Une incomplétude mathématique en arithmétique de Peano

Jeff Paris, Leo Harrington

1. Une extension du théorème de Ramsey fini

Dans ce chapitre, nous présentons une découverte récente en logique mathématique. Nous étudions un théorème raisonnablement naturel de la combinatoire finitaire, une extension simple du théorème de Ramsey fini. Ce chapitre est principalement consacré à la démonstration que ce théorème, bien que vrai, n'est pas prouvable en arithmétique de Peano.

Les premiers exemples d'énoncés strictement mathématiques sur les nombres naturels, vrais mais non prouvables en AP (arithmétique de Peano), sont dus au premier auteur (voir Paris [à paraître]) et sont issus des travaux de Paris et Kirby [à paraître]. La contribution du second auteur a été de montrer que la démonstration de Paris pouvait être faite grâce à l'extension particulièrement simple du théorème de Ramsey fini mentionnée ci-dessus (et énoncée précisément en 1.2).

Puisque nous allons travailler en profondeur sur le calcul des partitions, il sera utile que le lecteur consulte les pages 390-393 du chapitre B.3 pour les informations de base et les pages 393-395 pour une démonstration du théorème de Ramsey infini.

1.1. Définition. On qualifie un ensemble fini H d'entiers naturels comme étant relativement grand si $\mathrm{card}(H) \geq \min(H)$. Étant donnés les entiers naturels e, r, k et M, nous utilisons la notation

$$M \underset{*}{\longrightarrow} (k)^e_r$$

qui signifie que pour toute partition $P : [M]^e \to r$, il existe un $H \subseteq M$ relativement grand, homogène pour P et de cardinalité au moins égale à k.

1.2. Théorème. *Pour tous les entiers naturels e, r et k, il existe un M tel que $M \underset{*}{\longrightarrow} (k)^e_r$.*

Sans le * sous la flèche, qui rend les ensembles homogènes relativement grands, il s'agirait simplement du théorème de Ramsey fini. Le théorème de Ramsey fini est démontrable en arithmétique de Peano. Notre démonstration de 1.2 utilisera le théorème de Ramsey infini et ne peut être faite en arithmétique de Peano.

1.3. Théorème principal. *Le principe combinatoire de 1.2 n'est pas prouvable en arithmétique de Peano.*

Manuel de logique mathématique, North-Holland Publishing Company, 1977, édité par J. Barwise

Note de l'éditeur : Depuis 1931, année de publication des Théorèmes d'incomplétude de Gödel, les mathématiciens recherchent un exemple strictement mathématique d'incomplétude en arithmétique de Peano du premier ordre, qui soit mathématiquement simple et intéressant et qui ne nécessite pas le codage numérique de notions issues de la logique. Les premiers exemples de ce type ont été trouvés début 1977, alors que ce Manuel était presque terminé. Nous sommes heureux de pouvoir inclure un dernier chapitre qui présente l'exemple le plus frappant à ce jour. C'est une conclusion pertinente, car elle rassemble les idées de toutes les parties du Manuel.

Transcription en LaTeX : Denise Vella-Chemla, juillet 2025.

Pour le lecteur qui n'est pas habitué à travailler en arithmétique de Peano et qui ne voit donc pas comment formuler 1.2 en arithmétique de Peano, nous remarquerons que AP est équivalent (pour les énoncés sur les entiers naturels) au résultat du remplacement de l'axiome de l'infini par sa négation dans les axiomes usuels de la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel - ZF - (voir chapitre B.1), et 1.2 peut être formulé directement dans cette théorie, sans aucun codage.

