

Cette traduction de l'article ici <https://arxiv.org/pdf/0807.0090> (noté comme ayant été mis à jour en date du 14 octobre 2025) a été effectuée en utilisant l'outil *Google traduction* en ligne.

---

## Une preuve de l’hypothèse de Riemann

Xian-Jin Li

14 octobre 2025

**Résumé :** Dans cet article, on étudie les traces d’un opérateur intégral sur deux sous-espaces orthogonaux d’un espace  $L^2$ . On montre que l’une des deux traces est nulle. De plus, on prouve que la trace de l’opérateur sur le second sous-espace est non négative. Par conséquent, l’opérateur a une trace non négative sur l’espace  $L^2$ . Ceci implique la positivité du critère de Li. D’après le critère de Li, tous les zéros non triviaux de la fonction zêta de Riemann se trouvent sur la droite critique.

## 1 Introduction

La fonction zêta de Riemann  $\zeta$  est définie par :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

pour  $\Re s > 1$ . Elle se prolonge en une fonction analytique sur tout le plan complexe, à l’exception de son pôle simple en  $s = 1$ . Trivialement,  $\zeta(-2n) = 0$  pour tout entier positif  $n$ . Tous les autres zéros de la fonction zêta sont appelés ses zéros non triviaux.

Dans le cadre de ses recherches sur la fréquence des nombres premiers, B. Riemann a conjecturé en 1859 que tous les zéros non triviaux de  $\zeta(s)$  ont une partie réelle égale à  $1/2$ .

En 1896, Hadamard et de la Vallée-Poussin ont démontré indépendamment que  $\zeta(s)$  n’a pas de zéros sur la droite  $\Re s = 1$ . En 1914, Hardy a été le premier à montrer que la fonction zêta possède une infinité de zéros sur la droite  $\Re s = 1/2$ . En 1942, Selberg a démontré qu’une proportion positive des zéros de la fonction zêta se situe sur la droite  $\Re s = 1/2$ . En 1974, Levinson a obtenu que plus d’un tiers des zéros se trouvent sur la droite  $\Re s = 1/2$ . En 1989, Conrey a constaté que plus des deux cinquièmes des zéros se trouvent sur la droite critique. Le record actuel est d’au moins 41,28 % des zéros situés sur la droite critique, obtenu par Feng [10] en 2012. Voir Bombieri [1] pour un historique détaillé de l’hypothèse de Riemann.

Dans cet article, on suit l’approche de Connes [6, 7] utilisant les formules de trace. L’idée principale de la démonstration est la suivante : d’après les théorèmes 1.3 et 1.4, on sait que  $\text{trace}_{L^2(C_S)}(T_h) \geq 0$ ,

un résultat nouveau et fondamental de cet article. L'objectif est de montrer que  $\Delta(h) \geq 0$ ; voir [23]. D'après le théorème 1.1,

$$\text{trace}_{L^2(C_S)}(T_h) = \Delta(h) - \widehat{h}(0) - \widehat{h}(1).$$

Pour démontrer que  $\Delta(h) \geq 0$ , il suffit de choisir  $h$  tel que  $\widehat{h}(0) = \widehat{h}(1) = 0$ . Pour chaque coefficient de Li  $\lambda_n$ , on trouve des fonctions  $h_{n,\epsilon}$  par le théorème 1.2, satisfaisant  $\widehat{h}_{n,\epsilon}(0) = \widehat{h}_{n,\epsilon}(1) = 0$  et

$$0 \leq \text{trace}_{L^2(C_S)}(T_{h_{n,\epsilon}}) = \Delta(h_{n,\epsilon}) \rightarrow 2\lambda_n$$

lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ . Ceci implique que  $\lambda_n \geq 0$  pour tout  $n$ , et donc l'hypothèse de Riemann est vraie d'après le critère de Li.

Décrivons maintenant les résultats obtenus dans cet article.

Soit  $\mathbb{Q}$  le corps des nombres rationnels et  $\mathbb{Q}_p$  le complété  $p$ -adique de  $\mathbb{Q}$ . Ici,  $p$  désigne un nombre premier. Pour tout  $\xi \in \mathbb{Q}_p$ , il existe  $a_j \in \{0, 1, \dots, p-1\}$  tels que

$$\xi = \sum_{j=m}^{\infty} a_j p^j$$

pour un entier  $m$  donné, on note :  $\{\xi\}_p = \sum_{m \leq j \leq -1} a_j p^j$ . Alors,  $\psi_p(\xi) = \exp(2\pi i \{\xi\}_p)$  définit un caractère sur  $\mathbb{Q}_p$ ; voir [21, p. 309].

On note  $dx$  la mesure de Lebesgue ordinaire sur la droite réelle. Pour tout nombre premier rationnel  $p$ ,  $dx_p$  est une mesure de Haar sur le groupe additif  $\mathbb{Q}_p$  des nombres  $p$ -adiques selon laquelle l'anneau des entiers  $p$ -adiques  $\{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq 1\}$  est de mesure 1. Voir [21, p. 310] pour plus de détails.

La transformée de Fourier de  $f \in L^2(\mathbb{R})$  est :

$$\mathfrak{F}f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i x t} dt,$$

et la transformée de Fourier de  $f_p \in L^2(\mathbb{Q}_p)$  est définie par :

$$\mathfrak{F}_p f_p(\beta) = \int_{\mathbb{Q}_p} f_p(\alpha) \psi_p(\alpha \beta) d\alpha;$$

voir [21, Théorème 2.2.2, p. 310].

Soit  $S' = \{\text{tous les nombres premiers } p \leq \mu_\epsilon\}$  pour un grand nombre  $\mu_\epsilon > 0$  donné par (3.12),  $S = S' \cup \{\infty\}$ ,  $\psi_S = \prod_{p \in S} \psi_p$ , et  $\mathbb{A}_S = \mathbb{R} \times \prod_{p \in S'} \mathbb{Q}_p$ . Pour  $f = \prod_{p \in S} f_p \in L^2(\mathbb{A}_S)$ , on définit

$$\mathfrak{F}_S f(\beta) = \int_{\mathbb{A}_S} f(\alpha) \psi_S(\alpha \beta) d\alpha.$$

On note  $O_S^* = \{\xi \in \mathbb{Q} : |\xi|_p = 1 \text{ pour tout } p \notin S\}$  et  $C_S = J_S / O_S^*$ . Remarquons que  $|\xi|_S = \prod_{p \in S} |\xi|_p = 1$  pour  $\xi \in O_S^*$ . Soit  $d^\times x_\infty = \frac{dx_\infty}{|x_\infty|}$  la mesure multiplicative sur  $\mathbb{R}^\times$

et  $d^\times x_p = \frac{1}{1-p^{-1}} \frac{dx_p}{|x_p|_p}$  la mesure multiplicative sur  $\mathbb{Q}_p^\times$ . Alors,  $O_p^* = \{x_p \in \mathbb{Q}_p^\times : |x_p| = 1\}$  a la mesure 1 selon la mesure  $d^\times x_p$ . De plus,  $d^\times x = \prod_{p \in S} d^\times x_p$  est la mesure multiplicative sur  $J_S = \mathbb{R}^\times \times \prod_{p \in S'} \mathbb{Q}_p^\times$ .

Pour  $X_S = \mathbb{A}_S / O_S^*$ , soit  $L^2(X_S)$ , comme dans [6, (5), p. 54], l'espace de Hilbert qui est le complété de l'espace de Schwartz-Bruhat  $S(\mathbb{A}_S)$  [5, 24] pour le produit scalaire donné par :

$$\langle f, g \rangle_{L^2(X_S)} = \int_{C_S} E_S(f)(x) \overline{E_S(g)(x)} d^\times x$$

pour  $f, g \in S(\mathbb{A}_S)$ , où  $E_S(f)(x) = \sqrt{|x|} \sum_{\xi \in O_S^*} f(\xi x)$  avec  $|x| := |x|_S$ .

Pour un nombre  $\Lambda > 0$  fixé, soit  $Q_\Lambda$  le sous-espace des fonctions  $f$  de  $L^2(X_S)$  telles que  $\mathfrak{F}_S f(x) = 0$  pour  $|x| < \Lambda$ , et  $Q_\Lambda^\perp$  le complément orthogonal de  $Q_\Lambda$  dans  $L^2(X_S)$ . Alors :

$$L^2(X_S) = Q_\Lambda^\perp \oplus Q_\Lambda;$$

voir [6, Lemme 1 b), p. 54].

D'après [6, Lemme 1 b), p. 54],  $\mathfrak{F}_S$  est un opérateur unitaire sur l'espace de Hilbert  $L^2(X_S)$ . Ainsi, d'après le lemme 2.7 et la définition de l'espace de Hilbert  $L^2(X_S)$ , on a

$$L^2(C_S) = E_S(L^2(X_S)) = E_S(Q_\Lambda^\perp) \oplus E_S(Q_\Lambda).$$

Soit

$$V_S(h)F(x) = \int_{C_S} h(x/\lambda) \sqrt{|x/\lambda|} F(\lambda) d^\times \lambda$$

pour  $F \in L^2(C_S)$ , où

$$h(x) = \int_0^\infty g(xt)g(t) dt$$

avec  $g(u) = |u|^{-1} g_{n,\epsilon}(|u|^{-1})$  et  $g_{n,\epsilon}$  étant donnés comme dans le théorème 1.2. Également, pour  $x \in C_S$  ou  $J_S$ , on définit  $g(x) := g(|x|)$ .

Soit

$$T_h = V_S(h) (S_\Lambda - E_S \mathfrak{F}_S^t P_\Lambda \mathfrak{F}_S E_S^{-1}),$$

où  $P_\Lambda(x) = 1$  si  $|x| < \Lambda$  et 0 si  $|x| \geq \Lambda$  et  $S_\Lambda(x) = 1$  si  $|x| > \Lambda^{-1}$  et 0 si  $|x| \leq \Lambda^{-1}$ .

D'abord, on a le théorème suivant bien connu.

