans N .

Proposition 2.17. *Supposons qu'il existe une représentation unitaire continue $U : G \rightarrow \mathcal{U}(N)$ telle que*

$$\alpha_g(x) = U_g x U_g^* \quad (g \in G, x \in M).$$

Alors

$$\mathbf{b}(M \subset N, \alpha) = \left((M' \cap N) \vee \{U_g \mid g \in G\} \right)'.$$

Démonstration. Soit $\mathcal{H} = L^2(G)$ et soit $\mathcal{U} \in L^\infty(G) \overline{\otimes} N$ l'unitaire décomposable défini par

$$\mathcal{U}(g) = U_{g^{-1}}.$$

Alors

$$\alpha(x) = \mathcal{U}(1 \otimes x) \mathcal{U}^* \quad (x \in M),$$

et donc

$$\mathcal{C}(M \subset N, \alpha) = \mathcal{U} \left(\mathbb{B}(\mathcal{H}) \overline{\otimes} (M' \cap N) \right) \mathcal{U}^*.$$

Posons

$$B_0 = \left((M' \cap N) \vee \{U_g \mid g \in G\} \right)'.$$

Puisque $\mathcal{U} \in L^\infty(G) \overline{\otimes} B_0$, la formule précédente donne

$$\mathcal{C}(M \subset N, \alpha) \subset \mathbb{B}(\mathcal{H}) \overline{\otimes} B_0,$$

et donc $\mathbf{b}(M \subset N, \alpha) \subset B_0$.

Réciproquement, nous avons clairement $M' \cap N \subset \mathbf{b}(M \subset N, \alpha)$ et pour tout $g \in G$, nous avons aussi

$$\alpha_g(y) U_g = U_g y \quad (y \in M),$$

donc la Proposition 2.14 donne $U_g \in \mathbf{b}(M \subset N, \alpha)$. Par conséquent $B_0 \subset \mathbf{b}(M \subset N, \alpha)$. $\square$

Proposition 2.18. *Nous avons*

$$\mathbf{b}(M \subset M \rtimes_\alpha G, \alpha) = \mathbf{b}(M, \alpha) \rtimes_\alpha G$$

et cette algèbre est engendrée par $M' \cap (M \rtimes_\alpha G)$ et $\{u_g \mid g \in G\}$.

Démonstration. Par la proposition précédente, $\mathbf{b}(M \subset M \rtimes_\alpha G, \alpha)$ est engendrée par $M' \cap (M \rtimes_\alpha G)$ et $\{u_g \mid g \in G\}$. En particulier $\mathbf{b}(M \subset M \rtimes_\alpha G)$ est invariante sous la coaction duale

$$\Delta : M \rtimes_\alpha G \rightarrow (M \rtimes_\alpha G) \overline{\otimes} L(G).$$

Cela signifie que $\mathbf{b}(M \subset M \rtimes_\alpha G, \alpha) = B \rtimes_\alpha G$ pour une certaine sous-algèbre $B \subset M$. En réalisant $M \rtimes_\alpha G$ dans $\mathbb{B}(L^2(G)) \overline{\otimes} M$, nous voyons que $\mathbb{B}(L^2(G)) \overline{\otimes} B$ est l'algèbre de von Neumann engendrée par $B \rtimes_\alpha G$ et $L^\infty(G)$. Mais $B \rtimes_\alpha G$ est l'algèbre de von Neumann engendrée par $M' \cap (M \rtimes_\alpha G)$ et $L(G)$. Nous concluons que $\mathbb{B}(L^2(G)) \overline{\otimes} B$ est l'algèbre de von Neumann engendrée par $\mathbb{B}(L^2(G))$ et $M' \cap (M \rtimes_\alpha G)$, qui est $\mathbb{B}(L^2(G)) \overline{\otimes} \mathbf{b}(M, \alpha)$ par définition. $\square$

Proposition 2.19. *Supposons que G soit abélien. Alors l'algèbre*

$$(\mathfrak{b}(M, \alpha) \cap M^\alpha) \rtimes_\alpha G \cong (\mathfrak{b}(M, \alpha) \cap M^\alpha) \overline{\otimes} L_\alpha(G)$$

est engendrée par $\mathcal{Z}(M \rtimes_\alpha G)$ et $L_\alpha(G)$. De plus, si $\Gamma(\alpha) = \widehat{G}$, alors $\mathfrak{b}(M, \alpha) \cap M^\alpha = \mathcal{Z}(M)^\alpha$.

Démonstration. L'algèbre engendrée par $\mathcal{Z}(M \rtimes_\alpha G)$ et $L_\alpha(G)$ est invariante sous l'action duale de $\widehat{G}$, donc elle est de la forme $B \rtimes_\alpha G$ pour un certain B α -invariant. Clairement $B \subset \mathfrak{b}(M, \alpha)$ par la Proposition 2.18. Puisque $B \rtimes_\alpha G$ est abélienne, nous avons aussi $B \subset M^\alpha$. $\square$

Enfin, nous avons la propriété de produit tensoriel correspondant à [Ma25, Proposition 6.12].

Proposition 2.20. *Pour $i \in \{1, 2\}$, soit $M_i \subset N_i$ une inclusion d'algèbres de von Neumann et soit $\alpha_i : G \curvearrowright M_i$ une action continue. Alors*

$$\mathfrak{b}(M_1 \overline{\otimes} M_2 \subset N_1 \overline{\otimes} N_2, \alpha_1 \otimes \alpha_2) \subset \mathfrak{b}(M_1 \subset N_1, \alpha_1) \overline{\otimes} \mathfrak{b}(M_2 \subset N_2, \alpha_2).$$

Démonstration. Posons $\mathcal{H} = L^2(G)$ et

$$\mathcal{C}_i = \mathcal{C}(M_i \subset N_i, \alpha_i), \quad \mathcal{C} = \mathcal{C}(M_1 \overline{\otimes} M_2 \subset N_1 \overline{\otimes} N_2, \alpha_1 \otimes \alpha_2).$$

Posons

$$B_i = \mathfrak{b}(M_i \subset N_i, \alpha_i) \quad (i \in \{1, 2\}).$$

Puisque tout élément de $\mathcal{C}$ commute avec $\alpha_1(M_1) \otimes 1$, l'identité de commutant relatif et la Proposition 2.12 donnent

$$\mathcal{C} \subset \mathcal{C}_1 \overline{\otimes} N_2 \subset \mathbb{B}(\mathcal{H}) \overline{\otimes} B_1 \overline{\otimes} N_2.$$

Par symétrie,

$$\mathcal{C} \subset \mathbb{B}(\mathcal{H}) \overline{\otimes} N_1 \overline{\otimes} B_2.$$

En prenant l'intersection, on obtient

$$\mathcal{C} \subset \mathbb{B}(\mathcal{H}) \overline{\otimes} B_1 \overline{\otimes} B_2.$$

Puisque chaque λ_g agit sur le premier facteur tensoriel, la Proposition 2.12 donne maintenant

$$\mathbb{B}(\mathcal{H}) \overline{\otimes} \mathfrak{b}(M_1 \overline{\otimes} M_2 \subset N_1 \overline{\otimes} N_2, \alpha_1 \otimes \alpha_2) \subset \mathbb{B}(\mathcal{H}) \overline{\otimes} B_1 \overline{\otimes} B_2.$$

En annulant $\mathbb{B}(\mathcal{H})$, on prouve le résultat. $\square$

2.5. La conjecture du bicentralisateur

Proposition 2.21. *Soit $(M, \tau) \subset (N, \tau)$ une inclusion traciale. Nous avons*

$$\mathfrak{b}(M \subset N, \alpha) \subset \mathbb{B}(M \subset N, \alpha). \tag{2.2}$$

Démonstration. En effet, soit $(v_i)_i$ un filet dans $\mathcal{U}(M)$ qui est asymptotiquement α -invariant, uniformément sur les sous-ensembles compacts de G . Sur $L^2(G) \otimes L^2(N)$, on a

$$\alpha(v_i) - 1 \otimes v_i \longrightarrow 0 \quad \text{fortement}^*.$$

Pour le vérifier, testons d'abord sur les tenseurs dont la première coordonnée est à support compact et dont la seconde appartient à N . L'invariance compacte-uniforme donne la convergence sur ces vecteurs, et leur densité et la borne uniforme de norme d'opérateur donnent l'assertion. Tout $X \in \mathcal{C}(M \subset N, \alpha)$ commute avec $\alpha(v_i)$, donc $[X, 1 \otimes v_i] \rightarrow 0$ fortement*. En prenant des tranches normales sur le premier facteur tensoriel, on montre que chaque tranche de X commute asymptotiquement avec v_i en $\|\cdot\|_2$. De telles tranches appartiennent donc à $B(M \subset N, \alpha)$. Elles engendrent le bicentralisateur algébrique relatif, ce qui prouve (2.2). $\square$

Nous formulons la conjecture suivante qui généralise la Conjecture B.

Conjecture 2.22. *Soit $(M, \tau) \subset (N, \tau)$ une inclusion traciale d'algèbres de von Neumann. Soit $\alpha : G \curvearrowright (M, \tau)$ une action continue préservant la trace d'un groupe localement compact G . Supposons que G soit moyennable. Alors*

$$B(M \subset N, \alpha) = b(M \subset N, \alpha).$$

Le résultat suivant étend l'argument de groupe discret de [PSV20, Lemmes 4.2 and 4.3]. Le sous-groupe ouvert compact nous permet de combiner l'argument d'indépendance libre de Popa avec l'espace homogène discret G/K .

Théorème 2.23. *Soit G un groupe localement compact moyennable admettant un sous-groupe ouvert compact $K < G$. Soit M un facteur de type II_1 et soit $\alpha : G \curvearrowright M$ une action strictement extérieure. Alors*

$$B(M, \alpha) = \mathbb{C}1.$$

Démonstration. Nous construisons d'abord un décalage de Bernoulli libre à l'intérieur de M^ω . Nous affirmons qu'il existe un unitaire de Haar

$$u \in \mathcal{U}((M^K)^\omega)$$

tel que la famille

$$M, \quad \alpha_g^\omega(u) \quad (gK \in G/K) \tag{*}$$

soit librement indépendante. Notons que $\alpha_g^\omega(u)$ ne dépend que du classe gK , puisque u est fixé par K .

Nous expliquons l'argument matriciel prouvant l'affirmation. Soient $g_1K, \dots, g_nK$ des classes distinctes et considérons

$$\Delta : M^K \longrightarrow \mathbb{M}_n(M), \quad \Delta(x) = \text{diag}(\alpha_{g_1}(x), \dots, \alpha_{g_n}(x)).$$

L'extériorité stricte implique que $\alpha|_K$ est minimale et que α est proprement extérieure relativement à K par [Ni26, Lemme 1.6]. Nous avons donc

$$\Delta(M^K)' \cap \mathbb{M}_n(M) = D_n(\mathbb{C}). \tag{**}$$

En effet, si $a = (a_{ij})$ appartient au commutant relatif, alors

$$a_{ij}\alpha_{g_j}(x) = \alpha_{g_i}(x)a_{ij} \quad (x \in M^K).$$

Après application de $\alpha_{g_j}^{-1}$, une entrée hors diagonale non nulle entrelacerait la représentation identité de M^K avec $\alpha_{g_j^{-1}g_i}|_{M^K}$. L'extériorité propre relative donnerait alors $g_j^{-1}g_i \in K$, contrairement au choix des classes. Les entrées diagonales sont scalaires parce que $(M^K)' \cap M = \mathbb{C}1$.

Nous appliquons [Po14, Théorème 0.1(a)], ou sa formulation amalgamée [Po14, Corollaire 4.4(1)], à cette inclusion. Ses hypothèses sont satisfaites parce que $\Delta(M^K)$ est un facteur diffus et que son commutant relatif $D_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie. Ainsi nous pouvons trouver un unitaire de Haar

$$v \in \mathcal{U}((M^K)^\omega)$$

tel que $\Delta(v)$ soit librement indépendant de $\mathbb{M}_n(M)$ relativement à $D_n(\mathbb{C})$. Plus précisément, à l'intérieur de $\mathbb{M}_n(M^\omega)$, les algèbres

$$W^*(D_n(\mathbb{C}), \Delta(v)) \quad \text{et} \quad \mathbb{M}_n(M)$$

sont libres avec amalgamation sur $D_n(\mathbb{C})$ par rapport à l'espérance conditionnelle diagonale.

Cette liberté relative implique que

$$M, \quad \alpha_{g_1}^\omega(v), \dots, \alpha_{g_n}^\omega(v) \quad (***)$$

sont librement indépendants au sens scalaire usuel. Posons $V = \Delta(v)$ et $v_i = \alpha_{g_i}^\omega(v)$. Considérons un mot cycliquement réduit

$$w = a_1 v_{i_1}^{k_1} \cdots a_r v_{i_r}^{k_r}, \quad k_j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Chaque a_j est soit un élément centré de M , soit 1. Dans ce dernier cas, la réduction signifie que $i_{j-1} \neq i_j$, avec $i_0 = i_r$. Posons $b_j = e_{i_{j-1}, i_j} \otimes a_j$. Alors

$$E_{D_n(\mathbb{C})}(b_j) = 0, \quad E_{D_n(\mathbb{C})}(V^{k_j}) = 0.$$

La première égalité découle de la trace scalaire nulle d'un coefficient diagonal ou de sa position hors diagonale. La seconde découle du fait que v est de Haar. La multiplication matricielle donne

$$b_1 V^{k_1} \cdots b_r V^{k_r} = e_{i_r, i_r} \otimes w.$$

La liberté amalgamée donne donc $\tau(w) = 0$. La tracialité et l'induction sur la longueur des mots réduisent les mots réduits centrés arbitraires à ces mots cycliques et aux moments de Haar individuels. Cela prouve $(***)$. En diagonalisant les tests de moments finis sur les sous-ensembles finis de G/K et les sous-ensembles finis de la boule unité de M pour $\|\cdot\|_2$, on obtient un unitaire de Haar $u \in (M^K)^\omega$ satisfaisant $(*)$.

Pour $gK \in G/K$, posons

$$P_{gK} = \alpha_g^\omega(uMu^*) = \alpha_g^\omega(u)M\alpha_g^\omega(u)^*.$$

C'est bien défini parce que u est fixé par K . La liberté dans $(*)$ implique que la famille constituée de M et des algèbres P_{gK} est librement indépendante. Posons

$$P = \bigvee_{s \in G/K} P_s \subset M^\omega.$$

Alors P est librement indépendant de M . Puisque K est ouvert et que u est K -fixé, cette algèbre est contenue dans M_α^ω . L'action permute les facteurs librement indépendants dans

$$P \cong \ast_{s \in G/K} (M, \tau).$$

Puisque $(M^K)' \cap M = \mathbb{C}1$, l'algèbre M^K est un facteur diffus. Choisissons un élément semi-circulaire centré $a = a^* \in M^K$ de variance un et posons

$$a_{gK} = \alpha_g^\omega(uau^*) \in P_{gK}.$$

Tant u que a sont K -fixés, donc cette définition est indépendante du représentant de gK et $\alpha_h^\omega(a_{gK}) = a_{hgK}$. Soient $L \subseteq G$ et $\varepsilon > 0$. La moyennabilité, sous la forme de Følner pour l'espace homogène discret G/K , fournit un ensemble fini non vide $S \subset G/K$ tel que

$$\sup_{g \in L} \frac{|gS \triangle S|}{|S|} < \varepsilon^2.$$

L'élément

$$b_S = |S|^{-1/2} \sum_{s \in S} a_s$$

est encore un élément semi-circulaire centré de variance un, et la liberté donne

$$\sup_{g \in L} \|\alpha_g^\omega(b_S) - b_S\|_2^2 = \sup_{g \in L} \frac{|gS \triangle S|}{|S|} < \varepsilon^2.$$

En appliquant la sélection diagonale usuelle aux éléments b_S , en utilisant l'estimation compacte-uniforme précédente ainsi que leurs moments joints avec des sous-ensembles finis de M , on obtient un élément

$$b \in M^{\omega, \alpha}$$

qui est un élément semi-circulaire centré de variance un et qui est librement indépendant de la copie constante de M . Mais, par la Proposition 2.7, b doit commuter avec $B(M, \alpha)$. Cela force $B(M, \alpha) = \mathbb{C}$. $\square$

Nous vérifions aussi la conjecture pour les actions de Bogoljubov libres.

Théorème 2.24. *Soit G un groupe localement compact moyennable et soit $\pi : G \rightarrow \mathcal{O}(H_\mathbb{R})$ une représentation orthogonale continue avec $\dim H_\mathbb{R} \geq 2$. Soit $\alpha : G \curvearrowright M = \Gamma(H_\mathbb{R})''$ l'action de Bogoljubov libre associée. Alors*

$$B(M, \alpha) = \mathbb{C}1.$$

Démonstration. Supposons d'abord que $H_\mathbb{R}$ soit de dimension finie. Posons $K = \overline{\pi(G)} \subset \mathcal{O}(H_\mathbb{R})$. L'action de Bogoljubov libre de K sur M est strictement extérieure par [MV23, Corollaire B(1)]. Puisque K est compact, cette action est minimale par [Va01, Proposition 6.2]. Ainsi

$$B(M, \alpha) \subset (M^\alpha)' \cap M = (M^K)' \cap M = \mathbb{C}1.$$

Supposons maintenant que $H_\mathbb{R}$ soit de dimension infinie, et posons $H_\mathbb{C} = H_\mathbb{R} \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C}$. Choisissons un filet de Reiter $(f_i)_i$ de fonctions non négatives dans $L^1(G)$ d'intégrale un, de sorte que

$$\sup_{s \in K} \|f_i(s^{-1} \cdot) - f_i\|_1 \longrightarrow 0 \quad (K \subseteq G).$$

Pour chaque $n \geq 1$, choisissons une projection orthogonale réelle P_n de rang n , et définissons

$$A_{i,n} = \int_G f_i(g) \pi_g \frac{P_n}{n} \pi_g^* dg.$$

Ces opérateurs positifs de classe trace satisfont

$$\mathrm{Tr}(A_{i,n}) = 1, \quad \|A_{i,n}\| \leq n^{-1},$$

et

$$\sup_{s \in K} \|\pi_s A_{i,n} \pi_s^* - A_{i,n}\|_1 \leq \sup_{s \in K} \|f_i(s^{-1} \cdot) - f_i\|_1.$$

Ils commutent avec la conjugaison réelle sur $H_{\mathbb{C}}$. Sur l'ensemble dirigé produit, écrivons $T_j = A_{i,n}^{1/2}$. L'inégalité de Powers–Størmer donne

$$\|T_j\|_{\mathrm{HS}} = 1, \quad \|T_j\| \longrightarrow 0, \quad \sup_{s \in K} \|\pi_s T_j \pi_s^* - T_j\|_{\mathrm{HS}} \longrightarrow 0.$$

Diagonalisons T_j sur $H_{\mathbb{R}}$ en

$$T_j = \sum_k \lambda_{j,k} \langle \cdot, e_{j,k} \rangle e_{j,k},$$

où $\lambda_{j,k} \geq 0$ et $(e_{j,k})_k$ est orthonormale. Posons

$$\eta_j = \sum_k \lambda_{j,k} e_{j,k} \otimes e_{j,k}, \quad z_j = W(\eta_j) = \sum_k \lambda_{j,k} (s(e_{j,k})^2 - 1).$$

Ici $s(e) = \ell(e) + \ell(e)^*$, où $\ell(e)$ est l'opérateur de création à gauche sur l'espace de Fock plein. La formule de Wick donne

$$\begin{aligned} z_j &= C_j + C_j^* + D_j, \\ C_j &= \sum_k \lambda_{j,k} \ell(e_{j,k})^2, \\ D_j &= \sum_k \lambda_{j,k} \ell(e_{j,k}) \ell(e_{j,k})^*. \end{aligned}$$

L'orthogonalité des images de création donne $\|C_j\| = \|T_j\|_{\mathrm{HS}} = 1$ et $\|D_j\| = \|T_j\| \leq 1$. Les séries convergent en norme d'opérateur, donc $\|z_j\| \leq 3$. La vectorisation entrelace la conjugaison sur les opérateurs de Hilbert–Schmidt avec $\pi \otimes \pi$. Par conséquent,

$$\sup_{g \in K} \|\alpha_g(z_j) - z_j\|_2 = \sup_{g \in K} \|\pi_g T_j \pi_g^* - T_j\|_{\mathrm{HS}} \longrightarrow 0.$$

Soit $\zeta = h_1 \otimes \cdots \otimes h_m$, où $m \geq 1$ et $h_1, \dots, h_m \in H_{\mathbb{R}}$. La formule du produit de Wick libre donne

$$W(\zeta) z_j \Omega = \zeta \otimes \eta_j + o(1), \quad z_j W(\zeta) \Omega = \eta_j \otimes \zeta + o(1)$$

en norme de l'espace de Fock. En effet, contracter une patte de η_j contre un vecteur fixé h donne $T_j h$, dont la norme est au plus $\|T_j\| \|h\|$. Contracter les deux pattes donne un scalaire borné par $\|T_j\| \|h\| \|k\|$. Toute contraction de bord non vide tend donc vers zéro. Pour deux tenseurs élémentaires fixés ζ, ζ' de même degré positif, la contraction des concaténations donne

$$\langle \zeta \otimes \eta_j, \eta_j \otimes \zeta' \rangle \longrightarrow 0.$$

Pour le degré un, cela découle de $\|T_j^2\| \rightarrow 0$, et pour les degrés supérieurs chacune des deux contractions de bord contribue un facteur borné par $\|T_j\|$. Les mêmes conclusions valent pour les combinaisons linéaires complexes finies de tenseurs élémentaires réels. L'orthogonalité des degrés homogènes distincts donne maintenant, pour tout polynôme de Wick a ,

$$\lim_j \|az_j - z_ja\|_2^2 = 2\|a - \tau(a)1\|_2^2.$$

Puisque $\|z_j\| \leq 3$, l'approximation dans $L^2(M)$ étend cette identité à tout $a \in M$. Si $a \in B(M, \alpha)$, le filet borné presque invariant $(z_j)_j$ satisfait $\|az_j - z_ja\|_2 \rightarrow 0$. D'où $a = \tau(a)1$. $\square$

La construction d'ultraproduit équivariant dans [HI20, Théorème 3.4] donne aussi un plongement équivariant préservant la trace canonique

$$\Gamma((H_{\mathbb{R}})_{\pi, \omega})'' \longrightarrow M_{\alpha}^{\omega}, \quad s((\xi_i)^{\omega}) \longmapsto (s(\xi_i))^{\omega}.$$

Ici $(H_{\mathbb{R}})_{\pi, \omega}$ désigne la partie équivariante de l'ultrapuissance de l'espace de Hilbert. L'application préserve les moments du vide, et l'équivariantité découle de $\|s(\pi_g \xi_i) - s(\xi_i)\|_2 = \|\pi_g \xi_i - \xi_i\|$. Pour les groupes moyennables généraux, la preuve ci-dessus construit l'élément fixe requis directement dans l'ultrapuissance de l'algèbre en utilisant les seconds mots de Wick.

3. Lien avec la propriété de Rokhlin

Nous caractérisons la trivialité du bicentralisateur et la propriété de Rokhlin au moyen de la faible contenance des correspondances équivariantes. La conséquence principale est qu'une action d'un groupe localement compact moyennable sur un facteur injectif de type II_1 possède la propriété de Rokhlin précisément lorsqu'elle est fidèle et a un bicentralisateur trivial (Théorème 3.17). Nous identifions également la propriété de Rokhlin avec la fidélité de l'action induite sur l'algèbre des suites centrales équivariantes.

La preuve utilise la technique de mise en œuvre dans les ultrapuissances pour traduire la faible contenance en représentations portées par les suites centrales. L'induction et l'absorption de Fell permettent ensuite de comparer les deux propriétés, la moyennabilité du groupe et celle du facteur intervenant dans des directions opposées.

3.1. Correspondances équivariantes

Nous introduisons la théorie des correspondances équivariantes. Un exposé détaillé est donné dans [DCDR24], mais comme il est formulé dans le langage des groupes quantiques, nous en donnons ici un exposé autonome. Voir aussi [KLP10] et [BCM18].

Soient $\alpha : G \curvearrowright M$ et $\beta : G \curvearrowright N$ deux actions continues d'un groupe localement compact G sur des algèbres de von Neumann M et N . Une correspondance équivariante α - β est un quadruple

$$\Theta = (H, \lambda, \rho, U),$$

où $\lambda : M \rightarrow \mathbb{B}(H)$ et $\rho : N^{\text{op}} \rightarrow \mathbb{B}(H)$ sont des représentations normales unitaires qui commutent et $U : G \rightarrow \mathcal{U}(H)$ est une représentation fortement continue telle que

$$\begin{aligned} U_g \lambda(x) U_g^* &= \lambda(\alpha_g(x)), \\ U_g \rho(y^{\text{op}}) U_g^* &= \rho(\beta_g(y)^{\text{op}}) \end{aligned}$$

pour $x \in M$, $y \in N$ et $g \in G$. Nous désignons par $\text{Cor}(\alpha, \beta)$ la catégorie de toutes les correspondances α - β .

Pour une action $\alpha : G \curvearrowright M$, définissons la correspondance équivariante identité $\mathcal{I}_\alpha \in \text{Cor}(\alpha, \alpha)$ par

$$\mathcal{I}_\alpha = (\text{L}^2(M), \lambda_M, \rho_M, U^\alpha)$$

où U^α est la mise en œuvre unitaire standard de α sur $\text{L}^2(M)$. Définissons la correspondance équivariante semicoarse $\mathcal{C}_\alpha \in \text{Cor}(\alpha, \alpha)$ par

$$\mathcal{C}_\alpha = (\text{L}^2(M) \otimes \text{L}^2(M), \lambda_M \otimes 1, 1 \otimes \rho_M, U^\alpha \otimes_G U^\alpha).$$

Si $\pi : G \rightarrow \mathcal{U}(K)$ est une représentation unitaire et $\Theta = (H, \lambda, \rho, U) \in \text{Cor}(\alpha, \beta)$, nous définissons le produit tensoriel $\pi \otimes_G \Theta \in \text{Cor}(\alpha, \beta)$ par

$$\pi \otimes_G \Theta = (K \otimes H, 1 \otimes \lambda, 1 \otimes \rho, \pi \otimes_G U).$$

3.2. Induction et principe d'absorption de Fell

Notons $\text{Cor}(M, N)$ la catégorie des correspondances ordinaires M - N . Oublier U définit le foncteur de restriction

$$\text{Res} : \text{Cor}(\alpha, \beta) \longrightarrow \text{Cor}(M, N) : (H, \lambda, \rho, U) \longmapsto (H, \lambda, \rho).$$

En particulier, $\text{Res}(\mathcal{I}_\alpha) = \mathcal{I}_M$ et $\text{Res}(\mathcal{C}_\alpha) = \mathcal{C}_M$.

Pour une correspondance ordinaire M - N $(H, \lambda, \rho) \in \text{Cor}(M, N)$, définissons

$$\lambda^\alpha : M \longrightarrow \mathbb{B}(\text{L}^2(G, H)) : a \longmapsto \left(\xi \longmapsto \left(g \longmapsto \lambda(\alpha_{g^{-1}}(a))\xi(g) \right) \right),$$

$$\rho^\beta : N^{\text{op}} \longrightarrow \mathbb{B}(\text{L}^2(G, H)) : b^{\text{op}} \longmapsto \left(\xi \longmapsto \left(g \longmapsto \rho(\beta_{g^{-1}}(b)^{\text{op}})\xi(g) \right) \right),$$

et

$$\lambda_G \otimes 1 : G \longrightarrow \mathcal{U}(\text{L}^2(G, H)) : g \longmapsto \left(\xi \longmapsto \left(h \longmapsto \xi(g^{-1}h) \right) \right).$$

La correspondance équivariante résultante définit le foncteur d'induction

$$\text{Ind} : \text{Cor}(M, N) \longrightarrow \text{Cor}(\alpha, \beta) : (H, \lambda, \rho) \longmapsto (\text{L}^2(G, H), \lambda^\alpha, \rho^\beta, \lambda_G \otimes 1).$$

Nous avons la version suivante du principe d'absorption de Fell pour les correspondances.

Proposition 3.1. *Pour toute $\Theta = (H, \lambda, \rho, U) \in \text{Cor}(\alpha, \beta)$, il existe une équivalence unitaire*

$$\lambda_G \otimes_G \Theta \cong \text{Ind}(\text{Res } \Theta).$$

Démonstration. Identifions $\text{L}^2(G) \otimes H$ à $\text{L}^2(G, H)$ et définissons

$$V : \text{L}^2(G) \otimes H \longrightarrow \text{L}^2(G, H) : \xi \longmapsto \left(g \longmapsto U_g^* \xi(g) \right).$$

Les relations de covariance donnent

$$V(1 \otimes \lambda(a))V^* = \lambda^\alpha(a), \quad V(1 \otimes \rho(b^{\text{op}}))V^* = \rho^\beta(b^{\text{op}}),$$

et un calcul direct donne

$$V(\lambda_G(g) \otimes U_g)V^* = \lambda_G(g) \otimes 1.$$

Ainsi V met en œuvre l'équivalence annoncée. □

3.3. Faible contenance

Soit $W^*(\alpha, \beta)$ l'algèbre de von Neumann universelle engendrée par $M \odot N^{\text{op}}$ et une représentation unitaire continue $u : G \rightarrow W^*(\alpha, \beta)$ telle que les applications $x \mapsto x \odot 1$ et $y \mapsto 1 \odot y^{\text{op}}$ soient normales sur M et N et

$$u_g(x \odot y^{\text{op}})u_g^* = \alpha_g(x) \odot \beta_g(y)^{\text{op}}$$

pour tous $x \in M$, $y \in N$ et $g \in G$. Pour toute correspondance $\alpha-\beta$ $\Theta = (H, \lambda, \rho, U)$, il existe une unique représentation normale

$$\Pi_\Theta : W^*(\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{B}(H)$$

telle que

$$\Pi_\Theta(x \odot y^{\text{op}}) = \lambda(x)\rho(y^{\text{op}}), \quad x \in M, y \in N,$$

et

$$\Pi_\Theta(u_g) = U_g, \quad g \in G.$$

Posons

$$\begin{aligned} M_\alpha &= \{x \in M \mid g \mapsto \alpha_g(x) \text{ est continue en norme}\}, \\ N_\beta &= \{y \in N \mid g \mapsto \beta_g(y) \text{ est continue en norme}\}. \end{aligned}$$

Alors nous avons un $*$ -morphisme naturel d'image faible*-dense

$$(M_\alpha \otimes_{\max} N_\beta^{\text{op}}) \rtimes_{\alpha \otimes_G \beta^{\text{op}}} G \rightarrow W^*(\alpha, \beta).$$

L'image de ce $*$ -morphisme est notée $C^*(\alpha, \beta)$. Par définition, $C^*(\alpha, \beta)$ est une C^* -algèbre et c'est le sous-espace linéaire fermé en norme engendré par

$$\{(a \odot b^{\text{op}}) \cdot u(f) \mid a \in M_\alpha, b \in N_\beta \text{ et } f \in L^1(G)\}.$$

Nous aurons aussi besoin du lemme de lissage suivant. Notons que tout l'intérêt de ce lemme est que nous ne supposons pas que $a \in M_\alpha$.

Lemme 3.2. *Pour tout $a \in M$ et tous $f, h \in L^1(G)$, nous avons*

$$u(f)(a \odot 1)u(h) \in C^*(\alpha, \beta).$$

Il en va de même si nous remplaçons $a \odot 1$ par $1 \odot b^{\text{op}}$ pour $b \in N$.

Démonstration. Fixons $a \in M$. L'application

$$(f, h) \mapsto (\alpha_f(a) \odot 1)u(h)$$

de $L^1(G) \times L^1(G)$ vers $C^*(\alpha, \beta)$ est bilinéaire et conjointement continue puisque

$$\|(\alpha_f(a) \odot 1)u(h)\| \leq \|\alpha_f(a)\| \|u(h)\| \leq \|f\|_1 \|h\|_1.$$

Par conséquent, il existe une unique application linéaire continue Φ du produit tensoriel projectif $L^1(G) \hat{\otimes} L^1(G) = L^1(G \times G)$ vers $C^*(\alpha, \beta)$ telle que

$$\Phi(f \otimes h) = (\alpha_f(a) \odot 1)u(h)$$

pour tous $f, h \in L^1(G)$. Alors nous avons

$$\Phi(F) = \int_{G \times G} (\alpha_g(a) \odot 1) u_k F(g, k) \, dg \, dk$$

pour tous les tenseurs élémentaires $F \in L^1(G) \otimes L^1(G)$, donc aussi pour tout $F \in L^1(G \times G)$ puisque les deux membres sont continus sur $L^1(G \times G)$. En particulier, le membre de droite est dans $C^*(\alpha, \beta)$. En prenant $F : (g, k) \mapsto f(g)h(g^{-1}k)$ pour $f, h \in L^1(G)$, on obtient la conclusion souhaitée. $\square$

Pour $\Theta_1, \Theta_2 \in \text{Cor}(\alpha, \beta)$, nous avons donc la notion naturelle suivante de faible contenance

$$\Theta_1 \prec \Theta_2 \iff \Pi_{\Theta_1}|_{C^*(\alpha, \beta)} \prec \Pi_{\Theta_2}|_{C^*(\alpha, \beta)}.$$

La proposition suivante fournit un critère très commode pour la faible contenance. C'est l'analogue classique pour les groupes de [DCDR24, Corollaire 3.8].

Proposition 3.3. *Soient $\alpha : G \curvearrowright M$ et $\beta : G \curvearrowright N$ deux actions continues et prenons $\Theta_i = (H_i, \lambda_i, \rho_i, U_i) \in \text{Cor}(\alpha, \beta)$. Prenons $\xi \in H_1$ et considérons les propriétés suivantes. (i)(i)*

1. $\Theta_1 \prec \Theta_2$.
2. Il existe une application complètement positive unitale $\vartheta : \mathbb{B}(H_2) \rightarrow \mathbb{B}(H_1)$ telle que

$$\vartheta(\lambda_2(a)) = \lambda_1(a), \quad \vartheta(\rho_2(b^{\text{op}})) = \rho_1(b^{\text{op}}), \quad \vartheta(U_2(f)) = U_1(f)$$

pour tous $a \in M$, $b \in N$ et $f \in C^*(G)$.

3. Il existe un état $\Phi \in \mathbb{B}(H_2)^*$ tel que

$$\Phi(\lambda_2(a)\rho_2(b^{\text{op}})) = \langle \lambda_1(a)\rho_1(b^{\text{op}})\xi, \xi \rangle$$

et

$$\Phi(U_2(f)) = \langle U_1(f)\xi, \xi \rangle$$

pour tous a dans M , $b \in N$ et $f \in C^*(G)$.

Alors nous avons (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) et si ξ est un vecteur cyclique pour Θ_1 qui est fixé par U_1 , alors (iii) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (i).

Preuve de la Proposition 3.3. (i) $\Rightarrow$ (ii). Supposons que $\Theta_1 \prec \Theta_2$. L'inclusion des noyaux donne un $*$ -homomorphisme non dégénéré

$$q : \text{Im}(\Pi_{\Theta_2}|_{C^*(\alpha, \beta)}) \longrightarrow \text{Im}(\Pi_{\Theta_1}|_{C^*(\alpha, \beta)})$$

tel que

$$q \circ \Pi_{\Theta_2}|_{C^*(\alpha, \beta)} = \Pi_{\Theta_1}|_{C^*(\alpha, \beta)}.$$

Après unitisation, le théorème d'extension d'Arveson étend q en une application ucp $\vartheta : \mathbb{B}(H_2) \rightarrow \mathbb{B}(H_1)$.

Pour tout $a \in M$ et tous $f, h \in L^1(G)$, nous avons

$$U_i(f)\lambda_i(a)U_i(h) = \Pi_{\Theta_i}(u(f)(a \odot 1)u(h))$$

Cela signifie que

$$q(U_2(f)\lambda_2(a)U_2(h)) = U_1(f)\lambda_1(a)U_1(h).$$

Puisque $U_2(f)$ et $U_2(h)$ sont dans le domaine multiplicatif de ϑ , nous avons donc

$$\begin{aligned} U_2(f)\vartheta(\lambda_2(a))U_2(h) &= \vartheta(U_2(f)\vartheta(\lambda_2(a))U_2(h)) \\ &= U_1(f)\lambda_1(a)U_1(h). \end{aligned}$$

Maintenant, nous pouvons faire converger fortement $U_i(f)$ et $U_i(h)$ vers 1, et nous concluons que $\vartheta(\lambda_2(a)) = \lambda_1(a)$. Le même argument s'applique pour montrer que $\vartheta(\rho_2(b^{\text{op}})) = \rho_1(b^{\text{op}})$ pour tout $b \in N$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Les identités du domaine multiplicatif dans (ii) donnent

$$\vartheta \circ \Pi_{\Theta_2}|_{C^*(\alpha, \beta)} = \Pi_{\Theta_1}|_{C^*(\alpha, \beta)}$$

d'abord sur les générateurs standard, puis sur tout $C^*(\alpha, \beta)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Prenons $\Phi = \langle \vartheta(\cdot)\xi, \xi \rangle$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Réciproquement, supposons que Φ soit comme dans (iii), que ξ soit cyclique pour Θ_1 et fixé par U_1 . Alors la restriction de Φ à $C_0(\widehat{G})$ est le caractère trivial. Donc cette algèbre est contenue dans le domaine multiplicatif de Φ . Ainsi, pour $a \in M_\alpha$, $b \in N_\beta$ et $f \in C_0(G)$, nous avons

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda_2(a)\rho_2(b^{\text{op}})U_2(f)) &= f(1)\Phi(\lambda_2(a)\rho_2(b^{\text{op}})) \\ &= f(1)\langle \lambda_1(a)\rho_1(b^{\text{op}})\xi, \xi \rangle \\ &= \langle \lambda_1(a)\rho_1(b^{\text{op}})U_1(f)\xi, \xi \rangle. \end{aligned}$$

Cela montre que $\Phi \circ \Pi_{\Theta_2}$ coïncide avec le coefficient $\langle \Pi_{\Theta_1}(\cdot)\xi, \xi \rangle$ sur $C^*(\alpha, \beta)$. Puisque ξ est cyclique pour Π_{Θ_1} , nous concluons que $\Pi_{\Theta_1}|_{C^*(\alpha, \beta)} \prec \Pi_{\Theta_2}|_{C^*(\alpha, \beta)}$, comme voulu. $\square$

Proposition 3.4. *Pour $i = 1, 2$, prenons $\Theta_i \in \text{Cor}(\alpha, \beta)$ et $\pi_i \in \text{Rep}(G)$. Si $\pi_1 \prec \pi_2$ et $\Theta_1 \prec \Theta_2$, alors*

$$\pi_1 \otimes_G \Theta_1 \prec \pi_2 \otimes_G \Theta_2.$$

Démonstration. Fixons $\pi : G \rightarrow \mathcal{U}(K)$ et prenons ϑ comme dans la Proposition 3.3. Alors le domaine multiplicatif de $\text{id} \otimes \vartheta : \mathbb{B}(K \otimes H_2) \rightarrow \mathbb{B}(K \otimes H_1)$ contient $1 \otimes \lambda_2(M)$, $1 \otimes \rho_2(N^{\text{op}})$ et $1 \otimes U_2(C^*(G))$ ainsi que $\pi(C^*(G)) \otimes 1$. Il contient donc aussi $(\pi \otimes U_2)(C^*(G) \otimes C^*(G))$ et a fortiori $(\pi \otimes_G U_2)(C^*(G)) = (\pi \otimes U_2)(C^*(\Delta_G))$ où $\Delta_G < G \times G$ est le sous-groupe diagonal. Nous concluons par la Proposition 3.3 que $\pi \otimes_G \Theta_1 \prec \pi \otimes_G \Theta_2$.

Fixons maintenant $\Theta \in \text{Cor}(\alpha, \beta)$ et supposons que $\pi_1 \prec \pi_2$. Prenons $F : \mathbb{B}(K_2) \rightarrow \mathbb{B}(K_1)$ une application ucp telle que $F(\pi_2(f)) = \pi_1(f)$ pour tout $f \in C^*(G)$. Alors, de manière similaire, nous vérifions que $F \otimes \text{id}$ témoigne de la faible containance $\pi_1 \otimes_G \Theta \prec \pi_2 \otimes_G \Theta$. $\square$

Proposition 3.5. *Prenons $\Xi_i \in \text{Cor}(M, N)$ pour $i = 1, 2$ et considérons leurs inductions $\text{Ind}(\Xi_i) \in \text{Cor}(\alpha, \beta)$. Si $\Xi_1 \prec \Xi_2$ alors $\text{Ind}(\Xi_1) \prec \text{Ind}(\Xi_2)$.*

Démonstration. Nous utilisons à nouveau la Proposition 3.3. Écrivons $\Xi_i = (H_i, \lambda_i, \rho_i)$. Alors il existe une application ucp $\vartheta : \mathbb{B}(H_2) \rightarrow \mathbb{B}(H_1)$ telle que $\vartheta \circ \lambda_2 = \lambda_1$ et $\vartheta \circ \rho_2 = \rho_1$. On vérifie facilement que

$$\text{id} \otimes \vartheta : \mathbb{B}(L^2(G) \otimes H_2) \rightarrow \mathbb{B}(L^2(G) \otimes H_1)$$

témoigne de la faible contenance $\text{Ind}(\Xi_1) \prec \text{Ind}(\Xi_2)$. $\square$

3.4. La technique de mise en œuvre dans les ultrapuissances

Nous rappelons la technique de mise en œuvre dans les ultrapuissances de [Ma25].

Théorème 3.6 ([Ma25, Théorème 2.1]). *Soit (M, τ) une algèbre de von Neumann traciale. Soit $\Phi \in \mathbb{B}(L^2(M))^*$ un état tel que $\Phi \circ \lambda_M$ et $\Phi \circ \rho_M$ soient tous deux des états normaux sur M . Alors il existe une algèbre de von Neumann abélienne A munie d'un état tracial normal fidèle, un ultrafiltre cofinal ω sur un ensemble dirigé suffisamment grand, et un vecteur unitaire*

$$\xi \in L^2((A \overline{\otimes} M)^\omega)$$

tel que

$$\Phi(T) = \langle (1 \otimes T)^\omega \xi, \xi \rangle, \quad (T \in \mathbb{B}(L^2(M))) \quad (3.1)$$

L'algèbre abélienne A dans le théorème précédent est gênante. Dans les applications, nous nous en débarrassons à l'aide du lemme suivant.

Lemme 3.7. *Soit $T \in \mathbb{B}(L^2(M))$ et soit $\Sigma \subset \mathbb{B}(L^2(M))$ un ensemble de cardinal inférieur à κ . Supposons qu'il existe une algèbre de von Neumann abélienne traciale (A, μ) et un élément $X \in (A \overline{\otimes} M)^\omega$ tel que $(1 \otimes S)^\omega \widehat{X} = 0$ pour tout $S \in \Sigma$.*

Alors il existe un élément $x \in M^\omega$ tel que $S^\omega \widehat{x} = 0$ pour tout $S \in \Sigma$ et

$$\|x\| \leq \|X\|, \quad \|T^\omega \widehat{x}\|_2 \geq \|(1 \otimes T)^\omega \widehat{X}\|_2.$$

Démonstration. Si $X = 0$ ou $T = 0$, prenons $x = 0$. Sinon, par changement d'échelle, nous pouvons supposer que $\|X\| = 1$ et $\|T\| = 1$. Posons $\eta = \|(1 \otimes T)^\omega \widehat{X}\|_2$. Écrivons $A = L^\infty(Z, \mu)$ et choisissons un représentant uniformément borné $X = (X_j)^\omega$ avec $\|X_j\| \leq 1$ tel que chaque X_j soit une fonction en escalier sur Z à valeurs dans M . Nous avons

$$\lim_{j \rightarrow \omega} \|(1 \otimes T)^\omega \widehat{X}_j\|_2^2 = \eta^2, \quad \lim_{j \rightarrow \omega} \|(1 \otimes S)^\omega \widehat{X}_j\|_2^2 = 0 \quad (S \in \Sigma).$$

Choisissons un filet $(\varepsilon_i)_{i \in I}$ dans $(0, 1)$ convergeant vers zéro et un filet croissant $(\Sigma_i)_{i \in I}$ de sous-ensembles finis de Σ qui est cofinal parmi ses sous-ensembles finis. Pour chaque $i \in I$, choisissons $j \in I$ tel que

$$\|(1 \otimes T)^\omega \widehat{X}_j\|_2^2 \geq \eta^2 - \varepsilon_i, \quad \sum_{S \in \Sigma_i} \|(1 \otimes S)^\omega \widehat{X}_j\|_2^2 \leq \varepsilon_i^2.$$

Posons

$$E = \left\{ z \in Z \mid \sum_{S \in \Sigma_i} \|S \widehat{X}_j(z)\|_2^2 \leq \varepsilon_i \right\}.$$

L'inégalité de Chebyshev donne $\mu(Z \setminus E) \leq \varepsilon_i$. Puisque $\|X\| = \|T\| = 1$, nous avons

$$\|T \widehat{X}_j(z)\|_2 \leq 1,$$

d'où

$$\int_E \|T\widehat{X_j(z)}\|_2^2 d\mu(z) \geq \|(1 \otimes T)\widehat{X_j}\|_2^2 - \mu(Z \setminus E) \geq \eta^2 - 2\varepsilon_i$$

Nous pouvons donc choisir un élément $z \in E$ tel que

$$\|T\widehat{X_j(z)}\|_2^2 \geq \eta^2 - 2\varepsilon_i.$$

Posons $x_i = X_j(z)$ et soit $x = (x_i)^\omega \in M^\omega$. Alors $\|x\| \leq 1$. De plus, la cofinalité de $(\Sigma_i)_{i \in I}$ et le fait que $\varepsilon_i \rightarrow 0$ impliquent

$$S^\omega \widehat{x} = 0 \quad (S \in \Sigma),$$

tandis que

$$\|T^\omega \widehat{x}\|_2 \geq \eta.$$

Cela prouve le résultat. □

Nous aurons aussi besoin de l'application suivante de la technique de mise en œuvre dans les ultrapuissances aux bicentralisateurs.

3.5. Actions à bicentralisateur trivial

Soit $\alpha : G \curvearrowright (M, \tau)$ une action continue préservant la trace.