2. Preuves de 1.2 et 1.3.

Nous prouvons d'abord 1.2. Fixons e, r et k, et supposons qu'il n'y ait pas de M du type souhaité. Appelons P un contre-exemple pour M si P est une partition de $[M]^e$ en r morceaux sans ensemble homogène relativement grand de taille au moins k. Nous pouvons considérer l'ensemble des contre-exemples comme un arbre infini à branches finies. Autrement dit, si P et P' sont des contre-exemples pour M et M' respectivement, nous plaçons P en dessous de P' dans notre arbre juste au cas où $M < M'$ et P est la restriction de P' à $[M]^e$. D'après le lemme de König, il existe un $P : [\omega]^e \to r$ tel que pour tout M, la restriction de P à $[M]^e$ soit un contre-exemple pour M. D'après le théorème de Ramsey infini, il existe un $H \subset \omega$ homogène infini pour P. Mais en choisissant M suffisamment grand (comparé à k et $\min(H)$), on constate que $H \cap M$ est, après tout, un ensemble homogène relativement grand pour $P|[M]^e$ de taille au moins k. □

En prévision de la section 3, nous soulignons que, pour tout e, la preuve ci-dessus peut être formalisée en AP. (La preuve de $\omega \to (\omega)^e_r$, pages 393-395, est formalisée naturellement, par récurrence sur e, en ($\Pi^0_\infty-$AC restreint[1]), qui est conservatrice sur AP (voir page 940)). Ainsi, pour tout e,

$$\mathrm{AP} \vdash \forall r, k, \exists M (M \underset{*}{\longrightarrow} (k)^e_r).$$

Nous commençons maintenant la preuve de 1.3, qui occupera le reste de cette section. Nous définissons une certaine théorie T en 2.1, puis montrons que $\mathrm{Con}(T) \to \mathrm{Con}(\mathrm{AP})$ est prouvable en AP. La preuve se conclura en montrant, en AP, que le principe combinatoire de 1.2 implique $\mathrm{Con}(T)$. Dans ce qui suit, nous identifions les sous-ensembles finis de ω avec les suites finies croissantes de ω. La théorie T est exprimée dans le langage de AP plus une infinité de nouveaux symboles constants $c_0, c_1, \ldots$.

2.1. Définition. Les axiomes de T sont les suivants :

(i) Les équations récursives habituelles définissant $+, x, <$, plus les axiomes d'induction, mais seulement pour les formules limitées.

(ii) Pour tout $i = 0, 1, \ldots$, l'axiome $(c_i)^2 < c_{i+1}$.

(iii) Pour tout sous-ensemble fini $i = i_1, \ldots, i_r$, de ω, soit $c(i) = c_{i_1}, \ldots, c_{i_r}$.

Pour tout $i < k, k'$ et chaque formule limitée $\psi(y\ ; z)$ (où k, k' et z ont tous la même valeur) longueur), on a l'axiome :

$$\forall y < c_i [\psi(y\ c(k) \leftrightarrow \psi(y\ c(k'))].$$

[1] AC = Axiome du choix.

2.2. Proposition. Con(T) *implique* Con(AP).

Preuve. Soit $\mathfrak{A} \models T$ et soit I le segment initial de $\mathfrak{A}$ de ceux $a < c_i$ pour un certain $i \in \omega$. Par (ii), I est fermé par $+$ et $\times$. Il suffira de démontrer ce qui suit.

2.3. Affirmation. $\mathfrak{I} = \langle I, +, \times, < \rangle$ est un modèle de AP.

Pour chaque formule $\theta(y)$ du langage de AP, définir une formule limitée $\theta^*(y\ z)$ comme suit. Écrire θ sous forme normale prénexe, disons $\exists x_1, \ldots \forall x_r \varphi(x\ y)$ où φ est sans quantificateur. Alors $\theta^*(y\ z_1, \ldots, z_r)$ est $\exists x_1 < z_1 \ldots \forall x_r < z_r,\ \varphi(x\ y)$.