**Théorème 1.1 :** ([16, (19), p. 549] et [14, Lemmes 3.13–3.14 et Théorème 3.16]). *L'opérateur  $T_h$  est un opérateur intégral de Hilbert-Schmidt de classe trace sur  $L^2(C_S)$  et*

$$\text{trace}_{L^2(C_S)}(T_h) = \Delta(h) - \widehat{h}(0) - \widehat{h}(1),$$

où  $\widehat{h}(s) = \int_0^\infty h(t)t^{s-1} dt$  est la transformée de Mellin de  $h$  et

$$\Delta(h) = \sum_{\rho} \widehat{h}(\rho).$$

La somme ci-dessus sur  $\rho$  parcourt tous les zéros complexes de  $\zeta(s)$ , avec un zéro de multiplicité  $m$  apparaissant  $m$  fois, et s'entend comme :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{|\Im(\rho)| \leq T} \widehat{h}(\rho).$$

Nous préciserons nos choix particuliers pour  $h$  dans le théorème suivant.

**Théorème 1.2 :** *Soit  $n = 1, 2, 3, \dots$  et*

$$\lambda_n = \sum_{\rho} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{1}{\rho} \right)^n \right],$$

*où la somme porte sur tous les zéros non triviaux de  $\zeta(s)$  avec  $\rho$  et  $1 - \rho$  appariés. Pour tout entier  $n$ , il existe une famille de fonctions lisses à valeurs réelles  $g_{n,\epsilon}(t)$  définie par (3.8) sur  $(0, \infty)$  telles que  $\widehat{g}_{n,\epsilon}(0) = 0$  et  $g_{n,\epsilon}(t) = 0$  pour  $t \notin (\mu_{\epsilon}^{-1}, (1 - \epsilon)^{-1})$  avec  $\mu_{\epsilon} = (1 + \epsilon)/\epsilon^2$  et telles que*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \Delta(h_{n,\epsilon}) = 2\lambda_n$$

*où  $h_{n,\epsilon}(x) = \int_0^{\infty} g_{n,\epsilon}(xy)g_{n,\epsilon}(y) dy$ . En particulier,  $\widehat{h}_{n,\epsilon}(0) = \widehat{h}_{n,\epsilon}(1) = 0$ .*

Ensuite, on calcule les traces de  $T_h$  sur  $E_S(Q_{\Lambda}^{\perp})$  et  $E_S(Q_{\Lambda})$  respectivement et on en déduit les deux théorèmes suivants.

**Théorème 1.3 :** *On a*

$$\text{trace}_{E_S(Q_{\Lambda}^{\perp})}(T_h) = 0.$$

**Théorème 1.4 :** *On a aussi*

$$\text{trace}_{E_S(Q_{\Lambda})}(T_h) \geq 0.$$

Par les théorèmes 1.1–1.4,

$$\Delta(h_{n,\epsilon}) = \text{trace}_{E_S(Q_{\Lambda}^{\perp})}(T_h) + \text{trace}_{E_S(Q_{\Lambda})}(T_h) \geq 0.$$

Cette inégalité implique le théorème principal suivant.

**Théorème 1.5 :** *Tous les zéros non triviaux de la fonction zêta de Riemann  $\zeta(s)$  se trouvent sur la droite  $\Re s = 1/2$ .*

## 2 Résultats préliminaires

Soit  $\mathbb{N}_S$  l'ensemble constitué de 1 et de tous les entiers positifs produits de puissances de nombres premiers rationnels dans  $S$ ,  $O_p^* = \{x_p \in \mathbb{Q}_p : |x_p|_p = 1\}$ , et

$$I_S = \mathbb{R}_+ \times \prod_{p \in S'} O_p^*. \quad (2.1)$$

**Lemme 2.1 :** (cf. [21, Théorème 4.3.2, (1), p. 337])  $I_S$  est un domaine fondamental pour l'action de  $O_S^*$  sur  $J_S$  et  $J_S = \bigcup_{\xi \in O_S^*} \xi I_S$  est une union disjointe.

*Preuve :* Tout  $\alpha \in J_S$  peut s'écrire sous la forme :  $\alpha = t\mathbf{b}$  avec  $t = |\alpha|_S \in \mathbb{R}_+$  et  $\mathbf{b} = \alpha t^{-1} \in J_S^1$ , où  $t^{-1}$  désigne également l'idèle  $(t^{-1}, 1, \dots, 1)$ . Puisque  $|\xi|_S = 1$  pour  $\xi \in O_S^*$ , si  $\alpha_1, \alpha_2 \in J_S$  avec  $|\alpha_1|_S \neq |\alpha_2|_S$ , alors l'intersection de  $\alpha_1 O_S^*$  et  $\alpha_2 O_S^*$  est vide. Par conséquent

$$C_S = \mathbb{R}_+ \times (J_S^1 / O_S^*).$$

Puisqu'on ne considère ici que le corps  $\mathbb{Q}$ , pour tout  $\mathbf{b} \in J_S^1$ , il existe des éléments uniques  $\xi \in O_S^*$  et  $\mathbf{b}_1 \in \{1\} \times \prod_{p \in S'} O_p^*$  tels que  $\mathbf{b} = \xi \mathbf{b}_1$ . De plus, si  $\mathbf{b}_1$  et  $\mathbf{b}_2$  sont des éléments distincts de  $\{1\} \times \prod_{p \in S'} O_p^*$ , alors l'intersection de  $\mathbf{b}_1 O_S^*$  et  $\mathbf{b}_2 O_S^*$  est nécessairement vide. Sinon, on aurait  $\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2^{-1} \in O_S^*$ . Alors  $\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2^{-1} \in \mathbb{Q}^*$  et  $|\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2^{-1}|_p = 1$  pour tout  $p \notin S$ . Puisque  $\mathbf{b}_1$  et  $\mathbf{b}_2$  sont des éléments de  $\prod_{p \in S'} O_p^*$ , on a  $|\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2^{-1}|_p = 1$  pour tout  $p \in S'$ . Donc  $\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2^{-1} = 1$ . Autrement dit,  $\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2$ .

Par conséquent,

$$J_S^1 / O_S^* \cong \prod_{p \in S'} O_p^*.$$

Ainsi

$$C_S \cong \mathbb{R}_+ \times \prod_{p \in S'} O_p^*.$$

On a également obtenu la décomposition  $J_S = \bigcup_{\xi \in O_S^*} \xi I_S$ , une union disjointe.

Ceci achève la démonstration du lemme. □

**Lemme 2.2 :** Pour une fonction lisse à support compact  $g$  sur  $(0, \infty)$ , on peut écrire :

$$\mathfrak{F}_S g(t) = 2 \sum_{0 < \gamma \in O_S^*} \varpi(\gamma) \int_0^\infty g(\lambda) \cos(2\pi \lambda |t| |\gamma|) d\lambda$$

avec

$$\varpi(\gamma) = \prod_{p \in S'} \begin{cases} 1 - p^{-1} & \text{si } |\gamma|_p \leq 1, \\ -p^{-1} & \text{si } |\gamma|_p = p, \\ 0 & \text{si } |\gamma|_p > p. \end{cases}$$

*Preuve :* Puisque

$$\mathfrak{F}_S g(t) = \int_{\mathbb{A}_S} g(|\lambda|) \Psi_S(-\lambda t) d\lambda,$$

en changeant les variables  $\lambda \rightarrow \lambda(|t|, 1, \dots, 1)/t$ , on peut écrire

$$\mathfrak{F}_S g(t) = \int_{\mathbb{A}_S} g(|\lambda|) \Psi_S(-\lambda(|t|, 1, \dots, 1)) d\lambda = \sum_{\gamma \in O_S^*} \int_{\gamma^{-1} I_S} g(|\lambda|) \Psi_S(-\lambda(|t|, 1, \dots, 1)) d\lambda.$$

Puisque  $|\gamma|_S = 1$ , en changeant les variables  $\lambda \rightarrow \gamma \lambda$ , on obtient

$$\mathfrak{F}_S g(t) = \sum_{\gamma \in O_S^*} \int_{I_S} g(|\lambda|) \Psi_S(-\lambda \gamma(|t|, 1, \dots, 1)) d\lambda.$$

Pour tout nombre premier  $p \in S$ , on peut écrire

$$\int_{O_p^*} g(|\lambda|) \Psi_S(-\lambda \gamma(|t|, 1, \dots, 1)) d\lambda_p = g(|\lambda|) \Psi_{S-\{p\}}(-\lambda_{S-\{p\}} \gamma(|t|, 1, \dots, 1)) \int_{O_p^*} \psi_p(-\lambda_p \gamma) d\lambda_p.$$

Par des calculs,

$$\int_{O_p^*} \psi_p(-\lambda_p \gamma) d\lambda_p = \begin{cases} 1 - p^{-1} & \text{si } |\gamma|_p \leq 1, \\ -p^{-1} & \text{si } |\gamma|_p = p, \\ 0 & \text{si } |\gamma|_p > p. \end{cases}$$

Par conséquent, on a obtenu que

$$\mathfrak{F}_S g(t) = 2 \sum_{0 < \gamma \in O_S^*} \varpi(\gamma) \int_0^\infty g(\lambda) \cos(2\pi \lambda |t| \gamma) d\lambda. \quad (2.2)$$

Ceci complète la preuve du lemme.  $\square$

La fonction de Möbius  $\mu(n)$  est définie par  $\mu(1) = 1$ ,  $\mu(n) = (-1)^k$  si  $n$  est le produit de  $k$  nombres premiers distincts, et  $\mu(n) = 0$  si  $p^2 \mid n$  pour au moins un nombre premier  $p$ .