Lemme 3.8. *Soit A une algèbre de von Neumann abélienne traciale. Alors*

$$B(A \overline{\otimes} M \subset A \overline{\otimes} N, \text{id} \otimes \alpha) = A \overline{\otimes} B(M \subset N, \alpha).$$

Démonstration. Puisque

$$1 \otimes M^{\omega, \alpha} \subset (A \overline{\otimes} M)^{\omega, \text{id} \otimes \alpha},$$

la Proposition 2.7 donne

$$\begin{aligned} B(A \overline{\otimes} M \subset A \overline{\otimes} N, \text{id} \otimes \alpha) &= \left((A \overline{\otimes} M)^{\omega, \text{id} \otimes \alpha} \right)' \cap (A \overline{\otimes} N) \\ &\subset (1 \otimes M^{\omega, \alpha})' \cap (A \overline{\otimes} N) \\ &= A \overline{\otimes} B(M \subset N, \alpha). \end{aligned}$$

Pour l'inclusion réciproque, nous devons montrer que $1 \otimes B(M \subset N, \alpha)$ commute avec $(A \overline{\otimes} M)^{\omega, \text{id} \otimes \alpha}$. Choisissons un sous-groupe dense $G_0 \subset G$ de cardinal inférieur à κ , et choisissons $f \in L^1(G)$ avec $f \geq 0$ et $\int_G f(g) dg = 1$. Prenons

$$\Sigma = \{U_f^\alpha - \text{id}\} \cup \{U_g^\alpha - \text{id} \mid g \in G_0\}.$$

Fixons $b \in B(M \subset N, \alpha)$ et définissons $D_b : L^2(M) \rightarrow L^2(N)$ par

$$D_b \widehat{x} = \widehat{xb - bx}.$$

Soit $T = (D_b^* D_b)^{1/2} \in \mathbb{B}(L^2(M))$. Si $x \in M^\omega$ satisfait $S^\omega \widehat{x} = 0$ pour tout $S \in \Sigma$, alors $(U_f^\alpha - \text{id})^\omega \widehat{x} = 0$ montre que

$$x = (\alpha_f(x_i))^\omega \in M_\alpha^\omega.$$

Puisque $(U_g^\alpha - \text{id})^\omega \widehat{x} = 0$ pour tout $g \in G_0$ et que l'action α^ω est continue sur M_α^ω , il s'ensuit que $x \in M^{\omega, \alpha}$. Donc $xb = bx$, et par conséquent

$$T^\omega \widehat{x} = 0.$$

Soit maintenant $X \in (A \overline{\otimes} M)^{\omega, \text{id} \otimes \alpha}$. Alors

$$(1 \otimes S)^\omega \widehat{X} = 0 \quad (S \in \Sigma).$$

Le Lemme 3.7 donne $x \in M^\omega$ tel que $S^\omega \widehat{x} = 0$ pour tout $S \in \Sigma$ et

$$\|(1 \otimes T)^\omega \widehat{X}\|_2 \leq \|T^\omega \widehat{x}\|_2 = 0.$$

Par la définition de T , cela signifie

$$[X, 1 \otimes b] = 0.$$

Ainsi $1 \otimes B(M \subset N, \alpha)$ commute avec $(A \overline{\otimes} M)^{\omega, \text{id} \otimes \alpha}$. □

Lemme 3.9. *Soit $\Phi \in \mathbb{B}(L^2(M))^*$ un état dont les restrictions à $\lambda_M(M)$ et $\rho_M(M)$ sont normales. Supposons que*

$$\Phi(U^\alpha(f)) = \int_G f(g) \, dg \quad (f \in L^1(G)). \quad (3.2)$$

Alors, pour tous $x \in B(M, \alpha)$ et $y \in M$,

$$\Phi(\lambda_M(x)\rho_M(y)) = \Phi(\rho_M(xy)). \quad (3.3)$$

En particulier, $\Phi(\lambda_M(x)) = \Phi(\rho_M(x))$ pour tout $x \in B(M, \alpha)$.

Démonstration. Par le théorème de mise en œuvre dans les ultrapuissances traciales, il existe une algèbre de von Neumann abélienne A munie d'un état tracial normal fidèle, un ultrafiltre cofinal ω sur un ensemble dirigé suffisamment grand, et un vecteur unitaire

$$\xi \in L^2((A \overline{\otimes} M)^\omega)$$

tel que

$$\Phi(T) = \langle (1 \otimes T)^\omega \xi, \xi \rangle, \quad (T \in \mathbb{B}(L^2(M))) \quad (3.4)$$

L'hypothèse s'étend par continuité au caractère trivial 1_G de $C^*(G)$. L'argument du domaine multiplicatif donne donc

$$(1 \otimes U^\alpha(f))^\omega \xi = 1_G(f) \xi \quad (f \in C^*(G)).$$

Choisissons $h \in L^1(G)$ avec $\int_G h(g) \, dg = 1$. En partant d'un représentant $\xi = (\xi_i)^\omega$, la Proposition 2.3, appliquée à $\text{id} \otimes \alpha$, montre que

$$\xi = ((1 \otimes U^\alpha(h))\xi_i)^\omega \in L^2((A \overline{\otimes} M)_{\text{id} \otimes \alpha}^\omega).$$

Ici, l'égalité découle de la relation du domaine multiplicatif précédente. La Proposition 2.3 identifie aussi la représentation intégrée coordonnée par coordonnée sur cet espace de Hilbert avec la mise en œuvre standard de $(\text{id} \otimes \alpha)^\omega$. Sa représentation intégrée agit sur ξ par le caractère trivial, donc ξ est fixé par cette action. Par conséquent

$$\xi \in L^2((A \overline{\otimes} M)^{\omega, \text{id} \otimes \alpha}).$$

Les Propositions 3.8 et 2.7 donnent

$$(1 \otimes x)\xi = \xi(1 \otimes x) \quad (x \in B(M, \alpha)).$$

En utilisant (3.4), nous obtenons

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda_M(x)\rho_M(y)) &= \langle (1 \otimes x)\xi(1 \otimes y), \xi \rangle \\ &= \langle \xi(1 \otimes xy), \xi \rangle = \Phi(\rho_M(xy)), \end{aligned}$$

comme annoncé. Comparer aussi [Ma26, Lemme 1.1]. □

Théorème 3.10. *Les assertions suivantes sont équivalentes. (i)(i)*

1. $B(M, \alpha) = \mathbb{C}1$.
2. Il existe une application ucp

$$\vartheta : \mathbb{B}(L^2(M)) \longrightarrow \mathbb{B}(L^2(M))$$

telle que, pour tous $a, b \in M$ et $f \in L^1(G)$,

$$\vartheta(\lambda_M(a)) = \tau(a)1, \quad \vartheta(\rho_M(b)) = \rho_M(b), \quad \vartheta(U^\alpha(f)) = U^\alpha(f).$$

3. Il existe un état $\Phi \in \mathbb{B}(L^2(M))^*$ tel que

$$\Phi(\lambda_M(a)\rho_M(b)) = \tau(a)\tau(b) \quad (a, b \in M) \tag{3.5}$$

et

$$\Phi(U^\alpha(f)) = \int_G f(g) \, dg, \quad (f \in L^1(G)). \tag{3.6}$$

4. $\mathcal{C}_\alpha \prec \mathcal{I}_\alpha$.

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii). Choisissons un filet $(\varepsilon_i)_i$ de nombres positifs décroissant vers zéro et un filet croissant cofinal $(K_i)_i$ de sous-ensembles compacts de G . Grâce à la Proposition 2.6, nous pouvons choisir, pour chaque i , des unitaires $u_{i,1}, \dots, u_{i,n_i} \in M$ et des nombres positifs $t_{i,1}, \dots, t_{i,n_i}$ de somme un tels que

$$\sup_{g \in K_i} \|\alpha_g(u_{i,k}) - u_{i,k}\|_2 \leq \varepsilon_i \quad (1 \leq k \leq n_i)$$

et

$$\sum_{k=1}^{n_i} t_{i,k} u_{i,k} a u_{i,k}^* \longrightarrow \tau(a)1 \quad (a \in M)$$

dans $\|\cdot\|_2$. Définissons

$$\vartheta_i(T) = \sum_{k=1}^{n_i} t_{i,k} \lambda_M(u_{i,k}) T \lambda_M(u_{i,k})^* \quad (T \in \mathbb{B}(L^2(M))).$$

Chaque ϑ_i est ucp. Puisque les représentations gauche et droite commutent,

$$\vartheta_i(\rho_M(b)) = \rho_M(b) \quad (b \in M),$$

tandis que

$$\vartheta_i(\lambda_M(a)) = \lambda_M \left(\sum_{k=1}^{n_i} t_{i,k} u_{i,k} a u_{i,k}^* \right) \longrightarrow \tau(a)1$$

faiblement*. De plus, la covariance donne

$$\lambda_M(u_{i,k}) U_g^\alpha \lambda_M(u_{i,k})^* = \lambda_M(u_{i,k} \alpha_g(u_{i,k}^*)) U_g^\alpha.$$

L'invariance approchée ci-dessus implique, uniformément pour $g \in K_i$, que le membre de droite converge fortement vers U_g^α . Puisque les ensembles K_i sont cofinaux, l'intégration donne

$$\vartheta_i(U^\alpha(f)) \longrightarrow U^\alpha(f) \quad (f \in L^1(G))$$

fortement. Tout point d'accumulation faible* ϑ de $(\vartheta_i)_i$ est donc une application ucp satisfaisant toutes les identités de (ii).

Nous prouvons ensuite (ii) $\implies$ (iii). Supposons que (ii) soit vraie et définissons

$$\Phi(T) = \langle \vartheta(T) \hat{1}, \hat{1} \rangle \quad (T \in \mathbb{B}(L^2(M))).$$

Puisque ϑ se restreint à l'identité sur $\rho_M(M)$, cette algèbre est contenue dans le domaine multiplicatif de ϑ . Donc, pour tous $a, b \in M$,

$$\Phi(\lambda_M(a) \rho_M(b)) = \langle \vartheta(\lambda_M(a)) \rho_M(b) \hat{1}, \hat{1} \rangle = \tau(a) \tau(b).$$

De plus,

$$\Phi(U^\alpha(f)) = \langle U^\alpha(f) \hat{1}, \hat{1} \rangle = \int_G f(g) \, dg \quad (f \in L^1(G)),$$

donc (iii) est vraie.

Nous prouvons maintenant (iii) $\implies$ (i). Soit $x \in B(M, \alpha)$. Les deux marginales de Φ sont τ , donc le Lemme 3.9 donne, pour tout $y \in M$,

$$\tau(xy) = \Phi(\rho_M(xy)) = \Phi(\lambda_M(x) \rho_M(y)) = \tau(x) \tau(y).$$

En prenant $y = (x - \tau(x)1)^*$, on obtient $\|x - \tau(x)1\|_2 = 0$. Donc $B(M, \alpha) = \mathbb{C}1$.

Enfin, (iii) $\iff$ (iv) découle de la Proposition 3.3, puisque le vecteur $\xi_0 = \hat{1} \otimes \hat{1}$ est cyclique pour $\mathcal{C}_\alpha$ et fixé par $U^\alpha \otimes U^\alpha$, et son état vectoriel a précisément les valeurs (3.5)–(3.6). $\square$

Nous utilisons le résultat suivant de [BLS92, Corollaire 1.8].

Théorème 3.11. *Soit π une représentation unitaire fidèle d'un groupe localement compact G telle que $\pi^* \prec \pi$ et $1_G \prec \pi$ et $\pi \otimes_G \pi \prec \pi$. Alors $\lambda_G \prec \pi$.*

Corollaire 3.12. *Supposons que $B(M, \alpha) = \mathbb{C}$. Alors*

$$U^\alpha \otimes_G U^\alpha \prec U^\alpha.$$

Ainsi, si α est fidèle, nous avons $\lambda_G \prec U^\alpha$.

Démonstration. Restreignons la faible contenance $\mathcal{C}_\alpha \prec \mathcal{I}_\alpha$ aux représentations unitaires de G . De plus, U^α est égal à son contragrédient et contient la représentation triviale 1_G . $\square$

Remarque 3.13. Soit

$$\mathcal{L}_\alpha = (L^2(M), \lambda_M, U^\alpha) \in \text{Rep}(\alpha)$$

la représentation covariante standard de α . Le point (iv) du Théorème 3.10 implique, en particulier, que

$$U^\alpha \otimes_G \mathcal{L}_\alpha \prec \mathcal{L}_\alpha.$$

En effet, $\mathcal{L}_\alpha$ et $U^\alpha \otimes_G \mathcal{L}_\alpha$ sont obtenus à partir de $\mathcal{I}_\alpha$ et $\mathcal{C}_\alpha$ respectivement, en oubliant l'action à droite de M . Ainsi, si $\mathcal{C}_\alpha \prec \mathcal{I}_\alpha$ alors $U^\alpha \otimes_G \mathcal{L}_\alpha \prec \mathcal{L}_\alpha$ par restriction. En tensorisant à droite par $\mathcal{L}_\alpha^{\text{op}}$, nous obtenons aussi

$$U^\alpha \otimes_G \mathcal{C}_\alpha \prec \mathcal{C}_\alpha.$$

Ainsi, si α est fidèle, alors

$$\lambda_G \otimes_G \mathcal{C}_\alpha \prec \mathcal{C}_\alpha.$$

3.6. La propriété de Rokhlin

Soit G un groupe localement compact arbitraire et soit $\alpha : G \curvearrowright (M, \tau)$ une action continue préservant la trace sur une algèbre de von Neumann traciale (M, τ) .

Définition 3.14. Nous disons que l'action α possède la propriété de Rokhlin si

$$\lambda_G \otimes_G \mathcal{I}_\alpha \prec \mathcal{I}_\alpha.$$

Nous utilisons la notation $M_{\omega, \alpha} = M' \cap M_\alpha^\omega$ pour un ultrafiltre cofinal ω suffisamment grand et notons α_ω la restriction de α^ω à $M_{\omega, \alpha}$.

Théorème 3.15. *Supposons que M soit un facteur de type II_1 , et soit $\rho = U^{\alpha_\omega}$ la représentation standard de $\alpha_\omega : G \curvearrowright M_{\omega, \alpha}$. Pour toute représentation unitaire $\pi \in \text{Rep}(G)$, nous avons*

$$\pi \otimes_G \mathcal{I}_\alpha \prec \mathcal{I}_\alpha \iff \pi \prec \rho.$$

Démonstration. Nous expliquons d'abord pourquoi une amplification abélienne n'agrandit pas la représentation des suites centrales à faible contenance près. Soit (A, μ) une algèbre de von Neumann abélienne traciale, posons $\tilde{\alpha} = \text{id}_A \otimes \alpha$, et soit ρ_A la représentation standard sur

$$L^2(C_A), \quad C_A = (1 \otimes M)' \cap (A \overline{\otimes} M)_\alpha^\omega.$$

Nous affirmons que $\rho_A \prec \rho$.

Fixons $f \in L^1(G)$ et posons $c = \|\rho(f)\|$. Si $\|\rho_A(f)\| > c$, les vecteurs bornés sont denses, donc il existe $Y \in C_A$ et $h \in C_c(G)$, avec $h \geq 0$ et $\int_G h = 1$, tels que $X = \tilde{\alpha}_h^\omega(Y)$ satisfasse

$$\|\rho_A(f)\widehat{X}\|_2^2 - c^2\|X\|_2^2 > \delta$$

pour un certain $\delta > 0$. Ici, h est choisi à partir d'une identité approchée. Choisissons un représentant uniformément borné $(Y_j)_j$ dont les termes sont des fonctions en escalier finies en la variable

abélienne. Cela est possible en appliquant des espérances conditionnelles sur des sous-algèbres de dimension finie de A et en approximant dans $\|\cdot\|_2$. Écrivons

$$Y_j = \sum_r e_{j,r} \otimes y_{j,r}, \quad X_j = \sum_r e_{j,r} \otimes x_{j,r}, \quad x_{j,r} = \alpha_h(y_{j,r}),$$

où les $e_{j,r}$ forment une partition de 1 et $\|y_{j,r}\| \leq C$ pour un C fixé. Les représentants $(X_j)_j$ sont uniformément équicontinus, puisque

$$\|\alpha_g(x_{j,r}) - x_{j,r}\|_2 \leq C\|h(g^{-1} \cdot) - h\|_1.$$

Posons

$$d(x) = \|U^\alpha(f)\hat{x}\|_2^2 - c^2\|x\|_2^2.$$

Pour ω -presque tout j , nous avons

$$\sum_r \mu(e_{j,r})d(x_{j,r}) > \delta,$$

tandis que, pour tout $a \in M$,

$$\lim_{j \rightarrow \omega} \sum_r \mu(e_{j,r})\|[a, x_{j,r}]\|_2^2 = 0.$$

Les nombres $|d(x_{j,r})|$ ont une borne commune. Étant donné un sous-ensemble fini $F \subset M$ et $\varepsilon > 0$, l'inégalité de Chebyshev nous permet donc de choisir j, r tels que

$$\max_{a \in F} \|[a, x_{j,r}]\|_2 < \varepsilon, \quad d(x_{j,r}) > \delta/2.$$

En effet, rendons le poids total des composantes échouant à la première inégalité suffisamment petit pour que leur contribution à la somme pondérée précédente ait une valeur absolue inférieure à $\delta/2$. En utilisant l'hypothèse permanente sur l'ensemble d'indices, faisons ces choix le long de sous-ensembles finis croissants d'une sous-algèbre fortement dense de M et de tolérances décroissantes. Les éléments sélectionnés sont uniformément bornés et équicontinus. Ils définissent $x \in M_{\omega, \alpha}$ avec

$$\|\rho(f)\hat{x}\|_2^2 - c^2\|x\|_2^2 \geq \delta/2,$$

une contradiction. Cela prouve l'affirmation.

Supposons maintenant que $\pi \otimes_G \mathcal{I}_\alpha \prec \mathcal{I}_\alpha$, et fixons un vecteur unitaire ξ_0 dans l'espace de π . La Proposition 3.3, appliquée à $\xi_0 \otimes \hat{1}$, donne un état $\Phi \in \mathbb{B}(L^2(M))^*$ tel que

$$\Phi(\lambda_M(a)\rho_M(b)) = \tau(ab), \quad \Phi(U^\alpha(f)) = \langle \pi(f)\xi_0, \xi_0 \rangle$$

pour $a, b \in M$ et $f \in L^1(G)$. Par la mise en œuvre dans les ultrapuissances [Ma25, Théorème 2.1], cet état est mis en œuvre par un vecteur unitaire $\eta \in L^2((A \overline{\otimes} M)^\omega)$ pour une algèbre abélienne traciale A . La première identité implique $(1 \otimes a)\eta = \eta(1 \otimes a)$ pour tout $a \in M$. La seconde identité, une identité approchée dans $L^1(G)$, et la Proposition 2.3 montrent que η appartient à la partie équicontinue. Ses troncatures bornées commutent encore avec $1 \otimes M$, donc $\eta \in L^2(C_A)$ et

$$\langle \rho_A(f)\eta, \eta \rangle = \langle \pi(f)\xi_0, \xi_0 \rangle.$$

L'égalité de ces coefficients identifie les représentations cycliques engendrées par η et ξ_0 . L'affirmation donne que cette sous-représentation cyclique de π est faiblement contenue dans ρ . Puisque ξ_0 était arbitraire, $\pi \prec \rho$.

Pour la réciproque, la factorialité implique

$$E^\omega(x^*y) = \tau^\omega(x^*y)1 \quad (x, y \in M_{\omega, \alpha}).$$

Par conséquent, la multiplication définit une application isométrique équivariante de bimodules $M-M$

$$L^2(M_{\omega, \alpha}) \otimes L^2(M) \longrightarrow L^2(M_\alpha^\omega), \quad \hat{x} \otimes \hat{a} \longmapsto \widehat{xa}.$$

La correspondance sur le but est faiblement contenue dans $\mathcal{I}_\alpha$. Pour le voir, relevons un vecteur borné équicontinu en ses représentants uniformément bornés et utilisons la Proposition 2.3 pour calculer ses coefficients pour les opérateurs de groupe intégrés. Les coefficients résultants sont des ultralimites de coefficients de $\mathcal{I}_\alpha$. La densité des vecteurs bornés donne la faible contenance annoncée. Il s'ensuit que $\rho \otimes_G \mathcal{I}_\alpha \prec \mathcal{I}_\alpha$. Ainsi $\pi \prec \rho$ et la Proposition 3.4 donnent $\pi \otimes_G \mathcal{I}_\alpha \prec \mathcal{I}_\alpha$. $\square$

Le corollaire suivant montre que notre définition de la propriété de Rokhlin coïncide avec celle donnée dans [MT16] pour les flots, dans [Sh14] pour les groupes abéliens et dans [Ni26] pour les groupes admettant un sous-groupe ouvert compact.

Corollaire 3.16. *Supposons que M soit un facteur de type II_1 . Alors α possède la propriété de Rokhlin si et seulement si α_ω est fidèle.*

Démonstration. Posons $\rho = U^{\alpha_\omega}$. Puisque $\rho \prec \rho$, le Théorème 3.15 donne

$$\rho \otimes_G \mathcal{I}_\alpha \prec \mathcal{I}_\alpha.$$

En tensorisant cette faible contenance par ρ et en utilisant la Proposition 3.4, nous obtenons

$$\rho \otimes_G \rho \otimes_G \mathcal{I}_\alpha \prec \rho \otimes_G \mathcal{I}_\alpha \prec \mathcal{I}_\alpha.$$

Une autre application du Théorème 3.15 donne

$$\rho \otimes_G \rho \prec \rho.$$

Puisque ρ est une représentation de Koopman, elle contient les constantes et est équivalente à sa représentation contragrédiente. Si α_ω est fidèle alors le Théorème 3.11 donne

$$\lambda_G \prec \rho.$$

En appliquant encore une fois le Théorème 3.15, nous obtenons

$$\lambda_G \otimes_G \mathcal{I}_\alpha \prec \mathcal{I}_\alpha.$$

Réciproquement, si α est de Rokhlin, le Théorème 3.15 donne $\lambda_G \prec \rho$. Ainsi ρ est fidèle. $\square$

Théorème 3.17. *Soit M un facteur de type II_1 . Considérons les propriétés suivantes. (i)(i)*

1. α possède la propriété de Rokhlin.
2. α est fidèle et $B(M, \alpha) = \mathbb{C}1$.

Si G est moyennable alors (i) $\Rightarrow$ (ii). Si M est moyennable alors (ii) $\Rightarrow$ (i).

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) lorsque G est moyennable. Puisque les moyennes convexes des états vectoriels associés à $\hat{u}$, $u \in \mathcal{U}(M)$, convergent sur $M \odot M^{\text{op}}$ vers la trace produit, le vecteur cyclique de $\mathcal{C}_M$, nous avons

$$\mathcal{C}_M \prec \mathcal{I}_M. \quad (3.7)$$

La Proposition 3.5 et l'absorption de Fell donnent alors

$$\lambda_G \otimes_G \mathcal{C}_\alpha \cong \text{Ind}(\mathcal{C}_M) \prec \text{Ind}(\mathcal{I}_M) \cong \lambda_G \otimes_G \mathcal{I}_\alpha.$$

La propriété de Rokhlin pour α dit

$$\lambda_G \otimes_G \mathcal{I}_\alpha \prec \mathcal{I}_\alpha \quad (3.8)$$

et puisque G est moyennable, nous avons $1_G \prec \lambda_G$ donc

$$\mathcal{C}_\alpha \prec \lambda_G \otimes_G \mathcal{C}_\alpha. \quad (3.9)$$

Nous concluons que

$$\mathcal{C}_\alpha \prec \mathcal{I}_\alpha,$$

et le Théorème 3.10 achève la preuve.

(ii) $\Rightarrow$ (i) lorsque M est moyennable. La moyennabilité de M signifie que

$$\mathcal{I}_M \prec \mathcal{C}_M.$$

La Proposition 3.5 et l'absorption de Fell donnent

$$\lambda_G \otimes_G \mathcal{I}_\alpha \cong \text{Ind}(\mathcal{I}_M) \prec \text{Ind}(\mathcal{C}_M) \cong \lambda_G \otimes_G \mathcal{C}_\alpha.$$

Grâce à la Remarque 3.13 nous avons

$$\lambda_G \otimes_G \mathcal{C}_\alpha \prec \mathcal{C}_\alpha$$

et par le Théorème 3.10, nous avons

$$\mathcal{C}_\alpha \prec \mathcal{I}_\alpha.$$

Nous concluons que

$$\lambda_G \otimes_G \mathcal{I}_\alpha \prec \mathcal{I}_\alpha.$$

□

4. Perturbations par cocycle

Nous étudions l'effet des perturbations par cocycle sur le bicentralisateur. Un cobord approché induit un isomorphisme canonique entre les bicentralisateurs des actions originale et perturbée. Ces isomorphismes fourniront l'action bicentralisatrice duale pour les groupes abéliens. Nous donnons également un critère pour l'existence de perturbations ergodiques par cobords approchés en termes de la partie fixe du bicentralisateur, et nous prouvons l'annulation approchée des 1-cocycles pour

les actions de Rokhlin de groupes moyennables.

L'observation de base est que les cobords approchés deviennent des cobords exacts dans une ultrapuissance équicontinue. Sur le bicentralisateur, la conjugaison par les unitaires implémentants converge ponctuellement vers une application indépendante de leur choix, donnant l'isomorphisme canonique. Un argument de catégorie de Baire produit des perturbations ergodiques. Pour l'annulation approchée des cocycles, une amplification matricielle réduit le problème à l'équivalence de projections de même trace dans une ultrapuissance de points fixes.

4.1. Cocycles et cobords approchés

Dans toute cette section, G est un groupe localement compact, (M, τ) est une algèbre de von Neumann traciale, et $\alpha : G \curvearrowright (M, \tau)$ est une action continue préservant la trace. Nous utilisons les conventions standard pour les cocycles. Comparer [MT16, Sections 2–3].

Un 1-*cocycle* pour α est une application $\|\cdot\|_2$ -continue $u : G \rightarrow \mathcal{U}(M)$ satisfaisant

$$u_{gh} = u_g \alpha_g(u_h) \quad \text{pour tous } g, h \in G.$$

Nous désignons par $Z^1(\alpha)$ l'ensemble de tous les 1-cocycles pour α . Notons que tout $u \in Z^1(\alpha)$ satisfait $u_e = 1$.

Tout cocycle $u \in Z^1(\alpha)$ donne une nouvelle action continue préservant la trace $\alpha^u : G \curvearrowright (M, \tau)$, appelée *perturbation par cocycle* de α par u , définie par

$$\alpha_g^u = \text{Ad}(u_g) \circ \alpha_g, \quad \alpha_g^u(x) = u_g \alpha_g(x) u_g^* \quad (g \in G, x \in M).$$

En effet, la relation de cocycle donne

$$\alpha_g^u \circ \alpha_h^u = \text{Ad}(u_g \alpha_g(u_h)) \circ \alpha_{gh} = \text{Ad}(u_{gh}) \circ \alpha_{gh} = \alpha_{gh}^u.$$

La continuité découle de la continuité de u et α , et α^u préserve τ parce que α préserve la trace et que les automorphismes intérieurs préservent τ .

Pour tout $v \in \mathcal{U}(M)$, l'application

$$\partial_\alpha(v)_g = v \alpha_g(v^*) \quad (g \in G)$$

appartient à $Z^1(\alpha)$. Un tel cocycle est appelé un *cobord*, et nous écrivons

$$B^1(\alpha) = \{\partial_\alpha(v) \mid v \in \mathcal{U}(M)\}.$$

Si $u = \partial_\alpha(v)$ est un cobord, alors sa perturbation par cocycle est conjuguée à l'action originale :

$$\alpha_g^u = \text{Ad}(v) \circ \alpha_g \circ \text{Ad}(v^*) \quad (g \in G).$$

La topologie naturelle sur $Z^1(\alpha)$ est la topologie de la $\|\cdot\|_2$ -convergence uniforme sur les sous-ensembles compacts de G . Une base de voisinages en $u \in Z^1(\alpha)$ est donnée par

$$\mathcal{V}(u, K, \varepsilon) = \left\{ w \in Z^1(\alpha) \mid \sup_{g \in K} \|u_g - w_g\|_2 < \varepsilon \right\}, \quad K \Subset G, \quad \varepsilon > 0.$$

Cette description par ensembles compacts, plutôt que par une suite d'ensembles compacts, n'exige pas que G soit à base dénombrable ou σ -compact.

Un cocycle $u \in Z^1(\alpha)$ est appelé un *cobord approché* s'il appartient à l'adhérence de $B^1(\alpha)$ dans cette topologie. De manière équivalente, u est un cobord approché si, pour tout $K \subseteq G$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $v \in \mathcal{U}(M)$ tel que

$$\sup_{g \in K} \|u_g - v\alpha_g(v^*)\|_2 < \varepsilon.$$

Nous désignons par $\overline{B^1(\alpha)}$ l'ensemble des cobords approchés.

Proposition 4.1. *Soit ω un ultrafiltre cofinal sur un ensemble dirigé I suffisamment grand. Soit $u \in Z^1(\alpha)$. Nous avons*

$$\{V \in \mathcal{U}(M_\alpha^\omega) \mid u = \partial_{\alpha^\omega}(V)\} = \left\{ (v_i)^\omega \in \mathcal{U}(M^\omega) \mid \lim_{i \rightarrow \omega} \partial_\alpha(v_i) = u \right\}.$$

En particulier, $u \in \overline{B^1(\alpha)}$ si et seulement si $u \in B^1(\alpha^\omega)$.

Démonstration. Soit $V = (v_i)^\omega$ appartenant à l'ensemble de droite, et supposons que $g \mapsto v_i\alpha_g(v_i)^*$ converge vers u uniformément sur les sous-ensembles compacts le long de ω . La convergence ponctuelle donne $u = \partial_{\alpha^\omega}(V)$. De plus, pour $h \in G$,

$$\|\alpha_h(v_i) - v_i\|_2 = \|v_i\alpha_h(v_i)^* - 1\|_2.$$

La convergence compacte-uniforme, jointe à la continuité de u et à $u_e = 1$, montre donc que $(v_i)_{i \in I}$ est (α, ω) -équicontinu. D'où $V \in \mathcal{U}(M_\alpha^\omega)$.

Réciproquement, soit $V \in \mathcal{U}(M_\alpha^\omega)$ satisfaisant $u = \partial_{\alpha^\omega}(V)$, et choisissons un représentant unitaire (α, ω) -équicontinu $V = (v_i)^\omega$. Le filet $(f_i)_{i \in I}$ d'applications continues

$$f_i : G \longrightarrow M, \quad f_i(g) = v_i\alpha_g(v_i)^* - u_g,$$

est ω -équicontinu. Puisque $u = \partial_{\alpha^\omega}(V)$, nous avons $(f_i(g))^\omega = 0$ pour tout $g \in G$. La Proposition 2.1 donne donc, pour tout $K \subseteq G$,

$$\limsup_{i \rightarrow \omega} \sup_{g \in K} \|v_i\alpha_g(v_i)^* - u_g\|_2 = 0.$$

Cela prouve l'égalité des deux ensembles. □

Proposition 4.2. *L'espace $Z^1(\alpha)$ est complet pour l'uniformité de la $\|\cdot\|_2$ -convergence compacte-uniforme. Si G est à base dénombrable et M a un prédual séparable, alors $Z^1(\alpha)$ est un espace polonais.*

Le groupe $\mathcal{U}(M)$ agit continûment sur $Z^1(\alpha)$ par

$$(v \cdot w)_g = vw_g\alpha_g(v^*) \quad (v \in \mathcal{U}(M), w \in Z^1(\alpha), g \in G).$$

Pour tout $u \in Z^1(\alpha)$, la multiplication à droite par u définit un homéomorphisme $\mathcal{U}(M)$ -équivariant

$$Z^1(\alpha^u) \longrightarrow Z^1(\alpha) : w \mapsto wu.$$

4.2. Isomorphismes de bicentralisateurs pour les cobords approchés

Dans toute cette sous-section, G est un groupe localement compact, $(M, \tau) \subset (N, \tau)$ est une inclusion d'algèbres de von Neumann traciales, et $\alpha : G \curvearrowright (M, \tau)$ est une action continue préservant la trace.

Proposition 4.3. *Soit $u \in \overline{B^1(\alpha)}$. Si $(v_i)_i$ est un filet dans $\mathcal{U}(M)$ tel que*

$$\partial_\alpha(v_i) \longrightarrow u$$

uniformément sur les sous-ensembles compacts de G , alors, pour tout $x \in B(M \subset N, \alpha)$, la limite

$$\beta_u(x) = \lim_i v_i x v_i^*$$

existe dans $\|\cdot\|_2$ et est indépendante du choix de $(v_i)_{i \in I}$. Cette formule définit un isomorphisme préservant la trace

$$\beta_u : B(M \subset N, \alpha) \longrightarrow B(M \subset N, \alpha^u).$$

De plus, les assertions suivantes sont vraies. (i)(i)

1. Si $v \in \overline{B^1(\alpha^u)}$, alors $vu \in \overline{B^1(\alpha)}$ et

$$\beta_{vu} = \beta_v \circ \beta_u.$$

2. Supposons que α s'étende en une action continue préservant la trace sur (N, τ) , encore notée α . Alors l'isomorphisme β_u est équivariant : pour tout $g \in G$,

$$\beta_u \circ \alpha_g = \alpha_g^u \circ \beta_u \quad \text{sur } B(M \subset N, \alpha).$$

3. Pour tout $x \in B(M \subset N, \alpha)$, l'application

$$\overline{B^1(\alpha)} \longrightarrow N, \quad w \longmapsto \beta_w(x),$$

est continue pour la $\|\cdot\|_2$ -convergence compacte-uniforme sur les cocycles et la $\|\cdot\|_2$ -topologie sur N .

Démonstration. Choisissons un filet $(u_i)_{i \in I}$ dans $\mathcal{U}(M)$ tel que $\partial_\alpha(u_i)$ converge vers u . Alors $\partial_\alpha(u_j^* u_i) \rightarrow 1$ quand i, j tendent vers l'infini.

Par conséquent,

$$\|u_i x u_i^* - u_j x u_j^*\|_2 = \|(u_j^* u_i) x - x (u_j^* u_i)\|_2 \rightarrow 0$$

parce que $x \in B(M \subset N, \alpha)$. Cela signifie que $(u_i x u_i^*)_i$ est de Cauchy dans $L^2(N, \tau)$. Ses termes sont uniformément bornés, donc sa limite appartient à N . La même comparaison, appliquée à deux filets implémentants différents, prouve que la limite est indépendante du choix de $(u_i)_{i \in I}$. Notons-la $\beta_u(x)$.

Si $(v_i)_{i \in I}$ satisfait $\partial_\alpha(v_i) \rightarrow v \in \overline{B^1(\alpha^u)}$, alors $\partial_\alpha(v_i u_i) \rightarrow vu$, d'où

$$\beta_{vu}(x) = \lim_i v_i u_i x u_i^* v_i^* = \lim_i v_i \beta_u(x) v_i^*.$$

Cela montre d'abord, lorsque $v = 1$, que $\beta_u(x) \in B(M \subset N, \alpha^u)$ et ensuite, pour v arbitraire, que

$$\beta_{vu}(x) = \beta_v(\beta_u(x)).$$

L'application β_u est unitale, préserve la trace, préserve l'involution, et est multiplicative, par la limite définissante et la continuité de la multiplication sur les ensembles bornés pour $\|\cdot\|_2$. De plus, β_{u^*} est un inverse de β_u par la relation précédente. Donc β_u est un isomorphisme préservant la trace.

Nous prouvons le point (ii). La définition du bicentralisateur relatif montre que $B(M \subset N, \alpha)$ est α -invariant. Soit $(v_i)_i$ implémentant u et posons $d_{i,g} = v_i \alpha_g(v_i^*)$. Pour $x \in B(M \subset N, \alpha)$ et $g \in G$, nous avons

$$\|\alpha_g^u(v_i x v_i^*) - v_i \alpha_g(x) v_i^*\|_2 \leq 2\|x\|_\infty \|u_g - d_{i,g}\|_2.$$

En passant à la limite, on obtient

$$\alpha_g^u(\beta_u(x)) = \beta_u(\alpha_g(x)).$$

Enfin, fixons u , x et $\varepsilon > 0$. La comparaison utilisée ci-dessus pour prouver que la limite définissante est indépendante du filet implémentant donne $K \Subset G$ et $\delta > 0$ tels que

$$\sup_{g \in K} \|\partial_\alpha(s)_g - u_g\|_2 < \delta \implies \|s x s^* - \beta_u(x)\|_2 < \varepsilon$$

pour tout $s \in \mathcal{U}(M)$. Si $w \in \overline{B^1(\alpha)}$ satisfait

$$\sup_{g \in K} \|w_g - u_g\|_2 < \delta/2,$$

choisissons un unitaire implémentant $s \in \mathcal{U}(M)$ tel que

$$\sup_{g \in K} \|\partial_\alpha(s)_g - w_g\|_2 < \delta/2, \quad \|s x s^* - \beta_w(x)\|_2 < \varepsilon.$$

L'implication ci-dessus donne

$$\|\beta_w(x) - \beta_u(x)\|_2 < 2\varepsilon,$$

ce qui prouve le point (iii). □

Proposition 4.4. *Pour $i \in \{1, 2\}$, soit $M_i \subset N_i$ des inclusions d'algèbres de von Neumann traciales et soit $\alpha_i : G \curvearrowright (M_i, \tau_i)$ des actions préservant la trace. Posons*

$$M = M_1 \overline{\otimes} M_2, \quad N = N_1 \overline{\otimes} N_2, \quad \alpha = \alpha_1 \otimes \alpha_2.$$

Alors

$$B(M \subset N, \alpha) \subset B(M_1 \subset N_1, \alpha_1) \overline{\otimes} B(M_2 \subset N_2, \alpha_2).$$

De plus, si $u_i \in \overline{B^1(\alpha_i)}$ pour $i \in \{1, 2\}$, alors $u = u_1 \otimes u_2 \in \overline{B^1(\alpha)}$ et

$$\beta_u(x) = (\beta_{u_1} \otimes \beta_{u_2})(x)$$

pour tout $x \in B(M \subset N, \alpha)$.

Démonstration. Pour une ultrapuissance suffisamment grande,

$$M_1^{\omega, \alpha_1} \overline{\otimes} M_2^{\omega, \alpha_2} \subset M^{\omega, \alpha}.$$

La Proposition 2.7 donne

$$\begin{aligned} B(M \subset N, \alpha) &\subset (M_1^{\omega, \alpha_1} \overline{\otimes} M_2^{\omega, \alpha_2})' \cap N \\ &= B(M_1 \subset N_1, \alpha_1) \overline{\otimes} B(M_2 \subset N_2, \alpha_2). \end{aligned}$$

Pour $i \in \{1, 2\}$, choisissons un filet $(v_{i, j_i})_{j_i \in J_i}$ dans $\mathcal{U}(M_i)$ tel que

$$\partial_{\alpha_i}(v_{i, j_i}) \longrightarrow u_i$$

uniformément sur les sous-ensembles compacts de G . Sur l'ensemble dirigé produit $J_1 \times J_2$, posons

$$w_{(j_1, j_2)} = v_{1, j_1} \otimes v_{2, j_2}.$$

Alors

$$\partial_\alpha(w_{(j_1, j_2)})_g = \partial_{\alpha_1}(v_{1, j_1})_g \otimes \partial_{\alpha_2}(v_{2, j_2})_g,$$

donc $\partial_\alpha(w_{(j_1, j_2)}) \rightarrow u$ uniformément sur les sous-ensembles compacts. En particulier, $u \in \overline{B^1(\alpha)}$. Par la Proposition 4.3, le membre de gauche de la formule annoncée est la limite dans $\|\cdot\|_2$ de

$$(v_{1, j_1} \otimes v_{2, j_2})x(v_{1, j_1}^* \otimes v_{2, j_2}^*).$$

Pour les tenseurs élémentaires dans $B(M_1 \subset N_1, \alpha_1) \odot B(M_2 \subset N_2, \alpha_2)$, cette limite est $\beta_{u_1} \otimes \beta_{u_2}$. La même conclusion vaut sur le produit tensoriel de von Neumann par densité et continuité dans $\|\cdot\|_2$, et donc pour tout $x \in B(M \subset N, \alpha)$. $\square$

4.3. Perturbations ergodiques par cocycle

Définition 4.5. L'action $\alpha : G \curvearrowright (M, \tau)$ est dite *pleine* si l'application cobord

$$\partial_\alpha : \mathcal{U}(M) \longrightarrow Z^1(\alpha), \quad \partial_\alpha(v)_g = v\alpha_g(v^*),$$

est ouverte sur son image. De manière équivalente, α est pleine si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $K \Subset G$ et $\delta > 0$ tels que, pour tout $v \in \mathcal{U}(M)$,

$$\sup_{g \in K} \|\alpha_g(v) - v\|_2 < \delta \implies \text{dist}_2(v, \mathcal{U}(M^\alpha)) < \varepsilon. \quad (4.1)$$

Proposition 4.6. Soit ω un ultrafiltre cofinal sur un ensemble dirigé suffisamment grand. Alors α est pleine si et seulement si

$$(M^\alpha)^\omega = M^{\omega, \alpha}.$$

Si α est pleine alors $B^1(\alpha)$ est fermé dans $Z^1(\alpha)$. Si G est à base dénombrable et M a un prédual séparable, alors la réciproque est également vraie : $B^1(\alpha)$ est fermé si et seulement si α est pleine. Enfin, si $u \in \overline{B^1(\alpha)}$ alors α est pleine si et seulement si α^u est pleine.

Démonstration. Supposons d'abord que α soit pleine. Soit $V = (v_i)^\omega \in \mathcal{U}(M^{\omega, \alpha})$, où les v_i sont des unitaires et sont asymptotiquement α -invariants uniformément sur les sous-ensembles compacts de G . La plénitude implique

$$\lim_{i \rightarrow \omega} \text{dist}_2(v_i, \mathcal{U}(M^\alpha)) = 0.$$

En choisissant $w_i \in \mathcal{U}(M^\alpha)$ réalisant asymptotiquement cette distance, on obtient $V = (w_i)^\omega \in (M^\alpha)^\omega$. Puisqu'une algèbre de von Neumann est engendrée linéairement par ses unitaires, cela prouve $M^{\omega, \alpha} \subset (M^\alpha)^\omega$. L'inclusion réciproque est automatique.

Réciproquement, supposons que α ne soit pas pleine. Il existe $\varepsilon_0 > 0$ et un filet $(v_i)_i$ dans $\mathcal{U}(M)$ tels que

$$\partial_\alpha(v_i) \longrightarrow 1$$

uniformément sur les sous-ensembles compacts de G , tandis que

$$\text{dist}_2(v_i, \mathcal{U}(M^\alpha)) \geq \varepsilon_0 \quad (i).$$

Ce filet définit un unitaire $V = (v_i)^\omega \in M^{\omega, \alpha}$. Si $(M^\alpha)^\omega = M^{\omega, \alpha}$, alors $V \in (M^\alpha)^\omega$. Le relèvement unitaire dans $(M^\alpha)^\omega$ donnerait des unitaires $w_i \in M^\alpha$ tels que $\|v_i - w_i\|_2 \rightarrow 0$ le long de ω , une contradiction. Cela prouve l'équivalence.

Nous montrons ensuite que la plénitude implique la fermeture de $B^1(\alpha)$. Posons $H = \mathcal{U}(M^\alpha)$. Le quotient $\mathcal{U}(M)/H$ est complet pour la métrique

$$d(vH, wH) = \inf_{a \in H} \|v - wa\|_2,$$

parce que la métrique induite par $\|\cdot\|_2$ sur $\mathcal{U}(M)$ est complète et bi-invariante et que H est fermé. Soit $(\partial_\alpha(v_i))_i$ un filet dans $B^1(\alpha)$ convergeant vers $u \in Z^1(\alpha)$. Pour i, j et $g \in G$, nous avons

$$\|\partial_\alpha(v_i)_g - \partial_\alpha(v_j)_g\|_2 = \|\partial_\alpha(v_j^* v_i)_g - 1\|_2.$$

La plénitude implique donc que $(v_i H)_i$ est un filet de Cauchy dans $\mathcal{U}(M)/H$. Soit vH sa limite. Par continuité de l'application cobord,

$$u = \lim_i \partial_\alpha(v_i) = \partial_\alpha(v),$$

donc $u \in B^1(\alpha)$. D'où $B^1(\alpha)$ est fermé.

Supposons enfin que G soit à base dénombrable et que M_* soit séparable. La Proposition 4.2 montre que $Z^1(\alpha)$ est polonais et que le groupe polonais $\mathcal{U}(M)$ agit continûment sur lui. L'orbite du cocycle trivial est précisément $B^1(\alpha)$, et son application orbitale est ∂_α . Si $B^1(\alpha)$ est fermé, cette orbite est un sous-espace fermé, donc polonais, de $Z^1(\alpha)$. Le théorème de l'application ouverte d'Effros pour les actions de groupes polonais [Ef65, Théorème 2.1] implique que l'application orbitale $\partial_\alpha : \mathcal{U}(M) \rightarrow B^1(\alpha)$ est ouverte. Ainsi α est pleine.

Il reste à prouver l'assertion finale. Soit $u \in \overline{B^1(\alpha)}$. Supposons d'abord que α soit pleine. Par l'implication précédente, $B^1(\alpha)$ est fermé, et donc $u \in B^1(\alpha)$. Ainsi α^u est conjuguée à α , donc elle est pleine. Maintenant, observons que $u^* \in \overline{B^1(\alpha^u)}$ et $\alpha = (\alpha^u)^{u^*}$. Donc, par le même argument, si α^u est pleine alors α est aussi pleine. $\square$

Théorème 4.7. *Soit G un groupe localement compact à base dénombrable et soit (M, τ) une algèbre de von Neumann traciale à prédual séparable. Soit $\alpha : G \curvearrowright (M, \tau)$ une action continue fidèle préservant la trace. Supposons que α ne soit pas pleine, c'est-à-dire que $B^1(\alpha)$ ne soit pas fermé dans $Z^1(\alpha)$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes. (i)(i)*

1. Il existe $v \in \overline{B^1(\alpha)}$ tel que α^v soit ergodique.
2. L'ensemble

$$\{v \in \overline{B^1(\alpha)} \mid \alpha^v \text{ est ergodique}\}$$

est un sous-ensemble G_δ dense de $\overline{B^1(\alpha)}$.

3. $B(M, \alpha) \cap M^\alpha = \mathbb{C}1$.

Démonstration. La Proposition 4.3, point (ii), donne

$$\beta_v(B(M, \alpha) \cap M^\alpha) = B(M, \alpha^v) \cap M^{\alpha^v}. \quad (4.2)$$

Si α^v est ergodique, l'algèbre à droite de (4.2) est scalaire. Cela prouve (i) $\Rightarrow$ (iii). Puisque (ii) $\Rightarrow$ (i) est immédiat, il reste seulement à montrer que (iii) $\Rightarrow$ (ii). Soit

$$\mathcal{E} = \{u \in \overline{B^1(\alpha)} \mid M^{\alpha^u} = \mathbb{C}1\}.$$

Nous montrons d'abord que $\mathcal{E}$ est un sous-ensemble G_δ de l'espace polonais $\overline{B^1(\alpha)}$. Pour $u \in \overline{B^1(\alpha)}$ et $x \in M$, posons

$$F_x(u) = \|E_{M^{\alpha^u}}(x)\|_2.$$

L'enveloppe convexe fermée de l'orbite α^u de x a $E_{M^{\alpha^u}}(x)$ comme unique élément de norme minimale.

Par conséquent,

$$F_x(u) = \inf \left\{ \left\| \sum_{j=1}^r t_j \alpha_{g_j}^u(x) \right\|_2 \mid r \geq 1, t_j \geq 0, \sum_j t_j = 1, g_j \in G \right\}.$$

Chaque expression à l'intérieur de l'infimum est continue en u . Donc F_x est semi-continue supérieurement.

Choisissons une suite $(x_n)_n$ $\|\cdot\|_2$ -dense dans la partie centrée de la boule unité de M . Alors nous avons

$$\mathcal{E} = \bigcap_{n,m \geq 1} \{u \in \overline{B^1(\alpha)} \mid F_{x_n}(u) < m^{-1}\}$$

et la semi-continuité supérieure des fonctions F_{x_n} montre que c'est un sous-ensemble G_δ de $\overline{B^1(\alpha)}$.

Maintenant, supposons que la propriété (iii) soit satisfaite. Nous prouvons que $\mathcal{E}$ est dense. Soit

$$\mathcal{C} = \bigcap_{x \in M} \{v \in \overline{B^1(\alpha)} \mid F_x \text{ est continue en } v\}.$$

L'estimation

$$|\|E_{M^{\alpha^v}}(x_n)\|_2 - \|E_{M^{\alpha^v}}(y)\|_2| \leq \|x_n - y\|_2 \quad (4.3)$$

montre que

$$\mathcal{C} = \bigcap_{n \geq 1} \{v \in \overline{B^1(\alpha)} \mid F_{x_n} \text{ est continue en } v\}.$$

Puisqu'une fonction réelle semi-continue supérieurement sur un espace polonais a un ensemble G_δ dense de points de continuité, nous avons que $\mathcal{C}$ est un sous-ensemble G_δ dense de $\overline{B^1(\alpha)}$. Nous allons montrer que $\mathcal{C} \subset \mathcal{E}$.

