

Sur le problème des zones voisines.

L. Heffter à Giessen.

Introduction.

Si l'on appelle "régions voisines" un groupe de régions sur une surface, chacune bordant toutes les autres le long d'une ligne, et non seulement par des points, et, par un transfert dualiste, "points voisins" un groupe de points sur une surface, chacun étant relié à tous les autres par des lignes non sécantes sur la surface, alors le problème auquel sont consacrées les recherches suivantes est le suivant :

"Quelle est la valeur minimale du genre¹ d'une surface qui autorise un nombre donné de régions voisines (ou de points voisins) ?" et vice versa :

"Quel est le nombre maximal de zones voisines (ou de points voisins) sur une zone d'un genre donné ?"

Jusqu'à récemment, cette question avait été peu abordée dans la littérature. Baltzer² avait trouvé une note de Weiske, ami de Möbius, dans les écrits de ce dernier, contenant la phrase : "Cinq aires voisines (spatias confinia) sont impossibles dans une même surface", ce qui est vrai si l'on entend par "surface" une surface de genre zéro. Baltzer identifie directement cette phrase au problème bien connu des quatre couleurs, pour la démonstration duquel elle est certes nécessaire, mais pas immédiatement suffisante, et M. Dingeldey³ a récemment soutenu ce point de vue. De plus, dans un essai sur le problème des quatre couleurs, M. Kempe⁴ a fait remarquer incidemment que sur une surface comme celle d'un anneau, six couleurs seraient nécessaires, puisqu'il pouvait y construire six régions voisines, alors que, comme nous le verrons, il y en a sept. L'idée de formuler de tels problèmes de manière dualiste, comme nous l'avons déjà fait, vient également de lui (ibid., p. 200).

Enfin, M. Heawood⁵ s'est récemment penché sur le problème de la couleur pour les surfaces de tout genre. Il a d'abord montré que la démonstration de Kempe mentionnée précédemment présente une lacune, puis a prouvé que pour toutes les surfaces de genre supérieur à zéro, le nombre maximal de régions voisines infranchissable coïncide avec le nombre de couleurs requis, certainement suffisant pour d'autres raisons. Ainsi, le problème que nous souhaitons maintenant examiner, ainsi que le problème de la couleur pour les surfaces de tout genre supérieur à zéro, seraient définitivement résolus si, hormis le cas où le genre de M. Heawood est égal à un, il n'avait pas omis de démontrer que ce nombre maximal de régions voisines est effectivement atteint sur une surface de tout genre.

Référence : *Mathematische Annalen* (Annales mathématiques), XXXVIII, p. 477-508.

Transcription en \LaTeX : Denise Vella-Chemla, avril 2026.

1. Concernant le sens dans lequel le mot "genre" est toujours utilisé ici, voir la remarque à la fin de l'introduction.

2. Un souvenir de Möbius et de son ami Weiske, *Ber. d. math.-physique. Classe D. kgl. sächs. Ges. d. Sagesse*. 12 janvier 1885.

3. F. Dingeldey, *Études topologiques sur les structures qui peuvent être produites à partir de bandes fermées annulaires par certaines découpes*. Leipzig, 1890.

4. *American Journal of Mathematics*, vol. II, (1882) p. 193.

5. Théorème sur les coloriations de cartes. *Quarterly Journal of pure and applied Mathematics*, n° 96, juin 1890.

En effet, sans cette démonstration, il n'est pas certain que ces deux nombres coïncident ; il se pourrait qu'il y ait en réalité moins de régions voisines sur une surface que le nombre maximal possible. Cette lacune est toutefois significative, car la démonstration manquante est loin d'être évidente.

Compte tenu de ces circonstances, et puisque la question soulevée présente également un intérêt indépendant du problème de la couleur et pourrait se prêter à d'autres applications, il devrait être permis de publier une étude détaillée de ce problème, même si celle-ci n'apporte pas encore une solution exhaustive.

Le contenu des paragraphes suivants est brièvement résumé comme suit. Afin de restreindre l'étude aux surfaces fermées, une relation entre le genre, le nombre de courbes frontières et la connectivité d'une surface est d'abord établie (§1). Cette relation est déjà implicitement contenue dans une formule donnée par M. Dyck et pourrait aisément être obtenue par d'autres moyens. Cependant, sa démonstration ici nécessite l'introduction de certaines courbes sur une surface dont les propriétés ne semblent pas encore avoir été observées.

Après avoir établi la dualité déjà indiquée dans la formulation du problème, il est prouvé (§2) que le genre d'une surface contenant n régions voisines ne peut pas être inférieur à $\frac{(n-3)(n-4)}{12}$, et des conclusions sont tirées de l'hypothèse que n régions voisines existent effectivement sur une surface d'un tel genre (ou du plus grand entier suivant) ; en particulier, il est fait référence aux divisions régulières des surfaces, qui constituent la généralisation du tétraèdre au sens de l'analyse situs. Au §3, le traitement se concentre sur l'arithmétique, et la démonstration de la réciproque est donnée pour les valeurs de genre $1, 2, \dots, 6$, c'est-à-dire pour les valeurs de n jusqu'à $n = 12$ inclus. Après avoir transformé le problème du paragraphe précédent (§4) en un problème de construction d'un ordre numérique, on identifie les cas, c'est-à-dire les valeurs de n pour lesquelles cet ordre numérique peut revêtir un caractère très simple. On montre alors que pour ces nombres n , il existe un théorème arithmétique dont l'existence implique, réciproquement, la constructibilité de cet ordre. Au dernier paragraphe, cet ordre numérique est finalement établi pour toutes les valeurs de n appartenant à la catégorie précédemment désignée et satisfaisant également l'une des deux conditions spécifiques, de sorte que l'extension susmentionnée du théorème démontré au §2 est démontrée, sinon de manière générale, du moins pour deux catégories entières de nombres n .

Afin de définir précisément le champ d'application de ces recherches, nous nous limiterons aux surfaces à indicatrice non réversible⁶. Cette restriction n'est pas pour autant problématique si l'on considère les surfaces de type opposé comme des "surfaces doubles", comme si la surface était partout constituée de deux feuillets distincts et superposés, et de même pour toutes les courbes marginales existantes de deux bords parallèles, car on substitue ainsi une autre surface spécifique à indicatrice non réversible à toute surface à indicatrice réversible. Le problème est cependant considérablement différent pour les surfaces à indicatrice réversible, si l'on considère qu'elles ne sont constituées que d'un seul feuillet en chaque point⁷. Je souhaite aborder les différences qui entrent en jeu ici avec

6. Cf. W. Dyck, Beiträge zur Analysis Situs. Mathématiques. Anne. Bd. 32, (1888) p. 473 vous, d. Anm. p. 462.

7. La feuille dite de Möbius, par exemple, est, selon la première interprétation, une zone à deux bords, doublement connexe, de type 3 et, par conséquent, selon le §2, n'admet pas plus de quatre zones voisines. En revanche, selon la seconde interprétation (où il faut imaginer que chaque ligne tracée pourrait tout aussi bien se trouver d'un côté de la surface ou de l'autre) on peut déjà créer cinq zones voisines, comme illustré par le croquis suivant, où le côté ab

la plus grande clarté possible.

Nous n'approfondirons pas davantage cette question ; pour l'instant, nous ne considérerons que les zones à indicatrice irréversible.

Pour conclure ces remarques introductives, il convient de préciser la définition du genre et de l'interconnexion d'une surface employée ici. Nous désignerons par "genre" (p) des surfaces fermées et bornées le nombre maximal de sections de retour qui ne fragmentent pas la surface et ne s'intersectent pas. Conformément à la définition analytique des surfaces fermées, il est permis de qualifier ce nombre, défini géométriquement, de "genre" de la surface. La "connectivité" (z) d'une surface bornée est donnée par le nombre maximal de sections qui ne fragmentent pas la surface, augmenté de 1 ; pour une surface fermée, elle est donnée par le nombre de sections connectées de la surface bornée obtenues en divisant la surface donnée par un point, diminué de 1. Selon cette méthode de calcul introduite par M. Schläfli⁸, la connectivité d'une surface fermée est toujours paire.

Les deux nombres, z et p , dont ce dernier jouera le rôle principal dans la suite, sont, selon les recherches de M. Dyck⁹, nécessaires et suffisants comme déterminants pour décrire complètement une surface avec une indicatrice irréversible au sens de l'Analysis Situs.

§ 1. À propos d'un certain système de courbes sur une surface.

1. Imaginez toutes les courbes fermées posées sur une surface arbitraire passant par un point arbitraire, qui, sans se rencontrer ailleurs, se croisent en ce point.

Ces courbes s'intersectent toutes, et si s est leur nombre, il est facile de constater que s est impair. S'il y a 2μ courbes de ce type, on peut toujours en ajouter une $(2\mu + 1)$ -ième, car on peut encore atteindre l'espace angulaire vertical à partir de l'espace angulaire de l'intersection des première et deuxième courbes, par exemple si ces deux courbes forment un angle non divisé, sans quitter la surface ni intersecter aucune des courbes existantes. Pour illustrer cela, appelons les espaces angulaires que l'on traverse successivement en circonscrivant le point d'intersection des 2 courbes,

$$1, 2, 3, \dots, 4\mu,$$

puis à partir de 1, en suivant l'une des deux courbes qui délimitent cet espace angulaire, on arrive à $1 + 2\mu - 1$, de là à $1 + 2(2\mu - 1)$, de là à $1 + 3(2\mu - 1)$, et ainsi de suite. L'espace angulaire du

doit être attaché au côté $a'b'$ de telle sorte que a coïncide avec a' et b avec b' :

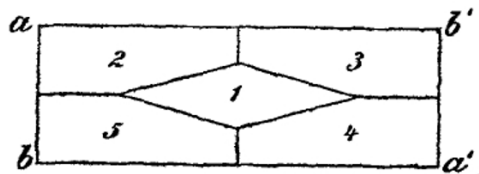


Fig. 1.

