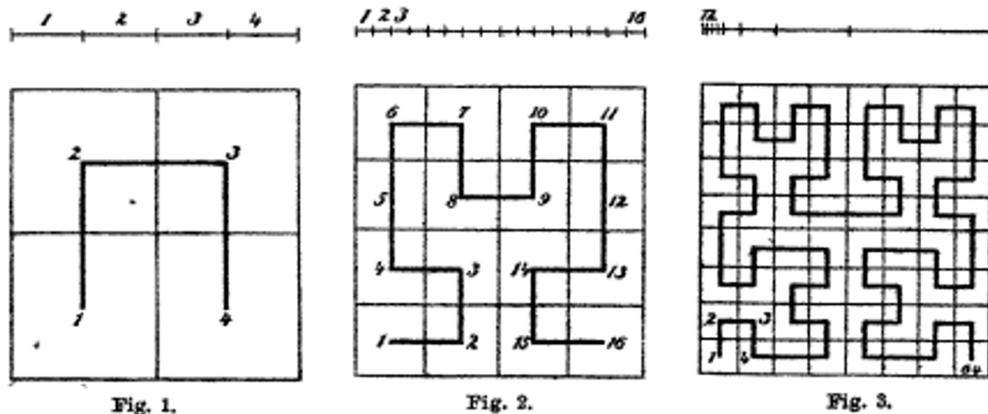


À propos de l'application continue d'une ligne vers un morceau de surface.¹

par

David Hilbert à Königsberg²

Peano a récemment montré dans les Annales Mathématiques³, à travers une observation arithmétique, comment les points d'une ligne peuvent être envoyés continûment sur les points d'une surface. Les fonctions requises pour une telle application peuvent être réalisées de manière plus claire si l'on utilise la vue géométrique suivante. Divisons d'abord la ligne à représenter, un segment de droite de longueur 1, en 4 parties égales 1, 2, 3, 4 et divisons l'aire, que nous supposons avoir la forme d'un carré de côté 1, en 4 carrés égaux 1, 2, 3, 4 (Fig. 1), par deux lignes droites perpendiculaires. Deuxièmement, divisons chacune des sections 1, 2, 3, 4 en 4 parties égales, de sorte que nous ayons 16 sections sur la ligne droite, numérotées 1, 2, 3, ..., 16. Dans le même temps, chacun des 4 carrés 1, 2, 3, 4 est divisé en 4 carrés égaux et les nombres 1, 2, 3, ..., 16 sont écrits dans les 16 carrés résultants, l'ordre des carrés devant être choisi de la manière suivante : chaque carré partage un côté avec le carré précédent (Fig. 2). Si nous poursuivons ce processus, la figure 3 illustrant l'étape suivante, il est facile de voir comment on peut attribuer un seul point spécifique du carré à chaque point donné de la ligne. Il suffit de déterminer la partie de la ligne sur laquelle se situe le point donné. Les carrés marqués des mêmes numéros se trouvent nécessairement à la suite les uns des autres et délimitent la zone dans laquelle se trouve un certain point. Le point obtenu est l'image du point donné. *L'image ainsi obtenue est claire et continue et, à l'inverse, à chaque point du carré correspondent un, deux ou quatre points de la ligne. Il semble également remarquable qu'en modifiant de manière appropriée les lignes partielles du carré, on puisse facilement trouver une image claire et continue, dont l'inverse n'est nulle part plus ambiguë.*



¹À comparer à une communication sur le même sujet dans les Comptes-rendus de la Société allemande des chercheurs en sciences naturelles et médecins. Brème 1890.

Référence : (de) D. Hilbert, "Über die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück", Math. Ann., vol. 38, 1891, p. 459-460.

https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN235181684_038?ti fy = %7B%22pages%22%3A%5B476%5D%7D.

Transcription Latex : Denise Vella-Chemla, mars 2024.

Traduction : google translate de l'allemand au français.

²suivi des lettres i. Pr. qui signifient peut-être à Prague.

³Vol. 36, page 157.

Les applications présentées ci-dessus sont des exemples simples de fonctions à la fois continues partout et différenciables nulle part.

La signification mécanique de l'illustration discutée est la suivante : un point peut se déplacer continûment de telle manière qu'il passe par tous les points d'une surface pendant un temps fini. En modifiant de manière appropriée les lignes partielles du carré, on peut également garantir qu'un nombre infini de points densément répartis du carré sont parcourus selon une certaine direction de mouvement, à la fois vers l'avant et vers l'arrière.

En ce qui concerne la représentation analytique des fonctions représentatives, elle résulte de leur continuité, selon un théorème général ⁴ prouvé par K. Weierstrass, qui énonce que ces fonctions peuvent se développer en séries infinies qui progressent selon des fonctions rationnelles entières, qui convergent absolument et uniformément tout au long de l'intervalle.

Königsberg⁵, le 4 Mars 1891.

⁴Comparez ce résultat à celui de l'article des Actes de l'Académie des Sciences de Berlin, du 9 juillet 1885.

⁵suivi également des lettres i. Pr. pour à Prague, peut-être.