**Lemme 2.3 :** *On peut écrire*

$$\mathfrak{F}_S g(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} t^{-s} \widehat{\mathfrak{F}g}(s) \prod_{p \in S'} \frac{1 - p^{s-1}}{1 - p^{-s}} ds \quad (2.3)$$

pour  $c > 0$ , où  $\widehat{\mathfrak{F}g}(s) = 2^{1-s} \pi^{-s} \widehat{g}(1-s) \Gamma(s) \cos \frac{\pi s}{2}$ . On a aussi la formule de Plancherel

$$\int_0^\infty \mathfrak{F}_S f(t) \overline{\mathfrak{F}_S g(t)} dt = \int_0^\infty f(t) \overline{g(t)} dt.$$

*Preuve :* Par le lemme 2.2,

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_S g(t) &= \sum_{k, l \in \mathbb{N}_S, (k, l)=1} \frac{\mu(k)}{k} \prod_{p \nmid k} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \mathfrak{F}g\left(\frac{l|t|}{k}\right) \\ &= \sum_{k, l \in \mathbb{N}_S, (k, l)=1} \frac{\mu(k)}{k} \sum_{k_1 \in \mathbb{N}_S, (k_1, k)=1} \frac{\mu(k_1)}{k_1} \mathfrak{F}g\left(\frac{k_1 l |t|}{k_1 k}\right) \\ &= \sum_{k, l \in \mathbb{N}_S, (k, l)=1} \sum_{k_1 \in \mathbb{N}_S, (k_1, k)=1} \frac{\mu(k_1 k)}{k_1 k} \mathfrak{F}g\left(\frac{k_1 l |t|}{k_1 k}\right) = \sum_{k, l \in \mathbb{N}_S} \frac{\mu(k)}{k} \mathfrak{F}g\left(\frac{l|t|}{k}\right). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Par conséquent, pour  $t > 0$ , on a

$$\mathfrak{F}_S g(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} t^{-s} \widehat{\mathfrak{F}g}(s) \prod_{p \in S'} \frac{1 - p^{s-1}}{1 - p^{-s}} ds$$

pour  $c > 0$ .

Par le théorème de Plancherel

$$\int_0^\infty |\mathfrak{F}_s g(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^\infty |\widehat{\mathfrak{F}_s g}(s)|^2 du = \int_{-\infty}^\infty |\widehat{\mathfrak{F}}g(s)|^2 du = \int_0^\infty |\mathfrak{F}g(x)|^2 dx = \int_0^\infty |g(t)|^2 dt,$$

où  $s = 1/2 + 2\pi iu$ . Il s'ensuit que

$$\int_0^\infty \mathfrak{F}_s f(t) \overline{\mathfrak{F}_s g(t)} dt = \int_0^\infty f(t) \overline{g(t)} dt.$$

Par [22, Exemple 10, p. 162],

$$\int_0^\infty t^{s-1} \cos t dt = \Gamma(s) \cos \frac{\pi s}{2}$$

pour  $0 < \Re s < 1$ . Puisque  $g(u) = 0$  for  $u \notin [1 - \epsilon, \mu_\epsilon]$ , on a pour  $0 < \Re s < 1$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty t^{s-1} dt \int_0^\infty g(u) \cos(2\pi ut) du &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{1-\epsilon}^{\mu_\epsilon} g(u) du \int_0^N t^{s-1} \cos(2\pi ut) dt \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} (2\pi)^{-s} \int_0^\infty g(u) u^{-s} du \int_0^{2\pi uN} t^{s-1} \cos t dt \\ &= (2\pi)^{-s} \widehat{g}(1-s) \Gamma(s) \cos \frac{\pi s}{2} - \lim_{N \rightarrow \infty} (2\pi)^{-s} \int_{1-\epsilon}^{\mu_\epsilon} g(u) u^{-s} du \int_{2\pi uN}^\infty t^{s-1} \cos t dt. \end{aligned}$$

En intégrant par parties, pour  $0 < \Re s < 1$ , on a

$$\int_{2\pi uN}^\infty t^{s-1} \cos t dt = -(2\pi uN)^{s-1} \sin(2\pi uN) - (s-1) \int_{2\pi uN}^\infty t^{s-2} \sin t dt \rightarrow 0$$

uniformément par rapport à  $u \in [1 - \epsilon, \mu_\epsilon]$  lorsque  $N \rightarrow \infty$ .

Il s'ensuit que

$$\int_0^\infty t^{s-1} dt \int_0^\infty g(u) \cos(2\pi ut) du = (2\pi)^{-s} \widehat{g}(1-s) \Gamma(s) \cos \frac{\pi s}{2}$$

pour  $0 < \Re s < 1$ . C'est-à-dire

$$\widehat{\mathfrak{F}}g(s) = 2^{1-s} \pi^{-s} \widehat{g}(1-s) \Gamma(s) \cos \frac{\pi s}{2}$$

pour  $0 < \Re s < 1$ . On étend  $\widehat{\mathfrak{F}}g(s)$  à  $\Re s \geq 1$  par prolongement analytique.

Ceci complète la preuve du lemme. □

**Lemme 2.4 :** ([18, Théorème VI.24, p. 211]) Si  $A$  est un opérateur linéaire borné de classe trace sur un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  et si  $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$  est une base orthonormée quelconque, alors :

$$\text{trace}_{\mathcal{H}}(A) = \sum_{n=1}^\infty \langle A\varphi_n, \varphi_n \rangle_{\mathcal{H}}$$

où la somme du membre de droite converge absolument et est indépendante du choix de la base.

**Lemme 2.5 :** ([4, Corollaire 3.2, p. 237]) Soit  $\mu$  une mesure de Borel  $\sigma$ -finie sur un espace dénombrable de second ordre  $M$ , et soit  $A$  un opérateur intégral de Hilbert-Schmidt de classe trace sur  $L^2(M, d\mu)$ . Si le noyau  $k(x, y)$  est continu en  $(x, x)$  pour presque tout  $x$ , alors

$$\text{trace}_{L^2(M, d\mu)}(A) = \int_M k(x, x) d\mu(x).$$

**Lemme 2.6 :** [18, Théorème VI.19(b)(a), p. 207 et théorème VI.25(a), p. 212]. Soient  $A$  et  $B$  deux opérateurs linéaires bornés sur un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Si  $A$  est de classe trace sur  $\mathcal{H}$ , alors  $AB$  et  $BA$  le sont également, avec  $\text{trace}(AB) = \text{trace}(BA)$ . De plus,  $\text{trace}(A) = \text{trace}(A^t)$ .

**Lemme 2.7 :** [8, Proposition 2.30, p. 359] La définition suivante définit une application  $E_S$  à image dense de  $S(\mathbb{A}_S)$  dans  $L^2(C_S)$  :

$$E_S(f)(x) = \sqrt{|x|} \sum_{\xi \in O_S^*} f(\xi x), \quad x \in C_S.$$

### 3 Démonstration du théorème 1.2

Le résultat suivant est essentiellement contenu dans E. Bombieri [2, ligne 17, p. 192–ligne 12, p. 193].

Pour les besoins techniques de la démonstration du théorème 1.2, on reprend ici son argumentation.

**Lemme 3.1 :** Pour tout entier positif  $n$  et un  $\epsilon > 0$  suffisamment petit, il existe une fonction lisse  $\ell_{n,\epsilon}(x)$  sur  $(0, \infty)$  telle que  $\ell_{n,\epsilon}(x) = 0$  pour  $x \notin (\frac{\epsilon}{1+\epsilon}, \frac{1}{1-\epsilon})$  et telle que :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \sum_{\rho} \widehat{\ell}_{n,\epsilon}(\rho) \widehat{\ell}_{n,\epsilon}(1 - \rho) = 2\lambda_n.$$

*Preuve :* Soit

$$P_n(t) = \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} \frac{t^{j-1}}{(j-1)!}$$

et

$$g_n(x) = \begin{cases} P_n(\log x) & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

pour  $n = 1, 2, \dots$

Pour  $0 < \epsilon < 1$ , on dénote par

$$p_{n,\epsilon}(x) = \begin{cases} g_n(x) & \text{si } x > \epsilon, \\ 0 & \text{si } x \leq \epsilon \end{cases}$$

et

$$\tau(x) = \begin{cases} \frac{c_0}{\epsilon} \exp\left(-1/[1 - (\frac{x-1}{\epsilon})^2]\right) & \text{si } |x - 1| < \epsilon, \\ 0 & \text{si } |x - 1| \geq \epsilon \end{cases}$$

avec  $c_0$  défini par l'identité  $\int_0^\infty \tau(x) dx = 1$ .

On définit :

$$\ell_{n,\epsilon}(x) = \int_0^\infty p_{n,\epsilon}(xy) \tau(y) dy.$$

Alors  $\ell_{n,\epsilon}(x)$  est une fonction lisse sur  $\mathbb{R}$  dont le support est inclus dans l'intervalle :  $(\frac{\epsilon}{1+\epsilon}, \frac{1}{1-\epsilon})$ .  
Puisque

$$\widehat{\ell}_{n,\epsilon}(1-s) = \widehat{p}_{n,\epsilon}(1-s) \widehat{\tau}(s), \quad (3.1)$$

on a

$$\widehat{\ell}_{n,\epsilon}(1-s) \widehat{\ell}_{n,\epsilon}(s) - \widehat{p}_{n,\epsilon}(1-s) \widehat{p}_{n,\epsilon}(s) = \widehat{p}_{n,\epsilon}(1-s) \widehat{p}_{n,\epsilon}(s) \{ \widehat{\tau}(s) \widehat{\tau}(1-s) - 1 \}. \quad (3.2)$$

Par intégration par parties  $n-1$  fois de la seconde intégrale suivante, on obtient :

$$\begin{aligned} \widehat{p}_{n,\epsilon}(s) &= \int_0^1 g_n(x) x^{s-1} - \int_0^\epsilon g_n(x) x^{s-1} dx \\ &= 1 - \left(1 - \frac{1}{s}\right)^n - P_n(\log \epsilon) \frac{\epsilon^s}{s} + P'_n(\log \epsilon) \frac{\epsilon^s}{s^2} + \cdots + (-1)^{n-1} P_n^{(n-2)}(\log \epsilon) \frac{\epsilon^s}{s^{n-1}} + (-1)^n n \frac{\epsilon^s}{s^n} \\ &= O\left(\frac{1}{|s|} + |\log \epsilon|^{n-1} \frac{\epsilon^{\Re s}}{|s|}\right) \end{aligned} \quad (3.3)$$

pour  $0 < \Re s < 1$  et  $|s| \geq 1$ .