2.4. Affirmation. Étant donné $i < k, a < c_i$ et $\theta(y)$, où k, a et y ont tous la longueur appropriée,

$$\mathfrak{I} \models \theta(a) \quad \text{si et seulement si} \quad \mathfrak{A} \models \theta^*(a\ ; c(k)).$$

Notons que 2.3 est une conséquence immédiate de 2.4 puisque la partie (i) de 2.1 garantit que pour tout $\theta, \mathfrak{A}$ satisfera l'induction pour θ^*. Alors la preuve de 2.4 procède par induction sur θ. Supposons que $\theta(y)$ soit $\exists x\ \psi(x, y)$. Ainsi $\theta^*(y\ ; z)$ est $\exists x < z_1\ \psi^*(x, y\ ; z_2, \ldots, z_r)$. Ainsi, $\mathfrak{I} \models \theta(a)$ ssi pour un certain b dans I et un certain j (où $\min(j)$ est grand), $\mathfrak{A} \models \psi^*(b, a\ ; c(j))$, ce qui se produit ssi pour un certain k' (là encore, où $\min(k')$ est grand) $\mathfrak{A} \models \theta^*(a\ ; c(k'))$, ce qui, d'après 2.1 (iii), est le cas ssi $\mathfrak{A} \models \theta^*(a\ ; c(k))$.

Le lecteur attentif observera que la preuve de 2.2 peut être formalisée en AP (de manière similaire à la section 6 du chapitre D.1). Il convient également de noter que, pour les besoins de la preuve ci-dessus, nous pouvons affaiblir 2.1 (iii) en ces formules limitées $\psi(y\ ; z)$ de la forme $\theta^*(y\ z)$ pour un certain $\theta(y)$.

2.5. Proposition. *Le principe combinatoire de 1.2 implique* Con(T).

D'après le deuxième théorème d'incomplétude de Gödel (voir page 825), 2.5 et 2.2 donnent notre théorème principal, à condition bien sûr que 2.5, comme 2.2, soit démontré en AP.

Avant de commencer la preuve de 2.5, nous soulignons quelques faits concernant les partitions.

2.6. Lemme. Étant données les partitions P_0 et P_1 de $[M]^e$ en r_0 et r_1 morceaux, il existe une partition P de $[M]^e$ en $r_0 \cdot r_1$ morceaux telle que pour $H \subseteq M$, H est homogène pour P ssi H est homogène pour P_0 et P_1.

Preuve. On pose $P(a) = \langle P_0(a), P_1(a) \rangle$. □

2.7. Lemme. *Un ensemble $H \subseteq M$ est homogène pour une partition P de $[M]^e$ ssi tout sous-ensemble de H de taille $e+1$ est homogène pour P.*

Preuve. Soient $a = a_1, \ldots, a_e$ les e premiers éléments de H. Choisissons $b = b_1, \ldots, b_e$ tels que $P(a) \neq P(b)$ et que $b_1 + \ldots + b_e$ soit minimisé. Si i est le plus petit indice tel que $a_i \neq b_i$, alors $\{a_1, \ldots, a_i, b_i, \ldots b_e\}$ n'est pas homogène et de taille $e+1$. □

Nous définissons $\sqrt{r}$ comme le premier entier naturel s tel que $s^2 \geq r$. Remarquons que pour la plupart des r (c'est-à-dire pour $r \geq 7$), $r \geq 1 + 2\sqrt{r}$.

2.8. Lemme. Étant donné $P : [M]^e \to r$, il existe un $P' : [M]^{e+1} \to (1 + 2\sqrt{r})$ tel que pour tout $H \subseteq M$ de $> e + 1$, H est homogène pour P ssi H est homogène pour P'.