Prenons $v \in \mathcal{C}$ et posons $\beta = \alpha^v$. Nous voulons montrer que β est ergodique. Puisque α n'est pas pleine, β n'est pas pleine, donc

$$(M^\beta)^\omega \subsetneq M^{\omega, \beta}. \quad (4.4)$$

L'équation (4.2) et la propriété (iii) donnent

$$B(M, \beta) \cap M^\beta = \mathbb{C}1. \quad (4.5)$$

L'algèbre $B(M, \beta)$ est β -invariante. Par conséquent, les espérances conditionnelles sur M^β et $B(M, \beta)$ commutent. Il découle de (4.5) que

$$(M^\beta)^\omega \cap B(M, \beta)^\omega = \mathbb{C}1. \quad (4.6)$$

La Proposition 2.7 donne

$$(M^{\omega, \beta})' \cap M^\omega \subset B(M, \beta)^\omega.$$

En combinant cette inclusion avec (4.6), nous obtenons

$$\mathcal{Z}(M^{\omega, \beta}) \cap (M^\beta)^\omega = \mathbb{C}1. \quad (4.7)$$

Supposons que nous ayons un certain $y \in M^\beta \ominus \mathbb{C}$. Nous affirmons qu'il existe $U \in \mathcal{U}(M^{\omega, \beta})$ tel que

$$UyU^* \notin (M^\beta)^\omega. \quad (4.8)$$

Sinon, l'algèbre de von Neumann

$$D = \{UyU^* \mid U \in \mathcal{U}(M^{\omega, \beta})\}''$$

serait contenue dans $(M^\beta)^\omega$ et invariante sous tout automorphisme intérieur de $M^{\omega, \beta}$. La description standard des sous-algèbres de von Neumann invariantes sous tout automorphisme intérieur donne une projection $e \in \mathcal{Z}(M^{\omega, \beta}) \cap D$ telle que

$$De = M^{\omega, \beta}e, \quad De^\perp \subset \mathcal{Z}(M^{\omega, \beta})e^\perp.$$

L'équation (4.7) force $e = 1$, donc $M^{\omega, \beta} = D$. En particulier, $M^{\omega, \beta} \subset (M^\beta)^\omega$, en contradiction avec (4.4). L'affirmation s'ensuit.

Choisissons U comme dans (4.8), écrivons $U = (u_i)^\omega$, et posons

$$d = \text{dist}_2(UyU^*, (M^\beta)^\omega) > 0.$$

Définissons

$$c_g^{(i)} = u_i^* \beta_g(u_i), \quad q_g^{(i)} = c_g^{(i)} v_g.$$

Alors $q^{(i)} \in \overline{B^1(\alpha)}$ et $q^{(i)} \rightarrow v$ compact-uniformément le long de ω parce que $U \in M^{\omega, \beta}$. De plus,

$$M^{\alpha^{q^{(i)}}} = u_i^* M^\beta u_i$$

et donc

$$\lim_{i \rightarrow \omega} \|E_{M^{\alpha^{q^{(i)}}}}(y)\|_2^2 = \|E_{(M^\beta)^\omega}(UyU^*)\|_2^2 = \|y\|_2^2 - d^2. \quad (4.9)$$

Le membre de gauche est donc strictement plus petit à la limite que sa valeur $\|y\|_2^2$ en v . Cela contredit la continuité de F_y en v . Donc $M^\beta = \mathbb{C}1$. Nous avons montré que $\mathcal{C}$ est contenu dans $\mathcal{E}$. L'ensemble $\mathcal{E}$ est par conséquent dense, ce qui prouve (iii) $\Rightarrow$ (ii). $\square$

4.4. Un théorème d'annulation approchée des 1-cocycles

Théorème 4.8. *Soit $\alpha : G \curvearrowright M$ une action continue sur un facteur de type II_1 , noté M . Supposons que G soit moyennable et que α possède la propriété de Rokhlin. Alors*

$$Z^1(\alpha) = \overline{B^1(\alpha)}.$$

Démonstration. Soit $u \in Z^1(\alpha)$. Sur $N = \mathbb{M}_2(M)$ considérons la perturbation par cocycle

$$\theta_g = \text{Ad} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u_g \end{pmatrix} \circ (\text{id}_{\mathbb{M}_2} \otimes \alpha_g).$$

Ainsi

$$\theta_g \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_g(a) & \alpha_g(b)u_g^* \\ u_g\alpha_g(c) & u_g\alpha_g(d)u_g^* \end{pmatrix}.$$

Sous l'identification canonique

$$N_{\omega,\theta} = 1_{\mathbb{M}_2} \otimes M_{\omega,\alpha},$$

l'action θ_ω correspond à α_ω : le cocycle commute avec tout élément de $M_{\omega,\alpha}$. Ainsi les représentations de Koopman de θ_ω et α_ω coïncident. Le Corollaire 3.16 montre que θ est de Rokhlin.

Puisque G est moyennable, le Théorème 3.17 donne

$$B(N, \theta) = \mathbb{C}1.$$

En particulier, $N^{\omega,\theta}$ est un facteur. Les projections $e_{11}, e_{22} \in N^{\omega,\theta}$ ont la même trace, donc elles sont équivalentes dans ce facteur. Par conséquent, il existe $W \in N^{\omega,\theta}$ tel que

$$W^*W = e_{11}, \quad WW^* = e_{22}.$$

Par suite, $W = e_{21}V$ pour un certain unitaire $V \in M_\alpha^\omega$. L'égalité $\theta_g^\omega(W) = W$ donne

$$u_g\alpha_g^\omega(V) = V,$$

et donc

$$u_g = V\alpha_g^\omega(V^*) \quad (g \in G).$$

Ainsi $u \in B^1(\alpha^\omega)$. La Proposition 4.1 implique que $u \in \overline{B^1(\alpha)}$. L'inclusion réciproque est automatique. $\square$

5. L'action bicentralisatrice duale pour les groupes abéliens

Dans cette section, le groupe localement compact G est supposé abélien, (M, τ) est une algèbre de von Neumann tracielle, et $\alpha : G \curvearrowright (M, \tau)$ est une action continue préservant la trace.

Pour les actions préservant la trace de groupes abéliens localement compacts à spectre de Connes plein, nous prouvons que tout 1-cocycle unitaire est un cobord approché. La preuve compare les

parties fixes des bicentralisateurs analytique et algébrique. Cela donne un analogue de la transitivité de Connes–Størmer [CS78] et définit une action canonique du groupe dual sur le bicentralisateur.

Nous déterminons ensuite les points fixes et les opérateurs propres de cette action bicentralisatrice duale. Les états propres approchés réduisent ces questions à des relations de commutation et d’entrelacement dans l’algèbre originale. En particulier, l’action bicentralisatrice duale est ergodique sur le bicentralisateur d’un facteur, et l’extériorité propre de l’action originale est équivalente au mélange faible de l’action bicentralisatrice duale. Nous relierons aussi la formulation par correspondances de la propriété de Rokhlin aux unitaires propres dans l’algèbre des suites centrales.

Enfin, nous terminons la section par une application de l’action bicentralisatrice duale à la propriété de sous-facteur intermédiaire.

5.1. Annulation approchée des 1-cocycles pour les groupes abéliens

Lemme 5.1. *Soit $\tilde{\tau}$ la trace canonique sur $M \rtimes_{\alpha} G$. Pour $a, b \in M$, l’égalité $E_{b(M, \alpha)}(a) = E_{b(M, \alpha)}(b)$ est vraie si et seulement si*

$$\tilde{\tau}(ahz) = \tilde{\tau}(bhz)$$

pour tout $z \in M' \cap (M \rtimes_{\alpha} G)$ et $h \in L_{\alpha}(G)$ avec $\tilde{\tau}(|h|) < \infty$. Si $a, b \in M^{\alpha}$, il suffit d’exiger ces égalités pour $z \in \mathcal{Z}(M \rtimes_{\alpha} G)$.

Démonstration. Par la Proposition 2.18, nous avons

$$\tilde{\tau}(ahz) = \tilde{\tau}(E_{b(M, \alpha) \rtimes_{\alpha} G}(a)hz).$$

De plus, puisque $a \in M$, nous avons

$$E_{b(M, \alpha) \rtimes_{\alpha} G}(a) = E_{b(M, \alpha)}(a).$$

Par conséquent

$$\tilde{\tau}(ahz) = \tilde{\tau}(bhz)$$

si et seulement si

$$\tilde{\tau}(E_{b(M, \alpha) \rtimes_{\alpha} G}(a)hz) = \tilde{\tau}(E_{b(M, \alpha) \rtimes_{\alpha} G}(a)hz)$$

pour tout $z \in M' \cap (M \rtimes_{\alpha} G)$ et $h \in L_{\alpha}(G)$ avec $\tilde{\tau}(|h|) < \infty$.

La conclusion découle du fait que les fonctionnelles linéaires normales $\tilde{\tau}(hz \cdot)$ pour $h \in L_{\alpha}(G)$ et $z \in M' \cap (M \rtimes_{\alpha} G)$ séparent les points de $b(M, \alpha) \rtimes_{\alpha} G$.

Si $a \in M^{\alpha}$, alors $E_{b(M, \alpha) \rtimes_{\alpha} G}(a) \in b(M, \alpha) \cap M^{\alpha}$. Par conséquent, nous pouvons appliquer la Proposition 2.19 et conclure par le même argument. $\square$

Lemme 5.2. *Prenons $a \in M_{+} \cap M^{\alpha}$ avec $\tau(a) = 1$. Pour tout voisinage $\Omega \subset \hat{G}$ de 1, il existe $\Phi \in \mathbb{B}(L^2(M))_{*}^{+}$ tel que*

$$\begin{aligned} \Phi(\rho_M(x)) &= \tau(ax), \quad (x \in M^{\alpha}), \\ \Phi(\lambda_M(x)) &= \tau(E_{b(M, \alpha)}(a)x), \quad (x \in M^{\alpha}), \\ \Phi(U^{\alpha}(1_{\Omega})) &= 1. \end{aligned}$$

Démonstration. Choisissons un voisinage compact symétrique de l'identité $K \Subset \widehat{G}$ tel que $K \cdot K \subset \Omega$ et définissons une projection $p = u^\alpha(1_K) \in M \rtimes_\alpha G$.

Soit $b = E_{b(M, \alpha)}(a)$. Les éléments positifs $ap = pa$ et $bp = pb$ dans $M \rtimes_\alpha G$ satisfont la relation $\tilde{\tau}(apz) = \tilde{\tau}(bpz)$ pour tout $z \in \mathcal{Z}(M \rtimes_\alpha G)$. Ainsi ap et bp ont la même trace à valeurs dans le centre dans le coin fini $p(M \rtimes_\alpha G)p$. Donc, par un argument classique de maximalité, nous pouvons trouver des isométries partielles v_i dans ce coin et des nombres $\mu_i > 0$ tels que

$$\sum_i \mu_i v_i^* v_i = ap, \quad \sum_i \mu_i v_i v_i^* = bp.$$

Les sommes convergent fortement, et $\sum_i \mu_i \tilde{\tau}(v_i^* v_i) = \mu(K)$. Identifions $L^2(M \rtimes_\alpha G)$ à $L^2(M) \otimes L^2(G)$ et soit

$$\Phi \in \mathbb{B}(L^2(M))_* : T \mapsto \mu(K)^{-1} \sum_{i \in I} \mu_i \langle (T \otimes 1) \widehat{v}_i, \widehat{v}_i \rangle.$$

Prenons $x \in M^\alpha$. En utilisant la relation $\rho_{M \rtimes_\alpha G}(x) = \rho_M(x) \otimes 1$, nous voyons que Φ satisfait

$$\Phi(\rho_M(x)) = \mu(K)^{-1} \sum_{i \in I} \mu_i \tilde{\tau}(v_i^* v_i x) = \mu(K)^{-1} \tilde{\tau}(pax) = \tau(ax).$$

De même, en utilisant la relation $\lambda_{M \rtimes_\alpha G}(x) = \lambda_M(x) \otimes 1$, qui est vraie parce que $x \in M^\alpha$, nous voyons que

$$\Phi(\lambda_M(x)) = \mu(K)^{-1} \sum_{i \in I} \mu_i \tilde{\tau}(x v_i v_i^*) = \mu(K)^{-1} \tilde{\tau}(x b p) = \tau(bx).$$

Il reste à vérifier que

$$\Phi(U^\alpha(1_\Omega)) = 1.$$

Puisque $v_i = p v_i p$ pour tout $i \in I$, le vecteur $\widehat{v}_i$ appartient à l'image des deux projections suivantes

$$\lambda_{M \rtimes_\alpha G}(p) = (1 \otimes \lambda_G)(1_K), \quad \rho_{M \rtimes_\alpha G}(p) = (U^\alpha \otimes \lambda_G)(1_K),$$

d'où

$$\text{Sp}_{1 \otimes \lambda_G}(\widehat{v}_i) \subset K, \quad \text{Sp}_{U^\alpha \otimes \lambda_G}(\widehat{v}_i) \subset K.$$

Alors la règle du produit implique que

$$\text{Sp}_{U^\alpha \otimes 1}(\widehat{v}_i) \subset K^2 \subset \Omega.$$

En particulier, nous avons $\Phi(U^\alpha(1_\Omega)) = 1$. □

Théorème 5.3. *Nous avons $B(M, \alpha) \cap M^\alpha = b(M, \alpha) \cap M^\alpha$.*

Démonstration. Par homogénéité, prenons $a \in M_+ \cap M^\alpha$ avec $\tau(a) = 1$. Pour tout $\Omega \ll \widehat{G}$, prenons un état Φ_Ω comme dans le Lemme 5.2. Soit Φ un point d'accumulation faible* du filet $(\Phi_\Omega)_{\Omega \ll \widehat{G}}$ où nous dirigeons les voisinages de l'identité $\Omega \ll \widehat{G}$ par inclusion inverse. Alors nous avons

$$\Phi(\rho_M(x)) = \tau(ax), \quad (x \in M^\alpha),$$

$$\Phi(\lambda_M(x)) = \tau(E_{b(M, \alpha)}(a)x), \quad (x \in M^\alpha),$$

$$\Phi(U^\alpha(f)) = f(1) \quad (f \in C_0(\widehat{G})).$$

Maintenant, prenons une application ucp $\vartheta \in \text{UCP}(\mathbb{B}(L^2(M)))$ dans l'enveloppe convexe faible*-fermée de $\{\text{Ad}(U_g^\alpha) \mid g \in G\}$ telle que

$$\vartheta(\lambda_M(x)) = \lambda_M(E_{M^\alpha}(x)),$$

$$\vartheta(\rho_M(x)) = \rho_M(E_{M^\alpha}(x)).$$

Alors, après avoir remplacé Φ par $\Phi \circ \vartheta$, et en utilisant le fait que a et $E_{b(M,\alpha)}(a)$ sont dans M^α , nous obtenons

$$\Phi(\rho_M(x)) = \tau(ax), \quad (x \in M),$$

$$\Phi(\lambda_M(x)) = \tau(E_{b(M,\alpha)}(a)x), \quad (x \in M),$$

$$\Phi(U^\alpha(f)) = f(1) \quad (f \in C_0(\widehat{G})).$$

Le Lemme 3.9 donne donc, pour tout $x \in B(M, \alpha)$,

$$\tau(ax) = \Phi(\rho_M(x)) = \Phi(\lambda_M(x)) = \tau(E_{b(M,\alpha)}(a)x).$$

Cela signifie que $E_{B(M,\alpha)}(a) = E_{b(M,\alpha)}(a)$. Si, de plus, $a \in B(M, \alpha)$, le membre de gauche vaut a . En décomposant des éléments fixes arbitraires de $B(M, \alpha)$ en combinaisons linéaires d'éléments positifs, on obtient $B(M, \alpha) \cap M^\alpha \subset b(M, \alpha) \cap M^\alpha$. L'inclusion réciproque découle de $b(M, \alpha) \subset B(M, \alpha)$. $\square$

Corollaire 5.4. *Soit $\alpha : G \curvearrowright M$ une action préservant la trace d'un groupe abélien localement compact, et soit ω un ultrafiltre cofinal suffisamment grand. Deux projections $p, q \in M^\alpha$ sont équivalentes dans $M^{\omega,\alpha}$ si et seulement si*

$$E_{b(M,\alpha)}(p) = E_{b(M,\alpha)}(q).$$

Si $\Gamma(\alpha) = \widehat{G}$, elles sont équivalentes dans $M^{\omega,\alpha}$ si et seulement si elles sont équivalentes dans M .

Démonstration. La preuve du Théorème 5.3 montre que les espérances sur les bicentralisateurs analytique et algébrique coïncident sur M^α . La première assertion découle donc de la Proposition 2.10.

Pour la seconde assertion, par la Proposition 2.19 nous avons

$$E_{b(M,\alpha)}(a) = E_{\mathcal{Z}(M)}(a) \quad (a \in M^\alpha).$$

L'application $E_{\mathcal{Z}(M)}$ est la trace normalisée à valeurs dans le centre de l'algèbre finie M . Par conséquent, la première assertion et le critère de trace à valeurs centrales pour l'équivalence dans M donnent le résultat. $\square$

Corollaire 5.5. *Supposons que $(M^\alpha)' \cap M \subset M^\alpha$. Alors $B(M, \alpha) = b(M, \alpha)$ et si nous supposons que $\Gamma(\alpha) = \widehat{G}$ alors $B(M, \alpha) = \mathbb{C}1$.*

Démonstration. Nous avons

$$B(M, \alpha) \subset (M^\alpha)' \cap M \subset M^\alpha.$$

La Proposition 2.13 donne de même $b(M, \alpha) \subset M^\alpha$. Le Théorème 5.3 donne maintenant $B(M, \alpha) = b(M, \alpha)$. Si $\Gamma(\alpha) = \widehat{G}$, alors la Proposition 2.23 donne $b(M, \alpha) = \mathbb{C}$. $\square$

Le théorème suivant est l'analogue du théorème de transitivité de Connes-Størmer pour les facteurs de type III₁ [CS78]. En fait, on peut adapter notre preuve pour obtenir une nouvelle preuve du théorème de Connes-Størmer. Le Corollaire 5.5 fournit un analogue du résultat principal de Haagerup-Størmer [HS90]. Là encore, notre preuve peut être adaptée pour fournir une preuve unifiée de leur résultat sans désintégration ni distinction de type.

Théorème 5.6. *Soit $\alpha : G \curvearrowright M$ une action préservant la trace d'un groupe abélien localement compact. Si $\Gamma(\alpha) = \widehat{G}$, alors $Z^1(\alpha) = \overline{B^1(\alpha)}$.*

Démonstration. Prenons $v \in Z^1(\alpha)$ et munissons $N = \mathbb{M}_2(\mathbb{C}) \overline{\otimes} M$ de sa trace produit tensoriel normalisée. Définissons

$$\gamma_g = \text{Ad} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & v_g \end{pmatrix} \circ (\text{id} \otimes \alpha_g).$$

L'isomorphisme standard

$$N \rtimes_{\gamma} G \longrightarrow \mathbb{M}_2(\mathbb{C}) \overline{\otimes} (M \rtimes_{\alpha} G)$$

fixe N et envoie son unitaire de groupe canonique en g vers $\text{diag}(u_g, v_g u_g)$. Il entrelace les actions duales. Puisque le centre d'une amplification matricielle est le centre amplifié, nous avons $\Gamma(\gamma) = \Gamma(\alpha) = \widehat{G}$.

Les projections e_{11}, e_{22} appartiennent à N^{γ} et sont équivalentes dans N . Le Corollaire 5.4 donne une isométrie partielle $W \in N^{\omega, \gamma}$ satisfaisant

$$W^*W = e_{11}, \quad WW^* = e_{22}.$$

Écrivons $W = e_{21}V$ avec $V \in \mathcal{U}(M^{\omega})$. Son invariance donne

$$v_g \alpha_g^{\omega}(V) = V, \quad v_g = V \alpha_g^{\omega}(V^*) \quad (g \in G).$$

Le cocycle $g \mapsto \text{diag}(1, v_g)$ est continu, donc la perturbation par cocycle préserve l'ultrapuissance équicontinue. Par conséquent $V \in M_{\alpha}^{\omega}$. La Proposition 4.1 donne maintenant $v \in \overline{B^1(\alpha)}$. $\square$

Nous pouvons maintenant définir l'action bicentralisatrice duale.

Corollaire 5.7. *Supposons que $\Gamma(\alpha) = \widehat{G}$. Alors nous avons une action continue préservant la trace bien définie*

$$\beta : \widehat{G} \curvearrowright \text{B}(M \subset N, \alpha) : p \longmapsto \beta_p$$

pour toute inclusion traciale $M \subset N$. De plus, pour $u \in \overline{B^1(\alpha)}$ et $p \in \widehat{G}$, nous avons

$$\beta_p \circ \beta_u = \beta_u \circ \beta_p.$$

Démonstration. Nous utilisons la Proposition 4.3. Les cocycles scalaires ne changent pas l'action sur M , donc chaque β_p est un automorphisme. Les assertions de composition et de continuité découlent de la Proposition 4.3. Enfin, les cocycles scalaires commutent avec u , et donc

$$\beta_p \circ \beta_u = \beta_{pu} = \beta_{up} = \beta_u \circ \beta_p.$$

$\square$

5.2. États propres approchés pour les groupes abéliens localement compacts

Dans toute cette sous-section, soit G un groupe abélien localement compact et soit $U : G \rightarrow \mathcal{U}(H)$ une représentation unitaire fortement continue. Aucune hypothèse de dénombrabilité n'est imposée sur G .

Nous écrivons

$$U : C_0(\widehat{G}) \longrightarrow \mathbb{B}(H)$$

pour la représentation spectrale correspondante. Nous utilisons la convention de Fourier

$$U_g = \int_{\widehat{G}} \overline{p(g)} dE(p), \quad U(\widehat{f}) = \int_G f(g) U_g dg \quad (f \in L^1(G)).$$

Définition 5.8. Pour $p \in \widehat{G}$ et $f \in C_0(\widehat{G})$, définissons le translaté à gauche $L_p f \in C_0(\widehat{G})$ par

$$(L_p f)(q) = f(pq) \quad (q \in \widehat{G}).$$

Lemme 5.9. Pour tout voisinage V de 1 dans $\widehat{G}$, il existe une densité de probabilité non négative $h \in L^1(G)$ telle que

$$\inf_{q \notin V} |1 - \widehat{h}(q)| > 0. \quad (5.1)$$

Démonstration. Choisissons un ensemble compact $K \subset G$ et $\delta > 0$ tels que

$$\left\{ q \in \widehat{G} \mid \sup_{g \in K} |q(g) - 1| < \delta \right\} \subset V.$$

Soit $H < G$ le sous-groupe ouvert σ -compact engendré par un voisinage de l'identité relativement compact. L'image de K dans le groupe discret G/H est finie. En adjoignant un nombre fini de représentants, on obtient un sous-groupe ouvert σ -compact G_0 qui contient K . Prenons une densité de probabilité qui est positive presque partout sur G_0 et nulle hors de G_0 . Sa transformée de Fourier est égale à un précisément sur $G_0^\perp$. Puisque $G_0^\perp \subset V$ et que la transformée de Fourier s'annule à l'infini, la compacité donne (5.1). $\square$

Définition 5.10. Pour une mesure de probabilité de Radon μ sur G , notons

$$\sigma_\mu(T) = \int_G U_g T U_g^* d\mu(g)$$

l'application normale intégrée sur $\mathbb{B}(H)$. Un état Φ sur $\mathbb{B}(H)$ est dit *fortement* $\text{Ad}(U)$ -invariant lorsque $\Phi \circ \sigma_\mu = \Phi$ pour toute mesure de probabilité de Radon μ sur G .

Définition 5.11. Un état Φ sur $\mathbb{B}(H)$ est un *état propre* U -approché s'il existe des vecteurs unitaires $\xi_i \in H$ et des caractères $p_i \in \widehat{G}$ tels que

$$\Phi = \text{w}^* \text{-} \lim_i \langle \cdot, \xi_i \rangle$$

et

$$\lim_i \sup_{g \in K} \|U_g \xi_i - p_i(g) \xi_i\| = 0 \quad (K \Subset G). \quad (5.2)$$

Lemme 5.12. *Soit Φ représenté par des vecteurs unitaires $\xi_i \in H$ et des caractères $p_i \in \widehat{G}$ comme dans la Définition 5.11, et soit E la mesure spectrale de U . Alors Φ est un état propre U -approché si et seulement si*

$$\lim_i \|E(p_i^{-1}V)\xi_i - \xi_i\| = 0$$

pour tout voisinage V de $1 \in \widehat{G}$. En particulier,

$$\lim_i \|U(L_{p_i}f)\xi_i - f(1)\xi_i\| = 0 \quad (f \in C_0(\widehat{G})). \quad (5..3)$$

Démonstration. La localisation spectrale implique (5.2) en choisissant un voisinage de l'identité sur lequel les caractères sont uniformément proches de un sur un sous-ensemble compact prescrit de G . Réciproquement, fixons V et choisissons h comme dans le Lemme 5.9. Posons

$$A_i = \int_G h(g) \overline{p_i(g)} U_g \, dg.$$

L'approximation compacte-uniforme et la tension de $h(g) \, dg$ donnent $\|(A_i - 1)\xi_i\| \rightarrow 0$. Le multiplicateur spectral de $A_i - 1$ en $q \in \widehat{G}$ est $\widehat{h}(p_i q) - 1$. Sur le complémentaire de $p_i^{-1}V$, son module est minoré par la constante de (5.1). D'où $\|(1 - E(p_i^{-1}V))\xi_i\| \rightarrow 0$. Cela prouve l'équivalence, et le calcul fonctionnel continu donne (5.3). $\square$

Proposition 5.13. *Un état sur $\mathbb{B}(H)$ est fortement $\text{Ad}(U)$ -invariant si et seulement s'il appartient à l'enveloppe convexe faible*-fermée des états propres U -approchés.*

Démonstration. C'est la version localement compacte abélienne du théorème des états propres approchés de [Ma20, Théorème 3.2]. Nous donnons l'argument parce que la caractérisation spectrale du Lemme 5.12 remplace les translations d'un générateur auto-adjoint.

Un état propre approché est fortement invariant. En effet, la Définition 5.11 montre que les états vectoriels correspondants sont asymptotiquement invariants en norme, uniformément sur les sous-ensembles compacts de G . Toute mesure de probabilité de Radon sur G est tendue, donc il en va de même après intégration contre toute mesure de probabilité de Radon. L'invariance forte est préservée par les combinaisons convexes et les limites faible*.

Réciproquement, soit Φ fortement invariant. Choisissons un filet de Reiter de densités de probabilité $h_i \in L^1(G)$. Les états normaux sont faible* denses dans l'espace des états de $\mathbb{B}(H)$. Pour chaque i , approchons Φ par des états normaux et composons-les avec σ_{h_i} . Un filet diagonal des états normaux résultants Φ_i converge faible* vers Φ parce que $\Phi \circ \sigma_{h_i} = \Phi$. La propriété de Reiter donne

$$\sup_{g \in K} \|\Phi_i - \Phi_i \circ \text{Ad}(U_g)\| \longrightarrow 0 \quad (K \Subset G).$$

Soit d_i la densité de Φ_i et regardons $\zeta_i = d_i^{1/2}$ comme un vecteur unitaire dans

$$\text{HS}(H) = H \otimes \overline{H}.$$

L'inégalité de Powers–Størmer montre que $(\zeta_i)_i$ est presque invariant, uniformément sur les ensembles compacts, pour

$$W_g = U_g \otimes \overline{U_g}.$$

Pour $h \in L^1(G)$, nous utilisons la notation intégrée $W(h) = \int_G h(g)W_g dg$.

Supposons qu'un opérateur auto-adjoint $T \in \mathbb{B}(H)$ satisfasse $\Psi(T) \leq 0$ pour tout état propre U -approché Ψ . Fixons $\varepsilon > 0$. Il existe un voisinage symétrique V de $1 \in \widehat{G}$ tel que

$$E(pV)TE(pV) \leq \varepsilon E(pV) \quad (p \in \widehat{G}). \quad (5.4)$$

Sinon, en dirigeant les voisinages de l'identité par inclusion inverse, nous pourrions trouver $p_V \in \widehat{G}$ et un vecteur unitaire $\xi_V \in E(p_V V)H$ avec $\langle T\xi_V, \xi_V \rangle > \varepsilon$. Tout point d'accumulation faible* des états vectoriels correspondants serait un état propre U -approché de caractères propres approchés p_V^{-1} , ce qui est une contradiction.

Posons $c = \|T\| + \|T\|^2/\varepsilon$. L'estimation usuelle par blocs 2×2 appliquée à (5.4) donne

$$T \leq 2\varepsilon 1 + c(1 - E(pV)) \quad (p \in \widehat{G}).$$

En appliquant le théorème spectral au second facteur tensoriel, on obtient

$$T \otimes 1 \leq 2\varepsilon 1 + cQ_V, \quad (5.5)$$

où Q_V est la projection spectrale de W associée à $\widehat{G} \setminus V$. L'invariance approchée de ζ_i implique $\|Q_V \zeta_i\| \rightarrow 0$. Pour le voir directement, choisissons une densité de probabilité non négative h comme dans le Lemme 5.9. Puisque $\|W(h)\zeta_i - \zeta_i\| \rightarrow 0$, le théorème spectral donne la convergence annoncée.

Il découle de (5.5) que

$$\Phi(T) = \lim_i \langle (T \otimes 1)\zeta_i, \zeta_i \rangle \leq 2\varepsilon.$$

En faisant tendre ε vers zéro et en appliquant la séparation de Hahn–Banach, on prouve que Φ appartient à l'enveloppe convexe faible*-fermée des états propres U -approchés. $\square$

Lemme 5.14. *Soit $S \subset \mathbb{B}(H)$ un sous-espace. Supposons que, pour tout $p \in \widehat{G}$, il existe une application complètement positive uniale $\vartheta_p : \mathbb{B}(H) \rightarrow \mathbb{B}(H)$ telle que*

$$\vartheta_p|_S = \text{id}_S, \quad \vartheta_p(U(f)) = U(L_p f) \quad (f \in C_0(\widehat{G})).$$

Si Φ est un état fortement $\text{Ad}(U)$ -invariant sur $\mathbb{B}(H)$, alors il existe un état $\tilde{\Phi}$ sur $\mathbb{B}(H)$ tel que

$$\tilde{\Phi}|_S = \Phi|_S, \quad \tilde{\Phi}(U(f)) = f(1) \quad (f \in C_0(\widehat{G})).$$

Démonstration. Supposons d'abord que Φ soit un état propre U -approché et choisissons ξ_i et p_i comme dans la Définition 5.11. Tout point d'accumulation faible* des états

$$T \longmapsto \langle \vartheta_{p_i}(T)\xi_i, \xi_i \rangle$$

coïncide avec Φ sur S . Le Lemme 5.12, précisément (5.3), montre que sa restriction à $U(C_0(\widehat{G}))$ est l'évaluation au caractère trivial.

L'ensemble des états pour lesquels un tel état centré existe est faible* fermé et convexe. La Proposition 5.13 donne donc la conclusion pour tout état fortement invariant. $\square$

5.3. Points fixes de l'action bicentralisatrice duale

Dans toute cette sous-section, soit G un groupe abélien localement compact, soit $(M, \tau) \subset (N, \tau)$ une inclusion d'algèbres de von Neumann traciales, et soit $\alpha : G \curvearrowright (M, \tau)$ une action continue préservant la trace. Nous supposons que $\Gamma(\alpha) = \widehat{G}$. Par le Corollaire 5.7, nous avons une action bicentralisatrice duale continue préservant la trace

$$\beta : \widehat{G} \curvearrowright B(M \subset N, \alpha).$$

Notre objectif est de prouver que son algèbre des points fixes est $M' \cap N$. Aucune extension de α à N ne sera utilisée.

Soit $E_M : N \rightarrow M$ l'espérance conditionnelle préservant la trace, soient λ_M, ρ_M et λ_N, ρ_N les représentations standard gauche et droite de M et N , respectivement, et soit

$$V : L^2(M) \longrightarrow L^2(N), \quad V\hat{x} = \hat{x} \quad (x \in M),$$

l'isométrie canonique. Pour tout $x \in M$, nous avons

$$V\lambda_M(x) = \lambda_N(x)V, \quad V\rho_M(x) = \rho_N(x)V,$$

tandis que, pour tout $x \in N$,

$$V^*\lambda_N(x)V = \lambda_M(E_M(x)), \quad V^*\rho_N(x)V = \rho_M(E_M(x)).$$

Pour $a, b \in N$, posons

$$\Lambda(a, b) = V^*\lambda_N(a)\rho_N(b)V \in \mathbb{B}(L^2(M)).$$

Ainsi

$$\Lambda(x, 1) = \lambda_M(E_M(x)), \quad \Lambda(1, x) = \rho_M(E_M(x)) \quad (x \in N).$$

Nous désignons par U^α la mise en œuvre standard de α sur $L^2(M)$ et par $U^\alpha(f)$ sa représentation spectrale intégrée pour $f \in C_0(\widehat{G})$.

Nous enregistrons d'abord la version comprimée de l'argument d'implémentation binormale.

Lemme 5.15. *Soit Φ un état sur $\mathbb{B}(L^2(M))$ tel que*

$$\Phi \circ \lambda_M = \tau, \quad \Phi \circ \rho_M = \tau,$$

et

$$\Phi(U^\alpha(f)) = f(1) \quad (f \in C_0(\widehat{G})). \quad (5..6)$$

Alors

$$\Phi(\Lambda(x, y)) = \tau(xy) \quad (5..7)$$

pour tout $x \in B(M \subset N, \alpha)$ et $y \in N$.

Démonstration. La preuve est similaire à celle du Lemme 3.9. Le théorème d'implémentation dans les ultrapuissances traciales [Ma25, Théorème 2.1] donne une algèbre de von Neumann abélienne traciale A , un ultrafiltre cofinal ω , et un vecteur unitaire

$$\xi \in L^2((A \overline{\otimes} M)^\omega)$$

tel que

$$\Phi(T) = \langle (1 \otimes T)^\omega \xi, \xi \rangle \quad (T \in \mathbb{B}(L^2(M))). \quad (5..8)$$

Exactement comme dans la preuve du Lemme 3.9, nous obtenons

$$(1 \otimes x)\xi = \xi(1 \otimes x) \quad (x \in B(M \subset N, \alpha)). \quad (5..9)$$

Maintenant, pour $x \in B(M \subset N, \alpha)$ et $y \in N$, les formules (5.8) et (5.9) donnent

$$\begin{aligned} \Phi(\Lambda(x, y)) &= \langle (1 \otimes \lambda_N(x) \rho_N(y))^\omega \xi, \xi \rangle \\ &= \langle (1 \otimes x)\xi(1 \otimes y), \xi \rangle \\ &= \langle \xi(1 \otimes xy), \xi \rangle \\ &= \Phi(V^* \rho_N(xy) V) = \Phi(\rho_M(E_M(xy))) = \tau(xy). \end{aligned}$$

□

Lemme 5.16. *Pour tout $p \in \widehat{G}$, il existe une application complètement positive unitale*

$$\theta_p : \mathbb{B}(L^2(M)) \longrightarrow \mathbb{B}(L^2(M))$$

telle que, pour $a, b \in N$ et $f \in C_0(\widehat{G})$,

$$\theta_p(\Lambda(a, b)) = \Lambda(\beta_p(E_{B(M \subset N, \alpha)}(a)), b), \quad (5..10)$$

$$\theta_p(U^\alpha(f)) = U^\alpha(L_{p^{-1}} f). \quad (5..11)$$

Il existe aussi une application complètement positive unitale

$$\Pi : \mathbb{B}(L^2(M)) \longrightarrow \mathbb{B}(L^2(M))$$

telle que

$$\Pi(\Lambda(a, z)) = \Lambda(E_{B(M \subset N, \alpha)^\beta}(a), z), \quad (5..12)$$

$$\begin{aligned} \Pi(\Lambda(z, b)) &= \Lambda(z, E_{B(M \subset N, \alpha)^\beta}(b)), \\ \Pi(U^\alpha(f)) &= U^\alpha(f). \end{aligned} \quad (5..13)$$

pour tous $a, b \in N$ et $z \in B(M \subset N, \alpha)^\beta$.

Démonstration. Nous construisons d'abord une application complètement positive unitale $\zeta : \mathbb{B}(L^2(M)) \rightarrow \mathbb{B}(L^2(M))$ satisfaisant

$$\zeta(\Lambda(a, b)) = \Lambda(E_{B(M \subset N, \alpha)}(a), b), \quad \zeta(U^\alpha(f)) = U^\alpha(f). \quad (5..14)$$

Fixons un ultrafiltre cofinal ω sur un ensemble dirigé suffisamment grand et posons

$$P = M^{\omega, \alpha}, \quad Q = P' \cap N^{\omega}.$$

Soit $E_Q : N^{\omega} \rightarrow Q$ l'espérance conditionnelle préservant la trace et soit $E^{\omega} : N^{\omega} \rightarrow N$ l'espérance canonique. La Proposition 2.7 donne $Q \subset B(M \subset N, \alpha)^{\omega}$. Puisque tout élément constant de $B(M \subset N, \alpha)$ appartient à Q , nous avons

$$E^{\omega} \circ E_Q|_N = E_{B(M \subset N, \alpha)}. \quad (5..15)$$

Le théorème de Dixmier relatif place E_Q dans la fermeture ponctuelle- $\|\cdot\|_2$ des combinaisons convexes finies de $\text{Ad}(v)$ avec $v \in \mathcal{U}(P)$. En relevant les unitaires en nombre fini et en sélectionnant des coordonnées, on obtient des moyennes convexes finies

$$F_i(a) = \sum_{j=1}^{n_i} t_{i,j} v_{i,j} a v_{i,j}^*, \quad v_{i,j} \in \mathcal{U}(M),$$

qui convergent ponctuellement-faible* vers $E_{B(M \subset N, \alpha)}$ et satisfont

$$\max_{1 \leq j \leq n_i} \sup_{g \in K} \|\alpha_g(v_{i,j}) - v_{i,j}\|_2 \longrightarrow 0 \quad (K \Subset G). \quad (5..16)$$

Considérons

$$\zeta_i(T) = \sum_{j=1}^{n_i} t_{i,j} \lambda_M(v_{i,j}) T \lambda_M(v_{i,j}^*) \quad (T \in \mathbb{B}(L^2(M))).$$

Les relations d'entrelacement pour V donnent

$$\zeta_i(\Lambda(a, b)) = \Lambda(F_i(a), b).$$

De plus,

$$\lambda_M(v_{i,j}) U_g^{\alpha} \lambda_M(v_{i,j}^*) = \lambda_M(v_{i,j} \alpha_g(v_{i,j}^*)) U_g^{\alpha}.$$

L'équation (5.16), suivie de l'intégration contre $L^1(G)$, montre que tout point d'accumulation ponctuel-faible* de $(\zeta_i)_i$ satisfait (5.14).

Fixons $p \in \widehat{G}$. Par le Corollaire 5.7, le cocycle scalaire p est un cobord approché. Choisissons un filet $(w_i)_i$ dans $\mathcal{U}(M)$ tel que

$$\sup_{g \in K} \|w_i \alpha_g(w_i^*) - p(g)1\|_2 \longrightarrow 0 \quad (K \Subset G). \quad (5..17)$$

Un point d'accumulation ponctuel-faible* des applications

$$T \longmapsto \lambda_M(w_i) \zeta(T) \lambda_M(w_i^*)$$

est une application θ_p satisfaisant (5.10). La formule unitaire approchée de la Proposition 4.3 identifie la première entrée avec β_p . L'équation (5.17) donne

$$\lambda_M(w_i) U_g^{\alpha} \lambda_M(w_i^*) \longrightarrow p(g) U_g^{\alpha}$$

fortement, uniformément pour g dans les ensembles compacts. Sous la convention de Fourier choisie, la multiplication par $p(g)$ remplace la variable spectrale q par $p^{-1}q$. L'intégration donne donc (5.11).

Soient J_M et J_N les conjugaisons canoniques sur $L^2(M)$ et $L^2(N)$, respectivement, et définissons

$$\theta'_p(T) = J_M \theta_p(J_M T J_M) J_M.$$

En utilisant $J_N V = V J_M$, on obtient

$$\theta'_p(\Lambda(a, b)) = \Lambda\left(a, \beta_p(E_{B(M \subset N, \alpha)}(b))\right), \quad \theta'_p(U^\alpha(f)) = U^\alpha(L_p f).$$

Par conséquent, $\Theta_p = \theta_p \circ \theta'_p$ satisfait

$$\begin{aligned} \Theta_p(\Lambda(a, b)) &= \Lambda\left(\beta_p(E_{B(M \subset N, \alpha)}(a)), \beta_p(E_{B(M \subset N, \alpha)}(b))\right), \\ \Theta_p(U^\alpha(f)) &= U^\alpha(f). \end{aligned}$$

Choisissons une moyenne invariante à gauche m sur $\ell^\infty(\hat{G})$ et définissons Π par

$$\langle \Pi(T)\xi, \eta \rangle = m\left(p \mapsto \langle \Theta_p(T)\xi, \eta \rangle\right).$$

La moyenne invariante appliquée aux coefficients matriciels de β donne l'espérance préservant la trace sur son algèbre des points fixes. Si une entrée de $\Lambda(a, b)$ appartient à $B(M \subset N, \alpha)^\beta$, la formule ci-dessus pour Θ_p est linéaire en la seule orbite non constante. La moyenne donne donc (5.12). La formule pour $U^\alpha(f)$ donne (5.13). $\square$

Lemme 5.17. *Il existe un état fortement $\text{Ad}(U^\alpha)$ -invariant Φ_0 sur $\mathbb{B}(L^2(M))$ tel que*

$$\Phi_0(\Lambda(a, b)) = \tau(E_{M' \cap N}(a)b) \quad (a, b \in N), \quad (5.18)$$

où $E_{M' \cap N} : N \rightarrow M' \cap N$ est l'espérance conditionnelle préservant la trace.

Démonstration. Prenons $K \subseteq G$ et $\varepsilon > 0$. Puisque G est moyennable, nous pouvons prendre μ une mesure de probabilité sur G absolument continue par rapport à la mesure de Haar et telle que

$$\sup_{k \in K} \|\mu(k^{-1} \cdot) - \mu\|_1 \leq \varepsilon.$$

Considérons le plongement

$$\pi : M \rightarrow L^\infty(G, \mu) \overline{\otimes} N$$

qui envoie $x \in M$ sur $g \mapsto \alpha_g(x)$. Observons que

$$\pi(M)' \cap (L^\infty(G, \mu) \overline{\otimes} N) = L^\infty(G, \mu) \overline{\otimes} (M' \cap N)$$

De plus, l'espérance conditionnelle préservant $\mu \otimes \tau$ sur ce commutant relatif est $\text{id} \otimes E_{M' \cap N}$. En appliquant l'argument de convexité hilbertienne usuel à cette inclusion, pour tout ensemble fini

$F \subset N$, nous obtenons des unitaires $u_1, \dots, u_n \in \mathcal{U}(M)$ et des nombres $t_1, \dots, t_n \geq 0$ avec $\sum_i t_i = 1$ tels que

$$\sum_{a \in F} \left\| 1 \otimes E_{M' \cap N}(a) - \sum_{i=1}^n t_i \pi(u_i) (1 \otimes a) \pi(u_i)^* \right\|_{\mu \otimes \tau}^2 < \varepsilon$$

ou de manière équivalente

$$\sum_{a \in F} \int_G \left\| E_{M' \cap N}(a) - \sum_{i=1}^n t_i \alpha_g(u_i) a \alpha_g(u_i)^* \right\|_2^2 d\mu(g) < \varepsilon. \quad (5..19)$$

Pour ces données, définissons un état normal sur $\mathbb{B}(L^2(M))$ par

$$\Phi_{K,F,\varepsilon}(T) = \int_G \sum_{i=1}^n t_i \left\langle T \widehat{\alpha_g(u_i)^*}, \widehat{\alpha_g(u_i)^*} \right\rangle d\mu(g). \quad (5..20)$$

Alors nous avons

$$\Phi_{\mu,F,\varepsilon}(V^* \lambda_N(a) \rho_N(b) V) = \int_G \sum_{i=1}^n t_i \tau(\alpha_g(u_i) a \alpha_g(u_i)^* b) d\mu(g). \quad (5..21)$$

Il découle de (5..19) et (5..21) que tout point d'accumulation faible* Φ_0 du filet $\Phi_{K,F,\varepsilon}$ sur l'ensemble dirigé de tous les triplets (K, F, ε) satisfait (5..18).

De plus, pour $k \in K$, composer l'état dans (5..20) avec $\text{Ad}(U_k^\alpha)$ ne fait que traduire la mesure μ . Par conséquent,

$$\|\Phi_{K,F,\varepsilon} \circ \text{Ad}(U_k^\alpha) - \Phi_{K,F,\varepsilon}\| \leq \|\mu(k^{-1} \cdot) - \mu\|_1 \leq \varepsilon. \quad (5..22)$$

L'estimation est uniforme pour k dans les sous-ensembles compacts. La tension des mesures de probabilité de Radon donne alors la même convergence après intégration contre toute mesure de probabilité de Radon sur G . Le point d'accumulation Φ_0 est donc fortement $\text{Ad}(U^\alpha)$ -invariant et possède toutes les propriétés requises. $\square$

Théorème 5.18. *L'algèbre des points fixes de l'action bicentralisatrice duale relative est le commutant relatif :*

$$B(M \subset N, \alpha)^\beta = M' \cap N.$$

Démonstration. Tout élément de $M' \cap N$ appartient à $B(M \subset N, \alpha)$. Si $p \in \widehat{G}$ et $(w_i)_i$ satisfait (5..17), la formule unitaire approchée donne

$$\beta_p(d) = \lim_i w_i d w_i^* = d \quad (d \in M' \cap N).$$

Ainsi

$$M' \cap N \subset B(M \subset N, \alpha)^\beta.$$

Soit Φ_0 l'état du Lemme 5.17, et soit $\mathcal{S}$ le sous-espace linéaire

$$\left\{ \Lambda(z, a) \mid z \in B(M \subset N, \alpha)^\beta, a \in N \right\}.$$

Les équations (5..10) et (5..11) montrent que chaque $\theta_{p^{-1}}$ fixe $\mathcal{S}$ point par point et envoie $U^\alpha(f)$ sur $U^\alpha(L_p f)$. Le Lemme 5.14 donne un état Φ_1 sur $\mathbb{B}(L^2(M))$ qui coïncide avec Φ_0 sur $\mathcal{S}$ et satisfait

$$\Phi_1(U^\alpha(f)) = f(1) \quad (f \in C_0(\widehat{G})).$$

En particulier,

$$\Phi_1(\Lambda(z, a)) = \tau(E_{M' \cap N}(z)a) \quad (5..23)$$

pour $z \in B(M \subset N, \alpha)^\beta$ et $a \in N$.