Pour  $0 < \Re s < 1$ ,

$$1 - \widehat{\tau}(s) = c_0 \int_{-1}^1 e^{t^{\frac{1}{2-1}}} [1 - (1+t\epsilon)^{s-1}] dt \leq c_0 \int_{-1}^1 e^{t^{\frac{1}{2-1}}} \left(1 + \frac{1}{1-\epsilon}\right) dt \ll 1. \quad (3.4)$$

Par (3.3) et (3.4),

$$\begin{aligned} &\sum_{\rho} \widehat{p}_{n,\epsilon}(1-\rho) \widehat{p}_{n,\epsilon}(\rho) (\{\widehat{\tau}(\rho)(\widehat{\tau}(1-\rho) - 1) + (\widehat{\tau}(\rho) - 1)\}) \\ &\ll \sum_{\rho} \left(\frac{1}{|\rho|} + |\log \epsilon|^{n-1} \frac{\epsilon^{\Re \rho}}{|\rho|}\right) \left(\frac{1}{|1-\rho|} + |\log \epsilon|^{n-1} \frac{\epsilon^{1-\Re \rho}}{|1-\rho|}\right) \\ &\quad \times \max \left( \left| \int_{-1}^1 e^{t^{\frac{1}{2-1}}} [1 - (1+t\epsilon)^{-\rho}] dt \right|, \left| \int_{-1}^1 e^{t^{\frac{1}{2-1}}} [1 - (1+t\epsilon)^{\rho-1}] dt \right| \right). \end{aligned}$$

De même que dans la preuve de [3, (3.9), p. 284], par la région sans zéro de De La Vallée-Poussin, on a

$$\frac{c}{\log(|\rho| + 2)} \leq \Re(\rho) \leq 1 - \frac{c}{\log(|\rho| + 2)}$$

pour une certaine constante  $c > 0$ . Ainsi, on a :

$$\frac{\epsilon^{\Re(\rho)}}{\sqrt{|\rho|}} \leq \max_{\rho} \epsilon^{c/\log(|\rho|+2)} |\rho|^{-1/2} = O\left(e^{-c' \sqrt{\log(1/\epsilon)}}\right) \quad (3.5)$$

pour une certaine constante  $c' > 0$ .

De l'équation (3.5), on déduit que

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{|\rho|} + |\log \epsilon|^{n-1} \frac{\epsilon^{\Re \rho}}{|\rho|} \right) \left( \frac{1}{|1-\rho|} + |\log \epsilon|^{n-1} \frac{\epsilon^{1-\Re \rho}}{|1-\rho|} \right) \\ = \frac{1}{|\rho(1-\rho)|} \{1 + |\log \epsilon|^{n-1} (\epsilon^{\Re \rho} + \epsilon^{1-\Re \rho}) + |\log \epsilon|^{2n-2} \epsilon\} \ll |\rho|^{-3/2}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \sum_{\rho} \widehat{p}_{n,\epsilon}(1-\rho) \widehat{p}_{n,\epsilon}(\rho) \{ \widehat{\tau}(\rho)(\widehat{\tau}(1-\rho) - 1) + (\widehat{\tau}(\rho) - 1) \} \\ \ll \sum_{\rho} \frac{1}{|\rho|^{\frac{3}{2}}} \max \left( \left| \int_{-1}^1 e^{i\frac{1}{2-1}} [1 - (1+t\epsilon)^{-\rho}] dt \right|, \left| \int_{-1}^1 e^{i\frac{1}{2-1}} [1 - (1+t\epsilon)^{\rho-1}] dt \right| \right), \end{aligned}$$

où le membre de droite converge uniformément par rapport à des valeurs de  $\epsilon$  positives suffisamment petites. On peut donc intervertir l'ordre de calcul de la limite  $\epsilon \rightarrow 0+$  et de la sommation sur les  $\rho$  pour obtenir :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \sum_{\rho} \widehat{p}_{n,\epsilon}(1-\rho) \widehat{p}_{n,\epsilon}(\rho) \{ \widehat{\tau}(\rho)(\widehat{\tau}(1-\rho) - 1) \} = 0.$$

Il découle alors de l'équation 3.2 que :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \sum_{\rho} \widehat{\ell}_{n,\epsilon}(\rho) \widehat{\ell}_{n,\epsilon}(1-\rho) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \sum_{\rho} \widehat{p}_{n,\epsilon}(\rho) \widehat{p}_{n,\epsilon}(1-\rho). \quad (3.6)$$

D'après l'équation 3.3, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \widehat{g}_n(s) \widehat{g}_n(1-s) - \widehat{p}_{n,\epsilon}(s) \widehat{p}_{n,\epsilon}(1-s) \\ = [\widehat{g}_n(s) - \widehat{p}_{n,\epsilon}(s)] \widehat{g}_n(1-s) + \widehat{p}_{n,\epsilon}(s) [\widehat{g}_n(1-s) - \widehat{p}_{n,\epsilon}(1-s)] \\ = O \left( |\log \epsilon|^{n-1} \frac{\epsilon^{\Re s}}{|s|} \right) O \left( \frac{1}{|s-1|} \right) + O \left( \frac{1}{|s|} + |\log \epsilon|^{n-1} \frac{\epsilon^{\Re s}}{|s|} \right) O \left( |\log \epsilon|^{n-1} \frac{\epsilon^{1-\Re s}}{|1-s|} \right) \\ \ll \frac{1}{|s(1-s)|} [|\log \epsilon|^{n-1} \epsilon^{\Re s} + (1 + |\log \epsilon|^{n-1} \epsilon^{\Re s}) |\log \epsilon|^{n-1} \epsilon^{1-\Re s}]. \end{aligned}$$

Il découle des équations (3) et (3.5) que :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \sum_{\rho} [\widehat{g}_n(\rho) \widehat{g}_n(1-\rho) - \widehat{p}_{n,\epsilon}(\rho) \widehat{p}_{n,\epsilon}(1-\rho)] = 0. \quad (3.7)$$

L'identité énoncée découle de l'équation 3.6 et de l'équation 3.8, de l'équation fonctionnelle de  $\zeta(s)$ , et de l'identité :

$$\left[ 1 - \left( 1 - \frac{1}{s} \right)^n \right] \cdot \left[ 1 - \left( 1 - \frac{1}{1-s} \right)^n \right] = \left[ 1 - \left( 1 - \frac{1}{s} \right)^n \right] + \left[ 1 - \left( 1 - \frac{1}{1-s} \right)^n \right].$$

Ceci achève la démonstration du lemme. □

*Preuve du théorème 1.2* : Soit  $a(t) = 1/t(t-1)$  et

$$\alpha(t) = \begin{cases} (a_1 t + a_2) e^{a(t)} & \text{si } 0 < t < 1, \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \text{ ou } 1 \leq t \end{cases}$$

avec  $a_1, a_2$  choisis de telle façon que  $\widehat{\alpha}(1) = 0$  et  $\widehat{\alpha}(0) = 1$ .

Si l'on dénote

$$\vartheta(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \alpha(nt) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha(nt) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha(n2t),$$

par la formule de Poisson

$$\vartheta(t) = \frac{1}{t} \sum_{n \neq 0} \mathfrak{F} \alpha \left( \frac{n}{t} \right) - \frac{1}{t} \sum_{n \neq 0} \mathfrak{F} \alpha \left( \frac{n}{2t} \right).$$

Ceci implique que  $\vartheta(t)$  décroît rapidement lorsque  $t \rightarrow 0, \infty$ . Il s'ensuit que  $\widehat{\vartheta}(s)$  est une fonction entière. Puisque

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = (1 - 2^{1-s}) \zeta(s)$$

pour  $\Re s > 0$ , par extension analytique, on a

$$\widehat{\vartheta}(s) = (1 - 2^{1-s}) \zeta(s) \widehat{\alpha}(s)$$

pour  $s$  complexe.

Soit

$$g_{n,\epsilon}(x) = \ell_{n,\epsilon}(x) - \frac{1}{\widehat{\vartheta}_1(0)} \int_0^\infty \ell_{n,\epsilon}(x/u) \vartheta_1(u) \frac{du}{u} \quad (3.8)$$

et

$$h_{n,\epsilon}(x) = \int_0^\infty g_{n,\epsilon}(xy) g_{n,\epsilon}(y) dy,$$

où

$$\vartheta_1(u) = \begin{cases} \vartheta(u) & \text{si } u > \epsilon, \\ 0 & \text{si } u \leq \epsilon \end{cases}$$

pour  $\epsilon > 0$  suffisamment petit.