8. Cf. C. Neumann, *Lectures on Riemann's Theory of Abel's Integrals*, seconde éd. Leipzig, 1884. p. 185, 186.

9. a. a. O. p. 488. 2a) et 3) en conjonction avec la formule (2) p. 478 et (4) p. 484.

sommet 1, cependant, est $2\mu + 1$ et est donc atteint lorsque la congruence

$$\varkappa(2\mu - 1) = 2\mu \pmod{4\mu}$$

est satisfaite. Cette congruence peut être satisfaite par une valeur entière de \varkappa . C'est effectivement le cas, et tout d'abord pour $\varkappa = 2\mu$. Si, au lieu de 2μ , on avait le nombre impair $2\mu + 1$, on ne trouverait pas d'entier \varkappa satisfaisant la condition correspondante. De même, on constate qu'avec 2μ courbes, la même procédure permet de passer d'un espace angulaire quelconque à un autre, tandis qu'avec $2\mu + 1$, de 1, par exemple, on peut passer seulement à

$$3, 5, \dots, 4\mu + 1,$$

Autrement dit, la zone ne se décompose pas encore en un nombre pair de courbes fermées de ce type.

2. Ayant démontré que le nombre s de nos courbes est impair, nous souhaitons maintenant déterminer leur relation avec le nombre z représentant la connexion et avec le nombre de courbes r qui sont bords de la surface. Si l'on considère $s - 1$ des courbes comme des sections, alors, puisque $s - 1$ est pair, le nombre de courbes de bord n'augmente que de 1, soit $r + 1$. La connexion n'est pas modifiée par la première des $s - 1$ courbes, qui forme une section de retour, mais elle est diminuée de 1 par chacune des $s - 2$ suivantes, puisqu'il s'agit désormais de sections transversales; ainsi, pour la surface ainsi découpée, la connexion est

$$z - s + 2.$$

Si l'on trace maintenant des lignes à partir du point d'intersection des $s - 1$ courbes qui ne se croisent pas entre elles, en suivant les r courbes limites d'origine, on obtient alors une surface avec une courbe limite et la relation

$$z - s - r + 2.$$

Ce nombre est égal à 1. En effet, si l'on pouvait tracer une section transversale qui ne divise pas encore la surface, on pourrait en décaler arbitrairement les extrémités sur la frontière, y compris de telle sorte que cette section représente une courbe fermée qui intersecte toutes les $s - 1$ autres en son point d'intersection, sans pour autant diviser la surface. On pourrait alors tracer une $(s + 1)$ -ième courbe du même type, le nombre de ces courbes étant, par hypothèse, égal à s . Par conséquent,

$$z - s - r + 2 = 1$$

ou

$$s = z - r + 1,$$

Autrement dit, "le nombre de courbes fermées que l'on peut placer sur une surface en un point quelconque, de sorte qu'elles s'intersectent toutes en ce point sans avoir aucun autre point en commun, est supérieur d'une unité à la différence entre le nombre de courbes connexes et le nombre de courbes frontières¹⁰ de la surface. Seule la dernière courbe provoque la rupture de la surface."¹¹

10. Ce qui, comme Riemann (cf. Ges. Werke, Leipzig, 1878, p. 12) l'a déjà montré, est toujours un nombre pair.

11. D'après ce théorème, la propriété d'une certaine surface, notée par Gauss et donnée par Möbius (Œuvres complètes, tome II, p. 541), repose simplement sur le fait qu'alors $z = 3$ et $r = 1$. Par conséquent, outre les deux paires de points PR et QS , une troisième paire, UV , peut être considérée sur la frontière, de sorte que U et V soient séparés par deux des quatre points $PQRS$, et que U et V puissent être reliés sans que les droites déjà tracées ne se croisent.

Une seule modification de cette déclaration est la suivante :

Sur une surface où z compte la relation de connexion entre les points et z est le nombre de ses courbes frontières, deux points quelconques peuvent être reliés par $z - r + 1$ courbes sans que la surface ne soit fragmentée. En effet, les deux extrémités $2(z - r)$ de la courbe $z - r$ convergent en leur point d'intersection (A). En parcourant un petit cercle autour de ce point, on rencontre successivement les extrémités de toutes les courbes, en commençant par la courbe 1. Si l'on fixe les premières extrémités à leur point d'intersection A , mais que l'on déplace le point d'intersection des autres courbes $z - r$ sur la surface de A à un point B , et que l'on ajoute ce chemin comme $(z - r + 1)$ -ième segment de connexion entre A et B , on obtient alors les $z - r + 1$ segments de connexion mentionnés précédemment entre A et B , et la surface n'est naturellement pas fragmentée par ce déplacement.

3. On peut également relier le nombre s au genre de la surface p . Si l'une des courbes s est utilisée comme une section,

$$s_1 = s - 2.$$

Ainsi, le nombre de courbes frontières augmente de 2, tandis que la relation reste inchangée. Si l'on note s_1 le nombre de courbes de la surface ainsi obtenue, alors, d'après la formule ci-dessus,

$$s_1 = s_1 - 2 = s - 4,$$

si l'on effectue à nouveau une coupe parmi les s_1 courbes, il en va de même pour la nouvelle surface qui apparaît, et ainsi de suite. Finalement, on arrive à une surface pour laquelle le nombre de courbes est égal à $\frac{s-1}{2}$, ce qui se produit évidemment après avoir effectué toutes les coupes de retour. Cette surface se désintègre donc à chaque coupe de retour, et l'on pourrait ainsi effectuer exactement $\frac{s-1}{2}$ coupes de retour sur la surface initiale sans qu'elle ne se désintègre, mais pas davantage.

$$\frac{s-1}{2} = p,$$

soit

$$s = 2p + 1,$$

“Le nombre de courbes fermées de l'espèce susmentionnée est égal à deux fois le nombre de sections augmenté d'une unité.”

En combinant ce résultat avec celui obtenu dans l'article précédent, la relation suivante se dégage :

$$z - r = 2p,$$

“La relation d'un petit nombre de courbes limites d'une surface est égale au double de son genre”, qui est déjà contenue dans une formule de M. Dyck¹², pourrait également être facilement dérivée de la définition de z, r, p , et nous l'utiliserons dans la suite.

Sur la base de ces relations entre les quatre nombres s, z, r, p , on peut maintenant formuler l'énoncé de M. Dyck déjà mentionné dans l'introduction comme suit : Pour la description complète d'une

12. *ibid.* p. 478 Formule (2) en tenant compte de la Formule (4) p. 484.

surface avec une indicatrice inversible au sens de l'Analysis Situs, deux nombres sont nécessaires et suffisants, dont l'un est tiré du groupe z, p, s , l'autre du groupe z, r (en excluant naturellement le choix z, z).

4. La preuve que $s - 1 = 2p$ est faite, et le fait que, lorsqu'on parcourt le bord d'une courbe fermée par les $2p$ jusqu'à une surface fermée de coupe simplement connexe, les $4p$ bords de ces coupes sont parcourues dans l'ordre suivant : on parcourt d'abord un bord de chacune des $2p$ courbes, puis, dans le même ordre, les autres bords correspondants.

Cette circonstance, vérifiable par un raisonnement parfaitement analogue à celui décrit dans la section 1, nous permet de constater que les $2p$ courbes apparaissent déjà implicitement ailleurs. Ce sont donc les mêmes courbes qui apparaissent lorsqu'on joint le polygone générateur de groupes fuchsien de Poincaré (avec un nombre pair de faces de premier type, dont deux faces opposées sont toujours conjuguées¹³, le long de chaque paire de faces conjuguées, et les mêmes courbes qui apparaissent lorsqu'on joint les polygones représentant certaines irrationalités de racines dans les travaux de M. Dyck sur les surfaces de Riemann régulièrement ramifiées¹⁴, le long de chaque paire d'axes de symétrie de la ramification régulière. On a ainsi montré que les courbes introduites ici sont précisément celles qui permettent de diviser le plus clairement possible une surface fermée de genre p en un polygone régulier à $4p$ ou $4p+2$ côtés, les côtés opposés étant toujours correspondants.

Puisque chacune des $2p + 1$ courbes forme individuellement une section de retour qui ne fragmente pas la surface, et puisque la totalité de ces $2p$ courbes découpe la surface fermée en une surface simplement connexe, elles fournissent, en tant que chemins d'intégration d'une intégrale abélienne de première espèce sur la surface de Riemann correspondante de genre p , un système de $2p$ modules de périodicité linéairement indépendants. À partir de ce point de départ, on peut, par exemple, obtenir très facilement les résultats que Clebsch a obtenus d'une autre manière dans le traité "*Sur la théorie des surfaces de Riemann*"¹⁵ § 6.

§ 2. Valeur minimale de p pour n régions voisines.

5. Dans l'introduction, nous avons formulé le problème à résoudre de telle sorte que nous souhaitions connaître uniquement le genre de la surface sur laquelle n régions voisines sont possibles. En effet, la solution du problème ne dépend que du genre de la surface. Car si n régions voisines sont possibles sur une surface fermée de genre p , alors il en va de même pour toute surface obtenue en découpant un nombre quelconque de segments simplement connexes, et réciproquement. Cependant, on peut choisir n'importe quelle surface de genre p .

On suppose que le nombre de courbes frontières et la connexion z proviennent d'une surface fermée du même genre, obtenue par découpe de r morceaux simplement connexes. En effet, d'après le paragraphe précédent,

$$z = 2p + r$$

13. *Théorie des groupes fuchsien*. Acta Math. Bd. 1, (1882) § 8.

14. *Sur les surfaces de Riemann régulièrement ramifiées et les irrationalités qu'elles définissent*. Thèse de doctorat, Munich, 1879. Voir notamment la planche VIII, fig. 2, surface I. Cf. également Math. Ann., vol. 17 (1880), p. 473 et suiv.

15. Math. Ann. Vol. 6 (1873).

Chacune des r courbes frontières peut être utilisée pour délimiter une aire simplement connexe ; par conséquent, l'aire peut être fermée en insérant r telles courbes. Cela réduit la connexité d'un facteur r ; ainsi, la connexité de la nouvelle aire fermée est de

$$z' = 2p.$$

Cependant, puisque la relation pour une surface fermée est égale à deux fois le nombre correspondant à son genre, le genre de la surface fermée résultante p reste invariant, et inversement, on peut penser au genre comme créé à partir de cette surface en la découpant.