Preuve. Soit $s = \sqrt{r}$. Définissons les fonctions Q (quotient) et R (reste) qui envoient $[M]^e$ dans s par l'équation $P(a) = s \cdot Q(a) + R(a)$. Pour $b = b_1, \ldots, b_e, b_{e+1}$ dans $[M]^{e+1}$, soit $b' = b_1, \ldots, b_e$. Nous définissons maintenant le P' souhaité sur $[M]^{e+1}$ par :

$$P'(b) = \begin{cases} 0 & \text{si } b \text{ est homogène pour } P, \\ \langle 0, R(b') \rangle & \text{si } b \text{ est homogène pour } Q \text{ mais pas pour } P, \\ \langle 1, Q(b') \rangle & \text{sinon,} \end{cases}$$

Soit H homogène pour P' de cardinalité $> e + 1$, et soient c les $e + 1$ premiers membres de H. Il faut voir que $P'(c) = 0$ pour vérifier que H est homogène pour P, par 2.7. Notons que pour tout a dans $[c]^e$, il existe un b dans $[H]^{e+1}$ tel que $b' = a$. Supposons que $P'(c) = \langle 1, i \rangle$. Alors, d'après la remarque précédente, $Q(a) = i$ pour tout a dans $[c]^e$ de sorte que c est homogène pour Q, ce qui contredit la définition de P'. Supposons donc que $P'(c) = \langle 0, j \rangle$ de sorte que c soit Q-homogène, disons $Q(a) = i$ pour tout a dans $[c]^e$. Mais alors $P(a) = s \cdot i + j$ pour tout a tel que c soit homogène pour P, ce qui contredit à nouveau la définition de P'.

□

2.9. Lemme. *Supposons que l'on nous donne n partitions $P_i : [M]^{e_i} \to r_i$, tous les i étant $< n$. Soient $e = \max_i e_i$, et $r = \Pi_i \max(r_i, 7)$. Il existe une partition $P : [M]^e \to r$ telle que pour tout $H \subseteq M$ de cardinalité $> e$, H est homogène pour P ssi H est homogène pour tous les P_i.*

Preuve. Combiner 2.6, 2.8 et la remarque précédant 2.8. □

Nous énonçons maintenant un principe combinatoire adapté pour impliquer Con(T). Les parties (ii) et (iii) de 2.10 correspondent aux parties similaires de 2.1. Il n'existe pas de 2.10 (i). Après avoir montré que 2.10 implique Con(T), nous reviendrons à la dérivation de 2.10 à partir de 1.2.

2.10. Proposition. Pour tout e, k, r, il existe un M tel que pour toute famille $\langle P_\xi \, ; \xi < 2^M \rangle$ de partitions $P_\xi : [M]^e \to r$, il existe un X de cardinalité $\geq k$ tel que :

(ii) si $a, b \in X$ et $a < b$, alors $a^2 < b$,

(iii) si $a \in X$ et $\xi < 2^a$ alors $X \sim (a + 1)$ est homogène pour P_ξ.

2.11. Affirmation. 2.10 implique Con(T).

Preuve. Étant donné un sous-ensemble fini S de T, soient $c_0, \ldots, c_{k-1}$ toutes les constantes apparaissant dans S. Nous utiliserons 2.10 pour montrer que S possède un modèle de la forme $\langle \omega \, ; +, \times, <, x_0, \ldots, x_{k-1} \rangle$, où $x_0, \ldots, x_{k-1}$ sont les k premiers éléments de l'ensemble X donné par 2.10. Ce modèle satisfait clairement (i) de 2.1 ; il ne nous reste donc qu'à nous préoccuper des axiomes des formes (ii) et (iii) dans S. La partie (ii) de 2.10 gère automatiquement les axiomes de

la forme (ii), il nous suffit donc de configurer nos partitions pour gérer ceux de la forme (iii).

Nous pouvons considérer chaque $\xi \in \omega$ comme codant une suite finie croissante $a(\xi)$ issue de ω de telle sorte que toutes les suites issues de b soient codées par un $\xi < 2^b$. Étant donné une formule limitée $\psi(y\,;z)$ et une suite $a(\xi)$ de même longueur que y, on obtient une partition $F_{\psi,\xi} : [M]^e \to 2$, où e' est la longueur de z définie par $F_{\psi,\xi}(c) = 0$ si $\psi(a(\xi)\,;c)$, et $= 1$ sinon.