Puisque  $\widehat{\vartheta}(0) \neq 0$ , on a  $\widehat{\vartheta}_1(0) \neq 0$  pour  $\epsilon > 0$  suffisamment petit. De plus,  $\widehat{\vartheta}(\rho) = 0$  pour les zéros non triviaux  $\rho$  de  $\zeta(s)$ . Ainsi, on peut écrire

$$\begin{aligned} \widehat{h}_{n,\epsilon}(\rho) &= \widehat{\ell}_{n,\epsilon}(\rho) \left\{ 1 - \frac{1}{\widehat{\vartheta}_1(0)} \left[ \widehat{\vartheta}(\rho) - \int_0^\epsilon \vartheta(x) x^{\rho-1} dx \right] \right\} \widehat{\ell}_{n,\epsilon}(1-\rho) \left\{ 1 - \frac{1}{\widehat{\vartheta}_1(0)} \left[ \widehat{\vartheta}(1-\rho) - \int_0^\epsilon \vartheta(x) x^{-\rho} dx \right] \right\} \\ &= \widehat{\ell}_{n,\epsilon}(\rho) \widehat{\ell}_{n,\epsilon}(1-\rho) \left\{ 1 + \frac{1}{\widehat{\vartheta}_1(0)} \int_0^\epsilon \vartheta(x) x^{\rho-1} dx \right\} \left\{ 1 + \frac{1}{\widehat{\vartheta}_1(0)} \int_0^\epsilon \vartheta(x) x^{-\rho} dx \right\}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \widehat{h}_{n,\epsilon}(\rho) - \widehat{\ell}_{n,\epsilon}(\rho)\widehat{\ell}_{n,\epsilon}(1-\rho) &= \widehat{\ell}_{n,\epsilon}(\rho)\widehat{\ell}_{n,\epsilon}(1-\rho) \frac{1}{\widehat{\vartheta}_1(0)} \left\{ \int_0^\epsilon \vartheta(x)x^{\rho-1} dx \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\epsilon \vartheta(x)x^{-\rho} dx + \frac{1}{\widehat{\vartheta}_1(0)} \int_0^\epsilon \vartheta(x)x^{\rho-1} dx \int_0^\epsilon \vartheta(x)x^{-\rho} dx \right\} \quad (3.9) \end{aligned}$$

Puisque  $x\alpha'(x)$  et sa transformée de Fourier s'annulent en  $x = 0$ , par la sommation de Poisson :

$$x\vartheta'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x \alpha'(nx) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} n 2x \alpha'(n2x) = \frac{1}{x} \sum_{n \neq 0}^{\infty} \mathfrak{F}(u\alpha'(u)) \left(\frac{n}{x}\right) - \frac{1}{x} \sum_{n \neq 0}^{\infty} \mathfrak{F}(u\alpha'(u)) \left(\frac{n}{2x}\right).$$

Ceci implique que  $\vartheta'(x)$  décroît rapidement lorsque  $x \rightarrow 0$ . Puisque  $\vartheta(x)$  décroît également rapidement lorsque  $x \rightarrow 0$ , on a :

$$\max\{|\vartheta(x)|, |\vartheta'(x)|\} \ll |x|^n$$

pour tout entier positif  $n$  lorsque  $x \rightarrow 0+$ . Par intégration par parties,

$$\int_0^\epsilon \vartheta(x)x^{-s} dx = \frac{\vartheta(\epsilon)}{1-s} + \frac{1}{s-1} \int_0^\epsilon \vartheta'(x)x^{1-s} dx < \frac{c\epsilon}{|s|} \quad (3.10)$$

pour  $0 < \Re s < 1$  et  $|s| > 2$ , où  $c$  est une constante absolue indépendante de  $s$ .

D'après les équations 3.1, 3.3 et 3.4, on a :

$$\widehat{\ell}_{n,\epsilon}(s) \ll \frac{1}{|s|} + |\log \epsilon|^{n-1} \frac{\epsilon^{\Re s}}{|s|} \ll \frac{|\log \epsilon|^{n-1}}{|s|} \quad (3.11)$$

pour  $0 < \Re s < 1$ , où la constante implicite ne dépend que de  $n$ .

À partir des équations 3.10, 3.11 et 3.12, on déduit que :

$$\sum_{\rho} \left( \widehat{h}_{n,\epsilon}(\rho) - \widehat{\ell}_{n,\epsilon}(\rho)\widehat{\ell}_{n,\epsilon}(1-\rho) \right) \ll \epsilon |\log \epsilon|^{2n-2} \sum_{\rho} \frac{1}{|\rho|^3} \rightarrow 0$$

lorsque  $\epsilon \rightarrow 0+$ . D'après le lemme 3.1,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \Delta(h_{n,\epsilon}) = 2\lambda_n.$$

Remarquons que  $g_{n,\epsilon}(t) = 0$  pour  $t \notin (\epsilon^2/(1+\epsilon), 1/(1-\epsilon))$  et  $\widehat{g}_{n,\epsilon}(0) = 0$  d'après l'équation 3.9. Ainsi, désormais, on choisit  $\mu_\epsilon$  dans la définition de l'ensemble  $S$  comme un nombre fini fixe suffisamment grand tel que :

$$\mu_\epsilon \geq (1+\epsilon)/\epsilon^2. \quad (3.12)$$

Ceci complète la preuve du théorème 1.2.  $\square$

## 4 Démonstration du théorème 1.3

Pour tout élément  $F$  de  $L^2(C_S)$ , comme  $E_S(S(\mathbb{A}_S))$  est dense dans  $L^2(C_S)$  d'après le lemme 2.7, il existe une suite d'éléments  $f_n \in S(\mathbb{A}_S)$  telle que  $E_S(f_n) \rightarrow F$  dans  $L^2(C_S)$ . Par définition du produit scalaire sur  $L^2(X_S)$ , les  $f_n$  forment une suite de Cauchy dans  $L^2(X_S)$ . Puisque  $L^2(X_S)$  est un espace de Hilbert complet, il existe un unique élément  $f \in L^2(X_S)$  tel que  $f_n \rightarrow f$  dans  $L^2(X_S)$ . Ainsi, on définit  $E_S^{-1}(F) = \{f(\xi x) : \xi \in O_S^*\}$ .

**Lemme 4.1 :** Soit  $g(t) = t^{-1}g_{n,\epsilon}(t^{-1})$ . Alors

$$\text{trace}_{E_S(Q_\Lambda^\perp)}(T_h) = -\text{trace}_{L^2(C_S)} \left( P_\Lambda E_S \mathfrak{F}_S E_S^{-1} P_{\frac{1}{\Lambda}} V_S(h) E_S \mathfrak{F}_S^t E_S^{-1} \right).$$

*Preuve :* Soit  $F_i, i = 1, 2, \dots$  une base orthonormée de  $E_S(Q_\Lambda^\perp)$ . D'après le lemme 2.4 et le théorème 1.1,

$$\text{trace}_{E_S(Q_\Lambda^\perp)}(T_h) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle V_S(h) (S_\Lambda - E_S \mathfrak{F}_S^t P_\Lambda \mathfrak{F}_S E_S^{-1}) F_i, F_i \rangle.$$

Puisque  $F_i \in E_S(Q_\Lambda^\perp)$ , on a  $\mathfrak{F}_S E_S^{-1} F_i(x) = 0$  pour  $|x| > \Lambda$ . Par conséquent, en considérant deux ensembles, on a :

$$P_\Lambda \mathfrak{F}_S E_S^{-1} F_i = \mathfrak{F}_S E_S^{-1} F_i.$$

Par le calcul, on trouve que :

$$E_S \mathfrak{F}_S^t P_\Lambda \mathfrak{F}_S E_S^{-1} F_i = E_S \mathfrak{F}_S^t \mathfrak{F}_S E_S^{-1} F_i = F_i.$$

Ainsi,

$$\text{trace}_{E_S(Q_\Lambda^\perp)}(T_h) = -\sum_{i=1}^{\infty} \langle V_S(h)(1 - S_\Lambda) F_i, F_i \rangle = -\sum_{i=1}^{\infty} \left\langle V_S(h) P_{\frac{1}{\Lambda}} F_i, F_i \right\rangle.$$

Puisque  $E_S \mathfrak{F}_S^t P_\Lambda \mathfrak{F}_S E_S^{-1}$  est la projection de  $L^2(C_S)$  sur  $E_S(Q_\Lambda^\perp)$ , d'après le lemme 2.6

$$\begin{aligned} -\text{trace}_{E_S(Q_\Lambda^\perp)}(T_h) &= \text{trace}_{L^2(C_S)} \left( V_S(h) P_{\frac{1}{\Lambda}} E_S \mathfrak{F}_S^t P_\Lambda \mathfrak{F}_S E_S^{-1} \right) \\ &= \text{trace}_{L^2(C_S)} \left( V_S(h) P_{\frac{1}{\Lambda}} E_S \mathfrak{F}_S^t E_S^{-1} P_\Lambda \cdot E_S \mathfrak{F}_S E_S^{-1} \right) \\ &= \text{trace}_{L^2(C_S)} \left( E_S \mathfrak{F}_S E_S^{-1} \cdot V_S(h) P_{\frac{1}{\Lambda}} E_S \mathfrak{F}_S^t E_S^{-1} P_\Lambda \right) \\ &= \text{trace}_{L^2(C_S)} \left( P_\Lambda E_S \mathfrak{F}_S E_S^{-1} P_{\frac{1}{\Lambda}} V_S(h) E_S \mathfrak{F}_S^t E_S^{-1} \right) \end{aligned}$$

lorsque  $V_S(h)^t = V_S(h)$ .

Ceci complète la preuve du lemme. □

**Lemme 4.2 :** Si l'on dénote  $\Phi(z, y) = \int_{\mathbb{A}_S} g(uz) \Psi_S(-uy) du$ , alors on peut écrire

$$\begin{aligned} P_\Lambda E_S \mathfrak{F}_S E_S^{-1} P_{\frac{1}{\Lambda}} V_S(h) E_S \mathfrak{F}_S^t E_S^{-1} F(x) \\ = P_\Lambda(x) \int_{\mathbb{A}_S, |v| < \frac{1}{\Lambda}} \Psi_S(xv) dv \int_0^\infty g(vz) dz \int_{C_S} \Phi(z, y) \sqrt{|xy|} F(y) d^\times y. \end{aligned}$$

*Preuve* : Soit  $F = E_S(f)$  avec  $f \in S(\mathbb{A}_S)$ . On peut écrire  $E_S \mathfrak{F}_S^t E_S^{-1} F(u) = E_S(\mathfrak{F}_S^t f)(u)$ . Par conséquent,

$$\begin{aligned}
V_S(h) E_S \mathfrak{F}_S^t E_S^{-1} F(v) &= \int_{C_S} h(v/u) \sqrt{|v/u|} E_S(\mathfrak{F}_S^t f)(u) d^\times u \\
&= \int_{C_S} E_S(\mathfrak{F}_S f)(u) \sqrt{|vu|} d^\times u \int_0^\infty g(uz) g(vz) dz \\
&= \int_{C_S, \frac{|v|(1-\epsilon)}{\mu_\epsilon} < |u| < \frac{\mu_\epsilon |v|}{1-\epsilon}} E_S(\mathfrak{F}_S^t f)(u) \sqrt{|vu|} d^\times u \int_{\frac{1-\epsilon}{|v|}}^{\frac{\mu_\epsilon}{|v|}} g(uz) g(vz) dz \\
&= \int_{\frac{1-\epsilon}{|v|}}^{\frac{\mu_\epsilon}{|v|}} g(vz) dz \int_{C_S, \frac{|v|(1-\epsilon)}{\mu_\epsilon} < |u| < \frac{\mu_\epsilon |v|}{1-\epsilon}} E_S(\mathfrak{F}_S^t f)(u) g(uz) \sqrt{|vu|} d^\times u \\
&= \int_0^\infty g(vz) dz \int_{C_S} g(uz) E_S(\mathfrak{F}_S f)(u) \sqrt{|vu|} d^\times u \\
&= \int_0^\infty \sqrt{|v|} g(vz) dz \int_{C_S} g(uz) \left( \sum_{\eta \in O_S^*} \mathfrak{F}_S f(\eta u) \right) |u| d^\times u
\end{aligned}$$

où le changement d'ordre d'intégration entre  $d^\times u$  et  $dz$  est permis car l'intégrale double est absolument intégrable par le choix de  $f$ .