Le problème dépend donc uniquement du genre de la zone, et l'on constate simultanément que, sans perte de généralité, on peut supposer que la zone est fermée. Il est également évident, comme on peut le noter ici pour référence ultérieure, que si n zones voisines sont possibles sur une zone donnée, alors une division de la zone entière en n zones de ce type est également possible.

6. De plus, une dualité entre aires et points, lignes frontières et lignes de connexion, a été postulée lors de la formulation du problème, mais cette dualité nécessite encore une justification. Or, s'il existe des aires voisines sur une surface, alors il existe également n points voisins sur cette surface, comme on peut facilement le démontrer. À cette fin, imaginons le réseau de lignes frontières tracées, par exemple, en bleu. Si l'on considère alors un point quelconque dans chaque aire et que l'on trace des lignes à partir de ce point (par exemple, en rouge), qui ne se croisent pas, jusqu'à $n - 1$ lignes frontières bleues, le long desquelles l'aire borde $n - 1$ autres aires différentes (puisque'il est possible qu'une aire borde la même aire par plusieurs lignes), et de telle sorte que le point a de l'aire soit relié au même point sur la même ligne frontière (ab) que le point de l'aire b , alors les $\frac{n(n-1)}{2}$ lignes rouges résultantes, qui ne se croisent pas, relie chacun des n points aux $n - 1$ autres points.

Réciproquement, s'il existe n points voisins sur une surface, alors il existe également n régions voisines. Si l'on entoure d'abord chacun des n points d'un contour fermé situé sur la surface et ne contenant aucun des n autres points, alors on peut définir chacune de ces régions.

Soit n zones prolongées en $n - 1$ bandes le long des $\frac{n(n-1)}{2}$ lignes rouges de connexion, et prolongeons ces extensions jusqu'à ce qu'elles se rejoignent 2 à 2. On a alors n zones voisines simplement connexes sur la surface.

Ceci prouve l'existence de la dualité susmentionnée, et il découle simultanément de la considération précédente que si n régions voisines existent, alors n régions simplement connexes possédant cette propriété peuvent également être produites.

7. Il est donc justifié, dans notre étude de ce problème, de privilégier tantôt une approche, tantôt l'autre, selon celle qui simplifie l'expression. Nous cherchons d'abord la valeur minimale du genre d'une surface admettant effectivement n points voisins, que nous notons p_n ; autrement dit, on suppose que sur une surface de genre p_n , il existe bien n points voisins, contrairement à une surface de genre inférieur. Il est alors très facile de déterminer une borne inférieure pour p .

Les n points voisins et leurs $\frac{n(n-1)}{2}$ lignes de connexion forment un système de n points (ou

sommets), $\frac{n(n-1)}{2}$ lignes (ou arêtes) et un nombre (F) de segments (ou faces) sur la surface fermée. Ces derniers sont tous simplement connexes ; en effet, si un segment multiplesment connexe apparaissait, on pourrait y tracer une coupe de retour qui ne se réduirait pas à un seul point et ne traverserait pas la surface entière. Ainsi, le genre de la surface serait réduit de 1, et pourtant il y aurait toujours n points voisins, contrairement à l'hypothèse. La limite supérieure du nombre F de ces segments de surface simplement connexes est maintenant déterminée.

$$F \leq \frac{n(n-1)}{3} ;$$

Puisqu'autour de chacun des $n-1$ points se trouve un morceau de surface, tous au moins triangulaires (car si des digones étaient présents, 2 des n points seraient doublement connexes), si l'on applique maintenant la formule d'Euler étendue au système de sommets, d'arêtes et de faces de la surface de genre p_n , il s'ensuit que

$$\begin{aligned} 2p_n - 2 &= \frac{n(n-1)}{2} - n - F, \\ 2p_n - 2 &\geq \frac{n(n-1)}{2} - n - \frac{n(n-1)}{3}, \\ p_n &\geq \frac{(n-3)(n-4)}{12}, \end{aligned}$$

Et puisque p_n doit être entier, nous pouvons écrire

$$(A) \quad p_n \geq \frac{(n-3)(n-4) + 2\alpha_n}{12}$$

où $2\alpha_n$ est le plus petit entier positif qui rend le numérateur divisible par 12. Il est facile de voir que ce nombre ne peut être que pair, et de plus, que α_n ne peut avoir que l'une des valeurs 0, 2, 3 ou 5.

8. Pour les plus petites valeurs de n , par exemple $n = 3, 4$, le signe d'inégalité peut maintenant être omis de la formule (A). Cependant, nous allons maintenant démontrer qu'au moins pour les valeurs de n jusqu'à $n = 12$ inclus, et ensuite pour toutes les valeurs de n qui satisfont certaines conditions qui seront précisées ultérieurement, notre problème peut effectivement être résolu de manière exhaustive par l'équation

$$(B) \quad p_n = \frac{(n-3)(n-4) + 2\alpha_n}{12}$$

Pour les valeurs correspondantes de p , à savoir $p = p_n, p_n + 1, p_n + 2, \dots, p_{n+1} - 1$, où n est une valeur pour laquelle l'équation (B) est vérifiée, la question inverse concernant le nombre maximal n_p d'éléments voisins sur une surface de genre p est alors résolue par l'équation ¹⁶

16. Sous cette forme, avec l'ajout du symbole $<$, le résultat susmentionné apparaît dans M. Heawood (ibid., p. 334) lorsqu'on fixe la quantité \varkappa , dont M. H. dit seulement qu'il s'agit d'une "constante positive dépendant de la connexion de la surface fermée", égale à $2p - 2$.

$$(C) \quad n_p = \frac{7}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + 48p - 8\alpha_p},$$

où α_p est le plus petit entier positif qui élève le radicande au carré. Si $\alpha_p < 6$, alors la valeur de p est telle que le même nombre de régions voisines n_p n'apparaît pas déjà sur une surface de genre inférieur. Si $\alpha_p \geq 6$, c'est-à-dire $= 6\nu + \alpha'_p$, où $\alpha_p < 6$, alors le même nombre de régions voisines apparaît déjà sur une surface de genre $p - \nu$.

Avant de procéder à la démonstration promise, il convient toutefois de formuler au préalable les remarques suivantes, nécessaires à sa compréhension.

9. Les nombres α ont une signification simple en ce qui concerne la nature du réseau sur la surface. S'il y a n points voisins sur une surface quelconque de genre p , et que les segments de surface résultants sont tous simplement connectés, alors la relation suivante est toujours vérifiée :

$$p = \frac{(n-3)(n-4) + 2\alpha}{12},$$

où le nombre de morceaux de surface est $\frac{n(n-1) - \alpha}{3}$. Puisqu'il y a exactement $n(n-1)$ sommets ou angles du polygone dans le réseau entier, α représente le nombre de sommets restants lorsqu'on retire 3 sommets de chaque morceau de surface. Par conséquent, si l'équation (B) est vérifiée, les morceaux de surface forment, selon les 4 valeurs possibles de α_n (0, 2, 3, 5), soit

1) tous des triangles ;

ou

2) tous des triangles et 2 quadrilatères ou tous des triangles et 1 pentagone ;

ou

3) tous des triangles et 3 quadrilatères ou tous des triangles, 1 quadrilatère, 1 pentagone
ou tous des triangles, un hexagone ;

ou

4) tous des triangles et 5 quadrilatères ou etc. ou enfin : tous des triangles et 1 octogone.

Les cas où $\alpha_n = 0$ présentent un intérêt particulier. Si l'équation (B) est vérifiée, la surface entière est divisée en $\frac{n(n-1)}{3}$ triangles, dont $n-1$ se rejoignent à chaque sommet, ou, dans une perspective dualiste, en $n(n-1)$ sommets, dont trois forment un sommet du polyèdre. Nous appellerons ces cas les cas "réguliers". Ils se produisent lorsque $\alpha_n = 0$, et donc lorsque n prend l'une des quatre formes suivantes :

$$\begin{aligned}
n &= 12\kappa, \\
n &= 12\kappa + 3, \\
n &= 12\kappa + 4, \\
n &= 12\kappa + 7,
\end{aligned}$$

tandis que le genre p des surfaces sur lesquelles une telle division régulière doit être possible satisfait la condition nécessaire

$$1 + 48p = \lambda^2$$

ou

$$p = \frac{\lambda^2 - 1}{48}$$

soit

$$\lambda^2 \equiv 1 \pmod{48}.$$

Si l'on pose $\kappa = 0$, alors, d'après la troisième série de valeurs de n , on a $n = 4$ et, par conséquent, $p = 0$; c'est-à-dire qu'un tel cas régulier est, par exemple, la surface du tétraèdre. En effet, tous les cas réguliers constitueraient la généralisation du tétraèdre aux surfaces d'un genre supérieur au sens de l'analyse situs, à savoir dans l'une ou l'autre des deux visions dualistes, selon que l'on considère le tétraèdre (dans lequel les deux phénomènes dualistes coïncident encore) comme un système de 4 faces, chacune bordant les 3 autres, ou comme un réseau de 4 points, chacun étant relié aux 3 autres sur la face.

§ 3. Formulation arithmétique de l'enquête. - Démonstration de l'équation (B) pour $n = 4, 5, \dots, 12$.