Soit Π l'application du Lemme 5.16 et posons $\Phi_2 = \Phi_1 \circ \Pi$. Pour $a \in M$, les équations (5..12) et (5..23) donnent

$$\begin{aligned} \Phi_2(\lambda_M(a)) &= \Phi_1(\Lambda(E_{B(M \subset N, \alpha)^\beta}(a), 1)) \\ &= \tau(E_{M' \cap N}(E_{B(M \subset N, \alpha)^\beta}(a))) \\ &= \tau(a), \\ \Phi_2(\rho_M(a)) &= \Phi_1(\Lambda(1, E_{B(M \subset N, \alpha)^\beta}(a))) = \tau(E_{B(M \subset N, \alpha)^\beta}(a)) = \tau(a). \end{aligned}$$

L'équation (5..13) donne aussi

$$\Phi_2(U^\alpha(f)) = f(1) \quad (f \in C_0(\widehat{G})).$$

Le Lemme 5.15 donne maintenant

$$\Phi_2(\Lambda(x, a)) = \tau(xa) \quad (x \in B(M \subset N, \alpha), a \in N). \quad (5..24)$$

Fixons $z \in B(M \subset N, \alpha)^\beta$. Puisque $E_{B(M \subset N, \alpha)^\beta}(z) = z$, la formule (5..12) donne, pour tout $a \in N$,

$$\begin{aligned} \tau(za) &= \Phi_2(\Lambda(z, a)) \\ &= \Phi_1(\Lambda(z, E_{B(M \subset N, \alpha)^\beta}(a))) \\ &= \tau(E_{M' \cap N}(z)E_{B(M \subset N, \alpha)^\beta}(a)) = \tau(E_{M' \cap N}(z)a). \end{aligned}$$

La dernière égalité utilise $E_{M' \cap N}(z) \in M' \cap N \subset B(M \subset N, \alpha)^\beta$. En prenant $a = (z - E_{M' \cap N}(z))^*$, on obtient $z = E_{M' \cap N}(z) \in M' \cap N$. Cela prouve l'inclusion réciproque. $\square$

Théorème 5.19. *Prenons $g \in G$ et $x \in N$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $x \in B(M \subset N, \alpha)$ et $\beta_p(x) = p(g)x$ pour tout $p \in \widehat{G}$.
2. $xy = \alpha_g(y)x$ pour tout $y \in M$.

En conséquence, la partie presque périodique de

$$\beta : \widehat{G} \curvearrowright B(M \subset N, \alpha)$$

est contenue dans $b(M \subset N, \alpha)$.

Démonstration. Supposons d'abord que (ii) soit vraie. Pour tout filet $(v_i)_i$ asymptotiquement α -invariant dans $\mathcal{U}(M)$, on a

$$\|v_i x - x v_i\|_2 = \|(v_i - \alpha_g(v_i))x\|_2 \longrightarrow 0.$$

Ainsi $x \in B(M \subset N, \alpha)$. Si $(w_i)_i$ implémente approximativement un caractère $p \in \widehat{G}$, alors

$$w_i x w_i^* = w_i \alpha_g(w_i^*) x \longrightarrow p(g)x,$$

ce qui donne $\beta_p(x) = p(g)x$ et prouve (i).

Réciproquement, supposons (i). Définissons un plongement préservant la trace

$$\theta : M \longrightarrow M_2(N), \quad \theta(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \alpha_g(a) \end{pmatrix}.$$

Puisque G est abélien, la formule

$$\gamma_h(\theta(a)) = \theta(\alpha_h(a)) \quad (h \in G, a \in M)$$

définit une action continue préservant la trace sur $\theta(M)$. Les systèmes (M, α) et $(\theta(M), \gamma)$ sont isomorphes de manière équivariante, donc $\Gamma(\gamma) = \Gamma(\alpha) = \widehat{G}$. Posons

$$C = B(\theta(M) \subset M_2(N), \gamma)$$

et notons $\tilde{\beta}$ son action bicentralisatrice duale relative.

Considérons la matrice du coin inférieur gauche

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & 0 \end{pmatrix} \in M_2(N).$$

Nous affirmons que $X \in C$. En effet, pour $u \in \mathcal{U}(M)$,

$$[\theta(u), X] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_g(u)x - xu & 0 \end{pmatrix}.$$

Si $\theta(u)$ est suffisamment γ -invariant sur un ensemble compact contenant g , alors u est suffisamment α -invariant sur le même ensemble compact. Donc $\alpha_g(u) - u$ est petit en $\|\cdot\|_2$, tandis que la définition de $B(M \subset N, \alpha)$ rend $ux - xu$ petit. Puisque

$$\alpha_g(u)x - xu = (\alpha_g(u) - u)x + (ux - xu),$$

l'affirmation s'ensuit.

Fixons $p \in \widehat{G}$ et choisissons un filet $(w_i)_i$ dans $\mathcal{U}(M)$ tel que

$$w_i \alpha_h(w_i^*) \longrightarrow p(h)1$$

en $\|\cdot\|_2$, uniformément pour h dans les sous-ensembles compacts de G . Les unitaires $\theta(w_i)$ implémentent p approximativement pour γ . La formule unitaire approchée et l'hypothèse de vecteur propre donnent

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_p(X) &= \lim_i \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_g(w_i)xw_i^* & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \overline{p(g)}p(g)x & 0 \end{pmatrix} = X. \end{aligned}$$

Ici nous avons utilisé $\alpha_g(w_i)w_i^* \rightarrow \overline{p(g)}1$ et $w_i x w_i^* \rightarrow \beta_p(x) = p(g)x$ en $\|\cdot\|_2$. Ainsi $X \in C^{\tilde{\beta}}$. Le Théorème 5.18 donne

$$X \in \theta(M)' \cap M_2(N).$$

En comparant les coins inférieurs gauches dans $X\theta(y) = \theta(y)X$, on obtient

$$xy = \alpha_g(y)x \quad (y \in M),$$

comme requis. □

Corollaire 5.20. *Supposons que $N = M$ et que M soit un facteur. Alors α est extérieur si et seulement si l'action bicentralisatrice duale*

$$\beta : \widehat{G} \curvearrowright B(M, \alpha)$$

est faiblement mélangeante.

Démonstration. Le Théorème 5.18 donne $B(M, \alpha)^\beta = \mathbb{C}1$. Pour une action ergodique préservant la trace, les valeurs absolues d'un vecteur propre L^2 sont scalaires, donc tout vecteur propre non nul est un multiple scalaire d'un unitaire dans l'algèbre. Puisque $\widehat{G}$ est abélien, le mélange faible est donc équivalent à l'absence d'opérateurs propres non scalaires. Par le Théorème 5.19, un opérateur propre en $g \neq e$ existe exactement lorsque α_g est intérieur. Sur un facteur, c'est précisément l'obstruction à l'extériorité propre. $\square$

Corollaire 5.21. *Supposons que M_1 et M_2 soient des facteurs traciaux et que*

$$(M, \tau) = (M_1 \overline{\otimes} M_2, \tau_1 \otimes \tau_2), \quad \alpha = \alpha_1 \otimes_G \alpha_2$$

pour des actions continues préservant la trace $\alpha_i : G \curvearrowright (M_i, \tau_i)$ satisfaisant $\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha_1) = \Gamma(\alpha_2) = \widehat{G}$. Alors α est extérieur si et seulement si

$$B(M, \alpha) = \mathbb{C}1.$$

Démonstration. Soit $\beta : \widehat{G} \curvearrowright B(M, \alpha)$ le flot bicentralisateur de α . Pour $i \in \{1, 2\}$, notons $\beta^{(i)} : \widehat{G} \curvearrowright B(M_i, \alpha_i)$ le flot bicentralisateur dual de α_i . La Proposition 4.4 donne

$$B(M, \alpha) \subset B(M_1, \alpha_1) \overline{\otimes} B(M_2, \alpha_2)$$

et

$$\beta_p(x) = (\beta_p^{(1)} \otimes \text{id})(x) = (\text{id} \otimes \beta_p^{(2)})(x), \quad (p \in \widehat{G}).$$

En particulier,

$$(\beta_p^{(1)} \otimes \beta_{p^{-1}}^{(2)})(x) = x \quad (x \in B(M, \alpha)).$$

Cela montre que $B(M, \alpha)$ est contenu dans le produit tensoriel des parties presque périodiques de $\beta^{(1)}$ et $\beta^{(2)}$. En particulier, β est presque périodique. Par le Corollaire 5.20, si α est proprement extérieur, β doit être faiblement mélangeant. Nous concluons que $B(M, \alpha)$ doit être trivial.

Réciproquement, si $B(M, \alpha) = \mathbb{C}1$, alors β est faiblement mélangeant. Le même corollaire implique donc que α est proprement extérieur. $\square$

5.4. Propriété de sous-facteur intermédiaire

Soit G un groupe abélien localement compact et soit $\alpha : G \curvearrowright (M, \tau)$ une action continue préservant la trace sur un facteur de type II_1 . Nous désignons par $(u_g)_{g \in G}$ la représentation implémentante canonique dans

$$P = M \rtimes_\alpha G$$

et posons

$$L_\alpha(G) = \{u_g \mid g \in G\}'' \subset P.$$

L'espérance conditionnelle normale fidèle canonique $E_{L_\alpha(G)} : P \rightarrow L_\alpha(G)$ est caractérisée, sur les intégrales de Fourier à support compact, par

$$E_{L_\alpha(G)} \left(\int_G x(g) u_g dg \right) = \int_G \tau(x(g)) u_g dg. \quad (5..25)$$

Théorème 5.22. *Supposons que α soit strictement extérieur et que $B(M, \alpha) = \mathbb{C}1$. Si N est un facteur intermédiaire*

$$M \subset N \subset M \rtimes_\alpha G,$$

alors il existe un sous-groupe fermé $H < G$ tel que

$$N = M \rtimes_{\alpha|_H} H.$$

Démonstration. Écrivons $E = E_{L_\alpha(G)}$ et soit Tr_P la trace semifinie canonique sur P . Nous prouvons d'abord que $E(N) \subset N$. La preuve du Théorème 3.10 fournit des moyennes convexes finies

$$F_i = \sum_{j=1}^{n_i} t_{i,j} \text{Ad}(v_{i,j}), \quad v_{i,j} \in \mathcal{U}(M),$$

telles que

$$\max_j \sup_{g \in K} \|\alpha_g(v_{i,j}) - v_{i,j}\|_2 \longrightarrow 0 \quad (K \Subset G)$$

et $F_i(a) \rightarrow \tau(a)1$ en $\|\cdot\|_2$ pour tout $a \in M$. Tant F_i que E préservent Tr_P et induisent des contractions sur $L^2(P, \text{Tr}_P)$. Pour $a \in M$, uniformément pour g dans les sous-ensembles compacts de G , nous avons

$$\|F_i(au_g)u_g^* - \tau(a)1\|_2 = \left\| \sum_j t_{i,j} v_{i,j} a \alpha_g(v_{i,j}^*) - \tau(a)1 \right\|_2 \longrightarrow 0.$$

La formule de Plancherel donne donc $F_i(y) \rightarrow E(y)$ dans $L^2(P, \text{Tr}_P)$ pour les intégrales de Fourier à support compact. De telles intégrales sont denses dans cet espace de Hilbert, donc la même convergence vaut pour tout $y \in L^2(P, \text{Tr}_P)$.

Soit $e \in L_\alpha(G)$ une projection avec $\text{Tr}_P(e) < \infty$, et soit $f_e \in L^2(G)$ sa transformée de Fourier inverse. Pour $v \in \mathcal{U}(M)$, Plancherel donne

$$\|[v, e]\|_{2, \text{Tr}_P}^2 = \int_G |f_e(g)|^2 \|v - \alpha_g(v)\|_2^2 dg.$$

Cela découle d'abord pour les transformées de Fourier de fonctions à support compact, puis par approximation L^2 . L'invariance approchée compacte-uniforme et la borne $\|v - \alpha_g(v)\|_2 \leq 2$ impliquent

$$\max_j \|[v_{i,j}, e]\|_{2, \text{Tr}_P} \longrightarrow 0.$$

Pour tout $x \in P$, il s'ensuit que

$$\|eF_i(x)e - F_i(exe)\|_{2, \text{Tr}_P} \leq 2\|x\| \max_j \|[v_{i,j}, e]\|_{2, \text{Tr}_P} \longrightarrow 0.$$

Puisque $exe \in L^2(P, \text{Tr}_P)$ et $E(exe) = eE(x)e$, nous obtenons $eF_i(x)e \rightarrow eE(x)e$ dans $L^2(P, \text{Tr}_P)$. Les projections de trace finie dans $L_\alpha(G)$ croissent fortement vers 1. La borne uniforme $\|F_i(x)\| \leq \|x\|$ donne maintenant $F_i(x) \rightarrow E(x)$ faiblement* pour tout $x \in P$. En particulier,

$$E(x) \in \bigcap_{\substack{K \subseteq G \\ \delta > 0}} \overline{\text{conv}}^{w*} \left\{ vxv^* \mid v \in \mathcal{U}(M), \right. \\ \left. \sup_{g \in K} \|\alpha_g(v) - v\|_2 < \delta \right\} \quad (x \in P). \quad (5..26)$$

Puisque $M \subset N$, tout conjugué vxv^* apparaissant dans (5..26) appartient à N lorsque $x \in N$. D'où

$$E_{L_\alpha(G)}(N) \subset N.$$

Par conséquent

$$E_A = E_{L_\alpha(G)}|_N : N \longrightarrow A, \quad A = N \cap L_\alpha(G),$$

est une espérance conditionnelle normale fidèle.

Nous prouvons ensuite que A est invariante sous l'action duale. L'extériorité stricte implique que P est un facteur, et donc que $\Gamma(\alpha) = \widehat{G}$. Le théorème d'annulation approchée des cocycles, Théorème 5.6, appliqué au cocycle scalaire $p \in \widehat{G}$, fournit un filet $(w_i)_i$ dans $\mathcal{U}(M)$ tel que

$$\sup_{g \in K} \|w_i \alpha_g(w_i^*) - p(g)1\|_2 \longrightarrow 0 \quad (K \subseteq G). \quad (5..27)$$

Posons $\delta = \widehat{\alpha}_{p^{-1}}$. Notre convention d'action duale donne $\delta(u_g) = p(g)u_g$. Plancherel et (5..27) impliquent

$$\text{Ad}(w_i)(y) \longrightarrow \delta(y) \quad \text{dans } L^2(P, \text{Tr}_P) \quad (y \in L^2(L_\alpha(G), \text{Tr}_P)).$$

En effet, l'erreur quadratique pour une intégrale de Fourier de coefficient $f \in L^2(G)$ est

$$\int_G |f(g)|^2 \|w_i \alpha_g(w_i^*) - p(g)1\|_2^2 dg,$$

qui tend vers zéro par convergence compacte-uniforme et une estimation de queue L^2 . Pour une projection de trace finie $e \in L_\alpha(G)$ et $x \in L_\alpha(G)$, nous avons

$$\begin{aligned} & \|\delta(e) \text{Ad}(w_i)(x) \delta(e) - \text{Ad}(w_i)(exe)\|_{2, \text{Tr}_P} \\ & \leq 2\|x\| \|\text{Ad}(w_i)(e) - \delta(e)\|_{2, \text{Tr}_P} \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

En appliquant la convergence L^2 précédente à exe puis en faisant croître e vers 1, on prouve la convergence ponctuelle-faible* $\text{Ad}(w_i) \rightarrow \delta$ sur toute l'algèbre de groupe. Si $x \in A$, chaque $w_i x w_i^*$ appartient à N , donc $\widehat{\alpha}_{p^{-1}}(x) \in N$. Puisque l'action duale préserve $L_\alpha(G)$ et que p était arbitraire, nous concluons que

$$\widehat{\alpha}_p(A) = A \quad (p \in \widehat{G}).$$

Sous l'identification de Fourier $L_\alpha(G) = L^\infty(\widehat{G})$, l'action duale est l'action par translation de $\widehat{G}$. Les sous-algèbres de von Neumann invariantes par translation de $L^\infty(\widehat{G})$ sont précisément les algèbres associées aux groupes quotients. Par conséquent, il existe un sous-groupe fermé $H < G$ tel que

$$A = L_\alpha(H). \quad (5..28)$$

Nous terminons avec la caractérisation standard par support de Fourier

$$M \rtimes_{\alpha|_H} H = \left\{ x \in P \mid E_{L_\alpha(G)}(axb) \in L_\alpha(H) \text{ pour tous } a, b \in M \right\}. \quad (5..29)$$

L'inclusion de gauche à droite découle d'abord sur les éléments au_h avec $h \in H$, puis par normalité de E . Pour la réciproque, soit $H^\perp < \widehat{G}$ l'annihilateur de H . La condition de droite implique, pour tout $p \in H^\perp$ et $a, b \in M$, que

$$E_{L_\alpha(G)}(a\widehat{\alpha}_p(x)b) = \widehat{\alpha}_p(E_{L_\alpha(G)}(axb)) = E_{L_\alpha(G)}(axb).$$

Les applications $y \mapsto E(ayb)$, avec $a, b \in M$, séparent les points de P . En effet, si elles s'annulent toutes en y , alors

$$\mathrm{Tr}_P(\lambda(f)^* ayb \lambda(h)) = \mathrm{Tr}_P(\lambda(f)^* E(ayb) \lambda(h)) = 0$$

pour $f, h \in C_c(G)$, où $\lambda(f) = \int_G f(g)u_g dg$. Les vecteurs $a\lambda(f)$ engendrent un sous-espace dense de $L^2(P, \mathrm{Tr}_P)$, donc ces identités forcent $y = 0$. D'où $\widehat{\alpha}_p(x) = x$ pour tout $p \in H^\perp$, et la dualité donne

$$x \in P^{\widehat{\alpha}|_{H^\perp}} = M \rtimes_{\alpha|_H} H.$$

Cela prouve (5..29).

Clairement $M \rtimes_{\alpha|_H} H \subset N$ par (5..28). Réciproquement, si $x \in N$ et $a, b \in M$, alors $axb \in N$ et donc

$$E_{L_\alpha(G)}(axb) \in A = L_\alpha(H).$$

La formule (5..29) donne $x \in M \rtimes_{\alpha|_H} H$, et la preuve est complète. $\square$

6. Le théorème du commutant relatif et la propriété de résonance

Nous étudions les commutants relatifs dans les produits croisés au moyen de distributions de coefficients de Fourier. Le lissage des deux côtés donne une représentation distributionnelle injective dont le support enregistre le spectre joint de l'action étendue et de l'action duale. Dans le cas préservant la trace, les relations de commutation confinent ce spectre à l'ensemble de résonance. Nous étendons également le cadre distributionnel aux actions préservant un poids normal fidèle semifini.

Pour les flots, la géométrie de l'ensemble de résonance donne la dichotomie du commutant relatif et montre que l'extériorité jointe au spectre de Connes plein implique l'extériorité stricte. Le même cadre retrouve le théorème du commutant relatif de Connes–Takesaki. Nous déterminons aussi exactement quels groupes abéliens localement compacts à base dénombrable satisfont cette implication d'extériorité stricte. Pour chaque groupe restant, nous construisons une action extérieure sur le facteur hyperfini de type II_1 à produit croisé factorial et commutant relatif diffus.

6.1. Préliminaires pour les actions de groupes abéliens localement compacts

Dans les Sous-sections 6.1–6.3., soit G un groupe abélien localement compact, noté additivement, et soit $\widehat{G}$ son dual de Pontryagin, noté multiplicativement. Nous fixons les mesures de Haar en dualité

de Plancherel. La Sous-section 6.1. fixe les notations et résultats utilisés dans les Sous-sections 6.2. et 6.3.. Dans les Sous-sections 6.1.–6.2., M est une algèbre de von Neumann arbitraire et $\alpha : G \curvearrowright M$ est une action continue arbitraire. Les hypothèses de semifinitude et de trace n'interviennent que dans les arguments de commutation de la Sous-section 6.2. et sont rappelées chaque fois qu'elles sont utilisées.

6.1..1 Calcul de Schwartz–Bruhat

Soit H un groupe abélien localement compact. Un stade de Bruhat est donné par un sous-groupe ouvert compactement engendré $H_0 \subset H$ et un sous-groupe compact $K \subset H_0$ tels que $H_0/K \cong \mathbb{R}^a \times \mathbb{Z}^b \times \mathbb{T}^c \times F$, où F est fini. L'espace de stade correspondant consiste en les fonctions sur H qui sont supportées dans H_0 , sont K -invariantes, et dont la descente à H_0/K est lisse avec toutes les dérivées de Lie rapidement décroissantes dans les variables $\mathbb{R}^a \times \mathbb{Z}^b$. L'espace de Schwartz–Bruhat $\mathcal{S}(H)$ est la limite inductive de ces espaces de stade. Ainsi $\mathcal{S}(\mathbb{R}^a)$ est l'espace de Schwartz usuel, $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^b)$ consiste en les suites rapidement décroissantes, $\mathcal{S}(\mathbb{T}^c) = C^\infty(\mathbb{T}^c)$, et $\mathcal{S}(\mathbb{Q}_p^a)$ consiste en les fonctions localement constantes à support compact. Tout élément de $\mathcal{S}(H)$ appartient à un stade de Bruhat [Br61, Section 9 and Proposition 11(a)].

Posons $\mathcal{D}(H) = \mathcal{S}(H) \cap C_c(H)$, muni de sa topologie LF de Bruhat (et non de la topologie induite par $\mathcal{S}(H)$), et notons $\mathcal{S}'(H)$ le dual continu de $\mathcal{S}(H)$. Plus généralement, si X est un espace de Banach, une distribution de Schwartz–Bruhat tempérée à valeurs dans X sur H est une application linéaire continue $T : \mathcal{S}(H) \rightarrow X$. Nous notons $\mathcal{S}'(H, X)$ l'espace de ces applications. Nous écrivons de même $\mathcal{D}'(H, X)$ pour les applications linéaires continues de $\mathcal{D}(H)$ vers X . Une distribution s'annule sur un ouvert U lorsque $T(\varphi) = 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(H)$ supporté dans U , et son support est le complémentaire du plus grand tel ensemble [Sc57, Chapter I, Section 2, p. 61]. Ainsi le support d'un élément de $\mathcal{S}'(H)$ est testé avec des fonctions de $\mathcal{D}(H)$.

Les mesures de Haar sur H et $\widehat{H}$ sont toujours prises en dualité de Plancherel. Pour $\varphi \in L^1(H)$ et $\psi \in L^1(\widehat{H})$, notre convention de Fourier est

$$\widehat{\varphi}(\chi) = \int_H \varphi(h) \overline{\chi(h)} dh, \quad \check{\psi}(h) = \int_{\widehat{H}} \chi(h) \psi(\chi) d\chi.$$

La transformation de Fourier est un isomorphisme topologique de $\mathcal{S}(H)$ sur $\mathcal{S}(\widehat{H})$. Nous la notons $\mathcal{F}_H$ et écrivons $\mathcal{F}_H(\varphi) = \widehat{\varphi}$. Son inverse est $\psi \mapsto \check{\psi}$. Sur les distributions, nous utilisons la convention de transposition $\langle \widehat{T}, \psi \rangle = \langle T, \check{\psi} \rangle$ pour $T \in \mathcal{S}'(H)$ et $\psi \in \mathcal{S}(\widehat{H})$. L'espace $\mathcal{S}(H)$ est nucléaire et s'injecte continûment et densément dans $L^1(H) \cap L^2(H)$, tandis que $\mathcal{D}(H)$ est dense dans $\mathcal{S}(H)$. Le théorème du noyau et la construction par stades donnent

$$\mathcal{S}(H_1) \widehat{\otimes}_i \mathcal{S}(H_2) \cong \mathcal{S}(H_1 \times H_2),$$

où $\widehat{\otimes}_i$ est le produit tensoriel inductif complété. Le résultat correspondant pour $\mathcal{D}$ est [Br61, Théorème 3]. La même preuve par stades s'applique à $\mathcal{S}$ en utilisant [Br61, Section 9, Proposition 11(a)]. Ainsi les produits tensoriels algébriques sont denses dans les deux espaces produits. Le tiré en arrière par un isomorphisme de groupes topologiques et la multiplication ponctuelle sont continus. En particulier, $\mathcal{D}(H)\mathcal{S}(H) \subset \mathcal{D}(H)$. Enfin, si $C \subset H$ est compact et U est un voisinage de C , un certain $\varphi \in \mathcal{D}(H)$ vaut 1 près de C et est supporté dans U .

Nous utiliserons aussi le fait élémentaire de division suivant. Soit L un groupe abélien localement compact à base dénombrable, soit $\Phi \in \mathcal{D}(L)$, et soit $m : L \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction qui, sur un stade de Bruhat contenant Φ , est lisse dans les variables de Lie et localement constante dans les variables totalement discontinues près de $\text{supp}(\Phi)$. Si m n'a pas de zéro sur $\text{supp}(\Phi)$, choisissons $\rho \in \mathcal{D}(L)$ qui vaut 1 près de $\text{supp}(\Phi)$ et est supporté là où m ne s'annule pas. Après être passé à un raffinement commun des stades contenant Φ et ρ , la multiplication lisse usuelle à support compact donne

$$\Psi = \rho m^{-1} \Phi \in \mathcal{D}(L), \quad m\Psi = \Phi.$$

Si X est un espace de Banach et $\mathcal{K} \in \mathcal{D}'(L, X)$ satisfait $m\mathcal{K} = 0$, alors

$$\langle \mathcal{K}, \Phi \rangle = \langle m\mathcal{K}, \Psi \rangle = 0.$$

Par conséquent $\text{supp}(\mathcal{K}) \subset m^{-1}(\{0\})$.

Définissons la fonction d'évaluation

$$w_H : \widehat{H} \times H \longrightarrow \mathbb{T} : (\chi, h) \longmapsto \chi(h).$$

La multiplication par w_H préserve les deux espaces de fonctions test parce que la transformation de Fourier inverse partielle dans la coordonnée H la conjugue sur $\mathcal{S}$ au tiré en arrière par $s_H(\chi, \eta) = (\chi, \eta\chi)$. Elle préserve alors $\mathcal{D}$ parce qu'elle n'agrandit pas les supports. Après raffinement d'un stade de Bruhat, w_H est lisse dans les variables de Lie et localement constante dans les variables totalement discontinues. Le fait de division s'applique donc aux multiplicateurs construits à partir de w_H .

6.1..2 Spectres d'Arveson

Fixons un groupe abélien localement compact H . Soit $\theta : H \curvearrowright M$ une action continue sur une algèbre de von Neumann. Nous utilisons les spectres d'Arveson individuel et global de [Ta03, Définition XI.1.2]. Pour $\varphi \in L^1(H)$, définissons $\theta_\varphi(x) = \int_H \varphi(h)\theta_h(x) dh$ pour $x \in M$, où l'intégrale est prise au sens faible*. L'idéal annulateur et les spectres individuel et global sont

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_\theta(x) &= \{\varphi \in L^1(H) \mid \theta_\varphi(x) = 0\}, \\ \text{Sp}_\theta(x) &= \{\chi \in \widehat{H} \mid \widehat{\varphi}(\chi) = 0 \text{ pour tout } \varphi \in \mathcal{I}_\theta(x)\}, \\ \text{Sp}(\theta) &= \overline{\bigcup_{x \in M} \text{Sp}_\theta(x)}. \end{aligned}$$

Nous écrivons $M^\theta(E) = \{x \in M \mid \text{Sp}_\theta(x) \subset E\}$ pour $E \subset \widehat{H}$.

Nous rappelons cinq conséquences standard. Premièrement, la formule de troncature est [Ta03, Lemme XI.1.3(ii)] :

$$\text{Sp}_\theta(\theta_\varphi(x)) \subset \text{Sp}_\theta(x) \cap \text{supp}(\widehat{\varphi}). \quad (6..1)$$

Deuxièmement, si $\chi \in \text{Sp}(\theta)$ et $U \subset \widehat{H}$ est un voisinage de χ , alors [Ta03, Lemme XI.1.3(v)] fournit un élément non nul $x \in M^\theta(U)$. En utilisant le calcul de Schwartz–Bruhat de §6.1..1, on peut prendre $x = \theta_\varphi(y)$ avec $y \in M$, $\varphi \in \mathcal{S}(H)$, $\widehat{\varphi} \in \mathcal{D}(\widehat{H})$ supporté dans U , et $\theta_\varphi(y) \neq 0$.

Troisièmement, supposons que $H = H_1 \times H_2$. Soit $\theta^{(j)}$ la restriction au j -ième facteur et soit $\text{pr}_j : \widehat{H}_1 \times \widehat{H}_2 \longrightarrow \widehat{H}_j : (\chi_1, \chi_2) \longmapsto \chi_j$ la projection coordonnée. Une identité approchée dans l'autre facteur donne

$$\text{Sp}_{\theta^{(j)}}(x) \subset \overline{\text{pr}_j(\text{Sp}_\theta(x))} \quad (x \in M). \quad (6..2)$$

Cela découle de [Ta03, Lemme XI.1.3(i)–(ii)] en appliquant une identité approchée dans l'autre facteur. Quatrièmement, pour $\chi \in \widehat{H}$, [Ta03, Lemme XI.1.11] identifie le sous-espace spectral ponctuel :

$$M^\theta(\{\chi\}) = \{x \in M \mid \theta_h(x) = \overline{\chi(h)}x \text{ pour tout } h \in H\}. \quad (6..3)$$

Enfin, si θ est ergodique, alors son spectre d'Arveson coïncide avec son spectre de Connes et

$$\text{Sp}(\theta) = \Gamma(\theta) = (\ker \theta)^\perp. \quad (6..4)$$

Cela découle de [Ta03, Lemme XI.2.2(iii) and Théorème XI.2.7(i)]. Ici

$$(\ker \theta)^\perp = \{\chi \in \widehat{H} \mid \chi(h) = 1 \text{ pour tout } h \in \ker \theta\}.$$

Proposition 6.1. *Soit N une algèbre de von Neumann et soit $\mathcal{J} : M \longrightarrow \mathcal{S}'(\widehat{H}, N)$ une application linéaire injective. Supposons que $x \mapsto \langle \mathcal{J}(x), \psi \rangle$ soit bornée et normale pour tout $\psi \in \mathcal{S}(\widehat{H})$ et que*

$$\mathcal{J}(\theta_h(x)) = [\chi \longmapsto \overline{\chi(h)}] \mathcal{J}(x)$$

pour tout $x \in M$ et $h \in H$. Les assertions suivantes sont vraies. (i)(i)

1. On a

$$\text{supp}(\mathcal{J}(x)) = \text{Sp}_\theta(x) \quad (x \in M).$$

2. Si $x \in M$ et $\text{supp}(\mathcal{J}(x))$ est discret, alors

$$x \in \left(\bigcup_{\chi \in \text{supp}(\mathcal{J}(x))} M^\theta(\{\chi\}) \right)''.$$

En particulier, si $\text{Sp}(\theta)$ est discret, alors

$$M = \left(\bigcup_{\chi \in \text{Sp}(\theta)} M^\theta(\{\chi\}) \right)''.$$

De plus, $M^\theta(\{\chi\}) \neq \{0\}$ pour tout $\chi \in \text{Sp}(\theta)$.

Démonstration. Pour $\varphi \in \mathcal{S}(H)$, la normalité des évaluations de $\mathcal{J}$ et l'hypothèse de covariance donnent

$$\mathcal{J}(\theta_\varphi(x)) = \widehat{\varphi} \mathcal{J}(x). \quad (6..5)$$

Nous prouvons d'abord l'assertion (i). Nous commençons par montrer que $\text{supp}(\mathcal{J}(x)) \subset \text{Sp}_\theta(x)$. Soit $\psi \in \mathcal{D}(\widehat{H})$ de support disjoint de $\text{Sp}_\theta(x)$. Choisissons $\widehat{\varphi} \in \mathcal{D}(\widehat{H})$ qui vaut 1 près de $\text{supp}(\psi)$ et dont le support reste disjoint de $\text{Sp}_\theta(x)$, et soit φ sa transformée de Fourier inverse. La formule (6..1) donne

$$\text{Sp}_\theta(\theta_\varphi(x)) \subset \text{Sp}_\theta(x) \cap \text{supp}(\widehat{\varphi}) = \emptyset.$$

Un élément à spectre individuel vide est nul, donc $\theta_\varphi(x) = 0$. L'équation (6.5) donne donc

$$\langle \mathcal{J}(x), \psi \rangle = \langle \widehat{\varphi} \mathcal{J}(x), \psi \rangle = 0.$$

Cela prouve la première inclusion.

Réciproquement, soit $\chi_0 \notin \text{supp}(\mathcal{J}(x))$. Choisissons $\widehat{\varphi} \in \mathcal{D}(\widehat{H})$ supporté dans le complémentaire de $\text{supp}(\mathcal{J}(x))$ avec $\widehat{\varphi}(\chi_0) \neq 0$, et soit φ sa transformée de Fourier inverse. Alors $\widehat{\varphi} \mathcal{J}(x) = 0$. En effet, pour tout $\psi \in \mathcal{S}(\widehat{H})$, la fonction $\widehat{\varphi} \psi$ appartient à $\mathcal{D}(\widehat{H})$ et est supportée dans un ouvert sur lequel $\mathcal{J}(x)$ s'annule. Donc (6.5) et l'injectivité donnent $\theta_\varphi(x) = 0$. Puisque $\widehat{\varphi}(\chi_0) \neq 0$, la définition du spectre d'Arveson individuel donne $\chi_0 \notin \text{Sp}_\theta(x)$. Cela prouve l'inclusion réciproque et l'assertion (i).

Nous prouvons maintenant l'assertion (ii). Supposons que $\text{supp}(\mathcal{J}(x))$ soit discret. Pour $\varphi \in \mathcal{S}(H)$ avec $\widehat{\varphi} \in \mathcal{D}(\widehat{H})$, une partition finie de l'unité près de $\text{supp}(\widehat{\varphi}) \cap \text{supp}(\mathcal{J}(x))$ décompose $\widehat{\varphi} \mathcal{J}(x)$ en distributions supportées en des points uniques. La formule (6.5), l'injectivité et l'assertion (i) montrent que $\theta_\varphi(x)$ est une somme finie des opérateurs propres correspondants. Une identité approchée $L^1(H)$ dans $\mathcal{S}(H)$ à transformées de Fourier à support compact prouve la première assertion.

Si $\text{Sp}(\theta)$ est discret, les assertions (i) et (ii) s'appliquent à tout $x \in M$. Enfin, la localisation spectrale dans un voisinage qui ne rencontre $\text{Sp}(\theta)$ qu'en χ donne un élément non nul de $M^\theta(\{\chi\})$ pour tout $\chi \in \text{Sp}(\theta)$. $\square$

6.2. Distributions de coefficients de Fourier et rigidité spectrale

Écrivons $u : G \rightarrow \mathcal{U}(M \rtimes_\alpha G)$ pour la représentation unitaire canonique, caractérisée par $u_t x u_t^* = \alpha_t(x)$ pour $x \in M$ et $t \in G$. Nous normalisons l'action duale par

$$\widehat{\alpha}_\nu(x) = x, \quad \widehat{\alpha}_\nu(u_t) = \overline{\nu(t)} u_t$$

pour $x \in M$, $t \in G$ et $\nu \in \widehat{G}$. Nous écrivons $\widetilde{\alpha}_t = \text{Ad}(u_t)$ pour l'extension de α_t à $M \rtimes_\alpha G$. Les actions $\widetilde{\alpha}$ et $\widehat{\alpha}$ commutent et préservent le commutant relatif

$$M' \cap (M \rtimes_\alpha G).$$

Nous identifions $\widehat{G \times G}$ à $\widehat{G} \times G$ par

$$((r, \nu), (p, t)) \longmapsto p(r) \nu(t).$$

Vu (6.3), un opérateur non nul $x \in M$ est un opérateur propre joint en (p, t) précisément lorsque

$$\widetilde{\alpha}_r(x) = \overline{p(r)} x, \quad \widehat{\alpha}_\nu(x) = \overline{\nu(t)} x$$

pour tout $r \in G$ et $\nu \in \widehat{G}$. De manière équivalente,

$$\widetilde{\alpha}_r \widehat{\alpha}_\nu(x) = \overline{p(r) \nu(t)} x.$$

6.2..1 Poids à valeurs opérateurs

Soit $M \subset N$ une inclusion d'algèbres de von Neumann et soit $T_M : N_+ \longrightarrow \widehat{M}_+$ un poids normal à valeurs opérateurs [Ha79]. L'indice indique son algèbre cible. Nous utilisons les domaines standard

$$\mathfrak{n}_{T_M} = \{a \in N \mid T_M(a^*a) \in M_+\}, \quad \mathfrak{m}_{T_M} = \text{span}(\mathfrak{n}_{T_M}^* \mathfrak{n}_{T_M}),$$

sur le second desquels T_M est une application linéaire à valeurs dans M . L'espace $\mathfrak{m}_{T_M}$ est un M -bimodule, et T_M y est M -bimodulaire :

$$T_M(ayb) = aT_M(y)b \quad (a, b \in M, y \in \mathfrak{m}_{T_M}).$$

Lemme 6.2. *Si $a, b \in \mathfrak{n}_{T_M}$, alors*

$$\begin{pmatrix} T_M(a^*a) & T_M(a^*b) \\ T_M(b^*a) & T_M(b^*b) \end{pmatrix} \geq 0. \quad (6..6)$$

Par conséquent,

$$\|T_M(a^*b)\|^2 \leq \|T_M(a^*a)\| \|T_M(b^*b)\|. \quad (6..7)$$

Démonstration. La matrice

$$\begin{pmatrix} a^*a & a^*b \\ b^*a & b^*b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^* \\ b^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$$

est positive et a ses entrées dans $\mathfrak{m}_{T_M}$. La positivité de l'amplification entrée par entrée 2×2 de T_M est prouvée dans [Ha79, Lemme 4.5(2), pp. 200–201]. Cela donne (6..6), et l'estimation standard pour une matrice d'opérateurs 2×2 positive donne (6..7). $\square$

Lemme 6.3. *La formule*

$$q_{T_M}(a) = \|a\| + \|T_M(a^*a)\|^{1/2} \quad (a \in \mathfrak{n}_{T_M})$$

définit une norme d'espace de Banach sur $\mathfrak{n}_{T_M}$.

Il existe, à équivalence près, une unique norme d'espace de Banach $\|\cdot\|_{T_M}$ sur $\mathfrak{m}_{T_M}$ telle que

$$\|y\| \leq \|y\|_{T_M}, \quad \|T_M(y)\| \leq \|y\|_{T_M} \quad (y \in \mathfrak{m}_{T_M})$$

et

$$\|a^*b\|_{T_M} \leq q_{T_M}(a)q_{T_M}(b) \quad (a, b \in \mathfrak{n}_{T_M}).$$

Démonstration. Posons $p_{T_M}(a) = \|T_M(a^*a)\|^{1/2}$ pour $a \in \mathfrak{n}_{T_M}$. L'inégalité (6..7) donne

$$p_{T_M}(a+b)^2 \leq p_{T_M}(a)^2 + 2p_{T_M}(a)p_{T_M}(b) + p_{T_M}(b)^2.$$

Ainsi p_{T_M} est sous-additive, et q_{T_M} est une norme.

Nous prouvons qu'elle est complète. Soit $(a_n)_n$ une suite de Cauchy pour q_{T_M} . Elle converge en norme vers un certain $a \in N$. Fixons $\varepsilon > 0$ et prenons n_0 tel que $q_{T_M}(a_n - a_m) \leq \varepsilon$ pour $n, m \geq n_0$. Pour $m \geq n_0$ et $\omega \in M_*^+$, la semi-continuité inférieure du poids normal $\omega \circ T_M$ donne

$$\begin{aligned} (\omega \circ T_M)((a - a_m)^*(a - a_m)) &\leq \liminf_n (\omega \circ T_M)((a_n - a_m)^*(a_n - a_m)) \\ &\leq \varepsilon^2 \|\omega\|. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que $a - a_m \in \mathfrak{n}_{T_M}$ et $p_{T_M}(a - a_m) \leq \varepsilon$. Nous avons aussi $\|a - a_m\| \leq \varepsilon$. D'où $a \in \mathfrak{n}_{T_M}$ et $q_{T_M}(a - a_m) \leq 2\varepsilon$, ce qui prouve la complétude.

Pour $y \in \mathfrak{m}_{T_M}$, définissons

$$\|y\|_{T_M} = \inf \left\{ \sum_{j=1}^n q_{T_M}(a_j) q_{T_M}(b_j) \mid y = \sum_{j=1}^n a_j^* b_j, \quad a_j, b_j \in \mathfrak{n}_{T_M} \right\}.$$

Cette quantité est finie par la définition de $\mathfrak{m}_{T_M}$. De plus, (6.7) donne

$$\|y\| \leq \|y\|_{T_M}, \quad \|T_M(y)\| \leq \|y\|_{T_M},$$

donc $\|\cdot\|_{T_M}$ est une norme. Sa définition donne aussi $\|a^*b\|_{T_M} \leq q_{T_M}(a)q_{T_M}(b)$.

Il reste à prouver la complétude. Pour $y \in \mathfrak{m}_{T_M}$, posons

$$\|y\|_{T_M,+} = \inf \left\{ \sum_{j=1}^n |z_j| (\|c_j\| + \|T_M(c_j)\|) \mid y = \sum_{j=1}^n z_j c_j, \quad c_j \in \mathfrak{m}_{T_M}^+ \right\}.$$

Ici $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$. La polarisation donne $\mathfrak{m}_{T_M} = \text{span}(\mathfrak{m}_{T_M}^+)$, donc cette quantité est finie. C'est une norme qui domine à la fois $\|y\|$ et $\|T_M(y)\|$. Elle est aussi complète. En effet, choisissons des décompositions positives presque optimales pour une série absolument sommable dans cette norme et séparons leurs coefficients en parties réelles positives et négatives et imaginaires. Il suffit alors de considérer $c_n \in \mathfrak{m}_{T_M}^+$ tels que

$$\sum_n (\|c_n\| + \|T_M(c_n)\|) < +\infty.$$

La série $\sum_n c_n$ converge en norme vers un élément positif c . La normalité de T_M donne

$$T_M(c) = \sup_N \sum_{n=1}^N T_M(c_n) = \sum_n T_M(c_n) \in M_+.$$

Ainsi $c \in \mathfrak{m}_{T_M}^+$. La même estimation appliquée aux queues donne

$$\left\| c - \sum_{n=1}^N c_n \right\|_{T_M,+} \leq \left\| \sum_{n>N} c_n \right\| + \left\| \sum_{n>N} T_M(c_n) \right\| \longrightarrow 0.$$

Donc $\|\cdot\|_{T_M,+}$ est complète.

Pour $d \in \mathfrak{n}_{T_M}$, on a

$$\|d^*d\|_{T_M,+} \leq \|d\|^2 + \|T_M(d^*d)\| \leq q_{T_M}(d)^2.$$

Pour $a, b \in \mathfrak{n}_{T_M}$ et $r > 0$, la polarisation donne

$$a^*b = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 (-i)^k (ra + i^k r^{-1}b)^* (ra + i^k r^{-1}b).$$

Il s'ensuit que

$$\|a^*b\|_{T_M,+} \leq \left(rq_{T_M}(a) + r^{-1}q_{T_M}(b)\right)^2.$$

En optimisant en r , on obtient

$$\|a^*b\|_{T_M,+} \leq 4q_{T_M}(a)q_{T_M}(b),$$

et donc

$$\|y\|_{T_M,+} \leq 4\|y\|_{T_M} \quad (y \in \mathfrak{m}_{T_M}).$$

Réciproquement, si $c \in \mathfrak{m}_{T_M}^+$, alors $c^{1/2} \in \mathfrak{n}_{T_M}$ et

$$\|c\|_{T_M} \leq q_{T_M}(c^{1/2})^2 \leq 2(\|c\| + \|T_M(c)\|).$$

Par conséquent,

$$\|y\|_{T_M} \leq 2\|y\|_{T_M,+} \quad (y \in \mathfrak{m}_{T_M}).$$

Les deux normes sont équivalentes, donc $\|\cdot\|_{T_M}$ est complète.

Enfin, soit $\|\cdot\|'_{T_M}$ une autre norme d'espace de Banach ayant les propriétés énoncées. Pour toute représentation $y = \sum_{j=1}^n a_j^*b_j$, on a

$$\|y\|'_{T_M} \leq \sum_{j=1}^n q_{T_M}(a_j)q_{T_M}(b_j).$$

Ainsi $\|y\|'_{T_M} \leq \|y\|_{T_M}$. Le théorème de l'application ouverte appliqué à l'application identité entre ces deux espaces de Banach donne l'inégalité réciproque à une constante près. Cela prouve l'unicité à équivalence près. $\square$

Nous spécialisons maintenant la discussion précédente au produit croisé. Soit

$$T_M : (M \rtimes_\alpha G)_+ \longrightarrow \widehat{M}_+$$

le poids canonique de Haar à valeurs opérateurs. Nous utilisons la construction de Haagerup de T_M et la formule de [Ha78b, Théorème 1.1(a)–(b)], ainsi que l'énoncé de densité faible* de [Ha78a, Lemme 2.3(e)–(f)].

Pour $\varphi \in \mathcal{S}(G)$, posons $\lambda(\varphi) = \int_G \varphi(g)u_g dg$. Cela désigne la forme intégrée de la représentation unitaire fortement continue et satisfait $\|\lambda(\varphi)\| \leq \|\varphi\|_1$.

6.2..2 Coefficients en deux points

Nous utilisons le lissage de Schwartz–Bruhat bilatéral pour définir une distribution à valeurs opérateurs. Écrivons $\mathcal{L}_\sigma(M \rtimes_\alpha G, M)$ pour l'espace de Banach des applications linéaires normales bornées de $M \rtimes_\alpha G$ vers M , muni de la norme d'opérateur.

Lorsque G est discret, T_M est l'espérance conditionnelle canonique et les coefficients de Fourier ordinaires $T_M(xu_t^*)$ sont définis pour tout $x \in M \rtimes_\alpha G$. Dans le cadre non discret, l'expression formelle $T_M(xu_t^*)$ n'est pas nécessairement définie parce que T_M est un poids à valeurs opérateurs

non borné et que xu_t^* n'appartient pas nécessairement à $\mathfrak{m}_{T_M}$. Le lissage d'un seul côté ne supprime pas cette obstruction de domaine. Bien que $x\lambda(\psi) \in \mathfrak{n}_{T_M}$, il n'y a aucune raison qu'il appartienne à $\mathfrak{m}_{T_M}$, le domaine sur lequel T_M est à valeurs dans M et linéaire. Le lissage bilatéral donne

$$\lambda(\varphi)x\lambda(\psi) = (\lambda(\varphi)^*)^* x\lambda(\psi) \in \mathfrak{n}_{T_M}^* \mathfrak{n}_{T_M} \subset \mathfrak{m}_{T_M}.$$

Le théorème suivant montre que le lissage bilatéral atterrit dans $\mathfrak{m}_{T_M}$. Après application de T_M , ces opérateurs donnent des évaluations normales bornées qui s'assemblent en une distribution définie pour tout $x \in M \rtimes_\alpha G$, alors que $T_M(xu_t^*)$ n'est pas nécessairement définie.

Théorème 6.4. *Les assertions suivantes sont vraies. (i)(i)*

1. Pour tout $x \in M \rtimes_\alpha G$ et $\Phi \in \mathcal{S}(G \times G)$, l'intégrale faible*

$$\int_{G \times G} \Phi(s, t) u_s x u_t \, ds \, dt$$

appartient à $\mathfrak{m}_{T_M}$.

2. Il existe une unique application linéaire injective

$$\Delta : M \rtimes_\alpha G \longrightarrow \mathcal{S}'(G \times G, M)$$

dont la valeur $\langle \Delta(x), \Phi \rangle$ est obtenue en appliquant T_M à l'intégrale de (i). Pour tout $\Phi \in \mathcal{S}(G \times G)$, l'évaluation $x \mapsto \langle \Delta(x), \Phi \rangle$ appartient à $\mathcal{L}_\sigma(M \rtimes_\alpha G, M)$, et ces évaluations dépendent continûment de Φ dans cet espace.