Considérons, pour l'instant, M et ξ fixés. Pour chaque axiome de type (iii) apparaissant dans S, il existe une formule limitée correspondante $\psi(y\,;z)$ et donc une partition correspondante $F_{\psi,\xi}$. D'après 2.9, nous pouvons les combiner en une seule partition $P_\xi : [M]^e \to r$, où e et r ne dépendent que de S, et non de ξ ou de M. En utilisant maintenant 2.10, choisissons M si grand que (ii) et (iii) soient vrais pour un certain $X \subseteq M$ pour la famille $\langle P_\xi\,;\xi < 2^M\rangle$ et $\mathrm{card}(X) \geq k + e$. En choisissant maintenant $x_0, \ldots, x_{k-1}$ comme décrit ci-dessus, nous constatons que tous les axiomes de type (iii) sont satisfaits. □

Notre lecteur attentif aura remarqué que, puisque $\langle \omega\,;+,\times,<\rangle$ possède une relation de satisfaction récursive primitive pour les formules limitées, nous pouvons prouver en AP (ou même en APR) que cette structure satisfait (i) de 2.1. La preuve ci-dessus peut donc être faite en AP.

Il ne nous reste plus qu'à prouver (en AP) que 1.2 implique bien 2.10. Pour ce faire, nous avons besoin d'une méthode permettant d'obtenir des ensembles homogènes à croissance rapide. Nous sommes redevables à F. Abramson pour certains des arguments suivants qui ont simplifié notre preuve initiale.

Pour toute fonction g, soit $g^{(x)}$ la fonction g composée avec elle-même x fois. Soit $f_0(x) = x + 2$ et soit $f_{n+1}(x) = (f_n)^{(x)}(2)$. Le lecteur peut vérifier que $f_1(x) \geq 2x, f_2(x) \geq 2^x, f_3(x) \geq \beth_x$, où $\beth_x = 2^{2^{\cdots^2}}$, une pile de x chiffres 2, et ainsi de suite pour $f_4, f_5, \ldots$. Les lecteurs familiers avec la fonction d'Ackermann comprendront que chaque f_n est une fonction primitive récursive et que toute fonction primitive récursive est finalement dominée par une certaine f_n, mais ces faits ne seront pas utilisés ci-dessous.

2.12. Lemme. Pour tout p, il existe un $Q : [M]^1 \to p + 1$ tel que si X est homogène pour Q et de cardinal au moins égal à 2, alors $\min(X) \geq p$.

Preuve. Soit $Q(a) = \min(a, p)$. □

Nous arrivons maintenant à deux lemmes qui utilisent des ensembles homogènes relativement grands.

2.13. Lemme. *Pour tout m il existe une partition $R : [M]^2 \to r$ (où r ne dépend que de m) telle que si $X \subseteq M$ est relativement grand et homogène pour R et de cardinalité > 2, alors pour tout $x, y \in X, x < y$ implique $f_m(x) < y$.*

Preuve. Pour tout $i \leq m$, soit $P_i(a, b) = 0$ si $f_i(a) < b$; et $= 1$ sinon. Soit $p = f_m(3)$ et soit Q comme en 2.12 pour ce p. Utiliser 2.9 pour combiner tous ces éléments dans $R : [M]^2 \to r$. Soit X

relativement grand et homogène pour R. Soit $a = \min(X), b = \max(x)$. Par récurrence sur $i \leq m$, il est facile de montrer d'abord que $f_i(a) < b$ (c'est là qu'on utilise $\mathrm{card}(X) \geq a$) et ensuite que $f_i(x) < y$ pour tout x, y dans X, $x < y$, par homogénéité.