10. Les difficultés rencontrées pour démontrer l'équation (B) proviennent généralement de la nature arithmétique du problème. On peut en fait lui donner une forme purement arithmétique. Imaginons $n(n-1)$ sommets (dualistiquement n surfaces simplement connexes portant n points, de chacun desquels $n-1$ droites s'étendent jusqu'à la frontière), que l'on nomme $n(n-1)$ sommets (n surfaces simplement connexes portant n points, de chacune desquelles $n-1$ droites s'étendent jusqu'à la frontière), que l'on nomme $1, 2, \dots, n$ sommets, et $1, 2, \dots, \kappa-1, \kappa+1, \dots, n$ sommets pour chaque arête latérale du polygone κ , nommant un nombre différent de 1 à n , indiquant à quel autre polygone κ doit être rattaché le long de cette arête. Si l'on rattache maintenant les polygones de telle sorte qu'en passant par les segments de liaison, on arrive toujours au côté correspondant de l'autre polygone du côté nominatif, on obtient toujours une surface fermée divisée en n régions voisines. Mais le genre de cette même surface sera généralement $> \frac{(n-3)(n-4) + 2\alpha_n}{12}$. À moins que la disposition n'ait été faite de telle sorte que le nombre de sommets du polyèdre devienne $\frac{n(n-1) - \alpha_n}{3}$. Or, la propriété selon laquelle les polygones $1, 2, \dots, \lambda$, par exemple, se rencontrent en un sommet (ou que les points $1, 2, \dots, \lambda$ deviennent des sommets du même polygone), lorsque l'ordre de ces points, en circonscrivant ce sommet dans le sens horaire, est approximativement l'ordre naturel $1, 2, \dots, \lambda$, s'exprime arithmétiquement par le fait que, dans le même sens, pour les $n-1$ nombres qui désignent les extrémités de $2, \lambda$, pour $2\ 3, 1$, pour $3\ 4, 2$, etc., pour $\lambda\ 1, \lambda-1$ se suivent. Nous voulons dire : ces paires de nombres

$$(2, \lambda), (3\ 1), (4\ 2), (5, 3), \dots, (1, \lambda-1)$$

forment un “cycle d’un élément λ ou d’une paire”. Un coin triangulaire ou un triangle, en particulier, forme donc un cycle à trois éléments.

$$(i\kappa), (\kappa l), (li)$$

et est reconnaissable au fait qu’aux i extrémités du polygone, les parties κ, l se suivent dans le sens horaire ; à κ dans la même direction l, i et à l enfin i, κ .

Notre problème est donc le suivant :

$$(D) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1) \text{ Les nombres } 2, 3, \dots, n \text{ (qui représentent les cotes du polygone 1),} \\ 2) \text{ Les nombres } 1, 3, \dots, n \\ \dots \\ n) \text{ Les nombres } 1, 2, \dots, n - 1 \text{ (qui représentent les cotes du polygone } n) \end{array} \right.$$

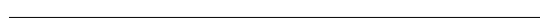
où les nombres de chaque ligne forment un cercle.

Il faut réfléchir à les agencer de manière à réduire ce que sera le nombre de cycles résultants. Par souci de concision, nous désignerons un tel arrangement d’exactement $\frac{n(n-1) - \alpha_n}{3}$ éléments successifs par (D).

11. Les tableaux suivants présentent une disposition (D) pour chacun des nombres

$$n = 4, 5, 6, \dots, 11, 12,$$

démontrant ainsi la validité du théorème (B) (et simultanément (C)) initialement pour les valeurs de n jusqu’à $n = 12$ inclus. Au-dessus de chaque tableau, à côté de la valeur de n , sont données les valeurs de p_n, α_n et $F = \frac{n(n-1) - \alpha_n}{3}$. Dans le tableau, les paires de nombres appartenant à des cycles de plus de 3 éléments sont toujours indiquées par un arc placé en dessous, et sous chaque tableau, en plus du nombre de triangles, les cycles à plusieurs éléments eux-mêmes sont donnés.



$$n = 4, p_4 = 0, \alpha_4 = 0, F = 4$$

régulier (tétraèdre)

1) 2 3 4

2) 3 1 4

3) 4 1 2

4) 2 1 3

4 triangles

$$n = 5, p_5 = 1, \alpha_5 = 5, F = 5.$$

1) 3 2 4 5

2) 4 3 5 1

3) 5 4 1 2

4) 1 5 2 3

5) 2 1 3 4

(bien qu'il devrait y avoir en réalité un arc sous chaque paire, c'est pourquoi ils ont tous été omis).

5 quadrilatères [1 3 4 2], [1 2 5 4], [1 4 3 5], [1 5 2 3], [3 2 4 5].

Fig. 2 La figure 2 illustre cette disposition pour $n = 5$.

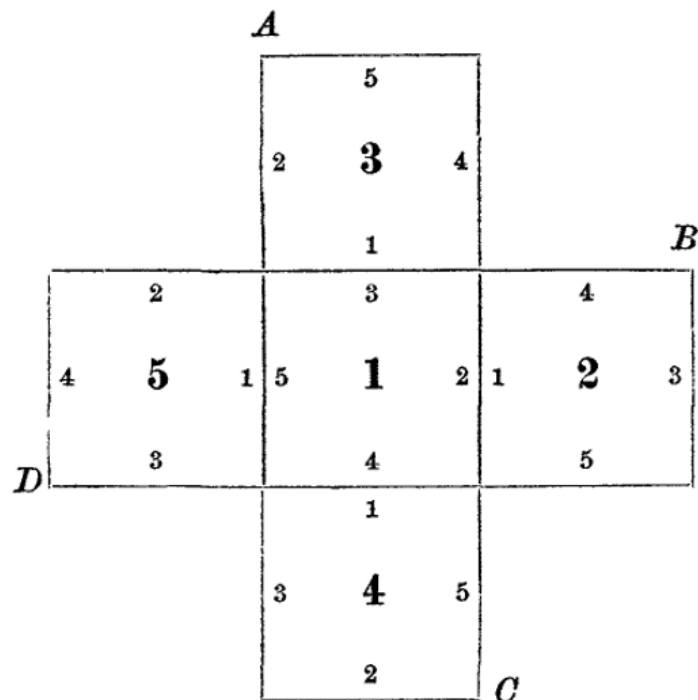
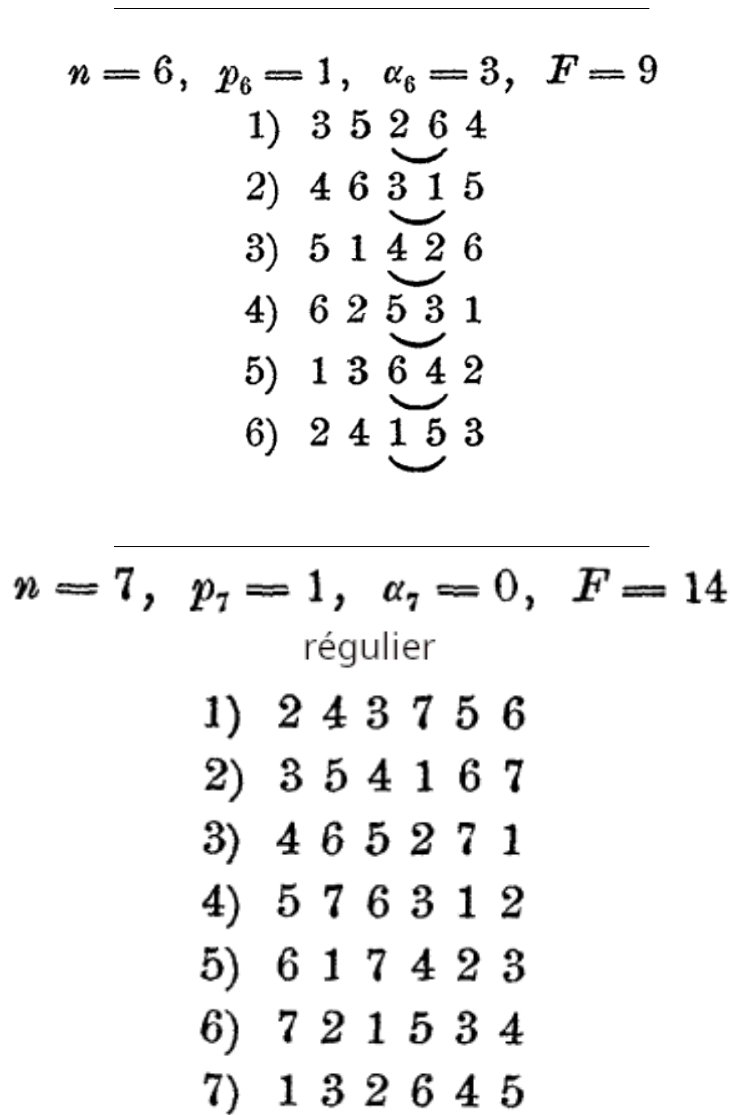


Fig. 2.

La surface fermée de genre 1 est créée en reliant les droites AB et DC, BC et AD (cf. § 1, art. 4). Elle forme un "pentaèdre" dans lequel, tout comme pour le tétraèdre, les deux phénomènes dualistes

coïncident ; car les 5 sommets de ce pentaèdre sont des points voisins.¹⁷



14 triangles,

FIG. 3 : La figure 3 illustre cette disposition pour $n = 7$ sur une surface de genre 1.

17. Nous avons donc ici une autre surface régulièrement divisée (en 5 quadrilatères) de genre supérieur à zéro, qui ne figure pas parmi les quatre séries de cas réguliers mentionnées précédemment. On peut facilement vérifier que, dans le cadre de notre problème actuel, où l'on recherche toujours le genre le plus bas, aucune autre division régulière n'est possible. Si, en revanche, cette restriction est levée, le tétraèdre et ce pentaèdre ne constituent que les cas les plus bas d'une série infinie de surfaces régulières, sur lesquelles je reviendrai plus tard : des surfaces de genre $\frac{(n-1)(n-4)}{4}$ ($n = 4, 5, 8, 9, \dots, 4x, 4x+1, \dots$) divisées en n sommets $(n-1)$ -adjacents de sorte que seuls n sommets polyédriques soient formés, qui sont simultanément des points adjacents. Comparez la figure ci-dessus et la figure 3 ci-dessous avec les figures de M. W. Dyck, Math. Ann. Vol. 20, Planche II, Fig. 2 et 3.

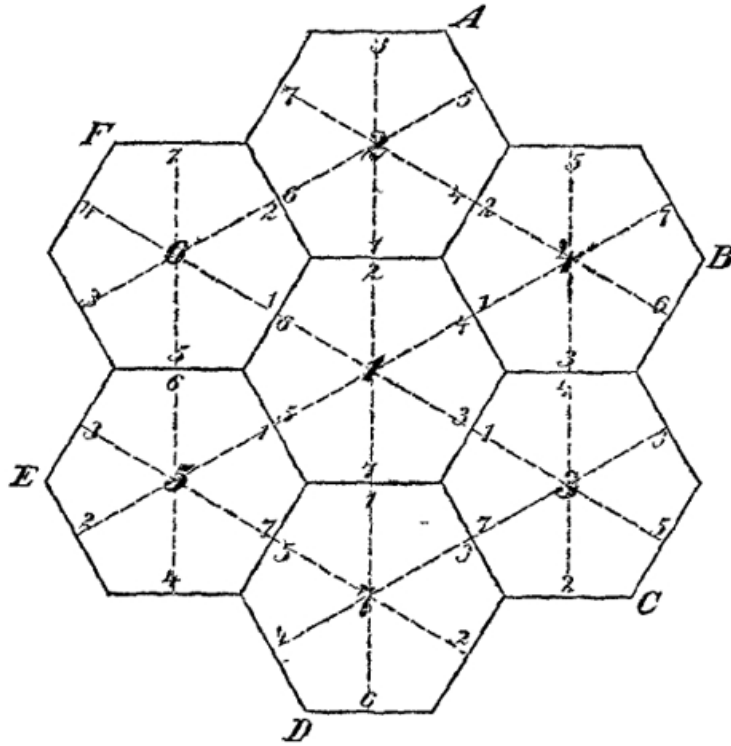


Fig. 3.