3. Si $\varphi \in C_c(G, M)$ et

$$x = \int_G \varphi(t) u_t \, dt,$$

alors $\Delta(x)$ est représentée par la fonction bornée à valeurs dans M

$$\Delta(x)(g, h) = \alpha_g(\varphi(-g - h)). \quad (6..8)$$

Démonstration. Pendant toute la preuve, notons $Q_\Phi(x)$ l'intégrale de l'assertion (i). Nous prouvons d'abord l'assertion (i), ainsi que l'énoncé de bornitude et de normalité de l'assertion (ii). Par [Ha78b, Théorème 1.1(b)], le poids à valeurs opérateurs T_M satisfait la formule qui y est donnée. En appliquant [Ha78a, Lemme 2.3(b)] dans cette formule, on obtient

$$T_M(\lambda(\varphi)^* \lambda(\varphi)) = T_M(\lambda(\varphi) \lambda(\varphi)^*) = \|\varphi\|_2^2 1 \quad (6..9)$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(G)$. En particulier, $\lambda(\varphi)$ et $\lambda(\varphi)^*$ appartiennent tous deux à $\mathfrak{n}_{T_M}$. Soient $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(G)$ et $x \in M \rtimes_\alpha G$. Alors $x\lambda(\psi) \in \mathfrak{n}_{T_M}$ parce que $\mathfrak{n}_{T_M}$ est un idéal à gauche, tandis que $\lambda(\varphi)^* \in \mathfrak{n}_{T_M}$. Donc $\lambda(\varphi)x\lambda(\psi) = (\lambda(\varphi)^*)^* x\lambda(\psi)$ appartient à $\mathfrak{n}_{T_M}^* \mathfrak{n}_{T_M}$. De plus,

$$T_M(\lambda(\psi)^* x^* x \lambda(\psi)) \leq \|x\|^2 \|\psi\|_2^2 1.$$

L'inégalité (6..7), appliquée avec $a = \lambda(\varphi)^*$ et $b = x\lambda(\psi)$, donne

$$\|T_M(\lambda(\varphi)x\lambda(\psi))\| \leq \|\varphi\|_2 \|\psi\|_2 \|x\|.$$

Ainsi

$$C_{\varphi,\psi} : M \rtimes_{\alpha} G \longrightarrow M, \quad C_{\varphi,\psi}(x) = T_M(\lambda(\varphi)x\lambda(\psi)),$$

est bornée. Pour $c \in \mathfrak{n}_{T_M}$, l'application $x \mapsto T_M(c^*xc)$ est positive et normale. La polarisation avec $c = \lambda(\varphi)^* + i^k \lambda(\psi)$, où $0 \leq k \leq 3$, exprime $C_{\varphi,\psi}$ sur $(M \rtimes_{\alpha} G)_+$ comme une combinaison linéaire d'applications normales. Elle prouve donc la normalité de $C_{\varphi,\psi}$.

Le théorème du noyau de Schwartz–Bruhat rappelé dans §6.1.1 sera appliqué avec une topologie de Banach sur $\mathfrak{m}_{T_M}$. Fixons la norme de Banach $\|\cdot\|_{T_M}$ fournie par le Lemme 6.3. La formule (6.9) et l'estimation définissante de cette norme donnent

$$\begin{aligned} \|\lambda(\varphi)x\lambda(\psi)\|_{T_M} &\leq q_{T_M}(\lambda(\varphi)^*)q_{T_M}(x\lambda(\psi)) \\ &\leq \|x\|(\|\varphi\|_1 + \|\varphi\|_2)(\|\psi\|_1 + \|\psi\|_2). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$(\varphi, \psi) \longmapsto (x \mapsto \lambda(\varphi)x\lambda(\psi))$$

est une application bilinéaire continue de $\mathcal{S}(G) \times \mathcal{S}(G)$ vers l'espace de Banach des applications linéaires bornées de $M \rtimes_{\alpha} G$ vers $(\mathfrak{m}_{T_M}, \|\cdot\|_{T_M})$. Le théorème du noyau de Schwartz–Bruhat étend cette application à $\mathcal{S}(G \times G)$. Après composition avec l'inclusion continue $\mathfrak{m}_{T_M} \subset M \rtimes_{\alpha} G$, cette extension coïncide avec l'intégrale faible* définissant Q_{Φ} . En effet, les deux applications coïncident sur les tenseurs élémentaires, ces tenseurs sont denses, et

$$\|Q_{\Phi}(x)\| \leq \|\Phi\|_1 \|x\|.$$

D'où $Q_{\Phi}(x) \in \mathfrak{m}_{T_M}$, et la continuité de T_M pour $\|\cdot\|_{T_M}$ prouve à la fois la bornitude et la dépendance continue en norme d'opérateur de $T_M \circ Q_{\Phi}$ par rapport à Φ . Pour prouver la normalité, approximations Φ par des sommes finies de tenseurs élémentaires. Les applications correspondantes après application de T_M sont des sommes finies des applications $C_{\varphi,\psi}$ et sont donc normales. Elles convergent en norme d'opérateur, et les applications normales bornées forment un espace fermé en norme d'opérateur. Ainsi $T_M \circ Q_{\Phi}$ est normale.

Nous complétons maintenant l'assertion (ii). Pour chaque x fixé, la prescription de l'assertion (ii) définit une distribution de Schwartz–Bruhat tempérée à valeurs dans M . Cela donne l'application linéaire Δ annoncée, et la même formule prouve l'unicité ainsi que tous les énoncés de continuité et de normalité.

Nous enregistrons ensuite une observation de domaine qui sera également utilisée ci-dessous. Soit ϕ un poids normal fidèle semifini sur M et posons $\tilde{\phi} = \phi \circ T_M$. Si $a, b \in \mathfrak{n}_{\phi}$ et $y \in \mathfrak{m}_{T_M}$, alors

$$b^*ya \in \mathfrak{m}_{\tilde{\phi}}, \quad \tilde{\phi}(b^*ya) = \phi(b^*T_M(y)a). \quad (6.10)$$

En effet, supposons d'abord que $y = c^*d$ avec $c, d \in \mathfrak{n}_{T_M}$. Alors cb et da appartiennent à $\mathfrak{n}_{\tilde{\phi}}$. Par exemple,

$$\tilde{\phi}((da)^*da) = \phi(a^*T_M(d^*d)a) \leq \|T_M(d^*d)\|\phi(a^*a).$$

L'assertion découle par linéarité de $b^*c^*da = (cb)^*(da)$.

Il reste à prouver l'injectivité dans l'assertion (ii). Les vecteurs

$$\Lambda_{\tilde{\phi}}(\lambda(\psi)y), \quad \psi \in \mathcal{S}(G), \quad y \in \mathfrak{n}_{\phi},$$

engendrent un sous-espace dense de l'espace GNS du poids dual. Il en va de même avec $\lambda(\psi)$ remplacé par $\lambda(\psi)^*$ [Ha78a, Lemme 2.5(iv), Lemme 2.12, and Théorème 3.2(i)]. Supposons que $\Delta(x) = 0$. Pour $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(G)$ et $v, w \in \mathfrak{n}_{\phi}$, posons

$$A = \lambda(\varphi)^*v, \quad C = \lambda(\psi)w.$$

La formule (6.9) et la M -bimodularité donnent $A, C \in \mathfrak{n}_{\tilde{\phi}}$. En appliquant (6.10) à $y = \lambda(\varphi)x\lambda(\psi)$, $a = w$ et $b = v$, on obtient

$$\begin{aligned} \langle \pi_{\tilde{\phi}}(x)\Lambda_{\tilde{\phi}}(C), \Lambda_{\tilde{\phi}}(A) \rangle &= \tilde{\phi}(A^*xC) \\ &= \phi(v^*T_M(\lambda(\varphi)x\lambda(\psi))w) = 0. \end{aligned}$$

Ces coefficients matriciels s'annulent pour des vecteurs dans deux sous-espaces denses. Donc $\pi_{\tilde{\phi}}(x) = 0$, et la fidélité de $\pi_{\tilde{\phi}}$ donne $x = 0$.

Nous prouvons enfin l'assertion (iii). Supposons que

$$x = \int_G \varphi(r)u_r \, dr \quad \text{avec } \varphi \in C_c(G, M).$$

Prenons d'abord $\Phi = f \otimes h$ avec $f, h \in \mathcal{D}(G)$ et posons

$$b(q) = \int_G \varphi(r)h(q-r) \, dr.$$

Alors $b \in C_c(G, M)$ et le théorème de Fubini donne

$$x\lambda(h) = \int_G b(q)u_q \, dq.$$

Tant $\lambda(f)^*$ que $x\lambda(h)$ sont des éléments de cœur intégrés à support compact. Ainsi la formule du carré de convolution de [Ha78b, Théorème 1.1(b)], suivie de polarisation, s'applique à $Q_{\Phi}(x) = (\lambda(f)^*)^*x\lambda(h)$ et donne

$$\begin{aligned} \langle \Delta(x), \Phi \rangle &= \int_G f(s)\alpha_s(b(-s)) \, ds \\ &= \int_{G \times G} f(s)h(t)\alpha_s(\varphi(-s-t)) \, ds \, dt. \end{aligned}$$

La même identité vaut pour les sommes finies de tels tenseurs. Le membre de gauche est continu dans la topologie de Schwartz–Bruhat par l'estimation en norme $\mathfrak{m}_{T_M}$ prouvée ci-dessus. Le membre de droite est borné en norme par $\|\varphi\|_{\infty}\|\Phi\|_1$ et est donc continu dans la même topologie. Puisque $\mathcal{D}(G) \otimes \mathcal{D}(G)$ est dense dans $\mathcal{S}(G \times G)$, l'identité s'étend à toute fonction test de Schwartz–Bruhat. Cela prouve l'assertion (iii). $\square$

Nous utilisons le changement de coordonnées suivant.

6.2.3 Coordonnées adaptées et spectre joint

Définissons

$$\Theta : G \times G \longrightarrow G \times G, \quad \Theta(g, h) = (g, -g - h),$$

qui est un automorphisme de groupe topologique involutif puisque $\Theta^2 = \text{id}$. Définissons $\nabla(x) \in \mathcal{S}'(G \times G, M)$ par

$$\langle \nabla(x), \Phi \rangle = \langle \Delta(x), \Phi \circ \Theta \rangle. \quad (6..11)$$

Pour $\Phi \in \mathcal{S}(G \times G)$, le changement de variables $(g, h) = (s, -s - t)$ dans (6.11) donne

$$\langle \nabla(x), \Phi \rangle = T_M \left(\int_{G \times G} \Phi(s, t) \tilde{\alpha}_s(x) u_t^* \, ds \, dt \right). \quad (6..12)$$

En effet, l'opérateur à l'intérieur de T_M est l'intégrale de l'assertion (i) du Théorème 6.4, avec Φ remplacé par $\Phi \circ \Theta$, et appartient donc à $\mathfrak{m}_{T_M}$.

L'application $x \mapsto \nabla(x)$ est injective, toute évaluation est bornée et normale, et les évaluations dépendent continûment de Φ en norme d'opérateur. Si $\varphi \in C_c(G, M)$ et $x = \int_G \varphi(t) u_t \, dt$, la formule (6.8) donne

$$\nabla(x)(s, t) = \alpha_s(\varphi(t)).$$

Pour $r \in G$, $\nu \in \hat{G}$, et $\Phi \in \mathcal{S}(G \times G)$, les deux actions qui commutent satisfont

$$\langle \nabla(\tilde{\alpha}_r(x)), \Phi \rangle = \left\langle \nabla(x), \left[(s, t) \mapsto \Phi(s - r, t) \right] \right\rangle, \quad (6..13)$$

$$\langle \nabla(\hat{\alpha}_\nu(x)), \Phi \rangle = \left\langle \nabla(x), \left[(s, t) \mapsto \overline{\nu(t)} \Phi(s, t) \right] \right\rangle. \quad (6..14)$$

Les deux identités découlent directement de (6.12). Les translations et la multiplication par des caractères préservent $\mathcal{S}(G \times G)$, donc tout opérateur lissé apparaissant ci-dessous appartient à $\mathfrak{m}_{T_M}$. L'identité

$$\tilde{\alpha}_s(\tilde{\alpha}_r(x)) u_t^* = \tilde{\alpha}_{s+r}(x) u_t^*$$

et la translation dans la variable s donnent (6.13). Pour la seconde identité, la commutation des actions et $\hat{\alpha}_\nu(u_t^*) = \nu(t) u_t^*$ donnent

$$\tilde{\alpha}_s(\hat{\alpha}_\nu(x)) u_t^* = \overline{\nu(t)} \hat{\alpha}_\nu(\tilde{\alpha}_s(x) u_t^*).$$

La formule (6.12) et l'invariance duale de T_M donnent maintenant (6.14).

Pour $\Phi \in \mathcal{S}(\hat{G} \times G)$, posons

$$(\check{\mathcal{F}}_1 \Phi)(s, t) = \int_{\hat{G}} p(s) \Phi(p, t) \, dp$$

et définissons

$$\mathcal{J} : M \rtimes_\alpha G \longrightarrow \mathcal{S}'(\hat{G} \times G, M), \quad \langle \mathcal{J}(x), \Phi \rangle = \langle \nabla(x), \check{\mathcal{F}}_1 \Phi \rangle.$$

Ainsi $\mathcal{J}$ est la transformée de Fourier partielle dans la variable s .

Proposition 6.5. *Pour tout $\Phi \in \mathcal{S}(\hat{G} \times G)$, l'application $x \mapsto \langle \mathcal{J}(x), \Phi \rangle$ est bornée et normale. L'application $\mathcal{J}$ est injective et satisfait*

$$\mathcal{J}(\tilde{\alpha}_r \hat{\alpha}_\nu(x)) = \left[(p, t) \mapsto \overline{p(r)} \nu(t) \right] \mathcal{J}(x) \quad (6..15)$$

pour $x \in M \rtimes_\alpha G$, $r \in G$, et $\nu \in \widehat{G}$. De plus, on a

$$\text{supp}(\mathcal{J}(x)) = \text{Sp}_{\widetilde{\alpha} \times \widehat{\alpha}}(x) \subset \widehat{G} \times G \quad (x \in M \rtimes_\alpha G).$$

Si $N \subset M \rtimes_\alpha G$ est une sous-algèbre de von Neumann invariante et si le spectre de la restriction de $\widetilde{\alpha} \times \widehat{\alpha}$ à N est discret, alors

$$N = \left(\bigcup_{(p,t) \in \widehat{G} \times G} N^{\widetilde{\alpha} \times \widehat{\alpha}}(\{(p,t)\}) \right)'.$$

Tout point de ce spectre indexe un sous-espace propre joint non nul dans N .

Démonstration. La bornitude, la normalité et l'injectivité découlent du Théorème 6.4, parce que le changement de coordonnées et la transformation de Fourier partielle sont des isomorphismes topologiques des espaces de fonctions test. Les formules (6..13) et (6..14) donnent (6..15). L'assertion (i) de la Proposition 6.1, appliquée à l'action $\widetilde{\alpha} \times \widehat{\alpha}$ de $G \times \widehat{G}$, donne maintenant l'égalité de support annoncée. Les deux dernières assertions découlent de l'assertion (ii) de la Proposition 6.1, appliquée à la restriction de $\mathcal{J}$ à N . $\square$

6.2..4 Un raffinement orbital

Soit H un groupe abélien localement compact à base dénombrable et soit $\delta : H \curvearrowright M$ une action ponctuellement faible* continue commutant avec α . Notons $\widetilde{\delta}$ son extension à $M \rtimes_\alpha G$ qui fixe chaque u_g . Il existe une unique distribution

$$\nabla^\delta(x) \in \mathcal{S}'(G \times G \times H, M)$$

telle que

$$\langle \nabla^\delta(x), \Phi \otimes \psi \rangle = \langle \nabla(\widetilde{\delta}_\psi(x)), \Phi \rangle \quad (6..16)$$

pour $\Phi \in \mathcal{S}(G \times G)$ et $\psi \in \mathcal{S}(H)$. Ici

$$\widetilde{\delta}_\psi(x) = \int_H \psi(h) \widetilde{\delta}_h(x) \, dh.$$

Le théorème du noyau et l'estimation $\|\widetilde{\delta}_\psi\| \leq \|\psi\|_1$ montrent que toute évaluation de ∇^δ est bornée et normale, avec une norme d'opérateur dépendant continûment de la fonction test.

Pour $\Phi \in \mathcal{S}(\widehat{G} \times G \times \widehat{H})$, posons

$$(\check{\mathcal{F}}_{1,3}\Phi)(s, t, h) = \int_{\widehat{G} \times \widehat{H}} p(s)q(h)\Phi(p, t, q) \, dp \, dq$$

et définissons

$$\langle \mathcal{J}^\delta(x), \Phi \rangle = \langle \nabla^\delta(x), \check{\mathcal{F}}_{1,3}\Phi \rangle.$$

Proposition 6.6. *L'application $\mathcal{J}^\delta$ est injective, et toutes ses évaluations sont bornées et normales. On a*

$$\mathcal{J}^\delta(\widetilde{\alpha}_r \widetilde{\alpha}_\nu \widetilde{\delta}_h(x)) = \left[(p, t, q) \mapsto \overline{p(r)\nu(t)q(h)} \right] \mathcal{J}^\delta(x) \quad (6..17)$$

pour $x \in M \rtimes_\alpha G$, $r \in G$, $\nu \in \widehat{G}$, et $h \in H$. De plus,

$$\text{supp}(\mathcal{J}^\delta(x)) = \text{Sp}_{\widetilde{\alpha} \times \widehat{\alpha} \times \widetilde{\delta}}(x) \subset \widehat{G} \times G \times \widehat{H} \quad (x \in M \rtimes_\alpha G).$$

Démonstration. Les énoncés de continuité et de normalité découlent de la construction. Si $\mathcal{J}^\delta(x) = 0$, alors $\nabla(\tilde{\delta}_\psi(x)) = 0$ pour tout $\psi \in \mathcal{S}(H)$. L'injectivité de ∇ donne $\tilde{\delta}_\psi(x) = 0$. En appliquant une identité approchée choisie dans $\mathcal{S}(H)$ et en utilisant la convergence faible*, on obtient $x = 0$.

Les formules de covariance ci-dessus et un changement de variables dans l'orbite H donnent (6.17). L'assertion (i) de la Proposition 6.1, appliquée à l'action $\tilde{\alpha} \times \hat{\alpha} \times \tilde{\delta}$ de $G \times \hat{G} \times H$, donne maintenant l'égalité de support annoncée. $\square$

6.2..5 Actions à mise à l'échelle de trace

Supposons que τ soit une trace normale fidèle semifinie sur M satisfaisant $\tau \circ \alpha_s = e^{\ell(s)}\tau$ pour tout $s \in G$, où $\ell : G \rightarrow \mathbb{R}$ est un homomorphisme continu. Considérons d'abord

$$x = \int_G \varphi(t) u_t \, dt \in M' \cap (M \rtimes_\alpha G)$$

avec $\varphi \in C_c(G, M)$. La commutation avec M donne $\varphi(t)\alpha_t(a) = a\varphi(t)$ pour tout $a \in M$ et $t \in G$. Pour $a \in M \cap L^1(M, \tau)$, la cyclicité et la relation de mise à l'échelle donnent

$$\begin{aligned} \tau(\varphi(t)\alpha_t(a)) &= \tau(a\varphi(t)) = \tau(\varphi(t)a) \\ &= e^{-\ell(t)}\tau(\alpha_t(\varphi(t))\alpha_t(a)). \end{aligned}$$

D'où $\alpha_t(\varphi(t)) = e^{\ell(t)}\varphi(t)$. En appliquant α_s , on obtient la relation de translation

$$e^{\ell(t)}\nabla(x)(s, t) = \nabla(x)(s + t, t).$$

Lorsque $\ell = 0$, c'est l'invariance par translation qui produit la relation de résonance. Le théorème suivant étend le calcul à un élément arbitraire du commutant relatif.

Théorème 6.7. *Soit $\alpha : G \curvearrowright M$ une action continue d'un groupe abélien localement compact. Supposons qu'il existe un homomorphisme continu $\ell : G \rightarrow \mathbb{R}$ et une trace normale fidèle semifinie τ sur M satisfaisant $\tau \circ \alpha_s = e^{\ell(s)}\tau$ pour tout $s \in G$. Posons $G_0 = \ker \ell$. Alors*

$$M' \cap (M \rtimes_\alpha G) \subset M \rtimes_{\alpha|_{G_0}} G_0.$$

De plus,

$$\text{Sp} \left((\tilde{\alpha} \times \hat{\alpha}) \Big|_{M' \cap (M \rtimes_\alpha G)} \right) \subset \{(p, t) \in \hat{G} \times G_0 \mid p(t) = 1\}.$$

Démonstration. Prenons $x \in M' \cap (M \rtimes_\alpha G)$. Pour $\varphi \in \mathcal{S}(G)$ et $\psi \in \mathcal{D}(G)$, posons

$$\begin{aligned} X &= \int_G \tilde{\alpha}_s(x) \varphi(s) \, ds, \\ Y &= \int_G u_t^* \psi(t) \, dt, \\ Z &= \int_G u_t^* e^{\ell(t)} \psi(t) \, dt. \end{aligned}$$

Soit $\tilde{\tau} = \tau \circ T_M$. La formule modulaire du poids dual [Ha78a, Théorème 3.2(ii)] montre que Y est entière pour $\sigma_i^{\tilde{\tau}}$ et que $\sigma_i^{\tilde{\tau}}(Y) = Z$. Un calcul direct identifie XY et ZX aux intégrales bilatérales associées aux noyaux

$$\begin{aligned}\Phi_1(r, q) &= \varphi(r)\psi(-r - q), \\ \Phi_2(r, q) &= e^{\ell(-r-q)}\psi(-r - q)\varphi(-q).\end{aligned}$$

Puisque ψ est à support compact, $e^\ell\psi \in \mathcal{D}(G)$. Chaque noyau est obtenu à partir d'un produit tensoriel de fonctions de $\mathcal{S}(G)$ par tiré en arrière sous un automorphisme de groupe topologique de $G \times G$. Ainsi les deux noyaux appartiennent à $\mathcal{S}(G \times G)$, et $XY, ZX \in \mathfrak{m}_{T_M}$ par le Théorème 6.4. Puisque $\mathfrak{m}_{T_M}$ est un M -bimodule, la formule (6..10) montre que les troncatures bilatérales par des éléments de $M \cap L^2(M, \tau)$ appartiennent au domaine de $\tilde{\tau}$. De plus, $X \in M' \cap (M \rtimes_\alpha G)$, l'algèbre M est contenue dans le centralisateur de $\tilde{\tau}$, et $\sigma_i^{\tilde{\tau}}(Y) = Z$. Appliquons l'identité KMS à X et $a^{1/2}Ya^{1/2}$. Pour tout $a \in M_+ \cap L^1(M, \tau)$,

$$\begin{aligned}\tau(T_M(XY)a) &= \tilde{\tau}(a^{1/2}XYa^{1/2}) \\ &= \tilde{\tau}\left(\sigma_i^{\tilde{\tau}}(a^{1/2}Ya^{1/2})X\right) \\ &= \tilde{\tau}\left(a^{1/2}\sigma_i^{\tilde{\tau}}(Y)a^{1/2}X\right) \\ &= \tilde{\tau}(a^{1/2}ZXa^{1/2}) = \tau(T_M(ZX)a).\end{aligned}$$

Toutes les expressions impliquant $\tilde{\tau}$ sont dans $\mathfrak{m}_{\tilde{\tau}}$ par (6..10), donc ce calcul n'utilise pas de valeur unilatérale non définie du poids. La seconde égalité est obtenue en commutant X avec la copie gauche de $a^{1/2}$ et en appliquant KMS à X et $a^{1/2}Ya^{1/2}$. Ce dernier élément est entier et la troisième égalité utilise que M est contenu dans le centralisateur de $\tilde{\tau}$. Enfin, $\sigma_i^{\tilde{\tau}}(Y) = Z$, et en commutant X avec la copie droite de $a^{1/2}$ on obtient la quatrième égalité. Ces fonctionnelles séparent M , donc $T_M(XY) = T_M(ZX)$.

La définition de la distribution adaptée donne

$$T_M(XY) = \langle \nabla(x), \varphi \otimes \psi \rangle.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}ZX &= \int_{G \times G} u_t^* \tilde{\alpha}_s(x) e^{\ell(t)} \psi(t) \varphi(s) \, ds \, dt \\ &= \int_{G \times G} \tilde{\alpha}_{s-t}(x) u_t^* e^{\ell(t)} \psi(t) \varphi(s) \, ds \, dt \\ &= \int_{G \times G} \tilde{\alpha}_s(x) u_t^* e^{\ell(t)} \psi(t) \varphi(s+t) \, ds \, dt.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\langle \nabla(x), \varphi \otimes \psi \rangle = \left\langle \nabla(x), \left[(s, t) \mapsto e^{\ell(t)} \varphi(s+t) \psi(t) \right] \right\rangle. \quad (6..18)$$

Nous passons maintenant à la transformée de Fourier partielle. Soient $a \in \mathcal{D}(\hat{G})$ et $b \in \mathcal{D}(G)$, et posons $\varphi = \check{a} \in \mathcal{S}(G)$ et $\psi = b$. L'identité

$$\check{\mathcal{F}}_1\left([(p, t) \mapsto e^{\ell(t)} p(t) a(p) b(t)]\right)(s, t) = e^{\ell(t)} \varphi(s+t) \psi(t)$$

montre que (6..18) donne

$$\langle \mathcal{J}(x), a \otimes b \rangle = \left\langle \mathcal{J}(x), \left[(p, t) \mapsto e^{\ell(t)} p(t) a(p) b(t) \right] \right\rangle.$$

Écrivons

$$m(p, t) = 1 - e^{\ell(t)} p(t) \quad ((p, t) \in \widehat{G} \times G).$$

L'identité sur les tenseurs élémentaires ci-dessus dit que $\langle \mathcal{J}(x), m(a \otimes b) \rangle = 0$. La multiplication par m est continue sur $\mathcal{D}(\widehat{G} \times G)$. En effet, la multiplication par $p(t)$ a été traitée dans §6.1.1, tandis que $e^{\ell(t)}$ est lisse dans les variables de Lie et localement constante dans les variables totalement discontinues sur chaque stade de Bruhat. La densité des sommes finies de tenseurs élémentaires donne donc

$$\langle \mathcal{J}(x), m\Phi \rangle = 0 \quad (\Phi \in \mathcal{D}(\widehat{G} \times G)). \quad (6..19)$$

Si $\Phi \in \mathcal{D}(\widehat{G} \times G)$ est supporté là où m ne s'annule pas, le fait de division ci-dessus donne $\Psi \in \mathcal{D}(\widehat{G} \times G)$ avec $m\Psi = \Phi$. L'équation (6..19) donne alors $\langle \mathcal{J}(x), \Phi \rangle = 0$. D'où $\text{supp}(\mathcal{J}(x)) \subset m^{-1}(\{0\})$. La Proposition 6.5 donne

$$\text{Sp}_{\widehat{\alpha} \times \widehat{\alpha}}(x) \subset \{(p, t) \in \widehat{G} \times G \mid e^{\ell(t)} p(t) = 1\}.$$

Puisque $|p(t)| = 1$, l'égalité dans le dernier ensemble force $\ell(t) = 0$ et $p(t) = 1$.

Puisque G_0 est fermé, la formule de restriction coordonnée (6..2) donne $\text{Sp}_{\widehat{\alpha}}(x) \subset G_0$. Si $t \in \text{Sp}_{\widehat{\alpha}}(x)$ et $\nu \in G_0^\perp$, alors $t \in G_0$ et donc $\nu(t) = 1$. Ainsi l'action restreinte n'a que la fréquence triviale sur x , et (6..3) donne $\widehat{\alpha}_\nu(x) = x$ pour tout $\nu \in G_0^\perp$. Le théorème du point fixe dual [Ta03, Théorème X.2.3] donne donc $x \in (M \rtimes_\alpha G)^{G_0^\perp} = M \rtimes_{\alpha|_{G_0}} G_0$.

Enfin, x était arbitraire dans $M' \cap (M \rtimes_\alpha G)$, et l'ensemble

$$\{(p, t) \in \widehat{G} \times G_0 \mid p(t) = 1\}$$

est fermé. En prenant la fermeture de l'union des spectres individuels, on prouve l'inclusion de spectre annoncée pour l'action restreinte. $\square$

Corollaire 6.8. *Supposons que α préserve une trace normale fidèle semifinie sur M . Alors*

$$\text{Sp} \left((\tilde{\alpha} \times \widehat{\alpha})|_{M' \cap (M \rtimes_\alpha G)} \right) \subset \{(p, t) \in \widehat{G} \times G \mid p(t) = 1\}.$$

Démonstration. Appliquons le Théorème 6.7 avec $\ell = 0$. $\square$

6.2..6 Poids invariants

Supposons d'abord que α préserve un poids normal fidèle semifini ϕ et considérons

$$x = \int_G \varphi(t) u_t dt \in M' \cap (M \rtimes_\alpha G)$$

avec $\varphi \in C_c(G, M)$. La commutation avec M donne $\varphi(t) \alpha_t(a) = a \varphi(t)$ pour tout $a \in M$ et $t \in G$. Fixons $t \in G$ et posons $c = \varphi(t)$. Supposons formellement que c soit entier pour σ^ϕ et prenons $a \in M$ de sorte que les valeurs de poids ci-dessous soient définies. L'identité KMS, la relation de commutation appliquée à $\alpha_{-t}(a)$, et l'invariance de ϕ donnent

$$\phi(a \sigma_{-i}^\phi(c)) = \phi(ca) = \phi(\alpha_{-t}(a)c) = \phi(a \alpha_t(c)).$$

Ainsi, formellement,

$$\alpha_t(\varphi(t)) = \sigma_{-i}^\phi(\varphi(t)).$$

Puisque α commute avec σ^ϕ et $\nabla(x)(s, t) = \alpha_s(\varphi(t))$, cela devient

$$\nabla(x)(s + t, t) = \sigma_{-i}^\phi(\nabla(x)(s, t)).$$

Nous utilisons les faits de lissage modulaire et KMS suivants pour justifier ce calcul.

Lemme 6.9. *Soit N une algèbre de von Neumann, soit ϕ un poids normal fidèle semifini sur N , et posons $\sigma = \sigma^\phi$. Les assertions suivantes sont vraies. (i)(i)*

1. Soit $y \in N$ et soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ à transformée de Fourier à support compact. Posons

$$\sigma_\varphi(y) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(v) \sigma_v(y) dv.$$

Alors $\sigma_\varphi(y)$ est entier pour σ . L'inversion de Fourier étend φ en une fonction entière. Pour $z \in \mathbb{C}$, posons

$$\varphi_z(v) = \varphi(v - z) \quad (v \in \mathbb{R}).$$

Alors $z \mapsto \varphi_z$ est entière à valeurs dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et

$$\sigma_z(\sigma_\varphi(y)) = \sigma_{\varphi_z}(y) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(v - z) \sigma_v(y) dv \quad (z \in \mathbb{C}). \quad (6..20)$$

De plus,

$$\widehat{\varphi_z}(q) = e^{-iqz} \widehat{\varphi}(q). \quad (6..21)$$

Si $P \subset N$ est une sous-algèbre de von Neumann globalement σ -invariante et $y \in P' \cap N$, alors $\sigma_z(\sigma_\varphi(y)) \in P' \cap N$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

2. Si $A \in N$ est entier pour σ et $C \in \mathfrak{m}_\phi$, alors

$$AC, C\sigma_{-i}(A) \in \mathfrak{m}_\phi, \quad \phi(AC) = \phi(C\sigma_{-i}(A)).$$

3. L'algèbre de Tomita $\mathcal{T}_\phi$ consiste en les éléments entiers $a \in N$ tels que

$$\sigma_z(a) \in \mathfrak{n}_\phi \cap \mathfrak{n}_\phi^* \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Pour $a, b \in \mathcal{T}_\phi$, la fonctionnelle

$$d \mapsto \phi(b^* da) = \langle \pi_\phi(d) \Lambda_\phi(a), \Lambda_\phi(b) \rangle \quad (d \in N)$$

est normale. Ces fonctionnelles séparent les points de N .

Démonstration. Nous prouvons d'abord l'assertion (i). Soit K le support de $\widehat{\varphi}$. Pour $z \in \mathbb{C}$, la fonction

$$q \mapsto e^{-iqz} \widehat{\varphi}(q)$$

est supportée dans K , et sa dépendance en z est entière dans l'espace de Fréchet des fonctions lisses supportées dans K . L'inversion de Fourier et (6..21) montrent que $z \mapsto \varphi_z$ est entière à valeurs dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. L'estimation

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} h(v) \sigma_v(y) dv \right\| \leq \|h\|_1 \|y\| \quad (h \in L^1(\mathbb{R}))$$

montre que $z \mapsto \sigma_{\varphi_z}(y)$ est entière en norme. Pour $r \in \mathbb{R}$, un changement de variables donne

$$\sigma_r(\sigma_\varphi(y)) = \sigma_{\varphi_r}(y),$$

ce qui prouve (6..20). Si P est globalement invariante et $y \in P' \cap N$, alors $\sigma_v(y) \in P' \cap N$ pour tout $v \in \mathbb{R}$. La formule (6..20) prouve l'assertion sur le commutant.

Nous prouvons maintenant l'assertion (ii). Écrivons C comme une somme finie d'éléments r^*s avec $r, s \in \mathfrak{n}_\phi$. Il suffit de considérer $C = r^*s$. Posons $B = \sigma_{-i}(A)$. Pour un élément entier a , la formule standard de multiplication à droite

$$\Lambda_\phi(ra) = J_\phi \pi_\phi(\sigma_{i/2}(a))^* J_\phi \Lambda_\phi(r) \quad (r \in \mathfrak{n}_\phi)$$

montre que $ra \in \mathfrak{n}_\phi$. Notons R_a l'opérateur borné correspondant. Appliquée à A^* et B , la formule donne

$$rA^*, sB \in \mathfrak{n}_\phi, \quad R_B = R_{A^*}.$$

D'où

$$AC = (rA^*)^*s, \quad CB = r^*(sB)$$

appartiennent à $\mathfrak{m}_\phi$. De plus,

$$\begin{aligned} \phi(AC) &= \langle \Lambda_\phi(s), R_{A^*} \Lambda_\phi(r) \rangle \\ &= \langle R_B \Lambda_\phi(s), \Lambda_\phi(r) \rangle = \phi(CB). \end{aligned}$$

Cela prouve l'assertion (ii). Nous prouvons enfin l'assertion (iii). Si $a, b \in \mathcal{T}_\phi$ et $d \in N$, alors $da \in \mathfrak{n}_\phi$ et $b^*da \in \mathfrak{m}_\phi$. La formule affichée dans l'assertion (iii) est la formule GNS, et elle définit une fonctionnelle normale parce que π_ϕ est normale. Le sous-espace $\Lambda_\phi(\mathcal{T}_\phi)$ est dense dans l'espace de Hilbert GNS et π_ϕ est fidèle. Les coefficients matriciels correspondants séparent donc N . $\square$

Le théorème suivant étend le calcul à un élément arbitraire du commutant relatif.

Théorème 6.10. *Soit $\alpha : G \curvearrowright M$ une action continue d'un groupe abélien localement compact qui préserve un poids normal fidèle semifini ϕ . Alors*

$$M' \cap (M \rtimes_\alpha G) \subset M_\phi \rtimes_\alpha G.$$

De plus, on a

$$\text{Sp} \left((\tilde{\alpha} \times \hat{\alpha}) \Big|_{M' \cap (M \rtimes_\alpha G)} \right) \subset \{(p, t) \in \hat{G} \times G \mid p(t) = 1\}.$$

Démonstration. Prenons $x \in M' \cap (M \rtimes_\alpha G)$. Posons $\tilde{\phi} = \phi \circ T_M$ et $\sigma = \sigma^{\tilde{\phi}}$. L'invariance de ϕ implique que α commute avec σ^ϕ , et la formule modulaire du poids dual [Ha78a, Théorème 3.2(ii)] montre que σ étend σ^ϕ et fixe les unitaires canoniques. Ainsi M est globalement invariante sous σ , et $\tilde{\alpha}$ commute avec σ . Pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, posons

$$\sigma_\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(v) \sigma_v(x) \, dv.$$

L'estimation $\|\sigma_\varphi(x)\| \leq \|\varphi\|_1 \|x\|$ et la continuité en norme d'opérateur des évaluations de ∇ montrent que l'application $(F, \varphi) \mapsto \langle \nabla(\sigma_\varphi(x)), F \rangle$ est conjointement continue sur $\mathcal{S}(G \times G) \times \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Le théorème du noyau donne donc une unique distribution

$$\nabla^\sigma(x) \in \mathcal{S}'(G \times G \times \mathbb{R}, M)$$

satisfaisant

$$\langle \nabla^\sigma(x), F \otimes \varphi \rangle = \langle \nabla(\sigma_\varphi(x)), F \rangle \quad (6..22)$$

pour $F \in \mathcal{S}(G \times G)$ et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. C'est (6..16) pour $\delta = \sigma^\phi$.

Prenons $\xi, \eta \in \mathcal{D}(G)$ et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ dont la transformée de Fourier est à support compact. Posons

$$\begin{aligned} x_\xi &= \int_G \xi(s) \tilde{\alpha}_s(x) \, ds, \\ X &= \sigma_\varphi(x_\xi), \\ Y &= \int_G u_t^* \eta(t) \, dt. \end{aligned}$$

Le commutant relatif est globalement invariant sous $\tilde{\alpha}$ et σ , donc x_ξ lui appartient. Le Lemme 6.9 montre que X est entier pour σ . Posons

$$\psi = \varphi_{-i} = \varphi(\cdot + i), \quad Z = \sigma_{-i}(X) = \sigma_\psi(x_\xi).$$

Le Lemme 6.9 donne aussi $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\hat{\psi}(q) = e^{-q} \hat{\varphi}(q), \quad (6..23)$$

et $X, Z \in M' \cap (M \rtimes_\alpha G)$.

Choisissons $\rho \in \mathcal{S}(G)$ avec $\int_G \rho(s) \, ds = 1$ et posons

$$\Phi_\eta(s, t) = \rho(s) \eta(-s - t).$$

Alors $\Phi_\eta \in \mathcal{S}(G \times G)$, et un changement de variables identifie Y à l'intégrale de l'assertion (i) du Théorème 6.4 pour $x = 1$ et noyau Φ_η . Donc $Y \in \mathfrak{m}_{T_M}$.

Puisque $\tilde{\alpha}$ commute avec σ , un calcul direct donne

$$\begin{aligned} XY &= \int_{G \times G} \tilde{\alpha}_s(\sigma_\varphi(x)) u_t^* \xi(s) \eta(t) \, ds \, dt, \\ YZ &= \int_{G \times G} \tilde{\alpha}_s(\sigma_\psi(x)) u_t^* \xi(s + t) \eta(t) \, ds \, dt. \end{aligned}$$

Les deux noyaux appartiennent à $\mathcal{D}(G \times G)$, donc le Théorème 6.4 donne $XY, YZ \in \mathfrak{m}_{T_M}$.

Fixons $a, b \in \mathcal{T}_\phi$ et posons $C = b^* Y a$. La formule (6..10), appliquée à Y, XY , et YZ , donne

$$C, b^* XY a, b^* YZ a \in \mathfrak{m}_{\tilde{\phi}}.$$

Puisque X et Z commutent avec M , on a $XC = b^*XYa$ et $CZ = b^*YZa$. L'assertion (ii) du Lemme 6.9, appliquée à X et C , donne l'égalité du milieu ci-dessous. La formule (6..10) identifie les valeurs aux extrémités :

$$\begin{aligned}\phi(b^*T_M(XY)a) &= \tilde{\phi}(b^*XYa) = \tilde{\phi}(XC) \\ &= \tilde{\phi}(CZ) = \tilde{\phi}(b^*YZa) = \phi(b^*T_M(YZ)a).\end{aligned}$$

L'assertion (iii) du Lemme 6.9 montre que les fonctionnelles $d \mapsto \phi(b^*da)$ séparent M . Donc $T_M(XY) = T_M(YZ)$.

Par (6..22) et la formule directe pour ∇ ,

$$T_M(XY) = \langle \nabla^\sigma(x), \xi \otimes \eta \otimes \varphi \rangle.$$

De plus,

$$\begin{aligned}YZ &= \int_{G \times G \times \mathbb{R}} u_t^* \tilde{\alpha}_s(\sigma_v(x)) \eta(t) \xi(s) \varphi(v + i) dt ds dv \\ &= \int_{G \times G \times \mathbb{R}} \tilde{\alpha}_s(\sigma_v(x)) u_t^* \eta(t) \xi(s + t) \varphi(v + i) dt ds dv.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\langle \nabla^\sigma(x), \xi \otimes \eta \otimes \varphi \rangle = \left\langle \nabla^\sigma(x), \left[(s, t, v) \mapsto \xi(s + t) \eta(t) \varphi(v + i) \right] \right\rangle. \quad (6..24)$$

Identifions $\hat{\mathbb{R}}$ à $\mathbb{R}$ par les caractères $v \mapsto e^{iqv}$. Pour $\Phi \in \mathcal{S}(\hat{G} \times G \times \mathbb{R})$, posons

$$(\check{\mathcal{F}}_{1,3}\Phi)(s, t, v) = \int_{\hat{G} \times \mathbb{R}} p(s) e^{iqv} \Phi(p, t, q) dp dq$$

et définissons

$$\langle \mathcal{J}^\sigma(x), \Phi \rangle = \langle \nabla^\sigma(x), \check{\mathcal{F}}_{1,3}\Phi \rangle.$$

Pour η et φ fixés, les deux membres de (6..24) dépendent continûment de $\xi \in \mathcal{S}(G)$. La densité de $\mathcal{D}(G)$ dans $\mathcal{S}(G)$ étend donc cette identité à tout $\xi \in \mathcal{S}(G)$. Soient $a \in \mathcal{D}(\hat{G})$, $b \in \mathcal{D}(G)$, et $c \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, et prenons $\xi = \check{a}$, $\eta = b$, et $\varphi = \check{c}$. La formule (6..23) donne

$$\begin{aligned}\check{\mathcal{F}}_{1,3}\left([(p, t, q) \mapsto p(t) e^{-q} a(p) b(t) c(q)]\right)(s, t, v) \\ = \check{a}(s + t) b(t) \check{c}(v + i).\end{aligned}$$

L'équation (6..24) donne donc

$$\left\langle \mathcal{J}^\sigma(x), \left[(p, t, q) \mapsto (1 - p(t) e^{-q}) a(p) b(t) c(q) \right] \right\rangle = 0.$$

Posons

$$m(p, t, q) = 1 - p(t) e^{-q} \quad ((p, t, q) \in \hat{G} \times G \times \mathbb{R}).$$

La multiplication par m est continue sur $\mathcal{D}(\hat{G} \times G \times \mathbb{R})$. Sur chaque stade de Bruhat, la multiplication par $p(t)$ a la régularité établie dans § 6.1..1, tandis que e^{-q} est lisse. La densité des sommes finies de tenseurs élémentaires donne

$$m\mathcal{J}^\sigma(x) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\hat{G} \times G \times \mathbb{R}, M).$$

Si $\Phi \in \mathcal{D}(\widehat{G} \times G \times \mathbb{R})$ est supporté là où m ne s'annule pas, le fait de division donne $\Psi \in \mathcal{D}(\widehat{G} \times G \times \mathbb{R})$ avec $m\Psi = \Phi$. D'où $\langle \mathcal{J}^\sigma(x), \Phi \rangle = 0$, et $\text{supp}(\mathcal{J}^\sigma(x)) \subset m^{-1}(\{0\})$. La Proposition 6.6 donne maintenant

$$\text{Sp}_{\widetilde{\alpha} \times \widehat{\alpha} \times \sigma}(x) \subset \{(p, t, q) \mid p(t)e^{-q} = 1\}.$$

La dernière égalité force $q = 0$ et $p(t) = 1$. La projection sur la coordonnée q , la formule (6.2) et (6.3) montrent que $x \in (M \rtimes_\alpha G)_{\widetilde{\phi}}$. La description des points fixes des produits croisés [Ta03, Corollaire X.1.22] donne

$$(M \rtimes_\alpha G)_{\widetilde{\phi}} = M_\phi \rtimes_\alpha G.$$

Cela prouve la première assertion. La projection sur les coordonnées (p, t) donne

$$\text{Sp}_{\widetilde{\alpha} \times \widehat{\alpha}}(x) \subset \{(p, t) \in \widehat{G} \times G \mid p(t) = 1\}.$$

Puisque $x \in M' \cap (M \rtimes_\alpha G)$ était arbitraire, en prenant la fermeture de l'union de ces spectres individuels on obtient le spectre annoncé de l'action restreinte. $\square$

6.2..7 Le commutant relatif pour les flots

Le Théorème 6.10 donne la dichotomie du commutant relatif pour les flots sur les facteurs. Pour un groupe abélien localement compact G , définissons l'ensemble de résonance

$$\mathcal{R}_G = \{(p, t) \in \widehat{G} \times G \mid p(t) = 1\}.$$

Proposition 6.11. *Identifions $\widehat{\mathbb{R}}$ à $\mathbb{R}$ en associant $s \in \mathbb{R}$ au caractère $r \mapsto e^{irs}$. Soit $\Sigma < \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ un sous-groupe fermé tel que*

$$\Sigma \subset \mathcal{R}_{\mathbb{R}} = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid st \in 2\pi\mathbb{Z}\}.$$

Alors soit $\Sigma \subset \mathbb{R} \times \{0\}$, soit $\Sigma \subset \{0\} \times \mathbb{R}$, soit Σ est discret.

Démonstration. Supposons que Σ ne soit pas discret. Choisissons une suite $((p_n, t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\Sigma \setminus \{(0, 0)\}$ convergeant vers $(0, 0)$. Puisque $p_n t_n \in 2\pi\mathbb{Z}$, on a $p_n t_n = 0$ éventuellement. Après passage à une sous-suite, soit $t_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $p_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Dans le premier cas, fixons $(p, t) \in \Sigma$. Puisque $(p_n, 0) \in \Sigma$ et que Σ est un sous-groupe, on a $(p + p_n, t) \in \Sigma$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En appliquant la relation de résonance à (p, t) et $(p + p_n, t)$, on obtient $p_n t \in 2\pi\mathbb{Z}$. En faisant tendre n vers l'infini, on obtient $t = 0$, et donc $\Sigma \subset \mathbb{R} \times \{0\}$.

Dans le second cas, le même argument donne $\Sigma \subset \{0\} \times \mathbb{R}$. $\square$

Preuve du Théorème I. Posons $B = M' \cap (M \rtimes_\alpha \mathbb{R})$. Identifions $\widehat{\mathbb{R}}$ à $\mathbb{R}$ en associant $s \in \mathbb{R}$ au caractère $r \mapsto e^{irs}$. Puisque M est un facteur, la formule du point fixe dual et les générateurs du produit croisé donnent

$$B^{\widehat{\alpha}} = \mathbb{C}1, \quad B^{\widetilde{\alpha}} = \mathcal{Z}(M \rtimes_\alpha \mathbb{R}).$$

Donc $\widetilde{\alpha} \times \widehat{\alpha}$ est ergodique sur B . Posons

$$\beta = (\widetilde{\alpha} \times \widehat{\alpha})|_B, \quad K = \ker(\beta) < \mathbb{R}^2.$$

Son spectre d'Arveson global, son spectre de Connes et l'annulateur de son noyau coïncident par (6.4). Ainsi

$$\Sigma = \text{Sp}(\beta) = \Gamma(\beta) = K^\perp \subset \mathbb{R}^2$$

est un sous-groupe fermé. Le Théorème 6.10 donne

$$\Sigma \subset \mathcal{R}_\mathbb{R} = \{(p, t) \in \mathbb{R}^2 \mid pt \in 2\pi\mathbb{Z}\}.$$

Par la Proposition 6.11, nous avons trois cas à considérer. Supposons d'abord que $\Sigma \subset \mathbb{R} \times \{0\}$. La formule de restriction coordonnée (6.2) et (6.3) donnent $B = B^{\hat{\alpha}} = \mathbb{C}1$, donc $B = \mathcal{Z}(M \rtimes_\alpha \mathbb{R})$. Si $\Sigma \subset \{0\} \times \mathbb{R}$ alors $B = B^{\tilde{\alpha}} = \mathcal{Z}(M \rtimes_\alpha \mathbb{R})$. Cela prouve l'assertion (i) chaque fois que Σ n'est pas discret.

Nous prouvons ensuite l'assertion (ii) lorsque Σ est discret. La Proposition 6.5, appliquée avec $N = B$, montre que les sous-espaces propres joints engendrent B .