Soit  $\phi(x) = g(|x|)$  si  $x \in I_S$  et  $\phi(x) = 0$  si  $x \in \mathbb{A}_S - I_S$ . Alors  $\phi \in S(\mathbb{A}_S)$ . Pour tout  $x \in J_S$ , d'après le lemme 2.1, il existe exactement un  $\xi \in O_S^*$  tel que  $\xi x \in I_S$ . Ceci implique que

$$g(x) = \sum_{\xi \in O_S^*} \phi(\xi x)$$

pour tout  $x \in C_S$ . De plus, on peut écrire :

$$\mathfrak{F}_S g(t) = \int_{\mathbb{A}_S} g(|\lambda|) \Psi_S(-\lambda t) d\lambda = \sum_{\xi \in O_S^*} \int_{\xi I_S} g(|\lambda|) \Psi_S(-\lambda t) d\lambda.$$

En utilisant les deux identités précédentes, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
&\int_{C_S} g(uz) \left( \sum_{\eta \in O_S^*} \mathfrak{F}_S f(\eta u) \right) |u| d^\times u \\
&= \int_{C_S} \left[ \sum_{\xi \in O_S^*} \phi(\xi uz) \right] \left[ \sum_{\eta \in O_S^*} \mathfrak{F}_S f(\eta u) \right] |u| d^\times u = \int_{C_S} \frac{1}{|z|} \left[ \sum_{\xi \in O_S^*} \mathfrak{F}_S \phi\left(\xi \frac{u}{z}\right) \right] \left[ \sum_{\eta \in O_S^*} f(\eta u) \right] |u| d^\times u \\
&= \int_{C_S} \left[ \int_{\mathbb{A}_S} g(uz) \Psi_S(-uy) du \right] \left[ \sum_{\xi \in O_S^*} f(\xi y) \right] |y| d^\times y = \int_{C_S} \Phi(z, y) F(y) \sqrt{|y|} d^\times y, \quad (4.1)
\end{aligned}$$

où le membre de droite de la seconde égalité est obtenu en utilisant le fait que  $\mathfrak{F}_S$  est unitaire sur  $L^2(X_S)$  ; voir [6, Lemme 1 b), p. 55]. Ainsi, on peut écrire

$$V_S(h) E_S \mathfrak{F}_S^t E_S^{-1} F(v) = \int_0^\infty g(vz) dz \int_{C_S} \Phi(z, y) \sqrt{|v/y|} F(y) |y| d^\times y.$$

Il en découle que

$$\begin{aligned} P_\Lambda E_S \mathfrak{F}_S E_S^{-1} P_{\frac{1}{\Lambda}} V_S(h) E_S \mathfrak{F}_S^t E_S^{-1} F(x) \\ = P_\Lambda(x) \int_{\mathbb{A}_S, |v| < \frac{1}{\Lambda}} \Psi_S(xv) dv \int_0^\infty g(vz) dz \int_{C_S} \Phi(z, y) \sqrt{|xy|} F(y) d^\times y. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Ceci complète la preuve du lemme.  $\square$

**Lemme 4.3 :** *On a*

$$\text{trace}_{E_S(Q_\Lambda^\perp)}(T_h) = - \int_{C_S, |x| < \Lambda} |x| d^\times x \int_{\mathbb{A}_S, |v| < \frac{1}{\Lambda}} \Psi_S(xv) dv \int_0^\infty g(vz) \Phi(z, x) dz.$$

*Preuve :* Puisque  $g(vz) = g(|vz|)$ , en changeant de variables  $v \rightarrow v(|x|, 1, \dots, 1)/x$ , on peut écrire :

$$\int_{\mathbb{A}_S, |v| < \frac{1}{\Lambda}} \Psi_S(xv) dv \int_0^\infty g(vz) \Phi(z, x) dz = \int_{\mathbb{A}_S, |v| < \frac{1}{\Lambda}} \Psi_S(v(|x|, 1, \dots, 1)) dv \int_0^\infty g(vz) \Phi(z, x) dz$$

et

$$\Phi(z, x) = \int_{\mathbb{A}_S} g(vz) \Psi_S(-v(|x|, 1, \dots, 1)) dv = \Phi(z, |x|).$$

Soit  $F = E_S(f)$  avec  $f \in S(\mathbb{A}_S)$ . De même que dans (2.2) et (2.4), par intégration par parties par rapport à  $v$ , on peut écrire

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{A}_S, |v| < \frac{1}{\Lambda}} \Psi_S(|x|, 1, \dots, 1) v dv \int_0^\infty g(vz) dz \int_{C_S} \Phi(z, y) \sqrt{|xy|} F(y) d^\times y \\ = 2 \sum_{k, l \in \mathbb{N}_S} \frac{\mu(k)}{k} \int_0^{\frac{1}{\Lambda}} \cos(2\pi |x| v \frac{l}{k}) dv \int_0^\infty g(vz) dz \int_{C_S} \Phi(z, y) \sqrt{|xy|} F(y) d^\times y \\ = \sum_{k, l \in \mathbb{N}_S} \frac{\mu(k)}{\pi |x| l} \left\{ \sin \left( 2\pi |x| \frac{l}{k\Lambda} \right) \int_0^\infty g \left( \frac{z}{\Lambda} \right) dz - \int_0^{\frac{1}{\Lambda}} \sin \left( 2\pi |x| v \frac{l}{k} \right) dv \int_0^\infty z g'(vz) dz \right\} \\ \times \int_{C_S} \Phi(z, y) \sqrt{|xy|} F(y) d^\times y, \end{aligned} \quad (4.3)$$

où l'ordre de dérivation par rapport à  $v$  et d'intégration par rapport à  $z$  peut être modifié car  $g(vz) = 0$  si  $vz \notin [1 - \epsilon, \mu_\epsilon]$ .

En choisissant  $c = 1/8$  dans (2.3), on obtient :

$$\Phi(z, y) \ll_S |yz^7|^{-1/8}.$$

De cette inégalité, on déduit :

$$\begin{aligned} \left| \sin \left( 2\pi |x| \frac{l}{k\Lambda} \right) \right| \int_0^\infty \left| g \left( \frac{z}{\Lambda} \right) \right| dz \int_{C_S} |\Phi(z, y)| \sqrt{|xy|} |F(y)| d^\times y \\ \ll_S \int_{C_S} |y|^{-1/8} \sqrt{|xy|} |F(y)| d^\times y \ll_S \sqrt{|x|}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Soit  $0 < \nu < 1/8$  un nombre fixé. Alors  $|\sin t| \leq |\sin t|^{1-\nu} \leq |t|^{1-\nu}$  pour tout réel  $t$ . En particulier, on a

$$\left| \sin \left( 2\pi |x| v \frac{l}{k} \right) \right| \leq \left| 2\pi x v \frac{l}{k} \right|^{1-\nu}.$$

En effectuant le changement de variables  $z \rightarrow z/v$  et  $u \rightarrow uv$ , et en utilisant les inégalités ci-dessus, pour  $\Phi(z, y)$  et  $\sin(2\pi |x| v \frac{l}{k})$ , on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{1}{\Lambda}} \left| \sin \left( 2\pi |x| v \frac{l}{k} \right) \right| dv \int_0^\infty |zg'(vz)| dz \int_{C_S} |\Phi(z, y)| \sqrt{|xy|} |F(y)| d^\times y \\ &= \int_0^{\frac{1}{\Lambda}} \left| \sin \left( 2\pi |x| v \frac{l}{k} \right) \right| \frac{dv}{v} \int_{1-\epsilon}^{\mu_\epsilon} |zg'(z)| dz \int_{C_S} |\Phi(z, vy)| \sqrt{|xy|} |F(y)| d^\times y \\ &\ll_S \int_0^{\frac{1}{\Lambda}} \left| 2\pi |x| v \frac{l}{k} \right|^{1-\nu} \frac{dv}{v} \int_{1-\epsilon}^{\mu_\epsilon} |zg'(z)| dz \int_{C_S} |vy|^{-1/8} \sqrt{|xy|} |F(y)| d^\times y \\ &\ll_S (|x|l)^{1-\nu} \int_0^{\frac{1}{\Lambda}} v^{-\nu-1/8} dv \int_{C_S} |y|^{-1/8} \sqrt{|xy|} |F(y)| d^\times y \ll_S \sqrt{|x|} (|x|l)^{1-\nu}. \quad (4.5) \end{aligned}$$

D'après (4.4)–(4.5) et comme  $\sum_{l \in \mathbb{N}_S} l^{-\nu} < \infty$ , on conclut que la série (4.3) converge absolument et que

$$\sum_{k, l \in \mathbb{N}_S} \frac{\mu(k)}{k} \int_0^{\frac{1}{\Lambda}} \cos(2\pi |x| v \frac{l}{k}) dv \int_0^\infty g(vz) dz \int_{C_S} \Phi(z, y) \sqrt{|xy|} F(y) d^\times y \ll_S |x|^{-1/2}.$$

La convergence absolue de (4.3)–(4.5) garantit que l'on peut modifier l'ordre d'intégration pour déplacer les trois premiers termes du membre de droite de (4.2) dans  $\int_{C_S} \cdots d^\times y$  et obtenir :

$$\begin{aligned} & P_\Lambda E_S \mathfrak{F}_S E_S^{-1} P_{\frac{1}{\Lambda}} V_S(h) E_S \mathfrak{F}_S^t E_S^{-1} F(x) \\ &= \int_{C_S} P_\Lambda(x) \sqrt{|xy|} F(y) d^\times y \int_{\mathbb{A}_S, |v| < \frac{1}{\Lambda}} \Psi_S(xv) dv \int_0^\infty g(vz) \Phi(z, y) dz. \end{aligned}$$

Puisque  $P_\Lambda E_S \mathfrak{F}_S E_S^{-1} V_S(h) P_{\frac{1}{\Lambda}} E_S \mathfrak{F}_S^t E_S^{-1}$  est borné, cette identité est valable pour tout  $F \in L^2(C_S)$ .