Les traits pleins divisent la zone en 7 hexagones adjacents ; les traits pointillés relient leurs centres.
La figure fermée est obtenue en reliant ces segments :

AB et ED , BC et FE , CD et AF .

$$n = 8, \quad p_8 = 2, \quad \alpha_8 = 2, \quad F = 18.$$

- 1) 2 3 4 5 6 7 8
- 2) 3 1 8 5 4 7 6
- 3) 4 1 2 6 7 5 8
- 4) 2 1 3 8 6 5 7
- 5) 6 1 2 8 3 7 4
- 6) 2 1 5 4 8 7 3
- 7) 8 1 2 4 5 3 6
- 8) 2 1 7 6 4 3 5

16 triangles et les deux quadrilatères $[1\ 4\ 2\ 5]$, $[1\ 6\ 2\ 7]$.

$$n = 9, \quad p_9 = 3, \quad \alpha_9 = 3, \quad F = 23.$$

- 1) 2 3 4 5 6 7 8 9
- 2) 6 1 9 7 3 5 8 4
- 3) 4 1 2 7 6 8 5 9
- 4) 5 1 3 9 6 2 8 7
- 5) 6 1 4 7 9 3 8 2
- 6) 7 1 5 2 4 9 8 3
- 7) 8 1 6 3 2 9 5 4
- 8) 9 1 7 4 2 5 3 6
- 9) 2 1 8 6 4 3 5 7

22 triangles et l'hexagone [3 1 2 6 5 2].

$$n = 10, \quad p_{10} = 4, \quad \alpha_{10} = 3, \quad F = 29.$$

- 1) 2 3 4 5 6 7 8 9 10
- 2) 3 1 4 6 9 7 10 5 8
- 3) 4 1 2 10 7 6 8 5 9
- 4) 5 1 3 9 6 2 10 8 7
- 5) 6 1 4 7 9 3 8 2 10
- 6) 7 1 5 10 2 4 9 8 3
- 7) 8 1 6 3 10 2 9 5 4
- 8) 9 1 7 4 10 2 5 3 6
- 9) 10 1 8 6 4 3 5 7 2
- 10) 4 1 9 6 5 2 7 3 8

26 triangles et 3 quadrilatères [2 1 10 4], [2 6 10 9], [2 8 10 3].

$n = 11, p_{11} = 5, \alpha_{11} = 2, F = 36.$

1)	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2)	3	1	11	7	4	10	6	9	8	5
3)	4	1	2	5	9	11	7	6	10	8
4)	5	1	3	8	6	11	10	2	7	9
5)	6	1	4	9	3	2	8	10	7	11
6)	7	1	5	4	8	11	9	2	10	3
7)	8	1	6	3	5	10	9	4	2	11
8)	9	1	7	11	6	4	3	10	5	2
9)	10	1	8	2	6	11	3	5	4	7
10)	11	1	9	7	5	8	3	6	2	4
11)	2	1	10	4	5	3	9	6	8	7

34 triangles et 2 quadrilatères [3 11 5 7], [5 11 4 6].

$n = 12, p_{12} = 6, \alpha_{12} = 0, F = 44.$

régulier

1)	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2)	3	1	12	4	9	8	5	11	7	10	6
3)	4	1	2	6	5	8	10	7	12	11	9
4)	5	1	3	9	2	12	8	7	11	6	10
5)	6	1	4	10	12	7	9	11	2	8	3
6)	7	1	5	3	2	10	4	11	8	12	9
7)	8	1	6	9	5	12	3	10	2	11	4
8)	9	1	7	4	12	6	11	10	3	5	2
9)	10	1	8	2	4	3	11	5	7	6	12
10)	11	1	9	12	5	4	6	2	7	3	8
11)	12	1	10	8	6	4	7	2	5	9	3
12)	2	1	11	3	7	5	10	9	6	8	4

44 triangles.

Il convient de noter, concernant les tableaux, que s'ils ne révèlent aucune régularité essentielle - à l'exception de ceux pour $n = 5, 6, 7$, qui seront abordés ultérieurement -, cela ne signifie pas nécessairement qu'une telle régularité soit impossible à atteindre. D'une part, les nombres de la première ligne (sauf pour $n = 5, 6, 7$) sont choisis arbitrairement dans l'ensemble naturel. Deuxièmement, les nombres de chaque ligne peuvent être décalés cycliquement. Cependant, nous verrons bientôt que la régularité observée pour $n = 5, 6, 7$ n'était possible que dans les cas que nous avons étudiés

jusqu'à présent.

§ 4. Preuve qu'un arrangement cyclique est possible seulement dans le cas $n = 12\kappa + 7$.

12. La méthode employée pour déterminer les configurations (D) du paragraphe précédent est la suivante : sur une surface fermée de genre $\frac{(n-3)(n-4) + 2\alpha_n}{12}$, on choisit arbitrairement n points, et l'on trace autant de lignes de connexion qu'il est possible sans qu'aucune paire de lignes ne contienne deux lignes qui se croisent, soit $\frac{n(n-1)}{2}$ lignes. En général, on ne trace pas les $\frac{n(n-1)}{2}$ lignes, mais seulement A . Cependant, comme le montre une simple considération fondée sur la formule d'Euler pour les polyèdres, on peut tracer exactement $\lambda + \alpha_n$, c'est-à-dire toujours au moins λ lignes de connexion, après quoi la surface entière est divisée en triangles. Si l'on trace une telle ligne, elle ne peut relier que deux points déjà reliés par d'autres moyens ; par conséquent, si l'on supprime la ligne de connexion précédente, on peut ainsi établir au moins une autre connexion, et il est possible que celle-ci relie deux points auparavant non reliés, ce qui représente un pas de plus. Inversement, cela interrompra une connexion ailleurs, et par conséquent, une ou plusieurs nouvelles connexions deviendront possibles, et ainsi de suite.

Comme il ne peut être démontré de manière générale que cette méthode conduit toujours à établir toutes les connexions manquantes, ce qui prouverait la validité générale de l'équation (B), nous nous limiterons à effectuer cette dernière pour des valeurs de n de telle nature que l'arrangement (D) puisse être rendu particulièrement simple et clair.

13. Pour $n = 5, 6, 7$ (voir article 11), la disposition (D) est construite de telle sorte que chaque ligne découle de la précédente par une simple permutation cyclique des nombres $1, 2, 3, \dots$ dans l'ordre naturel. Nous appellerons disposition "cyclique" une disposition (D) de ce type et démontrerons que, sauf pour $n = 5$ et $n = 6$, ce n'est que lorsque n est de la forme $12\kappa + 7$ qu'un tel arrangement cyclique (D) peut être produit, et qu'il n'est effectivement réalisable que lorsque κ respecte certaines conditions.

Il est facile de constater de prime abord que si $n > 20$, on ne peut espérer une disposition cyclique (D) que dans les cas réguliers. En effet, dans les cas irréguliers, des cycles de plus de trois paires de nombres apparaissent. Si, par exemple, dans la ligne 1), a) appartient à un cycle de plus de trois éléments, alors, dans une disposition cyclique, il en va de même pour $\kappa + 1, l + 1$ (ligne 2), $\kappa + 2, l + 2$ (ligne 3), et ainsi de suite, jusqu'à $\kappa - 1, l - 1$ (ligne n). Il y aurait donc au moins n paires de nombres appartenant à des cycles de plus de trois éléments. Selon l'article 9, on observe au plus 20 paires de nombres de ce type, soit lorsqu'il y a $\alpha_n = 5$ et 5 quadrilatères. Même s'il était possible de disposer ces 20 paires de nombres verticalement dans la même colonne dans une disposition cyclique, il s'ensuit qu'une disposition cyclique est impossible pour $n > 20$ dans les cas irréguliers. Pour éviter d'être trop long, nous omettons la preuve simple qu'un arrangement cyclique est également impossible pour $n \leq 20$ dans les cas irréguliers.

Cet arrangement est impossible sauf pour $n = 5$ et $n = 6$.

La question est maintenant : quelle doit être la valeur du nombre n pour que l'arrangement cyclique

$$(E) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1) \quad 2, \quad i_3, \quad i_4 \quad \dots, \quad i_n, \\ 2) \quad 3, \quad i_3 + 1, \quad i_4 + 1, \quad \dots, \quad i_n + 1, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ n) \quad 1, \quad i_3 + n - 1, \quad i_4 + n - 1, \quad \dots, \quad i_n + n - 1, \end{array} \right.$$

soit possible, avec i_3, i_4, \dots, i_n représentant une permutation des nombres $3, 4, \dots, n$, et où tous les nombres $> n$, doivent être remplacés par leurs plus petits restes modulo n , se dissocie-t-il en $\frac{n(n-1)}{3}$ triangles? ¹⁸

14. Nous démontrons d'abord l'identité de cette tâche avec une autre tâche purement arithmétique.

Supposons qu'il existe un arrangement (E) pour le nombre n , alors supposons que dans (E), à la ligne $i_\lambda = n$, la séquence est

$$i_{\lambda-1}, \quad n, \quad i_{\lambda+1}.$$

Par conséquent, en raison de la progression cyclique, la ligne n) contient la séquence

$$i_{\lambda-1} + n - 1, \quad n - 1, \quad i_{\lambda+1} + n - 1$$

et, comme l'ensemble se décompose en triangles, on obtient finalement comme conséquence

$$i_{\lambda+1}, \quad 1, \quad i_{\lambda-1}.$$

La ligne n) montre ainsi la propriété : les deux voisins de 1 sont les successeurs modulaires des deux voisins de $n - 1$; les deux voisins de $n - 1$ sont $n - 1$ plus grands que les deux voisins de 1, si tout est compris modulo n et que les deux voisins qui se font face sont toujours comparés entre eux, c'est-à-dire celui de droite de 1 avec celui de gauche de $n - 1$ et vice versa.