Si $0 \neq c \in B$ est un opérateur propre joint en (p, t) , alors c^*c et cc^* appartiennent à $B^{\tilde{\alpha} \times \hat{\alpha}} = \mathbb{C}1$. Après normalisation, c est unitaire. Puisque $\hat{\alpha}_s(c) = e^{-ist}c$, l'élément $x = cu_t^*$ est fixé par l'action duale et appartient donc à M . Il est unitaire, et la relation $c \in M'$ donne $yx = x\alpha_t(y)$ pour tout $y \in M$. Ainsi $\alpha_t = \text{Ad}(x^*)$, et

$$c = v^*u_t$$

pour l'unitaire $v = x^* \in M$. Puisque les sous-espaces propres joints engendrent B , ces unitaires engendrent B . Cela prouve l'assertion (ii).

Enfin, supposons que $M \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ soit un facteur et que α soit extérieur. Dans le premier cas, $B = \mathcal{Z}(M \rtimes_\alpha \mathbb{R}) = \mathbb{C}1$. Dans le second cas, l'extériorité exclut tout temps intérieur $t \neq 0$, tandis que le sous-espace propre en $t = 0$ est scalaire. Donc à nouveau $B = \mathbb{C}1$, ce qui signifie que α est strictement extérieur. $\square$

Nous terminons la Sous-section 6.2. en précisant la relation avec le théorème du commutant relatif de Connes–Takesaki annoncé dans la Section 1..

Proposition 6.12. *Soit P une algèbre de von Neumann et soit ϕ un poids normal fidèle semifini sur P . Alors*

$$P' \cap (P \rtimes_{\sigma\phi} \mathbb{R}) = \mathcal{Z}(P \rtimes_{\sigma\phi} \mathbb{R}).$$

Démonstration. Soit $(u_t)_{t \in \mathbb{R}}$ les unitaires canoniques dans $P \rtimes_{\sigma\phi} \mathbb{R}$. Puisque l'action modulaire préserve ϕ et est triviale sur P_ϕ , le Théorème 6.10 donne

$$P' \cap (P \rtimes_{\sigma\phi} \mathbb{R}) \subset P_\phi \rtimes_{\text{id}} \mathbb{R} \subset P \rtimes_{\sigma\phi} \mathbb{R}.$$

L'algèbre du milieu commute avec u_s pour tout $s \in \mathbb{R}$. Tout élément du membre de gauche commute aussi avec P . Puisque le produit croisé est engendré par P et les unitaires $(u_s)_{s \in \mathbb{R}}$, cela donne

$$P' \cap (P \rtimes_{\sigma\phi} \mathbb{R}) \subset \mathcal{Z}(P \rtimes_{\sigma\phi} \mathbb{R}).$$

L'inclusion réciproque est immédiate. $\square$

6.3. Rigidité d'extériorité stricte pour les groupes abéliens localement compacts

6.3..1 Produits croisés et coefficients atomiques

Soit M une algèbre de von Neumann et soit $\alpha : G \curvearrowright M$ une action ponctuellement faible* continue. Posons $B = M' \cap (M \rtimes_\alpha G)$ et écrivons $u : G \rightarrow \mathcal{U}(M \rtimes_\alpha G)$ pour la représentation unitaire canonique, caractérisée par $u_t x u_t^* = \alpha_t(x)$ pour $x \in M$ et $t \in G$. Rappelons que $\tilde{\alpha}_r = \text{Ad}(u_r)$ et que l'action duale est normalisée par

$$\hat{\alpha}_\nu(x) = x, \quad \hat{\alpha}_\nu(u_t) = \overline{\nu(t)} u_t$$

pour $x \in M$, $r, t \in G$ et $\nu \in \hat{G}$. Ces actions commutent et préservent B . La formule du point fixe dual [Ta03, Théorème X.2.3] donne

$$B^{\hat{\alpha}} = \mathcal{Z}(M), \quad B^{\tilde{\alpha}} = \mathcal{Z}(M \rtimes_\alpha G). \quad (6..25)$$

En effet, un élément de $B^{\tilde{\alpha}}$ commute avec M et avec u_r pour tout $r \in G$, et est donc central dans le produit croisé. La réciproque est immédiate.

Nous identifions $\widehat{G \times \hat{G}}$ à $\hat{G} \times G$ par

$$((r, \nu), (p, t)) \mapsto p(r)\nu(t).$$

Ainsi la première coordonnée spectrale jointe est duale à $\tilde{\alpha}$, tandis que la seconde est duale à $\hat{\alpha}$.

La proposition suivante identifie les sous-espaces propres de $\hat{\alpha}$.

Proposition 6.13. *Pour $t \in G$, posons*

$$B_t = \{b \in B \mid \hat{\alpha}_\nu(b) = \overline{\nu(t)}b \text{ pour tout } \nu \in \hat{G}\}.$$

Alors

$$B_t = \{xu_t \mid x \in M, yx = x\alpha_t(y) \text{ pour tout } y \in M\}.$$

*Si M est un facteur, alors $B_t \neq 0$ si et seulement si $\alpha_t \in \text{Inn}(M)$. Si $\alpha_t = \text{Ad}(v)$ pour un certain $v \in \mathcal{U}(M)$, alors $B_t = \mathbb{C}v^*u_t$.*

Démonstration. Si $b \in M \rtimes_\alpha G$ satisfait $\hat{\alpha}_\nu(b) = \overline{\nu(t)}b$ pour tout $\nu \in \hat{G}$, alors bu_t^* est fixé par l'action duale. Puisque $(M \rtimes_\alpha G)^{\hat{\alpha}} = M$, on a $b = xu_t$ pour un certain $x \in M$. La relation $b \in M'$ est équivalente à

$$yx = x\alpha_t(y) \quad (y \in M). \quad (6..26)$$

Cela prouve la formule générale.

Supposons maintenant que M soit un facteur et $x \neq 0$. En appliquant (6..26) à y^* puis en prenant les adjoints, on obtient $x^*y = \alpha_t(y)x^*$ pour tout $y \in M$. Donc x^*x et xx^* sont centraux. Ainsi $x^*x = c1$ et $xx^* = d1$ pour certains $c, d > 0$, et $(xx^*)x = x(x^*x)$ donne $c = d$. Par conséquent, $c^{-1/2}x$ est un unitaire qui implémente α_t^{-1} , donc α_t est intérieur.

Réciproquement, si $\alpha_t = \text{Ad}(v)$, alors $v^*u_t y = v^*\alpha_t(y)u_t = yv^*u_t$ pour tout $y \in M$. Ainsi $v^*u_t \in B$ et c'est un opérateur propre en t pour $\hat{\alpha}$. Si xu_t est un autre tel opérateur propre, alors (6..26) implique que $xv \in \mathcal{Z}(M)$. Par conséquent $x \in \mathbb{C}v^*$. $\square$

6.3..2 La propriété de projection de résonance

Pour un groupe abélien localement compact à base dénombrable général G , nous utilisons la propriété suivante. Rappelons que

$$\mathcal{R}_G = \{(p, t) \in \widehat{G} \times G \mid p(t) = 1\}.$$

Nous disons qu'un groupe abélien localement compact à base dénombrable G a la *propriété de projection de résonance* lorsque, pour tout sous-groupe fermé $\Sigma < \widehat{G} \times G$ contenu dans $\mathcal{R}_G$, soit Σ est discret, soit au moins une de ses projections coordonnées est discrète.

Exiger que tout sous-groupe résonant non discret soit contenu dans un axe de coordonnées serait trop fort : cette propriété échoue déjà pour de nombreux groupes compacts et discrets. Nous exigeons plutôt qu'une projection coordonnée soit discrète.

Proposition 6.14. *Pour un groupe abélien localement compact à base dénombrable G , les assertions suivantes sont équivalentes. (i)(i)*

1. Le groupe G a la propriété de projection de résonance.
2. Tout sous-groupe fermé de G est discret ou cocompact.
3. Le groupe G est compact, discret, ou isomorphe à $\mathbb{R} \times F$ pour un groupe abélien fini F .

Démonstration. Nous prouvons d'abord (i) $\Rightarrow$ (ii). Supposons que G ait la propriété de projection de résonance. Pour tout sous-groupe fermé $K < G$, le produit $K^\perp \times K$ est un sous-groupe fermé de $\mathcal{R}_G$. Si K est non discret et non cocompact, alors les deux projections coordonnées de ce produit sont non discrètes. En effet, $K^\perp \cong \widehat{G/K}$, et le dual d'un groupe abélien localement compact est discret exactement lorsque le groupe est compact. Le produit est aussi non discret, contredisant la propriété de projection de résonance.

Nous prouvons ensuite (ii) $\Rightarrow$ (iii). Par le théorème de structure principal pour les groupes abéliens localement compacts [HR79, Théorème 24.30], écrivons $G \cong \mathbb{R}^n \times H$, où H a un sous-groupe ouvert compact C . Supposons que tout sous-groupe fermé de G soit discret ou cocompact. Si $n \geq 2$, une copie coordonnée de $\mathbb{R}$ n'est ni discrète ni cocompacte. Donc $n \leq 1$. Si $n = 1$ et C est infini, alors $\{0\} \times C < G$ n'est ni discret ni cocompact, parce que son quotient a encore une coordonnée $\mathbb{R}$. Donc C est fini et H est discret. Le sous-groupe $\mathbb{R} \times \{0\}$ doit alors être cocompact, donc H est fini. Si $n = 0$, un C fini rend H discret. Un C infini est non discret et donc cocompact. Puisque C est ouvert, le quotient compact H/C est aussi discret, donc fini. Ainsi H est compact.

Enfin, nous prouvons (iii) $\Rightarrow$ (i). Supposons (iii). La propriété de projection de résonance est immédiate pour G compact, puisque $\widehat{G}$ est discret, et pour G discret. Soit $G = \mathbb{R} \times F$ avec F fini, et identifions $\widehat{G} = \mathbb{R} \times \widehat{F}$. Soit $\Sigma < \widehat{G} \times G$ un sous-groupe fermé non discret contenu dans $\mathcal{R}_G$. Le groupe ambiant est métrisable, donc il existe une suite $(z_j)_{j \in \mathbb{N}}$ dans $\Sigma \setminus \{(1, 0)\}$ convergeant vers l'identité. Les coordonnées finies s'annulent éventuellement, donc nous pouvons écrire $z_j = ((p_j, 1), (t_j, 0))$, où $p_j, t_j \rightarrow 0$. La relation de résonance donne $p_j t_j \in 2\pi\mathbb{Z}$, et donc $p_j t_j = 0$ éventuellement. Après passage à une sous-suite, soit $t_j = 0 \neq p_j$ pour tout $j \in \mathbb{N}$, soit $p_j = 0 \neq t_j$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. Dans le premier cas, en appliquant la résonance à $z + z_j$ pour $z = ((p, \eta), (t, f)) \in \Sigma$, on obtient $p_j t \in 2\pi\mathbb{Z}$. Il s'ensuit que $t = 0$, donc $\text{pr}_G(\Sigma) \subset \{0\} \times F$, qui est discret. Le second cas donne de même $\text{pr}_{\widehat{G}}(\Sigma) \subset \{0\} \times \widehat{F}$. $\square$

Nous appliquons maintenant cette propriété au commutant relatif.

6.3.3 Rigidité pour les groupes ayant la propriété de projection de résonance

Proposition 6.15. *Soit G ayant la propriété de projection de résonance. Soit M un facteur semifini diffus et soit $\alpha : G \curvearrowright M$ une action extérieure préservant la trace. Si $M \rtimes_\alpha G$ est un facteur, alors α est strictement extérieur.*

Démonstration. Conservons les notations de § 6.3.1. Puisque M et $M \rtimes_\alpha G$ sont des facteurs, (6.25) donne $B^{\tilde{\alpha}} = B^{\hat{\alpha}} = \mathbb{C}1$. Ainsi $\tilde{\alpha} \times \hat{\alpha}$ est ergodique sur B , et si

$$\beta = (\tilde{\alpha} \times \hat{\alpha})|_B, \quad K = \ker(\beta) < G \times \hat{G},$$

alors (6.4) donne

$$\Sigma = \text{Sp}(\beta) = \Gamma(\beta) = K^\perp < \hat{G} \times G$$

comme sous-groupe fermé. Le Corollaire 6.8 donne $K^\perp = \Sigma \subset \mathcal{R}_G$.

Si Σ est discret, la Proposition 6.5 montre que les sous-espaces propres joints engendrent B et que tout point de Σ est la valeur propre d'un opérateur propre joint non nul. Si $(\chi, t) \in \Sigma \setminus \{(1, 0)\}$, choisissons un tel opérateur propre c . Si $t \neq 0$, la Proposition 6.13 rend α_t intérieur, contrairement à l'extériorité. Si $t = 0$, alors $c \in B^{\hat{\alpha}} = \mathbb{C}1$ et $\chi = 1$, ce qui est encore une contradiction. Donc $\Sigma = \{(1, 0)\}$. L'assertion de génération de la Proposition 6.5 et $B^{\tilde{\alpha} \times \hat{\alpha}} = \mathbb{C}1$ donnent $B = \mathbb{C}1$.

Supposons ensuite que $P = \text{pr}_{\hat{G}}(\Sigma)$ soit discret. Un sous-groupe discret d'un groupe localement compact est fermé. Pour tout $b \in B$, la formule (6.2) donne $\text{Sp}_{\tilde{\alpha}}(b) \subset \overline{\text{pr}_{\hat{G}}(\text{Sp}_{\tilde{\alpha} \times \hat{\alpha}}(b))} \subset P$.

En prenant l'union fermée sur $b \in B$, on obtient $\text{Sp}(\tilde{\alpha}|_B) \subset P$. Fixons $\chi \in \text{Sp}(\tilde{\alpha}|_B)$ et choisissons un voisinage ouvert U de χ tel que $U \cap P = \{\chi\}$. Par [Ta03, Lemme XI.1.3(v)], il existe $0 \neq c \in B$ avec $\text{Sp}_{\tilde{\alpha}}(c) \subset U$. Puisque $\text{Sp}_{\tilde{\alpha}}(c) \subset \text{Sp}(\tilde{\alpha}|_B) \subset P$, on a $\text{Sp}_{\tilde{\alpha}}(c) \subset \{\chi\}$. La formule (6.3) donne donc $\tilde{\alpha}_r(c) = \overline{\chi(r)}c$ pour tout $r \in G$. Puisque $B^{\tilde{\alpha}} = \mathbb{C}1$, c^*c et cc^* sont scalaires, donc après normalisation c est unitaire. De plus, le sous-espace propre en χ est de dimension un : si d est un autre élément de ce sous-espace propre, alors $dc^* \in B^{\tilde{\alpha}} = \mathbb{C}1$. Puisque $\tilde{\alpha}$ et $\hat{\alpha}$ commutent, il existe un caractère continu $\lambda : \hat{G} \rightarrow \mathbb{T}$ tel que $\hat{\alpha}_\nu(c) = \lambda(\nu)c$. Pour voir la continuité, choisissons $\omega \in B_*$ avec $\omega(c) \neq 0$. Alors $\lambda(\nu) = \omega(\hat{\alpha}_\nu(c))/\omega(c)$, qui est continue en ν . La dualité de Pontryagin donne $t \in G$ avec $\lambda(\nu) = \overline{\nu(t)}$. Ainsi c est un opérateur propre joint en (χ, t) . L'extériorité et la Proposition 6.13 forcent $t = 0$. Il s'ensuit que $c \in B^{\hat{\alpha}} = \mathbb{C}1$, et donc $\chi = 1$. Par conséquent $\text{Sp}(\tilde{\alpha}|_B) = \{1\}$, donc $B = B^{\tilde{\alpha}} = \mathbb{C}1$.

Supposons enfin que $Q = \text{pr}_G(\Sigma)$ soit discret. La formule de restriction coordonnée donne $\text{Sp}(\hat{\alpha}|_B) \subset Q$. Fixons $t \in \text{Sp}(\hat{\alpha}|_B)$ et choisissons un voisinage ouvert U de t tel que $U \cap Q = \{t\}$. Par [Ta03, Lemme XI.1.3(v)], il existe $0 \neq c \in B$ avec $\text{Sp}_{\hat{\alpha}}(c) \subset U$. Puisque $\text{Sp}_{\hat{\alpha}}(c) \subset Q$, son spectre est contenu dans $\{t\}$. La formule (6.3) donne $\hat{\alpha}_\nu(c) = \overline{\nu(t)}c$ pour tout $\nu \in \hat{G}$. Puisque $B^{\hat{\alpha}} = \mathbb{C}1$, c^*c et cc^* sont scalaires, donc c est unitaire après normalisation. Si d est un autre élément du sous-espace propre en t , alors $dc^* \in B^{\hat{\alpha}} = \mathbb{C}1$. Ainsi ce sous-espace propre est de dimension un. Il est invariant sous $\tilde{\alpha}$, donc il existe un caractère continu $\chi \in \hat{G}$ tel que $\tilde{\alpha}_r(c) = \overline{\chi(r)}c$ pour tout $r \in G$. Pour vérifier la continuité, choisissons $\omega \in B_*$ avec $\omega(c) \neq 0$. Alors

$$\overline{\chi(r)} = \frac{\omega(\tilde{\alpha}_r(c))}{\omega(c)} \quad (r \in G),$$

qui est continue en r . Ainsi c est un opérateur propre joint en (χ, t) . La Proposition 6.13 et l'extériorité forcent $t = 0$. Alors $c \in B^{\widehat{\alpha}} = \mathbb{C}1$, ce qui force aussi $\chi = 1$. Par conséquent $\text{Sp}(\widehat{\alpha}|_B) = \{0\}$ et $B = B^{\widehat{\alpha}} = \mathbb{C}1$. $\square$

6.3..4 Contre-exemples sur le facteur hyperfini II_1

Nous montrons maintenant que tout groupe exclu par la Proposition 6.14 a un contre-exemple sur le facteur hyperfini de type II_1 . La même construction s'applique à tout sous-groupe fermé non discret et non cocompact.

Nous utilisons le fait que tout groupe localement compact à base dénombrable admet une action gaussienne pmp mélangeante essentiellement libre [KPV15, Remark 1.1]. On peut prendre un produit infini de l'action gaussienne associée à la représentation régulière gauche réelle.

Nous enregistrons aussi le critère de factorialité utilisé à la fin de la construction.

Lemme 6.16. *Soit H un groupe localement compact à base dénombrable et soit (κ, w) une action par cocycle borélien de H sur une algèbre de von Neumann P à préduel séparable. Supposons que l'action induite sur $\mathcal{Z}(P) = L^\infty(Y)$ soit ergodique et essentiellement libre, au sens où presque tout point de Y a un stabilisateur trivial. Alors $P \rtimes_{\kappa, w} H$ est un facteur.*

Démonstration. Posons $Q = P \overline{\otimes} \mathbb{B}(L^2(H))$, $a_h = \kappa_h \otimes \text{id}$, et $u(h, k) = w(h, k) \otimes 1$. Soit λ_h la représentation régulière gauche sur $L^2(H)$. Si M_F désigne la multiplication par une fonction borélienne bornée F à valeurs dans P sur H , définissons

$$v_h = M_{s \mapsto w(h, h^{-1}s)}^*(1 \otimes \lambda_h) \in \mathcal{U}(Q).$$

Pour $l = (hk)^{-1}s$, le coefficient de multiplication de $v_h a_h(v_k)u(h, k)$ en s est

$$w(h, kl)^* \kappa_h(w(k, l)^*) w(h, k) = w(hk, l)^*.$$

Ici nous avons utilisé l'identité de cocycle $w(h, k)w(hk, l) = \kappa_h(w(k, l))w(h, kl)$. Par conséquent,

$$v_h a_h(v_k)u(h, k) = v_{hk}, \quad \beta_h = \text{Ad}(v_h) \circ a_h$$

définit une action borélienne genuine sur Q . Puisque Q a un préduel séparable, son groupe d'automorphismes est polonais et cet homomorphisme borélien est continu. L'action de β sur $\mathcal{Z}(Q) = \mathcal{Z}(P) \otimes 1$ est l'action donnée sur le centre.

Dans le produit croisé tordu par (a, u) , en multipliant son unitaire implémentant en h par v_h , on obtient une représentation implémentante genuine pour β . Ces générateurs donnent

$$Q \rtimes_{\beta} H \cong Q \rtimes_{a, u} H \cong (P \rtimes_{\kappa, w} H) \overline{\otimes} \mathbb{B}(L^2(H)).$$

Désintégrons Q sur son centre. La liberté essentielle rend le groupoïde de transformation $H \ltimes Y$ principal après avoir écarté un ensemble nul invariant. La formule du centre non tordu [Ya92, Théorème 3.2(iii)] donne donc

$$\mathcal{Z}(Q \rtimes_{\beta} H) = \mathcal{Z}(Q)^{\beta} = L^\infty(Y)^H = \mathbb{C}1.$$

En retirant le facteur tensoriel de type I, on prouve l'assertion. $\square$

Théorème 6.17. *Soit G un groupe abélien localement compact à base dénombrable et soit $K < G$ un sous-groupe fermé. Supposons que K soit non discret et que G/K soit non compact. Alors il existe une action extérieure préservant la trace $\alpha : G \curvearrowright R$ sur le facteur hyperfini de type II_1 telle que $R \rtimes_\alpha G$ soit un facteur et $R' \cap (R \rtimes_\alpha G)$ soit diffus.*

Démonstration. Posons $L = \widehat{K}$ et $H = G/K$. L'application de restriction dans la suite exacte

$$0 \longrightarrow K^\perp \cong \widehat{H} \longrightarrow \widehat{G} \xrightarrow{r} L \longrightarrow 0$$

est surjective. Les groupes L et H sont non compacts. Choisissons un sous-groupe dénombrable $\Lambda < \widehat{G}$ tel que $r(\Lambda)$ soit dense dans L et $\Lambda_0 = \Lambda \cap K^\perp$ soit infini. C'est possible en prenant des relèvements d'un sous-ensemble dénombrable dense de L et en adjoignant un sous-groupe dénombrable infini de $K^\perp \cong \widehat{H}$. Nous regardons Λ comme un groupe discret.

Choisissons une action pmp mélangeante essentiellement libre $\rho : L \times H \curvearrowright (Y, \mu)$ sur un espace de probabilité standard non atomique et une action de Bernoulli non triviale $\eta : \Lambda \curvearrowright (Z, \nu)$. Puisque L et H sont non compacts, les restrictions $\rho|_L$ et $\rho|_H$ sont mélangeantes et donc ergodiques. Puisque Λ_0 est infini, la restriction $\eta|_{\Lambda_0}$ est mélangeante et donc ergodique. L'action de Bernoulli η est essentiellement libre. Posons $A = L^\infty(Y \times Z)$. Pour $\xi \in \Lambda$ et $h \in H$, définissons $\sigma_\xi = \rho_{(r(\xi), 0)} \otimes \eta_\xi$ et $\theta_h = \rho_{(0, h)} \otimes \text{id}$. L'action σ est libre parce que η est libre. Elle est ergodique parce que la restriction au sous-groupe infini Λ_0 supprime d'abord la coordonnée Z et la densité de $r(\Lambda)$ réduit ensuite la coordonnée Y aux fonctions L -fixes. Ainsi $M = A \rtimes_\sigma \Lambda$ est un facteur de type II_1 . Le groupe Λ est dénombrable et moyennable, donc sa relation d'orbite est hyperfinie par [CFW81, Main Théorème]. Par conséquent le facteur de l'espace mesuré de groupe est hyperfini et $M \cong R$.

Pour $g \in G$, posons $\alpha_g(a) = \theta_{g+K}(a)$ pour $a \in A$ et $\alpha_g(u_\xi) = \overline{\xi(g)}u_\xi$ pour $\xi \in \Lambda$. Les relations de covariance montrent que c'est une action. Elle préserve la trace canonique. Les formules sont continues en g sur l'algèbre du produit croisé algébrique. Puisque les automorphismes sont des L^2 -isométries et que le produit croisé algébrique est L^2 -dense, l'action est ponctuellement L^2 -continue et donc ponctuellement faible* continue sur M .

Nous prouvons d'abord l'extériorité. Si $\alpha_g = \text{Ad}(v)$, alors v normalise l'algèbre de Cartan A . Posons $h = g + K$. Si $h \neq 0$, la restriction de $\text{Ad}(v)$ à A placerait la transformation θ_h dans le groupe complet de la relation d'orbite de σ par [FM77, Proposition 2.9]. Pour tout $\xi \in \Lambda$, l'ensemble d'égalité de θ_h et σ_ξ est nul par liberté de ρ et η . La dénombrabilité de Λ donne une contradiction.

Il reste à considérer $g \in K$. Dans ce cas α_g fixe A point par point, donc $v \in A$. En comparant sur les unitaires u_ξ , on obtient $\sigma_\xi(v) = \xi(g)v$ pour tout $\xi \in \Lambda$. Pour $\xi \in \Lambda_0$, le scalaire de droite vaut un. L'ergodicité de $\eta|_{\Lambda_0}$ rend donc v indépendant de la coordonnée Z . L'équation restante en fait une fonction propre pour la sous-action dense $r(\Lambda)$ de l'action mélangeante $\rho|_L$. La continuité étend le sous-espace invariant de dimension finie correspondant de $r(\Lambda)$ à L . Le mélange de $\rho|_L$ implique alors que v est scalaire. Il s'ensuit que $\xi(g) = 1$ pour tout $\xi \in \Lambda$. La densité de $r(\Lambda)$ dans $\widehat{K}$ donne $g = 0$.

Nous calculons ensuite le centre après croisement par K . Posons $P = M \rtimes_{\alpha|_K} K$. Nous regardons P comme la sous-algèbre de von Neumann de $M \rtimes_\alpha G$ engendrée par M et les unitaires $(V_k)_{k \in K}$. Cette représentation de $M \rtimes_{\alpha|_K} K$ est fidèle même lorsque K n'est pas ouvert. En effet, choisissons

une section borélienne $s : H \rightarrow G$. La désintégration de Weil exprime la représentation régulière restreinte comme une intégrale directe sur H de représentations régulières K -covariantes dont les représentations de M sont précomposées par $\alpha_{-s(h)}$. Chaque représentation de fibre est fidèle, donc leur intégrale directe l'est aussi.

Puisque α_k fixe A point par point pour tout $k \in K$, la représentation fidèle ci-dessus identifie $A \rtimes_{\text{id}} K = A \overline{\otimes} L(K)$ à la sous-algèbre de P engendrée par A et $L(K)$. Les générateurs satisfont

$$\begin{aligned} u_\xi a u_\xi^* &= \sigma_\xi(a), & V_k u_\xi V_k^* &= \overline{\xi(k)} u_\xi, \\ u_\xi V_k u_\xi^* &= r(\xi)(k) V_k \end{aligned} \quad (a \in A, k \in K, \xi \in \Lambda).$$

Identifions $L(K)$ à $L^\infty(L)$ en envoyant V_k sur la fonction $q \mapsto \overline{q(k)}$. Pour $l \in L$, soit $\tau_l(\varphi)(q) = \varphi(q - l)$. Les relations des générateurs donnent un homomorphisme surjectif

$$\Pi : (A \overline{\otimes} L^\infty(L)) \rtimes_{\tilde{\sigma}} \Lambda \longrightarrow P,$$

où $\tilde{\sigma}_\xi = \sigma_\xi \otimes \tau_{r(\xi)}$. Cet homomorphisme est fidèle. En effet, l'action duale de $\hat{\Lambda}$ sur M commute avec $\alpha|_K$, donc elle s'étend à P en fixant les unitaires V_k . Elle fixe A et multiplie chaque u_ξ par le conjugué de la valeur du caractère correspondant. L'enveloppe des $(A \overline{\otimes} L^\infty(L))u_\xi$ sur $\xi \in \Lambda$ est faible* dense dans P . Donc l'algèbre des points fixes de l'action duale est $A \overline{\otimes} L^\infty(L)$, et la moyennisation donne une espérance conditionnelle fidèle E_P sur cette algèbre. Soit E l'espérance fidèle canonique sur le produit croisé. L'application Π entrelace E et E_P et est l'identité sur $A \overline{\otimes} L^\infty(L)$. Si $x \geq 0$ et $\Pi(x) = 0$, alors $\Pi(E(x)) = E_P(\Pi(x)) = 0$, et donc $E(x) = 0$. La fidélité de E donne $x = 0$, donc Π est injective.

Ainsi

$$P \cong (A \overline{\otimes} L^\infty(L)) \rtimes_{\tilde{\sigma}} \Lambda. \quad (6..27)$$

Nous utilisons la convention $(\tilde{\sigma}_\xi f)(x) = f(\xi^{-1} \cdot x)$ pour l'action correspondante sur les points. Le changement de variables $y_0 = \rho_{(-q,0)}(y)$ donne

$$\begin{aligned} \xi \cdot (y, z, q) &= (\rho_{(r(\xi),0)}(y), \eta_\xi(z), q + r(\xi)), \\ \xi \cdot (y_0, z, q) &= (y_0, \eta_\xi(z), q + r(\xi)). \end{aligned} \quad (6..28)$$

L'action sur $Z \times L$ est libre. En effet, un point fixe pour ξ force $r(\xi) = 0$, et la liberté essentielle de η force alors $\xi = 0$. Pour prouver l'ergodicité, soit $F \in L^\infty(Z \times L)$ invariant. L'invariance sous Λ_0 et l'ergodicité de $\eta|_{\Lambda_0}$ donnent $F(z, q) = g(q)$ pour un certain $g \in L^\infty(L)$. L'invariance sous Λ donne $g(q + r(\xi)) = g(q)$ pour tout $\xi \in \Lambda$. La densité de $r(\Lambda)$ dans L et la continuité des translations dans $L^2_{\text{loc}}(L)$ impliquent que g est constante. Ainsi $C = L^\infty(Z \times L) \rtimes \Lambda$ est un facteur. Dans les coordonnées de (6.28), la décomposition (6.27) donne

$$P \cong L^\infty(Y) \overline{\otimes} C, \quad \mathcal{Z}(P) = L^\infty(Y). \quad (6..29)$$

Ainsi $M' \cap (M \rtimes_\alpha G)$ contient la sous-algèbre unifère diffuse $\mathcal{Z}(P) = L^\infty(Y)$.

Enfin, choisissons une section borélienne $s : H \rightarrow G$ avec $s(0) = 0$ et posons $c(h, l) = s(h) + s(l) - s(h + l) \in K$. Définissons

$$\begin{aligned}\kappa_h &= \text{Ad}(V_{s(h)})|_P, & w(h, l) &= V_{c(h, l)}, \\ \kappa_h \kappa_l &= \text{Ad}(w(h, l))\kappa_{h+l}.\end{aligned}$$

L'égalité

$$c(h, l) + c(h + l, m) = c(l, m) + c(h, l + m)$$

donne

$$w(h, l)w(h + l, m) = \kappa_h(w(l, m))w(h, l + m).$$

Ainsi (κ, w) est une action par cocycle borélien. Les représentations régulières définissantes donnent $M \rtimes_\alpha G \cong P \rtimes_{\kappa, w} H$. En effet, la formule d'intégration de Weil et les coordonnées boréliennes $g = s(g + K) + k$ identifient les deux espaces de représentation régulière unitairement. Dans ces coordonnées, les générateurs réguliers sont entrelacés, ce qui prouve la fidélité ainsi que la surjectivité. L'isomorphisme est l'identité sur P et envoie l'unitaire implémentant tordu associé à h sur $V_{s(h)}$.

Des choix différents d'un relèvement induisent le même automorphisme de $\mathcal{Z}(P)$. Sous (6.29), l'action résultante de H est exactement $\rho|_H$. En effet, dans les coordonnées (y_0, z, q) , la conjugaison par $V_{s(h)}$ envoie y_0 sur $\rho_{(0, h)}(y_0)$. Sous $P = L^\infty(Y) \overline{\otimes} C$, le centre est $L^\infty(Y) \overline{\otimes} \mathbb{C}1$, donc la restriction de κ_h au centre est $\rho_{(0, h)}$. Cette action est essentiellement libre et ergodique. Le Lemme 6.16 donne donc $\mathcal{Z}(M \rtimes_\alpha G) = \mathbb{C}1$. Ainsi $M \rtimes_\alpha G$ est un facteur.

Il reste à prouver que tout le commutant relatif $B = M' \cap (M \rtimes_\alpha G)$ est diffus. L'action duale sur B est ergodique parce que

$$B^{\widehat{\alpha}} = B \cap M = \mathcal{Z}(M) = \mathbb{C}1.$$

Par la Proposition 6.13 et l'extériorité de α , tout opérateur propre pour cette action est scalaire. Supposons que B ait une projection minimale. La somme atomique de B est alors non nulle et invariante sous tout automorphisme, donc l'ergodicité rend B atomique. Puisque B a un prédual séparable, son centre a un nombre dénombrable d'atomes. L'action duale est transitive sur ces atomes, puisque la somme sur toute orbite est une projection centrale invariante. Le stabilisateur $J < \widehat{G}$ d'un atome central z est ouvert. En effet, un état normal supporté sur z ne prend que les valeurs 0 et 1 sur ses translatés, et la continuité fait que sa valeur vaut 1 près de l'identité. S'il y a plus d'un atome central, un caractère non trivial du quotient abélien discret $\widehat{G}/J$ donne un opérateur propre non scalaire dans $\mathcal{Z}(B)$, une contradiction.

Ainsi B est un facteur de type I. Pour chaque $\nu \in \widehat{G}$, choisissons un unitaire $v \in B$ implémentant $\widehat{\alpha}_\nu|_B$. La commutativité de l'action duale implique que $\widehat{\alpha}_\eta(v)v^*$ est scalaire pour tout $\eta \in \widehat{G}$. Ces scalaires forment un caractère continu, donc v est un opérateur propre et doit être scalaire. L'action est donc triviale, et l'ergodicité donne $B = \mathbb{C}1$. Cela contredit la sous-algèbre unifère diffuse $\mathcal{Z}(P) \subset B$. Donc B n'a pas de projection minimale et est diffus. $\square$

Théorème 6.18. *Soit G un groupe abélien localement compact à base dénombrable. Les assertions suivantes sont équivalentes. (i)(i)*

1. Pour tout facteur semifini diffus M et toute action préservant la trace $\alpha : G \curvearrowright M$, l'action α est strictement extérieure si et seulement si $\Gamma(\alpha) = \widehat{G}$ et α est extérieure.

2. Tout sous-groupe fermé de G est soit discret, soit cocompact.
3. Le groupe G est compact, discret, ou isomorphe à $\mathbb{R} \times F$ pour un groupe abélien fini F .
4. Il n'existe pas d'action extérieure préservant la trace $\alpha : G \curvearrowright R$ telle que $R \rtimes_\alpha G$ soit un facteur et $R' \cap (R \rtimes_\alpha G)$ soit diffus.

Démonstration. Nous prouvons d'abord (ii) $\iff$ (iii). La Proposition 6.14 prouve cette équivalence.

Nous prouvons ensuite (ii) $\Rightarrow$ (i). Supposons (ii). Alors G a la propriété de projection de résonance. Soient M et α comme dans (i). Si $\Gamma(\alpha) = \widehat{G}$ et α est extérieure, alors [Ta03, Théorème XI.2.7(iv)] montre que $M \rtimes_\alpha G$ est un facteur. La Proposition 6.15 implique que α est strictement extérieure. Réciproquement, si α est strictement extérieure, alors $M \rtimes_\alpha G$ est un facteur parce que son centre est contenu dans $M' \cap (M \rtimes_\alpha G)$. Par [Ta03, Théorème XI.2.7(iv)], on a $\Gamma(\alpha) = \widehat{G}$, tandis que la Proposition 6.13 montre que α est extérieure. Cela prouve l'implication.

Nous prouvons ensuite (i) $\Rightarrow$ (iv). Supposons (i) et supposons qu'il existe une action extérieure préservant la trace $\alpha : G \curvearrowright R$ telle que $R \rtimes_\alpha G$ soit un facteur et $R' \cap (R \rtimes_\alpha G)$ soit diffus. La factoriabilité de $R \rtimes_\alpha G$ donne $\Gamma(\alpha) = \widehat{G}$. L'assertion (i) rendrait alors α strictement extérieure, contredisant la diffusion de $R' \cap (R \rtimes_\alpha G)$. Cela prouve l'implication.

Enfin, nous prouvons (iv) $\Rightarrow$ (ii) par contraposition. Supposons que (ii) échoue. Il existe un sous-groupe fermé $K < G$ qui n'est ni discret ni cocompact. Le Théorème 6.17 donne une action extérieure préservant la trace $\alpha : G \curvearrowright R$ telle que $R \rtimes_\alpha G$ soit un facteur et $R' \cap (R \rtimes_\alpha G)$ soit diffus. Ainsi (iv) échoue. Cela prouve la contraposée et achève la preuve. $\square$

7. Résonance pour l'action bicentralisatrice jointe

Pour les actions de groupes abéliens localement compacts sur les facteurs de type II_1 à spectre de Connes plein, nous prouvons un théorème de résonance pour l'action jointe du groupe original et de l'action bicentralisatrice duale. Si Σ désigne son spectre, la relation $p(t')p'(t) = 1$ est vraie pour tous $(p, t), (p', t') \in \Sigma$. Pour les flots à spectre de Connes plein, la géométrie de cette relation donne un spectre discret ou un spectre contenu dans un axe de coordonnées. Les résultats sur les opérateurs propres et les points fixes identifient alors les bicentralisateurs analytique et algébrique dans les trois cas. En particulier, de tels flots extérieurs ont un bicentralisateur trivial, ce qui prouve le Théorème F et achève la preuve du Théorème A.

Une idée clé est l'interprétation de la conjecture du bicentralisateur comme une propriété de point fixe pour l'action bicentralisatrice duale à l'intérieur du produit croisé, similaire au Théorème 5.18. Cette idée apparaît déjà dans [Ma25]. Un argument technique remarquable, trouvé par GPT-6, consiste à appliquer le Théorème 5.18 à l'intérieur d'une représentation GNS construite à partir d'un état singulier sur le produit croisé. Cela fournit une algèbre traciale finie dans laquelle les relations de commutation requises sont vraies. La fonction de Plancherel exprime ces relations sur un espace de Hilbert, où la comparaison de la multiplication à gauche et à droite donne l'identité de résonance.

7.1. Pourquoi la propriété de résonance devrait-elle être vraie ?

Soit $\alpha : G \curvearrowright (M, \tau)$ une action préservant la trace d'un groupe abélien localement compact avec $\Gamma(\alpha) = \widehat{G}$. Si la conjecture du bicentralisateur est vraie alors

$$B(M, \alpha) = b(M, \alpha).$$

La proposition suivante montre que le spectre de l'action bicentralisatrice jointe est le même que le spectre de l'action jointe sur le commutant relatif étudié dans la section précédente et pour lequel nous avons établi la propriété de résonance.

Proposition 7.1. *Soit*

$$\gamma : \alpha|_{b(M, \alpha)} \times \beta_{b(M, \alpha)}$$

l'action bicentralisatrice jointe restreinte à $b(M, \alpha)$. Alors nous avons

$$\mathrm{Sp}(\gamma) = \mathrm{Sp}((\tilde{\alpha} \times \hat{\alpha})|_{M' \cap (M \rtimes_{\alpha} G)}).$$

En particulier $\mathrm{Sp}(\gamma) \subset \mathcal{R}_G$.

Démonstration. Nous savons que $N = b(M, \alpha) \rtimes_{\alpha} G$ est aussi le produit croisé de $M' \cap (M \rtimes_{\alpha} G)$ par la même copie de G . L'action duale par rapport à cette décomposition en produit croisé est donnée par $p \mapsto \hat{\alpha}_{-p} \tilde{\beta}_p$.

Sur N , nous avons trois actions qui commutent $\hat{\alpha}$, $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\beta}$. Cela fournit une action jointe de

$$\sigma = \hat{\alpha} \times \tilde{\alpha} \times \tilde{\beta} : \widehat{G} \times G \times \widehat{G} \curvearrowright N.$$

Nous avons

$$\widehat{G} \times \mathrm{Sp}(\gamma) = \mathrm{Sp}(\sigma).$$

Puisque $M' \cap (M \rtimes_{\alpha})$ est l'algèbre des points fixes sous l'action $p \mapsto \hat{\alpha}_{-p} \tilde{\beta}_p$, nous savons aussi que

$$(t, p, t) \in \mathrm{Sp}(\sigma)$$

si et seulement si

$$(t, p) \in \mathrm{Sp}((\hat{\alpha} \times \tilde{\alpha})|_{M' \cap (M \rtimes_{\alpha} G)}).$$

Cela montre que

$$\mathrm{Sp}(\gamma) = \mathrm{Sp}((\tilde{\alpha} \times \hat{\alpha})|_{M' \cap (M \rtimes_{\alpha} G)}).$$

□

7.2. Une interprétation en termes de points fixes de la conjecture du bicentralisateur

Soit $\alpha : G \curvearrowright (M, \tau)$ une action préservant la trace d'un groupe abélien localement compact avec $\Gamma(\alpha) = \widehat{G}$.

Nous désignons par

$$u^{\alpha} : G \rightarrow \mathcal{U}(M \rtimes_{\alpha} G)$$

la mise en œuvre unitaire naturelle de α dans le produit croisé.

Nous désignons par $\hat{\alpha} : \hat{G} \curvearrowright M \rtimes_{\alpha} G$ l'action duale de α . Nous désignons par $\tilde{\alpha} = \text{Ad}(u^{\alpha})$ l'extension naturelle de α en une action intérieure sur $M \rtimes_{\alpha} G$.

Fixons un ultrafiltre cofinal ω suffisamment grand. Nous regardons $M \rtimes_{\alpha} G$ dans l'algèbre ambiante commune $M_{\alpha}^{\omega} \rtimes_{\alpha^{\omega}} G$. Puisque $M^{\omega, \alpha}$ est fixé point par point par α^{ω} , nous avons

$$(M^{\omega, \alpha})' \cap (M_{\alpha}^{\omega} \rtimes_{\alpha^{\omega}} G) = ((M^{\omega, \alpha})' \cap M_{\alpha}^{\omega}) \rtimes_{\alpha^{\omega}} G.$$

En prenant l'intersection avec $M \rtimes_{\alpha} G$, nous obtenons

$$(M^{\omega, \alpha})' \cap (M \rtimes_{\alpha^{\omega}} G) = ((M^{\omega, \alpha})' \cap M) \rtimes_{\alpha^{\omega}} G = B(M, \alpha) \rtimes_{\alpha} G$$

Par conséquent, nous pouvons considérer $B(M, \alpha) \rtimes_{\alpha} G$ comme un bicentralisateur relatif dans le produit croisé semifini :

$$B(M \subset M \rtimes_{\alpha} G, \alpha) = B(M, \alpha) \rtimes_{\alpha} G.$$

Il est aussi possible de définir une action bicentralisatrice duale

$$\hat{G} \curvearrowright B(M \subset M \rtimes_{\alpha} G, \alpha)$$

mais elle n'est pas donnée par l'extension naturelle

$$\tilde{\beta} : \hat{G} \curvearrowright B(M, \alpha) \rtimes_{\alpha} G$$

qui fixe u^{α} . En effet, si nous prenons $p \in \hat{G}$ et $v \in \mathcal{U}(M_{\alpha}^{\omega})$ tels que

$$\alpha_g^{\omega}(v) = \overline{\langle p, g \rangle} v, \quad (g \in G),$$

alors nous avons $\text{Ad}(v) = \tilde{\beta}_p \circ \hat{\alpha}_{p^{-1}}$. Ainsi, l'action bicentralisatrice duale

$$\delta : \hat{G} \curvearrowright B(M \subset M \rtimes_{\alpha} G, \alpha)$$

est donnée par

$$\delta_p = \tilde{\beta}_p \circ \hat{\alpha}_{p^{-1}}, \quad (p \in \hat{G}).$$

La proposition suivante met en évidence l'importance de cette construction. C'est l'analogue de [Ma25, Proposition 8.6] (dans le cas $M = N$).

Proposition 7.2. *Nous avons $B(M, \alpha) = b(M, \alpha)$ si et seulement si*

$$B(M \subset M \rtimes_{\alpha} G, \alpha)^{\delta} = M' \cap (M \rtimes_{\alpha} G).$$

Démonstration. Posons $P = M \rtimes_{\alpha} G$, $R = M' \cap P$, et $C = B(M \subset P, \alpha) = B(M, \alpha) \rtimes_{\alpha} G$. La construction précédente donne

$$\delta_p(u_g) = p(g)u_g, \quad \delta_p(z) = z \quad (p \in \hat{G}, g \in G, z \in M' \cap (M \rtimes_{\alpha} G)).$$

La seconde égalité découle aussi directement de la mise en œuvre dans les ultrapuissances, puisque tout unitaire représentant appartient à M et commute donc avec R . La caractérisation de Takesaki [Ma25, Théorème 1.5] donne

$$B(M \subset M \rtimes_\alpha G) = \left(B(M \subset M \rtimes_\alpha G)^\delta \cup \{u_g \mid g \in G\} \right)'.$$

D'autre part, la Proposition 2.18 donne

$$b(M \subset M \rtimes_\alpha G) = \left((M' \cap (M \rtimes_\alpha G)) \cup \{u_g \mid g \in G\} \right)'.$$

Ainsi $(b(M \subset M \rtimes_\alpha G), M' \cap (M \rtimes_\alpha G), u)$ est une G -extension scindée et $\delta|_{b(M \subset M \rtimes_\alpha G)}$ fixe $M' \cap (M \rtimes_\alpha G)$ tout en multipliant u_g par $p(g)$. La même caractérisation donne donc $b(M, \alpha) \rtimes_\alpha G^\delta = M' \cap (M \rtimes_\alpha G)$. Si $B(M, \alpha) = b(M, \alpha)$, alors et donc $B(M \subset M \rtimes_\alpha G)^\delta = M' \cap (M \rtimes_\alpha G)$. Réciproquement, $B(M \subset M \rtimes_\alpha G)^\delta = M' \cap (M \rtimes_\alpha G)$ rend identiques les formules de génération affichées pour $B(M \subset M \rtimes_\alpha G)$ et $b(M \subset M \rtimes_\alpha G)$. En intersectant avec M , ou en prenant les points fixes de l'action duale originale $\hat{\alpha}$, on obtient $B(M, \alpha) = b(M, \alpha)$. $\square$

Ainsi la conjecture du bicentralisateur pour α serait résolue si nous pouvions appliquer le Théorème 5.18 avec $N = M \rtimes_\alpha G$. Malheureusement, nous ne pouvons pas appliquer le Théorème 5.18 directement parce que $M \rtimes_\alpha G$ ne porte pas d'état tracial normal. Nous surmonterons partiellement cette difficulté en utilisant un état tracial sur le produit croisé qui n'est pas normal.

7.3. Un état tracial singulier sur le produit croisé

Soit $\alpha : G \curvearrowright (M, \tau)$ une action continue préservant la trace d'un groupe abélien localement compact avec $\Gamma(\alpha) = \hat{G}$. Nous conservons cette hypothèse dans tout le reste de cette section. Nous utilisons la notation

$$\lambda(\varphi) = \int_G \varphi(t) u_t dt \quad (\varphi \in L^1(G))$$

et l'isomorphisme naturel

$$\hat{\lambda} : L^\infty(\hat{G}) \longrightarrow L(G)$$

caractérisé par

$$\hat{\lambda}(\hat{\varphi}) = \lambda(\varphi) \quad (\varphi \in L^1(G)).$$

En particulier, $\hat{\lambda}(\psi)$ est le multiplicateur spectral de u correspondant à la convention $u_t(p) = \overline{p(t)}$.

Posons $\tilde{\tau} = \tau \circ T_M$, la trace normale fidèle semifinie sur $M \rtimes_\alpha G$. Soit $E_{L(G)} : M \rtimes_\alpha G \rightarrow L(G)$ l'espérance conditionnelle normale fidèle canonique de (5.25), déterminée par

$$E_{L(G)}(au_t) = \tau(a)u_t \quad (a \in M, t \in G).$$

Nous identifions $L(G)$ à $L^\infty(\hat{G})$ par $\hat{\lambda}$ et écrivons τ_G pour l'intégration de Haar. Alors $\tilde{\tau} = \tau_G \circ E_{L(G)}$.