Puisque  $T_h$  est un opérateur de Hilbert-Schmidt de classe trace sur  $L^2(C_S)$  d'après le théorème 1.1, il découle des lemmes 4.1 et 2.5 que :

$$\text{trace}_{E_S(Q_\Lambda^\perp)}(T_h) = - \int_{C_S, |x| < \Lambda} |x| d^\times x \int_{\mathbb{A}_S, |v| < \frac{1}{\Lambda}} \Psi_S(xv) dv \int_0^\infty g(vz) \Phi(z, x) dz.$$

Ceci achève la démonstration du lemme. □

**Lemme 4.4 :** *Soit  $\Lambda = 1$ . On peut alors écrire :*

$$\text{trace}_{E_S(Q_\Lambda^\perp)}(T_h) = - \int_{\mathbb{A}_S, |v| < 1} dv \int_{C_S, |x| < 1} \Psi_S(xv) |x| d^\times x \int_0^\infty g(vz) \Phi(z, x) dz.$$

*Preuve* : De même que dans la démonstration du lemme 4.3, par intégration par parties par rapport à  $v$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{A}_S, |v| < 1} \Psi_S(xv) dv \int_0^\infty g(vz) \Phi(z, x) dz = 2 \sum_{k, l \in \mathbb{N}_S} \frac{\mu(k)}{k} \int_0^1 \cos\left(2\pi|x|v\frac{l}{k}\right) dv \int_0^\infty g(vz) \Phi(z, x) dz \\
& = \sum_{k, l \in \mathbb{N}_S} \frac{\mu(k)}{\pi l |x|} \left\{ \sin\left(2\pi|x|\frac{l}{k}\right) \int_0^\infty g(z) \Phi(z, x) dz - \int_0^1 \sin\left(2\pi|x|v\frac{l}{k}\right) dv \int_0^\infty g'(vz) \Phi(z, x) z dz \right\} \\
& \leq \sum_{k, l \in \mathbb{N}_S} \frac{|\mu(k)|}{\pi l |x|} \left(2\pi|x|\frac{l}{k}\right)^{1-\nu} \left\{ \int_{1-\epsilon}^{\mu_\epsilon} |g(z) \Phi(z, x)| dz + \int_0^1 v^{1-\nu} dv \int_0^\infty |g'(vz) \Phi(z, x)| z dz \right\}. \quad (4.6)
\end{aligned}$$

En choisissant  $0 < c = \nu < 1/8$  dans (2.3) on en déduit que

$$|\Phi(z, x)| = |\Phi(1, x/z)/z| \ll_S |x/z|^{-\nu}/|z| = |x|^{-\nu}|z|^{\nu-1}.$$

Il s'ensuit que :

$$\int_{1-\epsilon}^{\mu_\epsilon} |g(z) \Phi(z, x)| dz \ll_S |x|^{-\nu} \quad (4.7)$$

et

$$\begin{aligned}
\int_0^1 v^{1-\nu} dv \int_0^\infty |g'(vz) \Phi(z, x)| z dz & \ll_S \int_0^1 v^{1-\nu} dv \int_0^\infty |g'(vz)| |z/x|^\nu dz \\
& \ll_S |x|^{-\nu} \int_0^1 v^{-2\nu} dv \int_{1-\epsilon}^{\mu_\epsilon} |g'(z)| |z|^\nu dz \ll_S |x|^{-\nu}. \quad (4.8)
\end{aligned}$$

D'après les équations 4.7 à 4.8, la série 4.6 converge absolument et est  $\ll_S |x|^{-2\nu}$ .

En effectuant le changement de variables  $v \rightarrow v(|x|, 1, \dots, 1)/x$  et grâce à la convergence absolue de l'équation 4.6, on peut modifier l'ordre d'intégration entre  $x$  et  $v$  comme suit pour obtenir

$$\begin{aligned}
& \int_{C_S, |x| < 1} |x| d^\times x \int_{\mathbb{A}_S, |v| < 1} \Psi_S(xv) dv \int_0^\infty g(|vz|) \Phi(z, x) dz \\
& = \int_{I_S, |x| < 1} |x| d^\times x \int_{\mathbb{A}_S, |v| < 1} \Psi_S((|x|, 1, \dots, 1)v) dv \int_0^\infty g(|vz|) \Phi(z, |x|) dz \\
& = \int_0^1 dx \sum_{k, l \in \mathbb{N}_S} \frac{\mu(k)}{\pi l x} \left\{ \sin\left(2\pi x \frac{l}{k}\right) \int_0^\infty g(z) \Phi(z, x) dz - \int_0^1 \sin\left(2\pi x v \frac{l}{k}\right) dv \int_0^\infty g'(vz) \Phi(z, x) z dz \right\} \\
& = \sum_{k, l \in \mathbb{N}_S} \frac{\mu(k)}{\pi l} \left\{ \int_0^1 \sin\left(2\pi x \frac{l}{k}\right) d^\times x \int_0^\infty g(z) \Phi(z, x) dz \right. \\
& \quad \left. - \int_0^1 dv \int_0^1 \sin\left(2\pi x v \frac{l}{k}\right) d^\times x \int_0^\infty g'(vz) \Phi(z, x) z dz \right\}. \quad (4.9)
\end{aligned}$$

Également puisque

$$\int_0^1 \cos\left(2\pi x v \frac{l}{k}\right) dx = \frac{d}{dv} \int_0^1 \frac{\sin(2\pi x v \frac{l}{k})}{2\pi x \frac{l}{k}} dx,$$

on peut écrire

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{A}_S, |v| < 1} dv \int_{C_S, |x| < 1} \Psi_S(xv) |x| d^\times x \int_0^\infty g(vz) \Phi(z, x) dz \\
&= \int_{\mathbb{A}_S, |v| < 1} dv \int_{C_S, |x| < 1} \Psi_S(xv) |x| d^\times x \int_0^\infty g(vz) \Phi(z, x) dz \\
&= 2 \sum_{k, l \in \mathbb{N}_S} \frac{\mu(k)}{k} \int_0^1 dv \int_0^1 \cos\left(2\pi x v \frac{l}{k}\right) dx \int_0^\infty g(vz) \Phi(z, x) dz \\
&= 2 \sum_{k, l \in \mathbb{N}_S} \frac{\mu(k)}{k} \int_0^1 dv \frac{d}{dv} \left[ \int_0^1 \frac{\sin(2\pi x v \frac{l}{k})}{2\pi x \frac{l}{k}} dx \right] \int_0^\infty g(vz) \Phi(z, x) dz \\
&= 2 \sum_{k, l \in \mathbb{N}_S} \frac{\mu(k)}{k} \left\{ \int_0^1 \frac{\sin(2\pi x \frac{l}{k})}{2\pi x \frac{l}{k}} dx \int_0^\infty g(z) \Phi(z, x) dz \right. \\
&\quad \left. - \int_0^1 dv \int_0^1 \frac{\sin(2\pi x v \frac{l}{k})}{2\pi x \frac{l}{k}} dx \int_0^\infty g'(vz) z \Phi(z, x) dz \right\} \\
&= \sum_{k, l \in \mathbb{N}_S} \frac{\mu(k)}{\pi l} \left\{ \int_0^1 \sin\left(2\pi x \frac{l}{k}\right) d^\times x \int_0^\infty g(z) \Phi(z, x) dz \right. \\
&\quad \left. - \int_0^1 dv \int_0^1 \sin\left(2\pi x v \frac{l}{k}\right) d^\times x \int_0^\infty g'(vz) \Phi(z, x) z dz \right\}. \quad (4.10)
\end{aligned}$$

Il découle de (4.9) et de (4.10) que

$$\begin{aligned}
& \int_{C_S, |x| < 1} |x| d^\times x \int_{\mathbb{A}_S, |v| < 1} \Psi_S(xv) dv \int_0^\infty g(|vz|) \Phi(z, x) dz \\
&= \int_{\mathbb{A}_S, |v| < 1} dv \int_{C_S, |x| < 1} \Psi_S(xv) |x| d^\times x \int_0^\infty g(vz) \Phi(z, x) dz. \quad (4.11)
\end{aligned}$$

La formule énoncée découle alors du lemme 4.3.

Ceci achève la démonstration du lemme.  $\square$

*Preuve :* [Démonstration du théorème 1.3] La différence de mesure entre  $\mathbb{A}_S$  et  $J_S$  est négligeable pour un ensemble fini  $S$ . D'après (4.11) et la convergence absolue de (4.6),

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{A}_S, |v| < 1} dv \int_{C_S, |x| < 1} \Psi_S(xv) |x| d^\times x \int_0^\infty g(vz) \Phi(z, x) dz \\
&= \int_{J_S, |v| < 1} dv \int_{C_S, |x| < 1} \Psi_S(xv) |x| d^\times x \int_0^\infty g(|vz|) \Phi(z, x) dz \\
&= \sum_{\xi \in O_S^*} \int_{\xi I_S, |v| < 1} dv \int_{C_S, |x| < 1} \Psi_S(xv) |x| d^\times x \int_0^\infty g(vz) \Phi(z, x) dz \quad (4.12)
\end{aligned}$$

converge absolument.