Les mêmes conclusions peuvent être tirées de manière générale pour la ligne n) :

“Les deux voisins de \varkappa sont \varkappa fois plus grands que ceux de $(n - \varkappa)$ pour $\varkappa = 1, 2, \dots, n - 1$.”

Réciproquement, si les nombres $1, 2, \dots, n - 1$ permettent une telle disposition, et si l'on choisit cette ligne comme ligne n) et que l'on en déduit $n - 1$ lignes $1), 2), \dots, n - 1)$ par permutation cyclique, alors ces lignes forment une disposition (E), car les $n(n - 1)$ paires de nombres forment toutes des triangles. Si a, b est une paire quelconque de la ligne n), alors, par hypothèse, cette ligne contient également les deux paires $(n - b, a - b)$ et $(n - a + b, n - a)$. Par conséquent, du fait de la permutation cyclique, la ligne a) contient la paire bn et la ligne b) contient la paire na , c'est-à-dire toute paire quelconque de la ligne n) ; c'est-à-dire toute paire quelconque d'une ligne quelconque,

18. Cette question est similaire à celle posée par Steiner, Collected Works, Vol. II, p. 436 sous a), dont la nôtre diffère seulement en ce que dans son cas 1) la combinaison de chaque paire d'éléments doit apparaître deux fois, à savoir à la fois dans la séquence $i\varkappa$ et dans la séquence $\varkappa i$, et 2) l'exigence énoncée à l'article 16 doit toujours être remplie.

appartient à un triangle.

Les deux problèmes sont donc identiques.

15. Notre objectif est de trouver la solution dans la forme originale de la question.

La totalité des paires de nombres $(i\kappa)$ qui représentent les côtés du triangle ou les paires voisines dans l'arrangement (E) que nous devons former, nous les disposons en $n - 1$ rangées de telle sorte que dans la première rangée [1] nous placions toutes les paires $(i\kappa)$ avec la différence $\kappa - i = 1$, dans la deuxième rangée [2] toutes les paires avec la différence $\kappa - i = 2$, etc. :

$$(F) \quad \left\{ \begin{array}{l} [1] \quad (1\ 2) \ (2\ 3) \ \dots \ (n-1\ n) \quad (n\ 1), \\ [2] \quad (1\ 3) \ (2\ 4) \ \dots \ (n-1\ 1) \quad (n\ 2), \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ ([n-1] \ (1\ n) \ (2\ 1) \ \dots \ (n-1\ n-2) \ (n\ n-1). \end{array} \right.$$

Vous obtenez alors un triangle en reliant des paires de 3 lignes $[i], [\kappa], [l]$ où

$$i + \kappa + l \equiv 0 \pmod{n},$$

Par exemple, $(1\ 2)$ de [1] avec $(2\ 4)$ de [2] avec $(4\ 1)$ de $[n-3]$. Pour que la configuration devienne cyclique, le nombre d'occurrences d'un triangle $(a\ b\ c)$ doit être égal à celui des $n - 1$ autres triangles.

$$(a + 1, \quad b + 1, \quad c + 1),$$

$$(a + 2, \quad b + 2, \quad c + 2),$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

$$(a + n - 1, \quad b + n - 1, \quad c + n - 1)$$

Ceci conduit à tous ces résultats. Cependant, ils résultent tous de l'extraction systématique d'une paire à partir des 3 mêmes lignes de (F), qui ont servi à former (a, b, c) , dans le même ordre. Par conséquent, les lignes de (F) doivent d'abord pouvoir être regroupées par trois de sorte que la somme des nombres de représentation de ces trois groupes soit toujours $\equiv 0 \pmod{n}$. Cela implique, premièrement, que $n - 1$ soit divisible par 3, et deuxièmement, que $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n-1)}{2}$ soit un multiple entier de n , c'est-à-dire que $n - 1$ soit également divisible par 2.

Nous arrivons donc initialement au résultat que pour la possibilité d'un arrangement (E), n doit nécessairement avoir la forme

$$n = 6\lambda + 1.$$

Puisque $n = 12\kappa + 7$ est le seul cas régulier où n a cette forme, nous constatons :

“Un arrangement cyclique (E) est possible seulement dans les cas où $n = 12\kappa + 7$.”

Et également, si nous modifions l'énoncé de l'autre théorème uniquement par souci de clarté en remplaçant tous les nombres $> \frac{n-1}{2}$ qui sont congrus à un nombre négatif modulo n :¹⁹

“Si $n = 12\kappa + 7$, il est toujours possible d'arranger les nombres $\pm 1, \pm 2, \dots, \pm \frac{n-1}{2}$ en un cycle tel que les deux voisins de λ ($\lambda = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \frac{n-1}{2}$) soient λ fois plus grands que ceux de $-\lambda$ ”.

§ 5. Construction d'un arrangement cyclique pour $n = 12\kappa + 7$ si x satisfait certaines conditions.

16. Le regroupement des nombres $1, 2, \dots, n-1$ en groupes de trois dont la somme est divisible par n doit cependant satisfaire une autre condition pour aboutir à un arrangement cyclique (E). Puisque les nombres $1, 2, \dots, n$ représentent des lignes individuelles de (F), dans le regroupement imaginé, les nombres de chaque ligne de 1 doivent uniquement être les trois éléments (que l'on considère à nouveau comme des lignes fermées) de telle sorte que, si l'on forme ensuite des triangles selon ce groupement des lignes de (F) dans une séquence spécifique de trois éléments, les $n-1$ triangles ayant le sommet commun 1 forment, par exemple, un cycle unique. Autrement dit, si l'on part d'un triangle $(1\alpha\beta)$, auquel $(1\beta\gamma)$, puis $(1\gamma\delta)$ est attaché, et ainsi de suite, alors seul le $(n-1)$ -ième triangle, par exemple $(1\nu\alpha)$, peut à nouveau contenir le sommet α . Si cette condition est vérifiée pour un nombre, par exemple 1, alors elle l'est pour tous les nombres en raison de la nature cyclique de l'arrangement. Pour le groupement imaginaire des nombres $1, 2, \dots, n-1$, cette exigence s'exprime comme suit : si l'on passe d'une ligne abc (où l'ordre a, b, c est fixe à l'exception d'un décalage cyclique) à une autre en trouvant la ligne contenant le nombre $a+b$ (somme de a et du nombre à sa droite), alors à partir de là, si b' est à droite de $a+b$, à la ligne avec $a+b+b'$, etc., on ne peut revenir au nombre de départ a qu'à la $(n-1)$ -ième étape.

Nous souhaitons maintenant démontrer, à partir d'un groupement spécifique et particulièrement clair des nombres $1, 2, \dots, n-1$, pour lequel l'ordre au sein des lignes n'est pas encore définitivement fixé, que si n satisfait l'une des deux conditions spécifiques, et seulement dans ces deux cas, le groupement choisi, par une détermination finale appropriée au sein des lignes, conduit à un arrangement cyclique, lequel est directement donné. Nous menons cette investigation autant que possible sous l'hypothèse plus générale que n est de la forme $6\lambda + 1$, afin de n'ajouter la condition $\lambda = 2\kappa + 1$ que lorsqu'elle devient évidente, revenant ainsi au cas particulier qui nous intéresse.

17. Si $n-1 = 6\lambda$, alors les nombres $1, 2, \dots, 6\lambda$ peuvent être regroupés conformément aux exigences de l'article 15 comme suit.

19. Note de la transcriptrice : si ceci est possible, c'est que les restes modulaires sont ce que Gauss appelle restes modulaires minima : à partir de la moitié du module, on considère la distance (négative donc) au multiple suivant du module. Exemple : modulo 7, on peut dire soit que 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 sont congrus à eux-mêmes, ou bien on peut dire que 0, 1, 2, et 3 sont congrus à eux-mêmes tandis que 4, 5 et 6, étant supérieurs à $\frac{7-1}{3}$, sont congrus à (respectivement), $-3, -2$ et -1

$$(G) \left\{ \begin{array}{lll} 1 & 2 & 6\lambda - 2 \\ 3 & 4 & 6\lambda - 6 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 2\lambda - 3 & 2\lambda - 2 & 2\lambda + 6 \\ 2\lambda - 1 & 2\lambda & 2\lambda + 2 \\ 2\lambda + 1 & 4\lambda + 1 & 6\lambda \\ 2\lambda + 3 & 4\lambda + 3 & 6\lambda - 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 4\lambda - 3 & 6\lambda - 3 & 2\lambda + 8 \\ 4\lambda - 1 & 6\lambda - 1 & 2\lambda + 4 \end{array} \right.$$

Ce groupement (G) possède les propriétés suivantes, que nous utiliserons plus tard, et dont la démonstration est si simple qu'elle peut être omise :

1) La somme de 3 nombres adjacents est

$$\lambda \text{ dans la ligne} = n$$

$$\lambda \text{ dans la ligne} = 2n.$$

2) la somme de deux nombres symétriques par rapport à la ligne médiane (qui divise verticalement le système entier en 2 moitiés) est

$$\text{dans la première colonne} = 4\lambda,$$

$$\text{dans la deuxième colonne} = 6\lambda + 1 (= n),$$

$$\text{dans la troisième colonne} = 2\lambda + 1 \pmod{n} \text{ bien sûr}.$$

3) La somme de deux nombres quelconques d'une même ligne n'apparaît qu'une seule fois dans le groupe. Chaque nombre est la somme d'une seule et unique paire de nombres spécifiques de la même ligne.

4) La somme de deux nombres situés sur la même ligne, dans la première et la troisième colonne, est égale au nombre de la deuxième colonne symétrique de la ligne précédente. La somme de deux nombres consécutifs situés dans les première et deuxième colonnes est égale à un nombre de la première colonne, et la somme de deux nombres consécutifs situés dans les deuxième et troisième colonnes est égale à un nombre de la troisième colonne, à condition que abc soit une ligne et $a'b'c'$ l'autre. On a à la fois

$$a' = a + b,$$

et

$$c = b' + c'$$

5) Si l'on passe d'une ligne abc à une autre en choisissant la ligne qui contient la somme de deux de ces trois nombres, alors on arrive à la ligne symétrique de abc avec $4\lambda - a, 6\lambda + 1 - c, 2\lambda + 1 - c$ en utilisant le même mode de progression.