Puisque $\hat{G}$ est moyennable, choisissons des ensembles compacts symétriques $(F_i)_{i \in \mathcal{I}}$ avec $0 < \mu(F_i) < \infty$ tels que

$$\frac{\mu((F_i K) \setminus F_i)}{\mu(F_i)} \longrightarrow 0 \quad (K \Subset \hat{G}, 1 \in K). \quad (7.1)$$

Fixons un ultrafiltre cofinal $\mathcal{V}$ sur $\mathcal{I}$ et posons

$$m_i(f) = \frac{1}{\mu(F_i)} \int_{F_i} f(p) dp, \quad m(f) = \lim_{i \rightarrow \mathcal{V}} m_i(f) \quad (f \in L^\infty(\widehat{G})). \quad (7.2)$$

La condition de Følner rend l'état m invariant par translation. La symétrie des F_i le rend invariant sous l'inversion.

Soit $e_i = \widehat{\lambda}(1_{F_i})$. Définissons des états normaux ρ_i et un état ρ sur $M \rtimes_\alpha G$ par

$$\rho_i(x) = \frac{\tilde{\tau}(e_i x e_i)}{\mu(F_i)} = m_i(E_{L(G)}(x)), \quad \rho(x) = m(E_{L(G)}(x)) = \lim_{i \rightarrow \mathcal{V}} \rho_i(x).$$

La seconde expression pour ρ_i découle de la bimodularité de $E_{L(G)}$. Nous utilisons la seminorme $\|x\|_{2,\rho} = \rho(x^*x)^{1/2}$.

Proposition 7.3. *L'état ρ a les propriétés suivantes. (i)(i)*

1. La partie $\tilde{\alpha}$ -continue en norme $(M \rtimes_\alpha G)_c$ est contenue dans le centralisateur de ρ .
2. La restriction de ρ à M est τ , et M est contenue dans le centralisateur de ρ .

Démonstration. Nous estimons d'abord les commutateurs des projections spectrales e_i . Supposons que $a \in M \rtimes_\alpha G$ ait un $\tilde{\alpha}$ -spectre compact, contenu dans un ensemble compact symétrique $K \subset \widehat{G}$ avec $1 \in K$. Le transfert spectral donne

$$(1 - e_i)ae_i = \widehat{\lambda}(1_{(F_i K) \setminus F_i})ae_i.$$

Par conséquent,

$$\|(1 - e_i)ae_i\|_{2,\tilde{\tau}}^2 \leq \|a\|^2 \mu((F_i K) \setminus F_i).$$

La même borne s'applique à a^* . Les deux coins hors diagonale de $[e_i, a]$ sont orthogonaux dans $L^2(M \rtimes_\alpha G, \tilde{\tau})$, donc

$$\|[e_i, a]\|_{2,\tilde{\tau}}^2 \leq 2\|a\|^2 \mu((F_i K) \setminus F_i).$$

Il s'ensuit que

$$\frac{\|[e_i, a]\|_{2,\tilde{\tau}}}{\sqrt{\mu(F_i)}} \longrightarrow 0. \quad (7.3)$$

Les éléments de $\tilde{\alpha}$ -spectre compact sont denses en norme dans $(M \rtimes_\alpha G)_c$. Puisque

$$\|[e_i, a - c]\|_{2,\tilde{\tau}} \leq 2\sqrt{\mu(F_i)} \|a - c\|,$$

(7.3) vaut pour tout a dans cette partie continue. En séparant $[e_i, a]$ en ses coins hors diagonale et en appliquant Cauchy–Schwarz, on obtient

$$|\rho_i(az) - \rho_i(za)| \leq \frac{2\|z\| \|[e_i, a]\|_{2,\tilde{\tau}}}{\sqrt{\mu(F_i)}} \quad (z \in M \rtimes_\alpha G).$$

En prenant l'ultralimite, on prouve (i).

La formule pour l'espérance donne $\rho_i|_M = \tau$, donc $\rho|_M = \tau$. Pour $a, c \in M$, la tracialité de $\tilde{\tau}$ et cette formule de restriction donnent

$$\|(a - c)e_i\|_{2,\tilde{\tau}} = \|e_i(a - c)\|_{2,\tilde{\tau}} = \sqrt{\mu(F_i)} \|a - c\|_2.$$

Tout $a \in M$ peut être approché en $\|\cdot\|_2$ par des éléments de α -spectre compact. Ainsi (7.3) vaut pour tout $a \in M$, et l'estimation précédente prouve (ii). $\square$

7.4. La fonction de Plancherel

Nous introduisons la fonction de Plancherel sur le produit croisé, adaptée à la norme $\|\cdot\|_{2,\rho}$. Nous prenons le produit scalaire sur $L^2(M)$ linéaire en la première variable. Nous identifions $L(G)$ à $L^\infty(\widehat{G})$ par $\widehat{\lambda}$. Nous désignons par $L^\infty(\widehat{G}, L^2(M))$ l'espace de Banach des champs mesurables bornés de $\widehat{G}$ dans $L^2(M)$. C'est le dual de $L^1(\widehat{G}, L^2(M))$ via l'appariement tracial bilinéaire. Les champs à valeurs hilbertiennes sont entendus comme localement fortement mesurables. Deux champs sont identifiés lorsqu'ils coïncident presque partout sur tout ensemble mesurable de mesure de Haar finie.

Proposition 7.4. *Il existe une unique application linéaire faible*-faible* continue*

$$\vartheta : M \rtimes_\alpha G \longrightarrow L^\infty(\widehat{G}, L^2(M))$$

telle que

$$\vartheta(a\widehat{\lambda}(\psi)) = \psi\widehat{a}, \quad (a \in M, \psi \in L^\infty(\widehat{G})).$$

L'application ϑ est injective et satisfait

$$\|\vartheta(x)\|_\infty \leq \|x\|, \quad \|x\|_{2,\rho}^2 = m\left(p \longmapsto \|\vartheta(x)(p)\|_2^2\right).$$

Si $x \in (M \rtimes_\alpha G) \cap L^2(M \rtimes_\alpha G, \tilde{\tau})$, alors $\vartheta(x) \in L^2(\widehat{G}, L^2(M))$ et elle est donnée par l'identification de Plancherel usuelle.

L'application ϑ satisfait les identités suivantes

$$\begin{aligned} \vartheta(ax) &= a\vartheta(x) & (a \in M, x \in M \rtimes_\alpha G), \\ \vartheta(x\widehat{\lambda}(\psi)) &= \psi\vartheta(x) & (\psi \in L^\infty(\widehat{G}), x \in M \rtimes_\alpha G), \\ \langle \vartheta(x), \vartheta(y) \rangle &= E_{L(G)}(y^*x) & (x, y \in M \rtimes_\alpha G). \end{aligned}$$

Ici le produit scalaire de deux champs est pris ponctuellement. Elle satisfait aussi la formule de covariance

$$\vartheta(\widehat{\alpha}_q(x))(p) = \vartheta(x)(pq) \quad (q \in \widehat{G}, x \in M \rtimes_\alpha G).$$

Si un automorphisme préservant la trace $\theta \in \text{Aut}(M)$ commute avec α et si $\tilde{\theta}$ est son extension à $M \rtimes_\alpha G$ qui fixe u^α , alors

$$\vartheta(\tilde{\theta}(x)) = U^\theta \vartheta(x) \quad (x \in M \rtimes_\alpha G),$$

où $U^\theta \widehat{a} = \widehat{\theta(a)}$ pour $a \in M$. Si $B \subset M$ est une sous-algèbre globalement α -invariante et $x \in B \rtimes_{\alpha|_B} G$, alors la fonction de Plancherel de x prend ses valeurs dans $L^2(B)$.

Démonstration. Pour $\psi \in L^1(\widehat{G})$ et $a \in M$, définissons $\omega(\psi, a) \in (M \rtimes_\alpha G)_*$ par

$$\omega(\psi, a)(x) = \int_{\widehat{G}} \psi(p) E_{L(G)}(ax)(p) \, dp.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz conditionnelle et $E_{L(G)}(aa^*) = \tau(aa^*)1$ donnent

$$\|E_{L(G)}(ax)\|_\infty \leq \|E_{L(G)}(aa^*)\|_\infty^{1/2} \|E_{L(G)}(x^*x)\|_\infty^{1/2} \leq \|a\|_2 \|x\|.$$

D'où

$$|\omega(\psi, a)(x)| \leq \|\psi\|_1 \|a\|_2 \|x\|.$$

Ainsi ω s'étend en une application bilinéaire contractante sur $L^1(\widehat{G}) \times L^2(M)$, puis en une contraction

$$\omega : L^1(\widehat{G}) \widehat{\otimes} L^2(M) = L^1(\widehat{G}, L^2(M)) \longrightarrow (M \rtimes_\alpha G)_*.$$

Définissons $\vartheta = \omega^*$ en utilisant l'appariement bilinéaire fixé ci-dessus. Elle est faible*-faible* continue et contractante, et elle satisfait

$$\int_{\widehat{G}} \psi(p) \langle \vartheta(x)(p), \widehat{a^*} \rangle dp = \int_{\widehat{G}} \psi(p) E_{L(G)}(ax)(p) dp.$$

Puisque $E_{L(G)}(ab\widehat{\lambda}(\varphi)) = \tau(ab)\varphi$, cela donne

$$\vartheta(b\widehat{\lambda}(\varphi)) = \varphi \widehat{b} \quad (b \in M, \varphi \in L^\infty(\widehat{G})).$$

L'enveloppe linéaire de ces produits est faible* dense dans $M \rtimes_\alpha G$, puisqu'elle contient chaque bu_t . Cela prouve aussi l'unicité.

Pour $x = a\widehat{\lambda}(\psi)$ et $y = b\widehat{\lambda}(\varphi)$, la bimodularité de $E_{L(G)}$ donne

$$\langle \vartheta(x), \vartheta(y) \rangle = \psi \overline{\varphi} \tau(b^*a) = E_{L(G)}(y^*x).$$

Après intégration contre une fonction de $L^1(\widehat{G})$, les deux membres sont séparément faible* continus en x et y . Pour le membre de gauche, cela découle du fait que le produit d'une fonction scalaire L^1 et d'un champ borné à valeurs dans $L^2(M)$ appartient à $L^1(\widehat{G}, L^2(M))$. La densité faible* étend donc cette identité à tous $x, y \in M \rtimes_\alpha G$. En prenant $y = x$, on obtient

$$\|\vartheta(x)(p)\|_2^2 = E_{L(G)}(x^*x)(p) \quad \text{presque partout.}$$

La fidélité de $E_{L(G)}$ prouve l'injectivité de ϑ , et en appliquant m on prouve la formule annoncée pour $\|x\|_{2,\rho}$. L'intégration contre la mesure de Haar donne aussi

$$\int_{\widehat{G}} \|\vartheta(x)(p)\|_2^2 dp = \widetilde{\tau}(x^*x).$$

Ainsi ϑ est une isométrie sur $(M \rtimes_\alpha G) \cap L^2(M \rtimes_\alpha G, \widetilde{\tau})$. Pour $a \in M$ et $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$, nous avons $\vartheta(a\lambda(f)) = \widehat{f}\widehat{a}$. L'enveloppe linéaire de ces éléments est dense dans $L^2(M \rtimes_\alpha G, \widetilde{\tau})$, donc cette isométrie coïncide avec l'identification de Plancherel usuelle.

Les deux identités de module découlent de leur vérification sur les produits $b\widehat{\lambda}(\varphi)$ et de la continuité faible*. Les formules de covariance et d'équivariance découlent de la même manière de

$$\widehat{\alpha}_q(b\widehat{\lambda}(\varphi)) = b\widehat{\lambda}(p \mapsto \varphi(pq)), \quad \widetilde{\theta}(b\widehat{\lambda}(\varphi)) = \theta(b)\widehat{\lambda}(\varphi).$$

Enfin, l'enveloppe des $b\widehat{\lambda}(\varphi)$ avec $b \in B$ est faible* dense dans $B \rtimes_{\alpha|_B} G$. Son image est contenue dans le sous-espace faible* fermé $L^\infty(\widehat{G}, L^2(B))$, ce qui prouve la dernière assertion. $\square$

Pour tout $a \in M$ et $x \in M \rtimes_\alpha G$, nous avons la propriété de module à gauche $\vartheta(ax) = a\vartheta(x)$. Cependant, la propriété de module à droite $\vartheta(xa) = \vartheta(x)a$ échoue. Mais il est crucial pour nous de pouvoir calculer $\vartheta(xa)$. Cela est réalisé par la proposition suivante.

Proposition 7.5. Prenons $x \in M \rtimes_\alpha G$ et $a \in M$ tels que $\text{Sp}_{\widehat{\alpha}}(x)$ et $\text{Sp}_\alpha(a)$ soient compacts. Choisissons $h \in \mathcal{D}(G)$ et $k \in \mathcal{D}(\widehat{G})$ égaux à 1 sur des voisinages de ces spectres respectifs, et posons

$$\Phi(t, r) = h(t)k(r)\overline{r(t)}.$$

Alors $\Phi \in \mathcal{D}(G \times \widehat{G})$ et

$$\vartheta(xa) = \left[p \mapsto \int_{\widehat{G} \times G} \widehat{\Phi}(q, s) \vartheta(x)(pq^{-1}) \alpha_{-s}(a) \, dq \, ds \right].$$

L'intégrale est une intégrale de Bochner dans $L^2(M)$ pour chaque p .

Démonstration. Les deux membres de l'identité annoncée sont normaux en x après appariement avec tout $Z \in L^1(\widehat{G}, L^2(M))$. Pour le membre de droite, cela découle de la normalité de ϑ et du théorème de Fubini. Plus explicitement, après le changement de variable $r = pq^{-1}$, son intégrande préduale teste $\vartheta(x)(r)$ contre

$$r \mapsto Z(rq) \alpha_{-s}(a^*).$$

Cette fonction dépend continûment de (q, s) dans $L^1(\widehat{G}, L^2(M))$, et sa norme est au plus $\|Z\|_1 \|a\|$. En multipliant ce champ test par $\widehat{\Phi}(q, s)$ et en intégrant en (q, s) , on obtient un élément de $L^1(\widehat{G}, L^2(M))$. En l'appariant avec $\vartheta(x)$, on définit la fonctionnelle normale requise, puisque le produit scalaire est linéaire en sa première variable.

En raison de la normalité des deux membres, il suffit de vérifier l'identité annoncée pour $x = cu_t$ où $c \in M$ et $t \in G$ avec $h(t) = 1$.

Le calcul de Schwartz–Bruhat donne $\Phi \in \mathcal{D}(G \times \widehat{G})$ et $\widehat{\Phi} \in L^1(\widehat{G} \times G)$. Puisque $k = 1$ près de $\text{Sp}_\alpha(a)$, nous avons $\alpha_{\check{k}}(a) = a$. L'inversion de Fourier donne donc

$$\begin{aligned} \int_{\widehat{G} \times G} \widehat{\Phi}(q, s) q(t) \alpha_{-s}(a) \, dq \, ds &= h(t) \int_G \check{k}(-t - s) \alpha_{-s}(a) \, ds \\ &= h(t) \alpha_t(\alpha_{\check{k}}(a)) \\ &= h(t) \alpha_t(a). \end{aligned}$$

Pour $x = cu_t$, le membre de droite proposé est donc

$$\overline{p(t)} \widehat{c} \int_{\widehat{G} \times G} \widehat{\Phi}(q, s) q(t) \alpha_{-s}(a) \, dq \, ds = h(t) \overline{p(t)} \widehat{c \alpha_t(a)}.$$

Cela vaut $\vartheta(cu_t a)(p)$ chaque fois que $h(t) = 1$. □

7.5. Le bicentralisateur dans la représentation GNS

Posons $B = B(M, \alpha)$ et notons $\beta : \widehat{G} \curvearrowright B$ son action bicentralisatrice duale. Posons

$$\widetilde{B} = B \rtimes_\alpha G \subset M \rtimes_\alpha G$$

et écrivons T_B pour la restriction de T_M à $\widetilde{B}$. Puisque $\alpha|_B$ et β commutent, β s'étend en une action $\widetilde{\beta}$ sur $\widetilde{B}$ fixant chaque u_t . Définissons

$$\delta_p = \widetilde{\beta}_p \circ \widehat{\alpha}_{p^{-1}}, \quad B^\dagger = \widetilde{B}^\delta, \quad \alpha_t^\dagger = \text{Ad}(u_t)|_{B^\dagger}.$$

Proposition 7.6. *Il existe une décomposition en produit croisé*

$$\tilde{B} = B^\dagger \rtimes_{\alpha^\dagger} G$$

et un état tracial normal fidèle $\alpha^\dagger$ -invariant $\tau^\dagger$ sur $B^\dagger$ tels que

$$\tilde{\tau}|_{\tilde{B}} = \tau|_B \circ T_B = \tau^\dagger \circ T_{B^\dagger},$$

où

$$T_{B^\dagger} = \int_{\hat{G}} \delta_p \, dp, \quad E_{L(G)}(x) = \tau^\dagger(x)1 \quad (x \in B^\dagger).$$

L'action duale est $\widehat{\alpha^\dagger}_p = \delta_{p^{-1}}$.

Démonstration. Notre convention pour l'action duale donne

$$\delta_p(u_t) = p(t)u_t.$$

Ainsi u_t normalise $B^\dagger$. La caractérisation des produits croisés de von Neumann [Na77, Théorème 8.1], appliquée à $\tilde{B}$, à l'action $p \mapsto \delta_{p^{-1}}$, et à la représentation u , donne la décomposition annoncée. L'isomorphisme résultant est l'identité sur $B^\dagger$ et envoie les unitaires implémentants canoniques sur u_t . Son action duale est donc $\widehat{\alpha^\dagger}_p = \delta_{p^{-1}}$.

Puisque β préserve τ , nous avons

$$E_{L(G)} \circ \tilde{\beta}_p = E_{L(G)} \quad \text{sur } \tilde{B}.$$

Donc $E_{L(G)}$ entrelace δ_p avec la translation $f(r) \mapsto f(rp^{-1})$ sur $L^\infty(\hat{G})$. Sa restriction à $B^\dagger$ est scalaire et définit un état normal fidèle $\tau^\dagger$. L'identité $E_{L(G)} \circ \tilde{\alpha}_t = E_{L(G)}$ donne l'invariance sous $\alpha^\dagger$.

Pour $x \in \tilde{B}_+$, posons $f = E_{L(G)}(x)$. L'équivariance, la normalité et l'invariance de Haar donnent

$$\begin{aligned} \tau^\dagger(T_{B^\dagger}(x))1 &= \int_{\hat{G}} E_{L(G)}(\delta_p(x)) \, dp \\ &= \left(\int_{\hat{G}} f(p) \, dp \right) 1. \end{aligned}$$

Ce sont des égalités d'éléments positifs étendus. Ainsi

$$\tau^\dagger \circ T_{B^\dagger} = \tau_G \circ E_{L(G)} = \tilde{\tau}|_{\tilde{B}}.$$

Le groupe modulaire de ce poids dual se restreint au groupe modulaire de $\tau^\dagger$ sur $B^\dagger$ [Ha78a, Théorème 3.2(ii)]. Puisque le poids dual est une trace, $\tau^\dagger$ est tracial. $\square$

La fonction de Plancherel a une forme particulièrement simple sur $B^\dagger$.

Proposition 7.7. *Pour tout $x \in B^\dagger$, il existe un unique $\xi_x \in L^2(B)$ tel que*

$$\vartheta(x) = [p \mapsto U_p^\beta \xi_x].$$

De plus,

$$\tau^\dagger(x^*x) = \|\xi_x\|_2^2.$$

L'application $\hat{x} \mapsto \xi_x$ s'étend en une isométrie

$$V : L^2(B^\dagger, \tau^\dagger) \longrightarrow L^2(B, \tau), \quad V\hat{1} = \hat{1}.$$

Elle entrelace $U^{\alpha^\dagger}$ avec $U^\alpha|_{L^2(B)}$.

Démonstration. Pour $x \in B^\dagger$, les formules de covariance donnent

$$\vartheta(x)(p) = \vartheta(\delta_q(x))(p) = U_q^\beta \vartheta(x)(pq^{-1}) \quad (q \in \widehat{G}).$$

Ainsi le champ $F(p) = U_{p^{-1}}^\beta \vartheta(x)(p)$ est invariant sous toute translation, donc il est constant. Écrivons ξ_x pour sa valeur constante. Cela prouve aussi l'unicité. La formule du produit scalaire et $E_{L(G)}(x^*x) = \tau^\dagger(x^*x)1$ donnent $\|\xi_x\|_2^2 = \tau^\dagger(x^*x)$, donc V s'étend en une isométrie.

Pour prouver qu'elle est surjective, utilisons les deux décompositions en produit croisé de $\widetilde{B}$. Les vecteurs $x\widehat{\lambda}(\psi)$, avec $x \in B^\dagger$ et $\psi \in L^2(\widehat{G}) \cap L^\infty(\widehat{G})$, engendrent un sous-espace dense de $L^2(\widetilde{B}, \widetilde{\tau})$. Sous l'identification de Plancherel associée à $B \rtimes_\alpha G$, ils deviennent

$$p \longmapsto \psi(p)U_p^\beta \xi_x.$$

Supposons que $\eta \in L^2(B)$ soit orthogonal à l'image de V , et choisissons un $f \in L^2(\widehat{G}) \cap L^\infty(\widehat{G})$ non nul. Le champ $p \mapsto f(p)U_p^\beta \eta$ est orthogonal à tout champ du sous-espace dense précédent. Il est donc nul, d'où $\eta = 0$. L'image de V est fermée et dense, ce qui prouve la surjectivité. Enfin, $\vartheta(1) = \widehat{1}$ donne $V\widehat{1} = \widehat{1}$. La covariance sous $\widetilde{\alpha}$ et la commutation de $\alpha|_B$ avec β donnent l'assertion d'entrelacement. $\square$

Nous déterminons maintenant comment l'état ρ se comporte sur $B^\dagger$.

Proposition 7.8. *Nous avons $\rho|_{B^\dagger} = \tau^\dagger$, et $B^\dagger$ est contenue dans le centralisateur de ρ .*

Démonstration. La formule d'espérance scalaire donne $\rho_i|_{B^\dagger} = \rho|_{B^\dagger} = \tau^\dagger$. Pour $x, y \in B^\dagger$, il s'ensuit que

$$\|(x - y)e_i\|_{2, \widetilde{\tau}} = \|e_i(x - y)\|_{2, \widetilde{\tau}} = \sqrt{\mu(F_i)} \|x - y\|_{2, \tau^\dagger}.$$

Approchons x en $\|\cdot\|_{2, \tau^\dagger}$ par des éléments de $\alpha^\dagger$ -spectre compact et appliquons la preuve de la Proposition 7.3. Cela donne (7.3) pour x et place x dans le centralisateur de ρ . $\square$

Nous allons passer à une algèbre de von Neumann traciale finie en utilisant la représentation GNS de ρ sur la C^* -algèbre engendrée par M et $B^\dagger$. Pour y identifier $B^\dagger$ aux points fixes de l'action bicentralisatrice duale relative, nous avons d'abord besoin d'un contrôle uniforme sur les unitaires implémentants approchés.

Le Corollaire 5.7 fournit, pour chaque $q \in \widehat{G}$, un filet $(v_j)_j$ dans $\mathcal{U}(M)$ tel que

$$\sup_{t \in K} \|\alpha_t(v_j) - \overline{q(t)}v_j\|_2 \longrightarrow 0 \quad (K \Subset G). \quad (7.4)$$

La Proposition 4.3 donne alors $v_j b v_j^* \rightarrow \beta_q(b)$ en $\|\cdot\|_2$ pour tout $b \in B$.

Lemme 7.9. *Soient $b \in B$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $K \Subset G$ et $\varepsilon_0 > 0$, dépendant uniquement de b et ε , tels que pour tout $q \in \widehat{G}$ et $v \in \mathcal{U}(M)$,*

$$\sup_{t \in K} \|\alpha_t(v) - \overline{q(t)}v\|_2 < \varepsilon_0 \implies \sup_{\chi \in \widehat{G}} \|v \beta_\chi(b) v^* - \beta_{\chi q}(b)\|_2 < \varepsilon.$$

En particulier, tout filet satisfaisant (7.4) satisfait

$$\sup_{\chi \in \widehat{G}} \|v_j \beta_\chi(b) v_j^* - \beta_{\chi q}(b)\|_2 \longrightarrow 0. \quad (7.5)$$

Démonstration. Par (2.1), choisissons $K \Subset G$ et $\eta > 0$ tels que

$$\sup_{t \in K} \|\alpha_t(u) - u\|_2 < \eta \implies \|[u, b]\|_2 < \varepsilon/2 \quad (u \in \mathcal{U}(M)).$$

Fixons un tel unitaire u . Pour $\chi \in \widehat{G}$, choisissons des unitaires $(w_j)_j$ satisfaisant (7.4) avec $q = \chi$. Les phases scalaires s'annulent sous conjugaison, donc

$$\limsup_j \sup_{t \in K} \|\alpha_t(w_j^* u w_j) - w_j^* u w_j\|_2 \leq \sup_{t \in K} \|\alpha_t(u) - u\|_2 < \eta.$$

Le choix de η et la convergence $w_j b w_j^* \rightarrow \beta_\chi(b)$ donnent

$$\sup_{\chi \in \widehat{G}} \|[u, \beta_\chi(b)]\|_2 \leq \varepsilon/2.$$

Prenons $\varepsilon_0 = \eta/2$ et soit v satisfaisant l'hypothèse en q . Choisissons $(w_j)_j$ satisfaisant (7.4) pour ce q . Alors

$$\begin{aligned} \sup_{t \in K} \|\alpha_t(w_j^* v) - w_j^* v\|_2 &\leq \sup_{t \in K} \|\alpha_t(v) - \overline{q(t)}v\|_2 \\ &\quad + \sup_{t \in K} \|\alpha_t(w_j) - \overline{q(t)}w_j\|_2 < \eta \end{aligned}$$

éventuellement. En appliquant l'estimation uniforme de commutateur précédente à $w_j^* v$, on obtient

$$\|v \beta_\chi(b) v^* - w_j \beta_\chi(b) w_j^*\|_2 \leq \varepsilon/2 \quad (\chi \in \widehat{G}).$$

Pour chaque χ fixé, la Proposition 4.3 donne $w_j \beta_\chi(b) w_j^* \rightarrow \beta_{\chi q}(b)$. En passant à la limite, on obtient la borne $\varepsilon/2$ pour tout χ , avec la même constante. Cela prouve la première assertion, et (7.5) découle de son application à tous les indices suffisamment grands du filet donné. $\square$

Proposition 7.10. *Pour tout $q \in \widehat{G}$, tout $x \in B^\dagger$, et tout filet satisfaisant (7.4), nous avons*

$$\|v_j x v_j^* - x\|_{2,\rho} \longrightarrow 0.$$

Démonstration. Nous utilisons la fonction de Plancherel et la formule de produit prouvées dans les Propositions 7.4, 7.7, et 7.5. Écrivons

$$F(p) = \vartheta(x)(p) = U_p^\beta \xi_x.$$

Supposons d'abord que x ait un $\widehat{\alpha}$ -spectre compact. Choisissons $h \in \mathcal{D}(G)$ égal à 1 sur un voisinage de ce spectre. Choisissons $f \in \mathcal{S}(G)$ à transformée de Fourier à support compact et $\widehat{f}(q^{-1}) = 1$, et posons

$$a_j = \alpha_f(v_j^*).$$

Alors $\sup_j \|a_j\| \leq \|f\|_1$, tous les a_j ont leur α -spectre dans l'ensemble compact $\text{supp } \widehat{f}$, et

$$\|a_j - v_j^*\|_2 \longrightarrow 0.$$

En effet, $\alpha_t(v_j^*) - q(t)v_j^* \rightarrow 0$ en $\|\cdot\|_2$ uniformément sur les ensembles compacts, et $\int_G f(t)q(t) dt = 1$. L'approximation compacte de l'intégrale L^1 justifie cette limite pour les filets. Les mêmes estimations montrent que

$$\sup_{s \in C} \|\alpha_{-s}(a_j) - \overline{q(s)}a_j\|_2 \longrightarrow 0 \quad (C \Subset G). \quad (7.6)$$

Choisissons $k \in \mathcal{D}(\widehat{G})$ égal à 1 près de $\text{supp } \widehat{f}$, donc en particulier $k(q^{-1}) = 1$. Posons $\Phi(t, r) = h(t)k(r)\overline{r(t)}$. La formule de produit pour la fonction de Plancherel donne

$$\vartheta(xa_j)(p) = \int_{\widehat{G} \times G} \widehat{\Phi}(r, s) F(pr^{-1}) \alpha_{-s}(a_j) \, dr \, ds.$$

Nous affirmons que remplacer $\alpha_{-s}(a_j)$ dans cette intégrale par $\overline{q(s)}a_j$ change le champ résultant d'une quantité tendant vers zéro en norme essentielle supérieure de sa norme $L^2(M)$. Pour le voir, fixons $b \in B$ et posons $d_{j,s} = \alpha_{-s}(a_j) - \overline{q(s)}a_j$. Uniformément en p, r, s ,

$$\|F(pr^{-1})d_{j,s}\|_2 \leq 2\|f\|_1\|\xi_x - \widehat{b}\|_2 + \|b\| \|d_{j,s}\|_2.$$

Puisque $\widehat{\Phi} \in L^1(\widehat{G} \times G)$, l'équation (7.6) et l'approximation compacte de cette intégrale font tendre le second terme vers zéro après intégration. Approchons alors ξ_x par $\widehat{b}$ pour prouver l'affirmation. L'inversion de Fourier dans la seconde variable donne

$$\int_G \widehat{\Phi}(r, s) \overline{q(s)} \, ds = \widehat{h}(rq^{-1}).$$

La propriété de troncature spectrale de h donne

$$\int_{\widehat{G}} \widehat{h}(r) F(pr^{-1}) \, dr = F(p).$$

Ainsi l'affirmation précédente donne

$$\text{ess sup}_{p \in \widehat{G}} \|\vartheta(xa_j)(p) - F(pq^{-1})a_j\|_2 \longrightarrow 0.$$

La même approximation de ξ_x par des vecteurs $\widehat{b}$, en utilisant $\|a_j - v_j^*\|_2 \rightarrow 0$ et une borne uniforme de norme d'opérateur, donne

$$\text{ess sup}_{p \in \widehat{G}} \|F(pq^{-1})(a_j - v_j^*)\|_2 \longrightarrow 0.$$

D'autre part,

$$\|x(a_j - v_j^*)\|_{2,\rho} \leq \|x\| \|a_j - v_j^*\|_2 \longrightarrow 0.$$

En combinant ces estimations avec l'identité de norme pour la fonction de Plancherel, on obtient

$$\left\| \vartheta(xv_j^*) - [p \mapsto F(pq^{-1})v_j^*] \right\|_m \longrightarrow 0.$$

Ici $\|\cdot\|_m$ désigne la racine carrée de la moyenne des normes L^2 au carré, comme dans la sous-section suivante. Le Lemme 7.9 et l'approximation de ξ_x par $\widehat{b}$ donnent aussi

$$\sup_{p \in \widehat{G}} \|v_j F(pq^{-1})v_j^* - F(p)\|_2 \longrightarrow 0.$$

La linéarité à gauche par rapport à M de ϑ prouve maintenant l'assertion pour x de spectre dual compact.

L'action duale préserve $B^\dagger$ et sa trace normale $\tau^\dagger$. Donc tout $x \in B^\dagger$ est une limite en $\|\cdot\|_{2,\tau^\dagger}$ d'éléments $y \in B^\dagger$ à spectre dual compact. Puisque $v_j \in M$ appartient au centralisateur de ρ ,

$$\|v_j x v_j^* - x\|_{2,\rho} \leq 2\|x - y\|_{2,\tau^\dagger} + \|v_j y v_j^* - y\|_{2,\rho}.$$

Cela prouve le résultat pour x arbitraire. □

Théorème 7.11. *Pour tout $a \in M$ et $x \in B^\dagger$, nous avons*

$$\|ax - xa\|_{2,\rho} = 0.$$

Démonstration. Soit $\mathcal{A}$ la C^* -algèbre engendrée par M et $B^\dagger$. Les deux algèbres génératrices sont contenues dans le centralisateur de ρ , qui est une sous-algèbre $*$ fermée en norme. Ainsi $\rho|_{\mathcal{A}}$ est traciale. Sa représentation GNS π engendre une algèbre de von Neumann finie $N = \pi(\mathcal{A})''$ munie d'un état tracial normal fidèle τ_N satisfaisant $\tau_N(\pi(z)) = \rho(z)$ pour $z \in \mathcal{A}$. Les restrictions de π à M et $B^\dagger$ sont fidèles et préservent la trace. Elles sont aussi normales. En effet, si $0 \leq b_i \uparrow b$ dans M et $z \in \mathcal{A}$, la tracialité donne

$$\|\pi((b - b_i)z)\hat{1}\| \leq \|z\| \|b - b_i\|_2 \longrightarrow 0.$$

Les vecteurs $\pi(z)\hat{1}$ sont denses, ce qui prouve la normalité sur M . Le même argument s'applique à $B^\dagger$ avec $\tau^\dagger$. Identifions M à sa copie normale dans N .

La Proposition 7.10, avec $q = 1$, s'applique à tout filet d'unitaires asymptotiquement α -invariants dans M . La caractérisation locale (2.1) donne donc

$$\pi(B^\dagger) \subset B(M \subset N, \alpha).$$

Pour $q \in \hat{G}$ arbitraire, la même proposition et la formule unitaire approchée de la Proposition 4.3 montrent que l'action bicentralisatrice duale relative fixe $\pi(B^\dagger)$ point par point. Le Théorème 5.18 donne

$$\pi(B^\dagger) \subset M' \cap N.$$

Par conséquent,

$$\|ax - xa\|_{2,\rho} = \|\pi(a)\pi(x) - \pi(x)\pi(a)\|_{2,\tau_N} = 0. \quad \square$$

7.6. Résonance pour l'action bicentralisatrice jointe

Dans cette sous-section, nous supposons que M est un facteur. Alors l'action $\beta : \hat{G} \curvearrowright B$ est ergodique. Soit $\mathcal{H}_m$ l'espace de Hilbert obtenu par séparation et complétion de $L^\infty(\hat{G}, L^2(B))$ pour la seminorme

$$\|F\|_m^2 = m(p \mapsto \|F(p)\|_2^2).$$

Lemme 7.12. *Les formules*

$$L(\hat{b} \otimes \hat{x}) = b\vartheta(x), \quad R(\hat{b} \otimes \hat{x}) = \vartheta(x)b \quad (b \in B, x \in B^\dagger)$$

s'étendent en isométries linéaires de $L^2(B) \otimes L^2(B^\dagger)$ dans $\mathcal{H}_m$. La formule

$$I(F)(p) = U_p^\beta(F(p^{-1}))$$

définit une involution unitaire linéaire sur $\mathcal{H}_m$. Si S désigne l'application de bascule sur $L^2(B) \otimes L^2(B)$, alors

$$L(1 \otimes V^*)S = IR(1 \otimes V^*).$$

Démonstration. Définissons d'abord des applications sur $B \odot B$ par

$$L_0(\widehat{b} \otimes \widehat{c})(p) = b\beta_p(c), \quad R_0(\widehat{b} \otimes \widehat{c})(p) = \beta_p(c)b.$$

Pour $z \in B$, le théorème ergodique moyenné et l'ergodicité donnent

$$\frac{1}{\mu(F_i)} \int_{F_i} \beta_p(z) dp \longrightarrow \tau(z)1 \quad \text{dans } L^2(B).$$

Par conséquent, pour $b, c, d, e \in B$, la tracialité donne

$$\begin{aligned} \langle L_0(\widehat{b} \otimes \widehat{c}), L_0(\widehat{d} \otimes \widehat{e}) \rangle_m &= m(p \mapsto \tau(d^* b \beta_p(c e^*))) \\ &= \tau(d^* b) \tau(e^* c), \\ \langle R_0(\widehat{b} \otimes \widehat{c}), R_0(\widehat{d} \otimes \widehat{e}) \rangle_m &= m(p \mapsto \tau(b d^* \beta_p(e^* c))) \\ &= \tau(d^* b) \tau(e^* c). \end{aligned}$$

Ainsi L_0 et R_0 s'étendent en isométries sur $L^2(B) \otimes L^2(B)$. Pour $\xi \in L^2(B)$, l'approximation par des vecteurs de B et la borne

$$\sup_p \|b U_p^\beta(\xi)\|_2 \leq \|b\| \|\xi\|_2$$

montrent que

$$L_0(\widehat{b} \otimes \xi) = [p \mapsto b U_p^\beta(\xi)], \quad R_0(\widehat{b} \otimes \xi) = [p \mapsto U_p^\beta(\xi) b].$$

Puisque $V\widehat{x} = \xi_x$ et que V est unitaire, ce sont précisément $L_0 = L(1 \otimes V^*)$ et $R_0 = R(1 \otimes V^*)$. L'invariance de m sous l'inversion et l'unitarité de U_p^β montrent que I préserve la seminorme. De plus $I^2 = 1$, donc I s'étend en une involution unitaire. Enfin,

$$I R_0(\widehat{b} \otimes \widehat{c})(p) = c \beta_p(b) = L_0 S(\widehat{b} \otimes \widehat{c})(p).$$

La densité prouve l'identité annoncée. □

La proposition suivante utilise le Théorème 7.11 qui donne

$$0 = \|bx - xb\|_{2,\rho} = \|\vartheta(bx) - \vartheta(xb)\|_m \quad (b \in B, x \in B^\dagger).$$

Soient E_α et E_β les mesures spectrales sur $L^2(B)$ avec les conventions

$$U_s^\alpha = \int_{\widehat{G}} \overline{p(s)} dE_\alpha(p), \quad U_q^\beta = \int_G \overline{q(t)} dE_\beta(t).$$

Lemme 7.13. *Soit Ω l'unitaire sur $L^2(B) \otimes L^2(B)$ défini par*

$$\Omega = \int_{\widehat{G} \times G} p(t) d(E_\alpha \otimes E_\beta)(p, t),$$

où E_α agit sur le premier facteur tensoriel et E_β sur le second. Alors

$$L(1 \otimes V^*) = R(1 \otimes V^*) \Omega^*.$$

Démonstration. Utilisons $L_0 = L(1 \otimes V^*)$ et $R_0 = R(1 \otimes V^*)$. Prenons $b \in B$ à α -spectre compact et $x \in B^\dagger$ à $\hat{\alpha}$ -spectre compact. La covariance de la fonction de Plancherel donne

$$\xi_{\hat{\alpha}_q(x)} = U_q^\beta \xi_x,$$

donc le β -spectre de ξ_x est contenu dans $\text{Sp}_{\hat{\alpha}}(x)$. Choisissons $h \in \mathcal{D}(G)$ et $k \in \mathcal{D}(\hat{G})$ égaux à 1 près de $\text{Sp}_{\hat{\alpha}}(x)$ et $\text{Sp}_{\alpha}(b)$, respectivement, et posons

$$\Phi(t, p) = h(t)k(p)\overline{p(t)}.$$

L'inversion de Fourier et le calcul spectral donnent l'intégrale de Bochner

$$\Omega^*(\hat{b} \otimes \xi_x) = \int_{\hat{G} \times G} \hat{\Phi}(q, s) U_{-s}^\alpha \hat{b} \otimes U_{q^{-1}}^\beta \xi_x \, dq \, ds.$$

En appliquant R_0 et en utilisant la formule de multiplication à droite pour ϑ , on obtient

$$\begin{aligned} R_0 \Omega^*(\hat{b} \otimes \xi_x) &= \left[p \mapsto \int_{\hat{G} \times G} \hat{\Phi}(q, s) U_{pq^{-1}}^\beta \xi_x \alpha_{-s}(b) \, dq \, ds \right] \\ &= \vartheta(xb). \end{aligned}$$

Ces intégrales convergent uniformément en norme $L^2(B)$, puisque la norme de l'intégrande est bornée par $|\hat{\Phi}(q, s)| \|b\| \|\xi_x\|_2$. D'autre part, $L_0(\hat{b} \otimes \xi_x) = \vartheta(bx)$. Le Théorème 7.11 donne donc l'égalité de ces vecteurs dans $\mathcal{H}_m$. L'action $\hat{\alpha}$ préserve $B^\dagger$, et le lissage par des fonctions dont les transformées de Fourier sont à support compact rend de tels x denses dans $L^2(B^\dagger)$. Le lissage analogue rend les b permis denses dans $L^2(B)$. Puisque V est surjective, les tenseurs considérés engendrent un sous-espace dense. L'identité découle par continuité. $\square$

Lemme 7.14. *Soit $\alpha : G \curvearrowright M$ une action continue d'un groupe abélien localement compact G sur un facteur de type II_1 , noté M . Supposons que $\Gamma(\alpha) = \hat{G}$. Soit*

$$\Sigma = \text{Sp}(\alpha|_B \times \beta) = \Gamma(\alpha|_B \times \beta).$$

Pour tous $(p, t), (p', t') \in \Sigma$, nous avons

$$p(t')p'(t) = 1. \tag{7.7}$$

En particulier, $p(t)^2 = 1$ pour tout $(p, t) \in \Sigma$ et $\Sigma_0 = \{(p, t) \in \Sigma \mid p(t) = 1\}$ est un sous-groupe de Σ d'indice au plus 2.

Démonstration. Posons $L_0 = L(1 \otimes V^*)$ et $R_0 = R(1 \otimes V^*)$. Les Propositions 7.12 et 7.13 donnent $L_0 S = I R_0$ et $L_0 = R_0 \Omega^*$. Puisque $I^2 = 1$, la première identité donne aussi $I L_0 = R_0 S$. Par conséquent,

$$L_0 S \Omega^* = I R_0 \Omega^* = I L_0 = R_0 S = L_0 \Omega S.$$

L'injectivité de L_0 donne $S \Omega^* = \Omega S$, d'où

$$\Omega(S \Omega S) = 1.$$

Soit E la mesure spectrale jointe de $U^\alpha \times U^\beta$ sur $L^2(B)$ et posons $\Sigma = \text{Sp}(\alpha|_B \times \beta)$. La fidélité de τ identifie Σ au support de E . L'opérateur $\Omega(S \Omega S)$ est l'image de la fonction continue

$$((p, t), (p', t')) \longmapsto p(t')p'(t)$$

sous le calcul spectral pour $E \otimes E$. Le support de $E \otimes E$ est $\Sigma \times \Sigma$. Son multiplicateur ne peut donc être égal à 1 que si $p(t')p'(t) = 1$ en tout point de $\Sigma \times \Sigma$. En prenant $(p', t') = (p, t)$, on obtient la dernière assertion.

Par ergodicité de $\alpha \times \beta$ et (6.4), Σ est un sous-groupe fermé de $\widehat{G} \times G$. L'équation (7.7) donne

$$(pp')(t + t') = p(t)p'(t'),$$

donc $d(p, t) = p(t)$ est un caractère continu $d : \Sigma \rightarrow \{1, -1\}$. Son noyau Σ_0 est contenu dans $\mathcal{R}_G$ et est d'indice au plus deux. $\square$

Théorème 7.15. *Soit $\alpha : \mathbb{R} \curvearrowright M$ un flot continu sur un facteur de type II_1 , noté M , avec $\Gamma(\alpha) = \mathbb{R}$. Alors nous avons*

$$B(M, \alpha) = b(M, \alpha).$$

et $\alpha \times \beta$ est presque périodique sur $B(M, \alpha)$. En particulier, si α est extérieur, alors $B(M, \alpha) = \mathbb{C}1$.

Démonstration. Posons $B = B(M, \alpha)$ et $\Sigma = \text{Sp}(\alpha|_B \times \beta) \subset \mathbb{R}^2$. Le Lemme 7.14 montre que Σ est un sous-groupe fermé et que $2\Sigma \subset \mathcal{R}_{\mathbb{R}}$. La multiplication par deux est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^2$, donc 2Σ est fermé. La Proposition 6.11 implique donc que Σ est discret ou est contenu dans l'un des deux axes de coordonnées. Nous traitons les trois possibilités.

Si $\Sigma \subset \mathbb{R} \times \{0\}$, alors β est trivial sur B . Le Théorème 5.18 et la factorialité de M donnent $B = B^\beta = \mathbb{C}1$. Si $\Sigma \subset \{0\} \times \mathbb{R}$, alors α est trivial sur B , et le Théorème 5.3 et la Proposition 2.19 donnent

$$B = B \cap M^\alpha = b(M, \alpha) \cap M^\alpha = \mathbb{C}.$$

Dans le cas restant, le spectre joint est discret, donc $\alpha|_B \times \beta$ est presque périodique. Le Théorème 5.19 donne alors $B \subset b(M, \alpha)$ et si α est extérieur, nous devons avoir $B = \mathbb{C}$. $\square$

8. Le problème du bicentralisateur de Connes

Nous prouvons la conjecture du bicentralisateur de Connes pour les facteurs de type III_1 à préduel séparable en adaptant l'argument de résonance précédent à la théorie modulaire. La preuve se réduit à exclure un facteur de type III_1 égal à son propre bicentralisateur. Dans ce cas, le flot modulaire et le flot bicentralisateur commutent et sont faiblement mélangeants. Une restriction de résonance sur leur spectre joint contredira ces propriétés.

Nous remplaçons l'état tracial singulier par un état KMS singulier sur le cœur continu. La fonction de Plancherel identifie à nouveau une seconde base de produit croisé, et le théorème du point fixe relatif donne la commutation dans la représentation GNS. L'identité KMS contrôle les termes modulaires qui remplacent les identités traciales. La comparaison de la multiplication à gauche et à droite donne alors la même restriction spectrale que dans le cas tracial, et la géométrie de l'ensemble de résonance achève la preuve.

Soit M_0 un facteur de type III_1 à préduel séparable et soit φ_0 un état normal fidèle. Posons $B = B(M_0, \varphi_0)$ et $\psi = \varphi_0|_B$. Par [AHHM20, discussion preceding Théorème B], si $B \neq \mathbb{C}1$, alors B

est un facteur de type III₁ et $B(B, \psi) = B$. Il suffit donc d'exclure ce cas. Nous renommons (B, ψ) en (M, φ) et supposons tout au long de l'argument que

$$B(M, \varphi) = M. \quad (8.1)$$

Nous conservons σ^φ pour le flot modulaire et écrivons $\beta^\varphi : \mathbb{R} \curvearrowright M$ pour le flot bicentralisateur en notation additive. Notre paramètre est le logarithme du paramètre positif usuel utilisé dans [AHHM20, Ma20, Ma25, Ma26]. Nous utilisons cette convention tout au long de la section, également pour les flots bicentralisateurs relatifs et leurs mises en œuvre unitaires.

La réduction fait agir le flot bicentralisateur sur toute l'algèbre de travail. En particulier, la preuve du Lemme 8.6 applique β_{-p}^φ aux éléments approximants $a_n \in M$ pour obtenir une estimation uniforme en p .

Nous utilisons

$$\|a\|_\varphi = \|a\varphi^{1/2}\|_2, \quad \|a\|_\varphi^\# = \left(\varphi(a^*a) + \varphi(aa^*) \right)^{1/2}.$$

Pour une inclusion avec espérance $M \subset N$, où N est σ -fini, le flot bicentralisateur relatif est caractérisé par

$$\|a_n\varphi - e^q\varphi a_n\| \longrightarrow 0 \implies a_nx - \beta_q^{\varphi, N}(x)a_n \longrightarrow 0 \text{ fortement}^* \quad (8.2)$$

pour les suites bornées $(a_n)_n$ dans M et $x \in B(M \subset N, \varphi)$ [AHHM20, Théorème A(ii)]. Ici $(a\varphi)(b) = \varphi(ba)$ et $(\varphi a)(b) = \varphi(ab)$. Le théorème du point fixe relatif [Ma26] donne

$$B(M \subset N, \varphi)^{\beta^{\varphi, N}} = M' \cap N \quad (8.3)$$

[Ma26, Théorème C]. En particulier, nous avons $M^{\beta^\varphi} = \mathbb{C}1$. Nous avons aussi $M^\varphi = \mathbb{C}$. De plus, les deux actions sont faiblement mélangeantes. Voir [AHHM20, Théorème A(iv)] et [Ma20].