□

2.14. Lemme. *Soient $P : [M]^e \to s$ $(e \geq 2)$ et m donnés. Il existe un $P^* : [M]^e \to s'$, où s' ne dépend que de m, e et s, tel que s'il existe un $Y \subseteq M$ relativement grand homogène pour P^* de cardinalité $> e$, alors il existe un $X \subseteq M$ tel que X soit homogène pour P et $\mathrm{card}(X)$ soit au moins $e + 1$ et $f_m(\min(X))$.*

Preuve. Soit $h(a)$ le plus grand x tel que $f_m(x) \leq a$. Pour $a = a_1, \ldots, a_e$, soit $h_a = h(a_1), \ldots, h(a_e)$. Soit $S(a) = P(h_a)$ si h_a est un e-uplet (c'est-à-dire si $h(a_1) < h(a_2) < \ldots < h(a_e)$) ; $S(a) = s$ sinon. Ainsi $S : [M]^e \to s + 1$. Soit R comme en 2.13. Utiliser 2.9 pour combiner R, S en $P^* : [M]^e \to s'$. Soit Y donné comme dans l'énoncé de notre lemme, et soit X l'image de Y par h. La partition R nous assure du fait que h est bijective sur Y, de sorte que $\mathrm{card}(X) = \mathrm{card}(Y) \geq \min(Y)$. Mais la définition de h implique que $f_m(\min(X)) \leq \min(Y)$, donc $\mathrm{card}(X) \geq f_m(\min(X))$ comme souhaité.

2.15. Proposition. *Le principe combinatoire de 1.2 implique celui de 2.10.*

Preuve. On nous donne e, k et r, et on doit produire M comme en 2.10. Trouvons un p tel que pour tout $a \geq p$, $f_3(a)$ soit raisonnablement grand devant e, r, k et a. Nous préciserons cela dans le dernier paragraphe de la démonstration ; pour l'instant, notons simplement que $f_3(y) \geq \beth_y$. Soit $e' = 2e + 1$.

Maintenant étant donné M et une famille $P_\xi : [M]^e \to r$ pour $\xi < 2^M$, définissons un nouveau $S : [M]^{e'} \to 2$ par : $S(a, b, c) = 0$ si $P_\xi(b) = P_\xi(c)$ pour tout $\xi < 2^a$; $S(a, b, c) = 1$ sinon. Soient Q comme en 2.12 et R comme en 2.13 pour $m = 2$. Utilisons 2.9 pour combiner Q, R et S en un seul P puis utilisons 2.14 pour obtenir $P^* : [M]^{e'} \to s'$. Le nombre s' ne dépend que de $e' = 2e + 1$ et de p. Appliquons maintenant le principe combinatoire 1.2. Trouver un M tel que $M \underset{*}{\longrightarrow} (e' + 1)^{e'}_{s'}$. D'après 2.12, il existe un $X \subseteq M$ homogène pour Q, R et S avec $\mathrm{card}(X) \geq f_3(\min(X))$. Puisque X est homogène pour Q, $\min(X) \geq p$. Puisque X est homogène pour R, et puisque $f_2(y) \geq y^2$ pour les y suffisamment grands pour être dans X, X satisfait 2.10 (ii).

Pour vérifier 2.10 (iii), on remplace X par $X' = X \sim d$, où $d = d_1, \ldots, d_e$ sont les e derniers éléments de X. Soit $i_\xi = P_\xi(d)$. Si l'on montre que pour tout $a < b_1 < \ldots < b_e$ dans X' et tout $\xi < 2^a, P_\xi(b) = i_\xi$, on aura montré que X' satisfait 2.10. Pour le démontrer, il suffit de montrer que $S(a, b, c) = 0$ pour un certain (donc, par homogénéité, pour tout) $1 + 2e$-uplet a, b, c de X. Soit $a = \min(X)$ et on considère les e-uplets consécutifs de $X \sim (a + 1)$. Notre choix de p, précédemment, devrait être tel qu'il existe plus de r^{2^a} de tels e-uplets pour lesquels nous pouvons alors trouver les e-uplets b, c tels que $P_\xi(b) = P_\xi(c)$ pour tout $\xi < 2^a$, comme souhaité.