Si, par exemple, on passe de abc à la ligne qui $a+b$ en première position, on arrive à $4\lambda - (a+b)$ dans la première colonne de $4\lambda - a, 6\lambda + 1 - b, 2\lambda + 1 - c$ en additionnant les deux premiers nombres, c'est-à-dire au nombre symétrique de $a + b$, etc.

18. Si nous parcourons maintenant le groupement (G), dans lequel nous considérons provisoirement l'ordre des lignes comme fixe tel qu'il est écrit, de la manière indiquée ci-dessus, en commençant par 1, 2 à partir de la première ligne, puis 3, 4, puis 7, 8, etc., cette séquence se termine selon son propre ordre.

4) Ceci est réalisé au plus tard à la 2λ -ième étape, car la somme des deux derniers nombres (qui sont alors $2\lambda + 1$ et $4\lambda + 1$) est $\equiv 1 \pmod{n}$. Si la suite se ferme plus tôt, on recommence avec une paire de nombres adjacents des première et deuxième colonnes qui n'a pas encore été utilisée, et ainsi de suite, jusqu'à ce que toutes les paires de nombres des première et deuxième colonnes aient été utilisées, de sorte qu'on obtient une ou plusieurs suites fermées de ce type. D'après la propriété 5), il s'ensuit qu'une telle suite est soit "symétrique en elle-même", c'est-à-dire que pour toute paire de nombres a, b, a_1, b_1 , la suite contient également la suite symétrique $4\lambda - a, 6\lambda + 1 - b$, telle que si a, b est suivi de a_1, b_1 , alors $4\lambda - a, 6\lambda + 1 - b$ est suivi de la paire $4\lambda - a_1, 6\lambda + 1 - b_1$, soit il existe une autre suite symétrique à celle-ci en ce sens. Dans les deux cas, le nombre de lignes utilisées pour la séquence symétrique ou pour la paire de séquences symétriques est pair $= 2\mu$.

Afin de comprendre comment les autres paires (c'est-à-dire les paires b, c et c, a , où nous conservons les lettres a, b, c respectivement pour la première, la deuxième et la troisième colonne) de ces 2μ lignes se combinent pour former des séquences, étant donné que les lignes restantes éventuelles ne participent pas, nous représentons les 2μ paires des première et deuxième colonnes, telles qu'elles se succèdent, par :

$$a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, \dots, a_\mu b_\mu$$

et les symétriques correspondants jusqu'à

$$a'_1b'_1, a'_2b'_2, a'_3b'_3, \dots, a'_\mu b'_\mu$$

Alors on a

$$a_1 + b_1 = a_2, a_2 + b_2 = a_3, \dots, a_{\mu-1} + b_{\mu-1} = a_\mu,$$

$$a'_1 + b'_1 = a'_2, a'_2 + b'_2 = a'_3, \dots, a'_{\mu-1} + b'_{\mu-1} = a'_\mu,$$

et aussi soit

$$\text{a) } a_\mu + b_\mu = a'_1, \quad a'_\mu + b'_\mu = a_1$$

soit

$$\text{b) } a_\mu + b_\mu = a_1, \quad a'_\mu + b'_\mu = a'_1$$

Si nous commençons une autre suite, par exemple avec $b_\mu c_\mu$, alors les paires suivantes découlent de

la propriété 4) $c_{\mu-1}a_{\mu-1}$, alors $b'_{\mu-1}c'_{\mu-1}$, etc. Ainsi, se suivent l'une après l'autre

$$\begin{array}{r} b_{\mu} \quad c_{\mu} \\ \quad c_{\mu-1} \quad a_{\mu-1} \\ b'_{\mu-1} \quad c'_{\mu-1} \\ \quad c'_{\mu-2} \quad a'_{\mu-2} \\ b_{\mu-2} \quad c_{\mu-2} \\ \text{etc.} \end{array}$$

Si μ est impair, alors b_1c_1 est finalement obtenu, et ensuite dans le cas a) $c'_{\mu}a'_{\mu}$, on retrouve ensuite b_{μ} , ce qui forme une séquence de 2μ paires, chacune provenant d'une des 2μ lignes de (G). La séquence n'étant pas symétrique, on en obtient immédiatement une seconde en remplaçant simplement les lettres barrées par leurs lettres non barrées et inversement.

Dans le cas I. b), en revanche, $b_1c_1, c_{\mu}a_{\mu}$ est suivi de $b'_{\mu}c'_{\mu}, c'_{\mu-1}a'_{\mu-1}$, etc., de manière symétrique, comme précédemment, jusqu'à ce que la séquence se termine après $c'_{\mu}a'_{\mu}$. On obtient alors une séquence auto-symétrique de 4μ paires, chacune de ces paires provenant d'une des 2μ lignes; et si l'on prend deux paires consécutives quelconques de la séquence, on obtient des représentants de toutes les 2μ lignes.

Si II. μ est pair, alors, en partant de $b_{\mu}c_{\mu}$ avant, on arrive d'abord à

$$b'_1c'_1$$

et dans le cas a)

$$c_{\mu}a_{\mu}$$

$$\begin{array}{r} b'_{\mu} \quad c'_{\mu} \\ \quad c'_{\mu-1} \quad a'_{\mu-1} \\ \text{etc.} \end{array}$$

la répétition symétrique du début se poursuit jusqu'à ce que la série se termine comme dans le cas I. b).

Dans le cas b), en revanche

$$\begin{array}{r} b'_1c'_1 \\ \quad c'_{\mu}a'_{\mu} \end{array}$$

et puis la série se termine par b_{μ} après 2μ étapes, et il y a à nouveau une seconde étape symétrique.

Pour résumer ce qui est important pour la suite de cette observation, voici ce qu'il faut retenir :

“Chaque séquence auto-symétrique ou paire de séquences symétriques de paires de 2μ nombres des deux premières colonnes de (G) est jointe par une séquence auto-symétrique ou paire de séquences symétriques de paires de nombres des mêmes lignes des deuxième et troisième colonnes et des troisième et première colonnes, de sorte que toutes les paires de 6μ nombres de ces 2μ lignes sont épuisées.”

19. Puisque nous recherchons maintenant les cas dans lesquels nous n'obtenons qu'une seule séquence fermée de ce type à partir de l'ensemble du groupement (G), mais que nous ne voulons réorganiser qu'à l'intérieur des lignes de (G), il est clair d'après ce qui précède que ces 2μ lignes représentent l'ensemble du groupement (G).

Il faut que toutes les séquences soient épuisées, c'est-à-dire que $\mu = \lambda$. Sinon, il serait impossible de combiner les séquences fermées issues des 2μ lignes avec les séquences supplémentaires en réorganisant les lignes. Cela sera précisé dans la section suivante, où nous examinerons sous quelles conditions et de quelle manière les différentes séquences initialement obtenues à partir des 2μ lignes peuvent être combinées en une seule séquence par simple réorganisation des lignes.

Cas I, a). Nous avons trois séquences, chaque ligne étant composée d'une paire. Cependant, si l'on effectue un réarrangement important dans une ligne de (G), c'est-à-dire pas seulement une modification cyclique, alors les trois séquences fusionnent en une seule. En effet, si abc est la ligne dans l'ordre initial, alors dans l'une des trois lignes fermées, on a la séquence

$$\dots |a, b|a + b, \cdot| \dots$$

dans la seconde

$$\dots |b, c|b + c, \cdot| \dots$$

dans la troisième

$$\dots |c, a|c + a, \cdot| \dots$$

Si l'on réarrange abc en acb , alors $|ab|$ devient $|ac|$, car a conserve sa position grâce à la paire précédente; $|bc|$ devient $|ba|$, $|ca|$ devient $|cb|$. Si l'on recommence la première séquence par $|a + b, \cdot| \dots$ on arrive finalement à $|ac|$; on poursuit avec $|c + a, \cdot| \dots$, jusqu'à $|cb|$, puis $|b + c, \cdot| \dots$ jusqu'à $|ba|$, et là encore, on revient au point de départ $|a + b, \cdot| \dots$, ce qui prouve l'affirmation.

En pratique, on découpe trois cercles de même taille, sur le pourtour desquels on peut imaginer les trois suites représentées, mais simultanément leurs six extrémités sont reliées différemment, de manière à former un seul nouveau cercle. Par souci de concision, nous utiliserons cette image, qui pourra être remplacée à tout moment par l'expression purement arithmétique.

Cas I, b). Deux séquences mutuellement symétriques à partir des première et deuxième colonnes et une qui est symétrique en elle-même à partir des paires de nombres restantes dans les mêmes lignes.

Il est impossible de réaliser ici une coupe qui intersecte simultanément les trois cercles, dont deux sont identiques, tandis que la circonférence du troisième est le double de la somme des deux autres. Cependant, si l'on effectue d'abord une coupe qui intersecte une fois l'un des deux plus petits cercles et deux fois le plus grand, les morceaux obtenus forment deux cercles : l'un est la moitié du grand cercle initial, et l'autre l'autre moitié également.

Il existe un petit cercle. Les trois cercles existants peuvent donc être simultanément coupés par une seconde coupe et ainsi réunis (comme précédemment).

Cas II, a). Deux cercles, l'un touchant chacune des 2μ rangées une fois, l'autre touchant chaque rangée deux fois.

Toute coupe touchera les deux cercles, à savoir le petit une fois, le grand deux fois ; mais les morceaux se rejoindront à nouveau pour former 2 cercles, et une répétition ne pourra évidemment jamais aboutir qu'au même résultat.

Dans ce cas, il est donc impossible de produire une seule séquence fermée à partir du groupement (G).

Cas II, b). Deux cercles de même taille, qui ensemble touchent toutes les rangées une fois, et deux autres cercles deux fois plus grands, chacun touchant toutes les rangées une fois.

Toute coupure combinera l'un des deux petits cercles avec les deux grands, de sorte que la même situation que dans le cas précédent prévaut ; ici aussi, la création d'une séquence unique est impossible.