8.1. Un état KMS singulier sur le cœur continu

Soit $(u_t)_{t \in \mathbb{R}}$ les unitaires canoniques dans $M \rtimes_{\sigma^\varphi} \mathbb{R}$. Comme dans la Sous-section 7.4., écrivons

$$\lambda(f) = \int_{\mathbb{R}} f(t)u_t dt, \quad \hat{\lambda} : L^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow L(\mathbb{R}), \quad \hat{\lambda}(\hat{f}) = \lambda(f).$$

Notre convention de Fourier est $\hat{f}(p) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-ipt} dt$, avec mesure inverse $dp/(2\pi)$. En particulier, $u_t(p) = e^{-ipt}$ et

$$\widehat{\sigma^\varphi}_q(\hat{\lambda}(k)) = \hat{\lambda}(p \mapsto k(p+q)).$$

Nous écrivons aussi σ_t^φ pour son extension canonique $\text{Ad}(u_t)$ au produit croisé. L'automorphisme β_s^φ s'étend en fixant chaque u_t , et nous notons cette extension $\tilde{\beta}_s^\varphi$. Ces extensions commutent avec l'action duale.

En croisant l'espérance σ^φ -équivariante $\varphi : M \rightarrow \mathbb{C}$ avec $\mathbb{R}$, on obtient l'espérance conditionnelle normale fidèle

$$E_{L(\mathbb{R})} : M \rtimes_{\sigma^\varphi} \mathbb{R} \longrightarrow L(\mathbb{R}), \quad E_{L(\mathbb{R})}(au_t) = \varphi(a)u_t.$$

Nous identifions son image à $L^\infty(\mathbb{R})$ par $\hat{\lambda}$. Le poids dual et la trace canonique sont normalisés par

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(x) &= \int_{\mathbb{R}} E_{L(\mathbb{R})}(x)(p) \frac{dp}{2\pi}, \\ \text{Tr}(x) &= \int_{\mathbb{R}} e^p E_{L(\mathbb{R})}(x)(p) \frac{dp}{2\pi}\end{aligned}\quad (x \in (M \rtimes_{\sigma^\varphi} \mathbb{R})_+). \quad (8.4)$$

Ainsi $\tilde{\varphi} = \varphi \circ T_M$ et son groupe modulaire est l'extension $\sigma^\varphi = \text{Ad}(u_t)$.

Fixons un ultrafiltre libre $\mathcal{V}$ sur $\mathbb{N}$. Pour les entiers $T \geq 1$, posons

$$m_T(f) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(p) dp, \quad m(f) = \lim_{T \rightarrow \mathcal{V}} m_T(f). \quad (8.5)$$

La moyenne m est invariante sous les translations et la réflexion. Définissons des états normaux ρ_T et un état ρ par

$$\rho_T = m_T \circ E_{L(\mathbb{R})}, \quad \rho = m \circ E_{L(\mathbb{R})}. \quad (8.6)$$

Leurs restrictions à M sont φ . Nous écrivons $\|x\|_{2,\rho} = \rho(x^*x)^{1/2}$.

Soit D le générateur auto-adjoint déterminé par $u_t = e^{itD}$, et posons $e_T = 1_{[-T,T]}(D)$. La coordonnée de Fourier est $p = -D$, donc (8.4) donne

$$\rho_T(x) = \frac{\pi}{T} \text{Tr}(e_T e^{D/2} x e^{D/2} e_T).$$

Ainsi la densité e^D annule le poids spectral dans la trace. Écrivons $(M \rtimes_{\sigma^\varphi} \mathbb{R})_c$ pour les éléments à orbite σ^φ -norme-continue.

Proposition 8.1. *La restriction de ρ à $(M \rtimes_{\sigma^\varphi} \mathbb{R})_c$ est un état KMS pour σ^φ . Plus précisément, si x a un σ^φ -spectre compact et $y \in M \rtimes_{\sigma^\varphi} \mathbb{R}$, alors*

$$\rho(xy) = \rho(y \sigma_{-i}^\varphi(x)). \quad (8.7)$$

Démonstration. Les densités $e_T e^D$ commutent avec les unitaires u_t , donc ρ_T et ρ sont σ^φ -invariants. Supposons que $\text{Sp}_{\sigma^\varphi}(x) \subset [-L, L]$ et $T > L$. Le transfert spectral donne

$$e_T x (1 - e_T) x^* e_T \leq \|x\|^2 1_{[-T, -T+L] \cup [T-L, T]}(D),$$

et la même estimation vaut avec x remplacé par x^* . L'état ρ_T attribue la masse L/T à la projection frontière affichée. Puisqu'il est supporté sur e_T , Cauchy-Schwarz donne

$$\left| \rho_T(xy) - \rho_T(e_T x e_T y e_T) \right| \leq \|x\| \|y\| \sqrt{L/T}. \quad (8.8)$$

Sur le coin $e_T(M \rtimes_{\sigma^\varphi} \mathbb{R})e_T$, l'état normal fidèle ρ_T a pour densité $(\pi/T)e_T e^D$. Son groupe modulaire est donc la restriction de σ^φ . L'élément $e_T x e_T$ est entier analytique, et l'identité KMS sur ce coin donne

$$\rho_T(e_T x e_T y e_T) = \rho_T(e_T y e_T \sigma_{-i}^\varphi(x) e_T).$$

La seconde estimation frontière, appliquée à $\sigma_{-i}^\varphi(x)$, borne la différence entre cette dernière expression et $\rho_T(y \sigma_{-i}^\varphi(x))$ par $\|y\| \|\sigma_{-i}^\varphi(x)\| \sqrt{L/T}$. En prenant l'ultralimite, on prouve (8.7). Les éléments à spectre compact forment une sous-algèbre $*$ analytique invariante dense en norme de $(M \rtimes_{\sigma^\varphi} \mathbb{R})_c$, ce qui prouve l'assertion KMS. $\square$

8.2. La fonction de Plancherel

Nous utilisons les actions standard à gauche et à droite de M sur $L^2(M, \varphi)$, avec produit scalaire linéaire en la première variable. Pour un élément entier analytique $a \in M$, l'action à droite satisfait

$$\varphi^{1/2} \sigma_{i/2}^\varphi(a) = a \varphi^{1/2}. \quad (8..9)$$

Cette identité rend compte du translaté modulaire dans la formule de produit ci-dessous.

Proposition 8.2. *Il existe une unique application linéaire faible*-faible* continue*

$$\vartheta : M \rtimes_{\sigma^\varphi} \mathbb{R} \longrightarrow L^\infty(\mathbb{R}, L^2(M, \varphi))$$

telle que

$$\vartheta(a\hat{\lambda}(k))(p) = k(p)a\varphi^{1/2} \quad (a \in M, k \in L^\infty(\mathbb{R})).$$

Nous appelons $\vartheta(x)$ la fonction de Plancherel de x . Pour $x, y \in M \rtimes_{\sigma^\varphi} \mathbb{R}$, elle satisfait

$$\langle \vartheta(x), \vartheta(y) \rangle = E_{L(\mathbb{R})}(y^*x), \quad \|\vartheta(x)\|_\infty \leq \|x\|.$$

En particulier, ϑ est injective et

$$\|x\|_{2,\rho}^2 = m(p \mapsto \|\vartheta(x)(p)\|_2^2). \quad (8..10)$$

Elle coïncide avec l'identification de Plancherel

$$L^2(M \rtimes_{\sigma^\varphi} \mathbb{R}, \tilde{\varphi}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}, L^2(M, \varphi), dp/(2\pi))$$

sur les éléments bornés de carré intégrable. Elle satisfait aussi

$$\begin{aligned} \vartheta(ax) &= a\vartheta(x), \\ \vartheta(x\hat{\lambda}(k)) &= k\vartheta(x), \\ \vartheta(\widehat{\sigma}_q^\varphi(x))(p) &= \vartheta(x)(p+q), \\ \vartheta(\sigma_t^\varphi(x))(p) &= \Delta_\varphi^{it}\vartheta(x)(p), \\ \vartheta(\tilde{\beta}_s^\varphi(x))(p) &= U_s^{\beta^\varphi}\vartheta(x)(p). \end{aligned} \quad (8..11)$$

Ici $U_s^{\beta^\varphi}(a\varphi^{1/2}) = \beta_s^\varphi(a)\varphi^{1/2}$.

Démonstration. Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $a \in M$, Cauchy-Schwarz conditionnelle donne

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f(p) E_{L(\mathbb{R})}(a^*x)(p) dp \right| \leq \|f\|_1 \|a\varphi^{1/2}\|_2 \|x\|.$$

La description par produit tensoriel projectif de $L^1(\mathbb{R}, L^2(M, \varphi))$ et la dualité hilbertienne donnent donc une unique application contractante satisfaisant

$$\int_{\mathbb{R}} f(p) \langle \vartheta(x)(p), a\varphi^{1/2} \rangle dp = \int_{\mathbb{R}} f(p) E_{L(\mathbb{R})}(a^*x)(p) dp.$$

Toutes les fonctionnelles du membre de droite sont normales. Leur extension continue à l'espace des champs tests intégrables prouve la continuité faible* de ϑ . L'égalité $E_{L(\mathbb{R})}(a^*b\hat{\lambda}(k)) = \varphi(a^*b)k$

donne la formule requise sur les produits. Ces produits engendrent un sous-espace faible* dense, ce qui prouve l'unicité.

Pour $x = a\hat{\lambda}(f)$ et $y = b\hat{\lambda}(g)$, le produit scalaire ponctuel est

$$f\bar{g}\varphi(b^*a) = E_{L(\mathbb{R})}(y^*x).$$

Après intégration contre une fonction L^1 , les deux membres sont séparément faible* continus en x et y . L'identité vaut donc pour tous x, y bornés. La fidélité de l'espérance donne l'injectivité, et en appliquant m on obtient (8.10). L'intégration contre $dp/(2\pi)$ donne la norme L^2 du poids dual. Sur l'ensemble dense des vecteurs $a\lambda(f)$ avec $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, l'image est $\hat{f}a\varphi^{1/2}$, ce qui prouve l'assertion de Plancherel. Enfin, les formules de module et de covariance valent sur les produits et s'étendent par continuité faible*. $\square$

Proposition 8.3. *Soit $x \in M \rtimes_{\sigma^\varphi} \mathbb{R}$ à spectre dual compact, et soit $a \in M$ à spectre modulaire compact. Choisissons $h, k \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ égaux à 1 près de $\text{Sp}_{\widehat{\sigma^\varphi}}(x)$ et $\text{Sp}_{\sigma^\varphi}(a)$, respectivement, et posons*

$$\Phi(t, r) = h(t)k(r)e^{-irt}.$$

En utilisant la transformée de Fourier ordinaire sur $\mathbb{R}^2$ avec la mesure de Lebesgue, nous avons

$$\vartheta(xa)(p) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \hat{\Phi}(q, s) \vartheta(x)(p - q) \sigma_{-s+i/2}^\varphi(a) dq ds. \quad (8.12)$$

L'intégrale converge dans $L^2(M, \varphi)$ et définit un champ mesurable borné.

Démonstration. Le spectre modulaire compact rend a entier analytique. L'intégrande est borné en norme par $|\hat{\Phi}(q, s)| \|x\| \|\sigma_{i/2}^\varphi(a)\|$, donc l'intégrale converge. Après test contre un champ intégrable à valeurs dans $L^2(M, \varphi)$, le membre de droite est normal en x . En effet, la translation du champ test et la multiplication à droite par $\sigma_{-s+i/2}^\varphi(a)^*$ préservent sa norme L^1 à un facteur uniforme $\|\sigma_{i/2}^\varphi(a)\|$ près. Le théorème de Fubini donne un unique champ test intégrable.

Pour $x = cu_t$, l'inversion de Fourier et la propriété de troncature de k donnent

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \hat{\Phi}(q, s) e^{iqt} \sigma_{-s+i/2}^\varphi(a) dq ds = h(t) \sigma_{t+i/2}^\varphi(a).$$

Par (8.9), le membre de droite proposé est donc $h(t)\vartheta(cu_t a)(p)$. Soit x_h la troncature spectrale duale de x de multiplicateur h . Ainsi l'application normale définie par le membre de droite coïncide avec $x \mapsto \vartheta(x_h a)$ sur tout cu_t , et donc sur tout le produit croisé. Puisque $h = 1$ près du spectre dual du x donné, nous avons $x_h = x$, ce qui prouve la formule. $\square$

8.3. Le bicentralisateur dans la représentation GNS

Soit $M^\dagger$ l'algèbre des points fixes dans $M \rtimes_{\sigma^\varphi} \mathbb{R}$ de l'action

$$s \longmapsto \tilde{\beta}_s^\varphi \circ \widehat{\sigma}_{-s}^\varphi.$$

Les actions modulaire et duale préservent $M^\dagger$. Comme dans la Sous-section 7.5., cette algèbre de points fixes donne une seconde décomposition en produit croisé.

Proposition 8.4. *Il existe un état normal fidèle $\varphi^\dagger$ sur $M^\dagger$ tel que*

$$E_{L(\mathbb{R})}(x) = \varphi^\dagger(x)1, \quad \rho_T(x) = \rho(x) = \varphi^\dagger(x) \quad (x \in M^\dagger).$$

Son groupe modulaire est $\sigma_t^{\varphi^\dagger} = \text{Ad}(u_t)|_{M^\dagger}$, et

$$M \rtimes_{\sigma^\varphi} \mathbb{R} = M^\dagger \rtimes_{\sigma^{\varphi^\dagger}} \mathbb{R}.$$

Pour tout $x \in M^\dagger$, il existe un unique $\xi_x \in L^2(M, \varphi)$ tel que

$$\vartheta(x) = [p \mapsto U_p^{\beta^\varphi} \xi_x].$$

L'application $x(\varphi^\dagger)^{1/2} \mapsto \xi_x$ s'étend en une isométrie

$$V : L^2(M^\dagger, \varphi^\dagger) \longrightarrow L^2(M, \varphi), \quad V(\varphi^\dagger)^{1/2} = \varphi^{1/2}.$$

Elle entrelace les groupes unitaires modulaires. L'action duale préserve $M^\dagger$ et $\varphi^\dagger$, et

$$\xi_{\widehat{\sigma^{\varphi^\dagger}_q(x)}} = U_q^{\beta^\varphi} \xi_x.$$

Démonstration. L'espérance entrelace $\tilde{\beta}_s^\varphi \circ \widehat{\sigma^\varphi}_{-s}$ avec la translation par $-s$ sur $L^\infty(\mathbb{R})$. Ainsi sa restriction à $M^\dagger$ est scalaire. La fidélité et la normalité de l'espérance donnent l'état $\varphi^\dagger$, et les définitions de ρ_T et ρ donnent les formules de restriction. La bimodularité de l'espérance donne aussi $\varphi^\dagger \circ \text{Ad}(u_t) = \varphi^\dagger$.

L'action définissante de $M^\dagger$ envoie u_t sur $e^{ist}u_t$. La caractérisation des produits croisés [Na77, Théorème 8.1] donne donc une décomposition d'algèbre coefficient $M^\dagger$ et de groupe implémentant u_t . Son poids à valeurs opérateurs de Haar est

$$T_{M^\dagger} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \tilde{\beta}_s^\varphi \circ \widehat{\sigma^\varphi}_{-s} ds.$$

Pour z positif dans le cœur continu, la normalité et l'équivariance de l'espérance donnent

$$\varphi^\dagger(T_{M^\dagger}(z)) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} E_{L(\mathbb{R})}(z)(p) dp = \varphi(T_M(z)).$$

Ce sont des égalités de valeurs positives étendues. Le groupe modulaire de ce dernier poids dual est $\text{Ad}(u_t)$. La restriction à $M^\dagger$ identifie son groupe modulaire et prouve la décomposition en produit croisé annoncée.

Pour $x \in M^\dagger$, la Proposition 8.2 donne

$$\vartheta(x)(p) = U_s^{\beta^\varphi} \vartheta(x)(p - s).$$

Par conséquent le champ mesurable $p \mapsto U_{-p}^{\beta^\varphi} \vartheta(x)(p)$ est invariant par translation et est donc constant presque partout. Appelons sa valeur ξ_x . L'identité de produit scalaire donne

$$\|\xi_x\|_2^2 = \varphi^\dagger(x^*x),$$

donc V s'étend en une isométrie.

Les deux décompositions en produit croisé ont le même poids dual, comme prouvé ci-dessus. Dans son espace GNS, les vecteurs représentés par $x\hat{\lambda}(f)$, où $x \in M^\dagger$ et $f \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, engendrent un sous-espace dense. Leurs fonctions de Plancherel sont

$$p \longmapsto f(p)U_p^{\beta^\varphi} \xi_x.$$

Supposons que $\eta \in L^2(M, \varphi)$ soit orthogonal à l'image de V , et choisissons un $g \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ non nul. Le champ $p \mapsto g(p)U_p^{\beta^\varphi} \eta$ est orthogonal à tout champ du sous-espace dense précédent. Il est donc nul, d'où $\eta = 0$. L'isométrie V a une image fermée, donc elle est surjective. L'identité $\vartheta(1) = \varphi^{1/2}$ donne sa valeur au vecteur d'état. La covariance sous $\text{Ad}(u_t)$ donne l'entrelacement modulaire. La covariance duale donne la dernière identité et montre que l'action duale préserve $\varphi^\dagger$. $\square$

Nous passons maintenant à la représentation GNS de l'état KMS singulier. Soit π la représentation GNS de $\rho|_{(M \rtimes_{\sigma^\varphi} \mathbb{R})_c}$, soit ξ_ρ son vecteur cyclique, et posons

$$N = \pi\left((M \rtimes_{\sigma^\varphi} \mathbb{R})_c\right)''.$$

Proposition 8.5. *L'état vectoriel de ξ_ρ est fidèle et normal sur N . Nous le notons encore ρ . Les représentations des parties continues modulaires de M et $M^\dagger$ s'étendent en plongements normaux fidèles de ces algèbres dans N . Leurs restrictions d'état sont φ et $\varphi^\dagger$, respectivement, et les deux plongements entrelacent les groupes modulaires. En particulier, l'inclusion $M \subset N$ est avec espérance. Pour $z \in (M \rtimes_{\sigma^\varphi} \mathbb{R})_c$ à spectre modulaire contenu dans $[r_0, r_1]$, on a*

$$e^{-r_1} \rho(z^* z) \leq \rho(z z^*) \leq e^{-r_0} \rho(z^* z). \quad (8..13)$$

Démonstration. La construction de multiplication à droite pour un état KMS donne

$$\|\pi(b)\pi(a)\xi_\rho\| \leq \|\sigma_{i/2}^\varphi(a)\| \|\pi(b)\xi_\rho\| \quad (8..14)$$

pour a entier analytique et b arbitraire dans la partie continue modulaire du cœur. Ces opérateurs de multiplication à droite commutent avec la représentation à gauche et ont une orbite dense sur ξ_ρ . Ainsi ξ_ρ est séparateur pour N , et son état vectoriel est fidèle et normal. L'identité KMS identifie son groupe modulaire avec l'extension de σ^φ .

Prenons un filet borné $(b_i)_i$ dans la partie continue modulaire de M qui converge fortement* vers zéro dans M . Pour chaque a à spectre compact dans le cœur, (8..14) donne

$$\|\pi(b_i)\pi(a)\xi_\rho\| \leq \|\sigma_{i/2}^\varphi(a)\| \|b_i\|_\varphi \longrightarrow 0.$$

Il en va de même pour b_i^* . La densité et la bornitude uniforme donnent $\pi(b_i) \rightarrow 0$ fortement*. Les convolutions modulaires bornées sont fortement* denses dans M sur les ensembles bornés, donc π s'étend normalement à M . L'argument pour $M^\dagger$ est identique, en utilisant $\rho|_{M^\dagger} = \varphi^\dagger$. Les deux extensions sont fidèles parce que leurs restrictions d'état sont fidèles, et les deux entrelacent les groupes modulaires. Le théorème de l'espérance conditionnelle de Takesaki [Ta03, Théorème

IX.4.2] donne l'espérance sur M .

Le vecteur $\pi(z)\xi_\rho$ a un support spectral dans $[-r_1, -r_0]$ pour $\log \Delta_\rho$. L'identité

$$\rho(zz^*) = \|\Delta_\rho^{1/2}\pi(z)\xi_\rho\|^2$$

prouve (8.13). □

Nous identifions M à son image normale dans N , et conservons $\pi(x)$ pour l'image de $x \in M^\dagger$.

Lemme 8.6. *Fixons $q \in \mathbb{R}$ et une suite bornée $(a_n)_n$ dans M satisfaisant*

$$\|a_n\varphi - e^q\varphi a_n\| \longrightarrow 0.$$

Alors

$$\sup_{t \in K} \|\sigma_t^\varphi(a_n) - e^{-iqt}a_n\|_\varphi^\# \longrightarrow 0 \quad (K \Subset \mathbb{R}).$$

La suite peut être remplacée, à une erreur tendant vers zéro fortement* près, par une suite bornée à spectre modulaire contenu dans $[q-1, q+1]$ et ayant la même convergence préduale mise à l'échelle. Pour tout $b \in M$, on a aussi

$$\sup_{p \in \mathbb{R}} \|a_n\beta_p^\varphi(b) - \beta_{p+q}^\varphi(b)a_n\|_\varphi^\# \longrightarrow 0.$$

Démonstration. Sur $\mathbb{M}_2(M)$, prenons l'état $(e^q\varphi \oplus \varphi)/(1 + e^q)$ et les éléments $e_{12} \otimes a_n$. Leurs commutateurs préduaux tendent vers zéro. L'estimation de racine carrée [Ha87, Lemme 2.8(b)], appliquée aussi aux adjoints, donne la commutation asymptotique avec la racine carrée de cet état. Le calcul spectral et

$$\sup_{t \in K} |v^{it} - 1| \leq C_K |v^{1/2} - 1| \quad (v > 0)$$

donnent l'invariance modulaire compacte-uniforme dans l'algèbre matricielle. Son groupe modulaire agit sur le coin hors diagonale par $e^{iqt}\sigma_t^\varphi$, ce qui prouve la première assertion.

Choisissons une fonction de Schwartz non négative f d'intégrale un avec $\text{supp } \hat{f} \subset [-1, 1]$, et remplaçons a_n par

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{iqt}\sigma_t^\varphi(a_n) dt.$$

La formule de troncature spectrale donne le spectre requis et une borne uniforme de norme. La première assertion et une estimation de queue L^1 donnent la convergence de la différence fortement*. La préservation de l'état montre que le défaut préduel mis à l'échelle n'augmente pas.

Pour la dernière assertion, appliquons β_{-p}^φ à l'erreur affichée. Les éléments résultants $\beta_{-p}^\varphi(a_n)$ ont la même borne de norme et le même défaut préduel mis à l'échelle, indépendamment de p . L'échec de la convergence uniforme donnerait une suite p_n contredisant la caractérisation définissante de β_q^φ , puisque $B(M, \varphi) = M$. □

Théorème 8.7. *Les images normales de M et $M^\dagger$ dans l'algèbre de von Neumann GNS de ρ commutent.*

Démonstration. Prenons d'abord $x \in M^\dagger$ à spectre compact pour $\widehat{\sigma}^\varphi$ et $\text{Ad}(u_t)$. Fixons $q \in \mathbb{R}$ et une suite bornée $(a_n)_n$ satisfaisant $\|a_n\varphi - e^q\varphi a_n\| \rightarrow 0$. Nous prouvons que $[a_n, \pi(x)] \rightarrow 0$ fortement* dans N . Par le Lemme 8.6 et la normalité du plongement de M , nous pouvons supposer

$$\text{Sp}_{\sigma^\varphi}(a_n) \subset [q-1, q+1].$$

Ces éléments sont entiers analytiques et

$$\sup_n \|\sigma_{i/2}^\varphi(a_n)\| < \infty.$$

Par exemple, choisissons une troncature spectrale de Schwartz fixe égale à un sur cet intervalle et appliquons sa formule de convolution en $i/2$.

Écrivons $F(p) = \vartheta(x)(p) = U_p^{\beta^\varphi} \xi_x$. Choisissons $h, k \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ égaux à un près de $\text{Sp}_{\widehat{\sigma}^\varphi}(x)$ et $[q-1, q+1]$, respectivement, et posons

$$\Phi(t, r) = h(t)k(r)e^{-irt}.$$

La Proposition 8.3 donne

$$\vartheta(xa_n)(p) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{\Phi}(r, s) F(p-r) \sigma_{-s+i/2}^\varphi(a_n) dr ds.$$

La multiplication à droite ici est l'action à droite bornée canonique sur $L^2(M, \varphi)$. Le décalage modulaire est nécessaire parce que $\varphi^{1/2} \sigma_{i/2}^\varphi(a) = a\varphi^{1/2}$.

Posons

$$d_{n,s} = \sigma_{-s+i/2}^\varphi(a_n) - e^{iqs} \sigma_{i/2}^\varphi(a_n).$$

Ces éléments sont uniformément bornés en norme d'opérateur. Pour $b \in M$, nous avons

$$\begin{aligned} \|F(p-r)d_{n,s}\|_2 &\leq C \|\xi_x - b\varphi^{1/2}\|_2 \\ &\quad + \|b\| \|\sigma_{-s}^\varphi(a_n) - e^{iqs} a_n\|_\varphi. \end{aligned}$$

En effet, l'action à droite est bornée par $\|d_{n,s}\|$, et

$$\varphi^{1/2} d_{n,s} = (\sigma_{-s}^\varphi(a_n) - e^{iqs} a_n) \varphi^{1/2}.$$

L'estimation est uniforme en p, r . Intégrons contre $|\widehat{\Phi}(r, s)| dr ds / (2\pi)^2$, utilisons la convergence modulaire compacte-uniforme et une estimation de queue L^1 , puis approchons ξ_x par $b\varphi^{1/2}$. Il s'ensuit que remplacer $\sigma_{-s+i/2}^\varphi(a_n)$ dans la formule de produit par $e^{iqs} \sigma_{i/2}^\varphi(a_n)$ change le champ d'une quantité tendant vers zéro en norme essentielle supérieure.

L'inversion de Fourier donne

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{\Phi}(r, s) e^{iqs} ds = 2\pi \widehat{h}(r+q).$$

Puisque h vaut un près du spectre dual de x , sa troncature spectrale agit comme l'identité sur F . D'où

$$\text{ess sup}_{p \in \mathbb{R}} \|\vartheta(xa_n)(p) - F(p+q) \sigma_{i/2}^\varphi(a_n)\|_2 \longrightarrow 0.$$

La dernière partie du Lemme 8.6 donne aussi

$$\sup_{p \in \mathbb{R}} \|a_n F(p) - F(p+q) \sigma_{i/2}^\varphi(a_n)\|_2 \longrightarrow 0.$$

Pour le justifier pour ξ_x , approchons-le par $b\varphi^{1/2}$. Les erreurs d'approximation sont uniformes en p parce que $(a_n)_n$ et $(\sigma_{i/2}^\varphi(a_n))_n$ sont uniformément bornés. Sur le vecteur approximant, l'expression est

$$(a_n \beta_p^\varphi(b) - \beta_{p+q}^\varphi(b) a_n) \varphi^{1/2}.$$

L'identité de norme de Plancherel et la linéarité à gauche par rapport à M donnent

$$\rho([a_n, x]^* [a_n, x]) \longrightarrow 0.$$

Tous les commutateurs ont leurs $\text{Ad}(u_t)$ -spectres dans un intervalle compact fixe. Les estimations spectrales KMS donnent aussi $\rho([a_n, x][a_n, x]^*) \rightarrow 0$. La bornitude uniforme et la fidélité de l'état normal sur N impliquent la convergence forte* souhaitée. La même conclusion vaut pour la suite originale avant lissage, par normalité de $M \subset N$.

En prenant $q = 0$, on montre que $\pi(x) \in B(M \subset N, \varphi)$. Pour tout q , la même convergence et l'unicité ponctuelle dans la caractérisation du flot bicentralisateur relatif [AHHM20, Lemme 3.4 and proof of Théorème A(ii)] montrent que

$$\beta_q^{\varphi, N}(\pi(x)) = \pi(x).$$

Le théorème du point fixe relatif [Ma26, Théorème C] donne $\pi(x) \in M' \cap N$.

Les deux actions qui commutent préservent $M^\dagger$ et $\varphi^\dagger$. Les convolutions bornées dans les deux variables approchent tout élément de $M^\dagger$ fortement* par des éléments à spectres compacts pour les deux actions. Le plongement normal de $M^\dagger$ et la fermeture forte de $M' \cap N$ achèvent la preuve. $\square$

8.4. Résonance pour l'action bicentralisatrice jointe

Soit $\mathcal{H}_m$ l'espace de Hilbert obtenu par séparation et complétion de $L^\infty(\mathbb{R}, L^2(M, \varphi))$ pour la semi-norme

$$\|F\|_m^2 = m(p \mapsto \|F(p)\|_2^2).$$

Pour $a, c \in M$, considérons les champs

$$\begin{aligned} L(a\varphi^{1/2} \otimes c\varphi^{1/2})(p) &= a\beta_p^\varphi(c)\varphi^{1/2}, \\ R(a\varphi^{1/2} \otimes c\varphi^{1/2})(p) &= \beta_p^\varphi(c)a\varphi^{1/2}. \end{aligned}$$

Proposition 8.8. *Les applications L et R s'étendent en isométries de $L^2(M, \varphi) \otimes L^2(M, \varphi)$ dans $\mathcal{H}_m$. La formule*

$$I(F)(p) = U_p^{\beta^\varphi} F(-p)$$

définit une involution unitaire linéaire sur $\mathcal{H}_m$. Si S est la bascule tensorielle, alors $IR = LS$ et $IL = RS$. Pour tout $\xi \in L^2(M, \varphi)$ et tout $a \in M$ entier analytique,

$$\begin{aligned} L(a\varphi^{1/2} \otimes \xi) &= [p \mapsto aU_p^{\beta^\varphi} \xi], \\ R(a\varphi^{1/2} \otimes \xi) &= [p \mapsto (U_p^{\beta^\varphi} \xi) \sigma_{i/2}^\varphi(a)]. \end{aligned}$$

La multiplication à droite dans la dernière ligne est l'action à droite standard de M sur $L^2(M, \varphi)$.

Démonstration. Les moyennes de Cesàro bornées de $\beta_p^\varphi(z)$ convergent faiblement* vers $\varphi(z)1$, par ergodicité et théorème ergodique moyenné. Par conséquent, pour $a, b, c, d \in M$,

$$\begin{aligned} & \langle R(a\varphi^{1/2} \otimes c\varphi^{1/2}), R(b\varphi^{1/2} \otimes d\varphi^{1/2}) \rangle_m \\ &= m(p \mapsto \varphi(b^* \beta_p^\varphi(d^* c) a)) = \varphi(b^* a) \varphi(d^* c). \end{aligned}$$

Ainsi R est isométrique. L'invariance de m sous la réflexion et l'unitarité de $U_p^{\beta^\varphi}$ montrent que I est isométrique, et $I^2 = 1$. Un calcul direct donne $IR = LS$, donc L est aussi isométrique et $IL = RS$.

Pour a analytique, l'identité modulaire

$$(c\varphi^{1/2})\sigma_{i/2}^\varphi(a) = ca\varphi^{1/2}$$

donne la dernière formule sur les vecteurs $\xi = c\varphi^{1/2}$. Les bornes uniformes

$$\sup_p \|aU_p^{\beta^\varphi}\xi\|_2 \leq \|a\| \|\xi\|_2, \quad \sup_p \|(U_p^{\beta^\varphi}\xi)\sigma_{i/2}^\varphi(a)\|_2 \leq \|\sigma_{i/2}^\varphi(a)\| \|\xi\|_2$$

permettent l'approximation par de tels vecteurs et prouvent les deux formules. $\square$

Soient E_{σ^φ} et E_{β^φ} les mesures spectrales sur $L^2(M, \varphi)$ avec

$$\Delta_\varphi^{\text{ir}} = \int_{\mathbb{R}} e^{-irp} dE_{\sigma^\varphi}(p), \quad U_s^{\beta^\varphi} = \int_{\mathbb{R}} e^{-ist} dE_{\beta^\varphi}(t).$$

Définissons l'unitaire

$$\Omega = \int_{\mathbb{R}^2} e^{ipt} d(E_{\sigma^\varphi} \otimes E_{\beta^\varphi})(p, t),$$

où les deux mesures spectrales agissent sur le premier et le second facteur tensoriel, respectivement.

Proposition 8.9. *Nous avons $L = R\Omega^*$.*

Démonstration. Prenons $a \in M$ à σ^φ -spectre compact et $x \in M^\dagger$ dans la partie continue modulaire à $\widehat{\sigma^\varphi}$ -spectre compact. Écrivons $\xi_x = V(x(\varphi^\dagger)^{1/2})$. La covariance de ϑ donne

$$\widehat{\xi_{\sigma^\varphi_q(x)}} = U_q^{\beta^\varphi} \xi_x,$$

donc le β^φ -spectre de ξ_x est contenu dans $\text{Sp}_{\widehat{\sigma^\varphi}}(x)$. Choisissons $h, k \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ égaux à 1 près de $\text{Sp}_{\widehat{\sigma^\varphi}}(x)$ et $\text{Sp}_{\sigma^\varphi}(a)$, respectivement, et posons

$$\Phi(t, r) = h(t)k(r)e^{-irt}.$$

Avec la transformée de Fourier ordinaire sur $\mathbb{R}^2$, le calcul spectral donne

$$\Omega^*(a\varphi^{1/2} \otimes \xi_x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{\Phi}(q, s) \sigma_{-s}^\varphi(a) \varphi^{1/2} \otimes U_{-q}^{\beta^\varphi} \xi_x dq ds.$$

La Proposition 8.8 et la formule de multiplication à droite dans la Proposition 8.3 donnent

$$\begin{aligned} R\Omega^*(a\varphi^{1/2} \otimes \xi_x) &= \left[p \mapsto \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{\Phi}(q, s) (U_{p-q}^{\beta^\varphi} \xi_x) \sigma_{i/2-s}^\varphi(a) dq ds \right] \\ &= \vartheta(xa). \end{aligned}$$

Ces intégrales convergent uniformément en norme $L^2(M, \varphi)$, puisque leurs intégrandes ont une norme au plus $|\widehat{\Phi}(q, s)| \|\xi_x\|_2 \|\sigma_{1/2}^\varphi(a)\|$. La linéarité à gauche par rapport à M donne $L(a\varphi^{1/2} \otimes \xi_x) = \vartheta(ax)$. Le Théorème 8.7 donne

$$\|\vartheta(ax) - \vartheta(xa)\|_m = \|ax - xa\|_{2,\rho} = 0.$$

Le lissage par rapport aux deux flots qui commutent rend les x permis denses dans $L^2(M^\dagger, \varphi^\dagger)$. Le lissage modulaire rend les a permis denses dans $L^2(M, \varphi)$. La surjectivité de V et la continuité prouvent l'identité d'opérateurs. $\square$

Proposition 8.10. *Le spectre joint $\Sigma = \text{Sp}(\sigma^\varphi \times \beta^\varphi)$ satisfait*

$$pt' + p't \in 2\pi\mathbb{Z} \quad ((p, t), (p', t') \in \Sigma). \quad (8.15)$$

En particulier, $pt \in \pi\mathbb{Z}$ pour tout $(p, t) \in \Sigma$.

Démonstration. Les Propositions 8.8 et 8.9 donnent $IR = LS$, $IL = RS$, et $L = R\Omega^*$. D'où

$$LS\Omega^* = IR\Omega^* = IL = RS = L\Omega S.$$

L'injectivité de L donne $S\Omega^* = \Omega S$, ou de manière équivalente $\Omega(S\Omega S) = 1$.

Soit $\mathbf{E}$ la mesure spectrale jointe sur $L^2(M, \varphi)$. La fidélité de φ identifie son support à Σ . L'opérateur $\Omega(S\Omega S)$ est l'image de la fonction continue

$$((p, t), (p', t')) \longmapsto e^{i(pt' + p't)}$$

sous le calcul spectral pour $\mathbf{E} \otimes \mathbf{E}$. Le support de ce produit de mesures spectrales est $\Sigma \times \Sigma$, donc la fonction vaut 1 sur tout cet ensemble. En prenant deux fois le même point, on prouve la dernière assertion. $\square$

Théorème 8.11. *Soit M un facteur de type III_1 . Alors*

$$B(M, \varphi) = \mathbb{C}1$$

pour tout état normal fidèle φ sur M .

Démonstration. Par (8.1), il suffit d'exclure un facteur de type III_1 M avec $B(M, \varphi) = M$. Pour un tel facteur, les flots modulaire et bicentralisateur commutent et sont faiblement mélangeants. Leur action jointe est ergodique, donc (6.4) fait de $\Sigma = \text{Sp}(\sigma^\varphi \times \beta^\varphi)$ un sous-groupe fermé de $\mathbb{R}^2$. La Proposition 8.10 donne $pt \in \pi\mathbb{Z}$ pour $(p, t) \in \Sigma$. Donc 2Σ est un sous-groupe fermé contenu dans $\mathcal{R}_\mathbb{R}$. La Proposition 6.11 montre que 2Σ , et donc Σ , est discret ou contenu dans un axe de coordonnées.

Si Σ est discret, sa mesure spectrale jointe est supportée sur un ensemble dénombrable. La représentation unitaire jointe est donc une somme directe de caractères, donc le flot modulaire est presque périodique. Le mélange faible force $L^2(M, \varphi) = \mathbb{C}\varphi^{1/2}$. Si Σ est contenu dans un axe de coordonnées, l'un des deux flots est trivial. L'ergodicité de ce flot donne encore $M = \mathbb{C}1$. Les deux alternatives contredisent l'hypothèse de type III_1 . $\square$

Références

- [AH14] H. ANDO, U. HAAGERUP, *Ultraproducts of von Neumann algebras*. J. Funct. Anal. **266** (2014), no. 12, 6842–6913.
- [AHHM20] H. ANDO, U. HAAGERUP, C. HOUDAYER, A. MARRAKCHI, *Structure of bicentralizer algebras and inclusions of type III factors*. Math. Ann. **376** (2020), 1145–1194. *note : Uffe Haagerup (1949 - 2015)*.
- [BCM18] J.P. BANNON, J. CAMERON, K. MUKHERJEE, *On noncommutative joinings*. Int. Math. Res. Not. IMRN (2018), no. 15, 4734–4779.
- [BLS92] M. E. B. BEKKA, A. T. LAU, G. SCHLICHTING, *On invariant subalgebras of the Fourier–Stieltjes algebra of a locally compact group*. Math. Ann. **294** (1992), no. 3, 513–522.
- [Br61] F. BRUHAT, *Distributions sur un groupe localement compact et applications à l’étude des représentations des groupes p -adiques*. Bull. Soc. Math. France **89** (1961), 43–75.
- [Co73] A. CONNES, *Une classification des facteurs de type III*. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **6** (1973), 133–252.
- [Co75] A. CONNES, *Outer conjugacy classes of automorphisms of factors*. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **8** (1975), no. 3, 383–419.
- [Co76] A. CONNES, *Classification of injective factors. Cases II_1 , II_∞ , III_λ , $\lambda \neq 1$* . Ann. of Math. (2) **104** (1976), no. 1, 73–115.
- [Co85] A. CONNES, *Factors of type III_1 , property L'_λ , and closure of inner automorphisms*. J. Operator Theory **14** (1985), no. 1, 189–211.
- [CFW81] A. CONNES, J. FELDMAN, B. WEISS, *An amenable equivalence relation is generated by a single transformation*. Ergodic Theory Dynam. Systems **1** (1981), no. 4, 431–450.
- [CS78] A. CONNES, E. STØRMER, *Homogeneity of the state space of factors of type III_1* . J. Funct. Anal. **28** (1978), no. 2, 187–196.
- [CT77] A. CONNES, M. TAKESAKI, *The flow of weights on factors of type III*. Tohoku Math. J. (2) **29** (1977), no. 4, 473–575. Erratum, *ibid.* **30** (1978), no. 4, 653–655.
- [DCDR24] K. DE COMMER, J. DE RO, *Approximation properties for dynamical W^* -correspondences*. Adv. Math. **458** (2024), 109958.
- [Ef65] E. G. EFFROS, *Transformation groups and C^* -algebras*. Ann. of Math. (2) **81** (1965), 38–55.
- [FM77] J. FELDMAN, C. C. MOORE, *Ergodic equivalence relations, cohomology, and von Neumann algebras. II*. Trans. Amer. Math. Soc. **234** (1977), no. 2, 325–359.
- [Ha78a] U. HAAGERUP, *On the dual weights for crossed products of von Neumann algebras. I. Removing separability conditions*. Math. Scand. **43** (1978), no. 1, 99–118.
- [Ha78b] U. HAAGERUP, *On the dual weights for crossed products of von Neumann algebras. II. Application of operator valued weights*. Math. Scand. **43** (1978), no. 1, 119–140.
- [Ha79] U. HAAGERUP, *Operator valued weights in von Neumann algebras. I*. J. Funct. Anal. **32** (1979), no. 2, 175–206.
- [Ha87] U. HAAGERUP, *Connes’ bicentralizer problem and uniqueness of the injective factor of type III_1* . Acta Math. **158** (1987), no. 1–2, 95–148.
- [HR79] E. HEWITT, K. A. ROSS, *Abstract harmonic analysis. Vol. I. Structure of topological groups, integration theory, group representations*. Second edition, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 115, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1979.
- [Ho09] C. HOUDAYER, *Free Araki–Woods factors and Connes’ bicentralizer problem*. Proc. Amer. Math. Soc. **137** (2009), no. 11, 3749–3755.
- [HI17] C. HOUDAYER, Y. ISONO, *Unique prime factorization and bicentralizer problem for a class of type III factors*. Adv. Math. **305** (2017), 402–455.
- [HI20] C. HOUDAYER, Y. ISONO, *Connes’ bicentralizer problem for q -deformed Araki–Woods algebras*. Bull. Lond. Math. Soc. **52** (2020), no. 6, 1010–1023.
- [HM26] C. HOUDAYER, A. MARRAKCHI, *Uniqueness of almost periodic outer flows on the hyperfinite type II_1 factor*. Preprint (2026), [arXiv:2605.02781](https://arxiv.org/abs/2605.02781).

- [HS90] U. HAAGERUP, E. STØRMER, *Equivalence of normal states on von Neumann algebras and the flow of weights*. Adv. Math. **83** (1990), no. 2, 180–262.
- [Is24] Y. ISONO, *Haagerup and Størmer’s conjecture on pointwise inner automorphisms*. Compos. Math. **160** (2024), no. 10, 2480–2495.
- [Is25] Y. ISONO, *Weak relative Dixmier property and Popa’s intertwining technique for type III subfactors*. Preprint (2025), [arXiv:2508.17592](https://arxiv.org/abs/2508.17592).
- [IM22] Y. ISONO, A. MARRAKCHI, *Tensor product decompositions and rigidity of full factors*. Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. **55** (2022), no. 1, 109–139.
- [Ka89] Y. KAWAHIGASHI, *Centrally ergodic one-parameter automorphism groups on semifinite injective von Neumann algebras*. Math. Scand. **64** (1989), 285–299.
- [Ka91] Y. KAWAHIGASHI, *One-parameter automorphism groups of the hyperfinite type II_1 factor*. J. Operator Theory **25** (1991), no. 1, 37–59.
- [KLP10] D. KERR, H. LI, M. PICHOT, *Turbulence, representations, and trace-preserving actions*. Proc. Lond. Math. Soc. (3) **100** (2010), no. 2, 459–484.
- [KP25] Y. KAWAHIGASHI, with comments by S. POPA, *Q7.2 : Classification of one parameter groups of automorphisms on the hyperfinite II_1 factor*. W*-News, October 14, 2025, [blog post](#).
- [KPV15] D. KYED, H. D. PETERSEN, S. VAES, *L^2 -Betti numbers of locally compact groups and their cross section equivalence relations*. Trans. Amer. Math. Soc. **367** (2015), no. 7, 4917–4956.
- [Ma20] A. MARRAKCHI, *Full factors, bicentralizer flow and approximately inner automorphisms*. Invent. Math. **222** (2020), no. 1, 375–398.
- [Ma25] A. MARRAKCHI, *Kadison’s problem for type III subfactors and the bicentralizer conjecture*. Invent. Math. **239** (2025), 79–163.
- [Ma26] A. MARRAKCHI, *Kadison’s problem and ergodicity of the bicentralizer flow*. Preprint (2026), [arXiv:2606.23636](https://arxiv.org/abs/2606.23636).
- [MV23] A. MARRAKCHI, S. VAES, *Spectral gap and strict outerness for actions of locally compact groups on full factors*. Enseign. Math. **69** (2023), no. 3/4, 353–379.
- [MT16] T. MASUDA, R. TOMATSU, *Rohlin flows on von Neumann algebras*. Mem. Amer. Math. Soc. **244** (2016), no. 1153, ix+111 pp.
- [Mo25] B. MORANDO, *Strictly outer actions of locally compact groups : beyond the full factor case*. J. Funct. Anal. **289** (2025), no. 2, 110897.
- [Na77] Y. NAKAGAMI, *Dual action on a von Neumann algebra and Takesaki’s duality for a locally compact group*. Publ. Res. Inst. Math. Sci. **12** (1977), no. 3, 727–775.
- [Ni26] T. NISHIHARA, *Group actions on von Neumann algebras with compact open subgroups*. Preprint (2026), [arXiv:2608.27827](https://arxiv.org/abs/2608.27827).
- [Oc85] A. OCNEANU, *Actions of discrete amenable groups on von Neumann algebras*. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1138, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [OP78] D. OLESEN, G. K. PEDERSEN, *Applications of the Connes spectrum to C^* -dynamical systems*. J. Funct. Anal. **30** (1978), 179–197.
- [Po95] S. POPA, *Free independent sequences in type II_1 factors and related problems*. Recent advances in operator algebras (Orléans, 1992), Astérisque No. 232 (1995), 187–202.
- [Po14] S. POPA, *Independence properties in subalgebras of ultraproduct II_1 factors*. J. Funct. Anal. **266** (2014), 5818–5846.
- [PSV20] S. POPA, D. SHLYAKHTENKO, S. VAES, *Classification of regular subalgebras of the hyperfinite II_1 factor*. J. Math. Pures Appl. (9) **140** (2020), 280–308.
- [Sc57] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions à valeurs vectorielles. I*. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **7** (1957), 1–141.
- [Sh14] K. SHIMADA, *Locally compact separable abelian group actions on factors with the Rokhlin property*. Publ. Res. Inst. Math. Sci. **50** (2014), no. 3, 363–381.

- [Ta02] M. TAKESAKI, *Theory of operator algebras*. I. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, **124**. Operator Algebras and Non-commutative Geometry, 5. Springer-Verlag, Berlin, 2002. xix+415 pp.
- [Ta03] M. TAKESAKI, *Theory of operator algebras*. II. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, **125**. Operator Algebras and Non-commutative Geometry, 6. Springer-Verlag, Berlin, 2003. xxii+518 pp.
- [Va01] S. VAES, *The unitary implementation of a locally compact quantum group action*. J. Funct. Anal. **180** (2001), no. 2, 426–480.
- [Ya92] T. YAMANOUCI, *Crossed products by groupoid actions and their smooth flows of weights*. Publ. Res. Inst. Math. Sci. **28** (1992), no. 4, 535–578.