□

3. Raffinements

Pour la démonstration de notre théorème principal, nous nous sommes appuyés sur divers résultats

de la théorie de la preuve, en particulier sur le deuxième théorème d'incomplétude de Gödel. Il est cependant possible de démontrer notre théorème principal en utilisant uniquement des méthodes de la théorie des modèles. C'est l'approche adoptée dans PARIS [à paraître], où une méthodologie générale de la théorie des modèles (appelée fonctions indicatrices) pour produire de tels résultats est développée.

D'autre part, 1.2 est en fait équivalent, en AP, à un principe de la théorie de la preuve bien connu, et notre preuve a l'avantage de le rendre assez évident. Rappelons, page 849, la définition de $\mathrm{RFN}_{\sum_1}$, l'énoncé de la théorie des nombres exprimant l'affirmation "Pour toutes les assertions ψ de type $\sum_1$, si $\mathrm{AP} \vdash \psi$, alors ψ".

3.1. Théorème. *Un théorème de* AP *indique que* $\mathrm{RFN}_{\sum_1}$ *est équivalent au principe combinatoire de 1.2.*

Preuve. Après la preuve de 1.2, nous avons mentionné que

$$\forall e, r, k, \quad \mathrm{AP} \vdash \exists M (M \underset{*}{\longrightarrow} (k)^e_r).$$

Ce fait, dont nous avons indiqué la vérification, est lui-même un théorème de AP. Une application de $\mathrm{RFN}_{\sum_1}$ donne 1.2.

Supposons 1.2 et démontrons $\mathrm{RFN}_{\sum_1}$. Soit ψ une assertion $\sum_1$. Nous démontrons que si $\neg\psi$ alors $\mathrm{Con}(\mathrm{AP} + \neg\psi)$. La preuve de 2.5 montre que si ψ est faux dans ω, alors $\mathrm{Con}(T + \neg\psi)$, en utilisant 1.2. Mais la preuve de 2.2 montre que $\mathrm{Con}(T + \neg\psi)$ implique $\mathrm{Con}(\mathrm{AP} + \neg\psi)$.

Pour notre résultat final, définissons une fonction récursive f par

$$f(e) = \text{ le plus petit } M \text{ tel que } M \underset{*}{\longrightarrow} (e+1)^e_e.$$

3.2. Théorème. *Si g est une (description d'une) fonction récursive, et si* AP $\vdash$ *"g est totale", alors pour tout e suffisamment grand, $f(e) > g(e)$.*

Preuve. Soit S un sous-ensemble fini de T et soient $c_0, \ldots, c_{k-1}$ les constantes apparaissant dans S. Comme le montre la preuve de 2.5 (en particulier celle de 2.11), on peut interpréter ces constantes de manière à faire de ω un modèle de S. En examinant cette preuve, on peut voir que pour tout e suffisamment grand, on peut en fait interpréter $c_0, \ldots, c_{k-1}$ en utilisant les membres de l'intervalle $(e, f(e))$. Si $g(e) \geq f(e)$ pour une infinité de e, ce qui précède montrerait la cohérence de T plus les axiomes suivants en fonction d'une nouvelle constante e :

$$e < c_0 \; ; \qquad \neg\exists x \leq c_i (g(e) \simeq x) \quad \text{pour tout i} \leq \omega.$$

Par la preuve de 2.2, nous obtenons la cohérence de AP+$\exists e$ ($g(e)$ n'est pas défini).

Nous tenons à remercier l'éditeur de nous avoir presque forcés à écrire ce chapitre, de l'avoir tapé lui-même, et d'avoir apporté quelques modifications mineures, à condition qu'il assume la responsabilité de toutes les erreurs d'impression.

Références

KIRBY, L., PARIS, J. [to appear] Initial segments of models of Peano's Axioms, in : *Proceedings of the Bierutowice Conference 1976* (Springer, Berlin) to appear.

PARIS, J. [to appear] Independence results for Peano arithmetic using inner models, to appear.