Le cas I, dont l'exécution était possible dans les deux sous-cas, est précisément le nôtre, puisque dans notre cas $\lambda = 2\kappa + 1$ est impair. Le résultat de cette considération est donc le suivant :

“Si, pour un nombre $n = 12\kappa + 7$, le groupement (G) fait que les paires de nombres des deux premières colonnes se combinent en une seule séquence ou en deux séquences mutuellement symétriques, et seulement dans ces deux cas, un simple réarrangement d'une ou deux lignes permet d'obtenir le groupement qui donne un arrangement cyclique (E).”

20. Par conséquent, la seule question restante à laquelle il faut répondre est : à quoi doit ressembler le nombre $n = 12\kappa + 7$ pour que les deux premières colonnes de (G) donnent lieu à une ou deux séquences de paires de nombres mutuellement symétriques ?

Enfin, nous observons comment, selon la progression spécifiée de paire en paire dans le groupement,

$$(H) \quad \left\{ \begin{array}{lll} 1 & 2 & 12\kappa + 4 \\ 3 & 4 & 12\kappa \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 4\kappa + 1 & 4\kappa + 2 & 4\kappa + 4 \\ 4\kappa + 3 & 8\kappa + 5 & 12\kappa + 6 \\ 4\kappa + 5 & 8\kappa + 7 & 12\kappa + 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 8\kappa + 3 & 12\kappa + 5 & 4\kappa + 6 \end{array} \right.$$

(Ce qui n'est qu'une répétition du groupement (G) pour $\lambda = 2\kappa + 1$) les nombres de la deuxième

colonne se suivent si, par exemple, on commence par la paire 1, 2. Ensuite, 3, 4; 7, 8; 15, 16; etc. suivent, donc dans la deuxième colonne les nombres 2, 4, 8, 16, etc. En effet, les nombres de la deuxième colonne continuent de se suivre comme les puissances de 2 si on les prend mod. $(4\kappa+3)$ et qu'on ajoute $8\kappa+4$ chaque fois que le plus petit reste de $2^\lambda \bmod. (4\kappa+3)$ devient impair.

Premièrement, on constate que la deuxième colonne contient bien les nombres $1, 2, \dots, 4\kappa+2$, les nombres impairs étant augmentés de $8\kappa+4$. Si l'on attribue à un nombre a de la deuxième colonne une puissance spécifique de 2, par exemple 2^μ , de la manière indiquée - c'est-à-dire de sorte que si a appartient à la moitié supérieure,

$$a \equiv 2^\mu \bmod. (4\kappa+3),$$

mais sinon

$$a - (8\kappa+4) \equiv 2^\mu \bmod. (4\kappa+3).$$

Le raisonnement suivant montre qu'en procédant de la manière décrite ci-dessous, on obtient un nombre dans la deuxième colonne auquel on attribue $2^{\mu+1}$ de la même façon. Il convient de distinguer quatre cas :

- 1) Soit a un nombre dans la moitié supérieure; $a \equiv 2^\mu$; à gauche de a se trouve un $a-1$.
 - α) $2a-1$ se trouve également dans la moitié supérieure; alors le voisin de droite de $2a-1$, c'est-à-dire le nombre qui suit a dans la deuxième colonne, $= 2a$, qui est un nombre $\equiv 2^{\mu+1}$.
 - β) $2a-1$ est déjà dans la moitié inférieure; alors son voisin de droite est $2a+4\kappa+1$. Mais si vous soustrayez $8\kappa+4$ de celui-ci, le nombre résultant $2a-(4\kappa+3)$ est à nouveau $\equiv 2^{\mu+1}$.
- 2) Soit a un nombre de la moitié inférieure; $a - (8\kappa+4) \equiv 2^\mu$; reliant a et $a - (4\kappa+2)$. Sur la paire

$$(a - (4\kappa+2), a)$$

cependant, le nombre de la première colonne est

$$2a - (4\kappa+2) - (12\kappa+7) = 2a - (16\kappa+9);$$

car puisque la somme de deux nombres dans une ligne des deux premières colonnes dans la moitié inférieure est toujours $> 12\kappa+7$, $12\kappa+7$ a dû être soustrait.

- α) $2a - (16\kappa+9)$ se trouve dans la moitié supérieure; alors son voisin de droite, c'est-à-dire le nombre qui suit a dans la deuxième colonne, est

$$2a - (16\kappa+9) + 1 \equiv 2^{\mu+1}.$$

- β) $2a - (16\kappa+9)$ se trouve dans la moitié inférieure; alors son voisin de droite est

$$2a - (16\kappa+9) + 1 + 4\kappa + 1 + 4\kappa + 1 = 2a - (12\kappa+7).$$

En soustrayant $8\kappa+4$ de ce nombre, on obtient :

$$2a - (20\kappa+11) \equiv 2^{\mu+1}.$$

Or, les premiers nombres apparaissant dans la deuxième colonne, $2, 4, 8, \dots$, sont bien attribués aux puissances de 2 de la manière indiquée ; par conséquent, notre affirmation est prouvée par l'examen précédent des quatre cas possibles.

Nous pouvons alors répondre immédiatement à la question posée en introduction de cet article. La séquence qui commence par $|1, 2|$ se termine lorsqu'on revient à la paire.

$$4k + 3, 8\kappa + 5$$

Ceci conduit au nombre $8\kappa + 5$ dans la deuxième colonne, qui diminue de $8\kappa + 4$ pour donner 1. Les deux premières colonnes de (H) ne produisent donc qu'une seule suite lorsque la puissance $(4\kappa + 2)$ -ième de 2 congrue à²⁰ 1 modulo $(4\kappa + 3)$, c'est-à-dire lorsque 2 est une racine primitive de $4\kappa + 3$. Elles produisent deux suites symétriques lorsque $2^{2\kappa+1}$ est la plus petite puissance de 2 qui soit $\equiv 1$ modulo $(4\kappa + 3)$. Le fait que ces deux suites soient symétriques entre elles ou non symétriques entre elles découle simplement du fait que le nombre de leurs termes est impair, $2\kappa + 1$.

Le résultat du présent paragraphe est donc le suivant :

“Si, et seulement si, n est de la forme $12\kappa + 7$, avec κ satisfaisant l'une ou l'autre des deux conditions ci-dessus, le groupement (H) conduit à un arrangement cyclique (E).”

21. Résumons brièvement les résultats de la présente étude :

La formule (A) s'applique à toute valeur de n .

L'équation (B) est certainement valable jusqu'à $n = 12$ inclus, et l'équation (C) jusqu'à $p = 6$ inclus.

La solution du problème des régions voisines (à l'exception des cas $n = 5, 6$) par un arrangement cyclique (E) et la solution du problème identique sont possibles au plus si n a la forme $12\kappa + 7$.

La solution est véritablement productible si κ est tel que soit

a) 2 est racine primitive de $(4\kappa + 3)$

soit

b) $2^{2\kappa+1}$ est la plus petite puissance de 2 qui soit $\equiv 1 \pmod{4\kappa + 3}$.

Pour toutes les valeurs de n qui vérifient ces conditions, les équations (B) et (C) sont vérifiées.

Le groupement (H) permet de créer l'arrangement cyclique pour lequel, dans le cas a), seule une ligne est modifiée, par exemple la première.

En dessous de la ligne médiane, dans le cas b), il existe une seconde rangée, approximativement la dernière. Si l'on considère alors les nombres de (H) comme représentatifs des rangées de (F) et que

20. qu'on peut noter \equiv .

Le groupement (H) est

1	2	16
3	4	12
5	6	8
7	<u>13</u>	<u>18</u>
9	15	14
11	<u>17</u>	<u>10</u>

$\varkappa = 1; 4\varkappa + 3 = 7$; on a $2^3 \equiv 1 \pmod{7}$; après les deux réarrangements indiqués, le groupement conduit à une seule forme fermée, avec comme séquence de couples :

$$\begin{aligned}
 &|1, 2| \quad |3, 4| \quad |7, 18| \quad |6, 8| \quad |14, 9| \quad |4, 12| \quad |16, 1| \quad |17, 11| \quad |9, 15| \quad |5, 6| \quad |11, 10| \\
 &|2, 16| \quad |18, 13| \quad |12, 3| \quad |15, 14| \quad |10, 17| \quad |8, 5| \quad |13, 7|.
 \end{aligned}$$

Ainsi, la ligne 19) de (E) devient :

$$19) \quad 1 \ 3 \ 7 \ 6 \ 14 \ 4 \ 16 \ 17 \ 9 \ 5 \ 11 \ 2 \ 18 \ 12 \ 15 \ 10 \ 8 \ 13$$

et la disposition des nombres $\pm 1, \pm 2, \dots, \pm 9$ ci-dessous a la propriété requise :

$$1, 3, 7, 6, -5, 4, -3, -2, 9, 5, -8, 2, -1, -7, -4, -9, 8, -6.$$

Si l'on examine, pour les plus petites valeurs de \varkappa , quels nombres de la forme $12\varkappa + 7$ satisfont la condition a) et quels nombres satisfont la condition b), la première est vérifiée pour $\varkappa = 0, n = 7$; $\varkappa = 2, n = 31$; $\varkappa = 4, n = 55$; puis pour $\varkappa = 14, n = 175$, et ainsi de suite, la seconde pour $\varkappa = 1, n = 19$; $\varkappa = 5, n = 67$; $\varkappa = 11, n = 139$; et ainsi de suite. En général, on peut montrer que si \varkappa est un multiple de 3, le groupement (H) ne conduit pas à une solution.

Nous avons ainsi épuisé tous les cas où le groupement (H) conduit à une solution du problème par un arrangement cyclique. La question demeure de savoir si un groupement différent de (H) pourrait également conduire à la solution pour les cas où n est de la forme $12\varkappa + 7$ lorsque (H) échoue. Il convient de noter que, à partir de (H), on peut immédiatement dériver $n - 2$ autres groupements, qui remplissent tous exactement la même fonction que (H), ni plus ni moins, en multipliant tous les nombres de (H) une fois par 2, une fois par 3, etc., une fois par $n - 1$, et en prenant la modification de n correspondante.

GIESSEN, NOVEMBRE 1890.