Notons que  $|\xi| = 1$  pour tout  $\xi \in O_S^*$ . Du fait de la convergence absolue de (4.12), pour toute décomposition disjointe  $J_S = \cup_{\xi \in O_S^*} \xi I_S$ , on a, d'après le lemme 4.4 :

$$\begin{aligned}
\text{trace}_{E_S(Q_\Lambda^\perp)}(T_h) &= - \int_{\mathbb{A}_S, |v| < 1} dv \int_{C_S, |x| < 1} \Psi_S(xv) |x| d^\times x \int_0^\infty g(vz) \Phi(z, x) dz \\
&= - \sum_{\xi \in O_S^*} \int_{I_S, |\xi v| < 1} d(\xi v) \int_{C_S, |x| < 1} \Psi_S(x\xi v) |x| d^\times x \int_0^\infty g(|\xi v z|) dz \int_{\mathbb{A}_S} g(|uz|) \Psi_S(-ux) du \\
&= - \sum_{\xi \in O_S^*} \int_{I_S, |v| < 1} dv \int_{C_S, |x| < 1} \Psi_S(x\xi v) |x| d^\times x \int_0^\infty g(|vz|) dz \int_{\mathbb{A}_S} g(|uz|) \Psi_S(-ux) du
\end{aligned} \tag{4.13}$$

avec la somme (4.13) convergeant absolument.

En effectuant d'abord le changement de variables  $x \rightarrow \xi^{-1}x$  dans (4.13), puis  $u \rightarrow u\xi$ , on obtient

$$\begin{aligned}
\text{trace}_{E_S(Q_\Lambda^\perp)}(T_h) &= - \sum_{\xi \in O_S^*} \int_{I_S, |v| < 1} dv \int_{C_S, |x| < 1} \Psi_S(xv) |x| d^\times x \int_0^\infty g(|vz|) dz \int_{\mathbb{A}_S} g(|uz|) \Psi_S(-ux) du, \tag{4.14}
\end{aligned}$$

où l'équation (4.14) converge absolument et somme le même nombre une infinité de fois.

Puisque la somme (4.14) est finie d'après le lemme 4.1, on a nécessairement :

$$\int_{I_S, |v| < 1} dv \int_{C_S, |x| < 1} \Psi_S(xv) |x| d^\times x \int_0^\infty g(|vz|) dz \int_{\mathbb{A}_S} g(|uz|) \Psi_S(-ux) du = 0. \tag{4.15}$$

De (4.14) et (4.15) on déduit que

$$\text{trace}_{E_S(Q_\Lambda^\perp)}(T_h) = 0.$$

Ceci complète la preuve du théorème 1.3. □

## 5 Preuve du théorème 1.4

**Lemme 5.1** :  $V_S(h)$  est un opérateur positif sur  $L^2(C_S)$ .

*Preuve* : Soit  $F$  n'importe quel élément de  $L^2(C_S)$  à support compact. Par définition,

$$V_S(h)F(x) = \int_{C_S} F(\lambda) \sqrt{|x/\lambda|} d^\times \lambda \int_0^\infty g(|x/\lambda|y) g(y) dy.$$

En changeant de variable  $y \rightarrow |\lambda|y$ , on peut écrire

$$\int_{C_S} V_S(h)F(x) \bar{F}(x) d^\times x = \int_{C_S} \bar{F}(x) \sqrt{|x|} d^\times x \int_{C_S} F(\lambda) \sqrt{|\lambda|} d^\times \lambda \int_0^\infty g(|x|y) g(|\lambda|y) dy.$$

Puisque l'intégrale triple ci-dessus est absolument intégrable car  $F$  et  $g$  sont à support compact, on peut inverser l'ordre d'intégration pour obtenir :

$$\int_{C_S} V_S(h) F(x) \bar{F}(x) d^\times x = \int_0^\infty \overline{\left( \int_{C_S} F(x) g(|x|y) \sqrt{|x|} d^\times x \right)} \left( \int_{C_S} F(\lambda) g(|\lambda|y) \sqrt{|\lambda|} d^\times \lambda \right) dy \geq 0,$$

où  $g$  est une fonction à valeurs réelles. Puisque les fonctions à support compact sont denses dans  $L^2(C_S)$  et que  $V_S(h)$  est bornée, on a :

$$\langle V_S(h) F, F \rangle \geq 0$$

pour tout  $F \in L^2(C_S)$ .

Ceci achève la démonstration du lemme. □

**Lemme 5.2 :** *On a :*

$$\text{trace}_{E_S(Q_\Lambda)}(T_h) \geq \text{trace}_{E_S(Q_\Lambda)}\{(1 - S_\Lambda)T_h\}.$$

*Preuve :* Soit  $F_i, i = 1, 2, \dots$  une base orthonormée de  $E_S(Q_\Lambda)$ . D'après le lemme 2.4 et le théorème 1.1,

$$\text{trace}_{E_S(Q_\Lambda)}(T_h) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle V_S(h) (S_\Lambda - E_S \mathfrak{F}_S^t P_\Lambda \mathfrak{F}_S E_S^{-1}) F_i, F_i \rangle.$$

Puisque  $F_i \in E_S(Q_\Lambda)$ , on a  $\mathfrak{F}_S E_S^{-1} F_i(x) = 0$  pour  $|x| < \Lambda$ . Ceci implique que

$$P_\Lambda \mathfrak{F}_S E_S^{-1} F_i(x) = 0 \tag{5.1}$$

pour tout  $x$ , et par conséquent

$$\text{trace}_{E_S(Q_\Lambda)}(T_h) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle V_S(h) S_\Lambda F_i, F_i \rangle. \tag{5.2}$$

Puisque  $T_h$  est de classe trace,  $(1 - S_\Lambda)T_h$  l'est également, car  $1 - S_\Lambda$  est un opérateur linéaire borné sur  $L^2(C_S)$ . Il découle du lemme 2.4 que la série

$$\sum_{i=1}^{\infty} \langle (1 - S_\Lambda) V_S(h) (S_\Lambda - E_S \mathfrak{F}_S^t P_\Lambda \mathfrak{F}_S E_S^{-1}) F_i, F_i \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \langle V_S(h) S_\Lambda F_i, (1 - S_\Lambda) F_i \rangle$$

converge absolument. Comme le membre de droite de l'équation 5.2 est également absolument convergent d'après le lemme 2.4, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \text{trace}_{E_S(Q_\Lambda)}(T_h) &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle V_S(h) S_\Lambda F_i, S_\Lambda F_i \rangle + \sum_{i=1}^{\infty} \langle V_S(h) S_\Lambda F_i, (1 - S_\Lambda) F_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle V_S(h) S_\Lambda F_i, S_\Lambda F_i \rangle + \sum_{i=1}^{\infty} \langle (1 - S_\Lambda) T_h F_i, F_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle V_S(h) S_\Lambda F_i, S_\Lambda F_i \rangle + \text{trace}_{E_S(Q_\Lambda)}\{(1 - S_\Lambda)T_h\}. \end{aligned}$$

D'après le lemme 5.1

$$\langle V_S(h)S_\Lambda F_i, S_\Lambda F_i \rangle \geq 0$$

pour tout  $i$ . Il en découle que

$$\text{trace}_{E_S(Q_\Lambda)}(T_h) \geq \text{trace}_{E_S(Q_\Lambda)}\{(1 - S_\Lambda)T_h\}.$$

Ceci complète la preuve du lemme.  $\square$

**Lemme 5.3 :** Soit  $g(t) = t^{-1}g_{n,\epsilon}(t^{-1})$ . Alors

$$\begin{aligned} & \text{trace}_{E_S(Q_\Lambda)}\{(1 - S_\Lambda)T_h\} \\ &= \int_{C_S, \Lambda < |x|} |x| d^\times x \int_{\mathbb{A}_S, |u| \leq \frac{1}{\Lambda}} \Psi_S(ux) du \int_0^\infty g(ut) dt \int_{\mathbb{A}_S, \frac{1}{\Lambda} < |z|} g(zx) \Psi_S(zx) dz. \end{aligned}$$

*Preuve :* Puisque  $E_S(1 - \mathfrak{F}_S^t P_\Lambda \mathfrak{F}_S)E_S^{-1}$  est la projection orthogonale de  $L^2(C_S)$  sur  $E_S(Q_\Lambda)$ , par (5.1)–(5.2) et par le lemme 2.6

$$\begin{aligned} \text{trace}_{E_S(Q_\Lambda)}((1 - S_\Lambda)T_h) &= \text{trace}_{L^2(C_S)}((1 - S_\Lambda)V_S(h)S_\Lambda E_S(1 - \mathfrak{F}_S^t P_\Lambda \mathfrak{F}_S)E_S^{-1}) \\ &= \text{trace}_{L^2(C_S)}\{E_S \mathfrak{F}_S E_S^{-1}(1 - S_\Lambda)V_S(h)S_\Lambda E_S \mathfrak{F}_S^t E_S^{-1}(1 - P_\Lambda)\}. \end{aligned}$$

Soit  $F = E_S(f)$  avec  $f \in S(\mathbb{A}_S)$ . On a :

$$E_S \mathfrak{F}_S^t E_S^{-1}(1 - P_\Lambda)F(z) = \int_{\mathbb{A}_S} \sqrt{|z/y|}(1 - P_\Lambda(y))F(y)\Psi_S(-yz) dy.$$

Alors :

$$\begin{aligned} & V_S(h)S_\Lambda E_S \mathfrak{F}_S^t E_S^{-1}(1 - P_\Lambda)F(u) \\ &= \int_{C_S} h(u/z)S_\Lambda(z) d^\times z \int_{\mathbb{A}_S} \sqrt{|u/y|}(1 - P_\Lambda(y))F(y)\Psi_S(-yz) dy \\ &= \int_0^\infty g(ut) dt \int_{C_S} S_\Lambda(z)g(zx)|z| d^\times z \int_{\mathbb{A}_S} \sqrt{|u/y|}(1 - P_\Lambda(y))F(y)\Psi_S(-yz) dy, \end{aligned}$$

où l'ordre d'intégration dans la troisième ligne ci-dessus peut être modifié car  $g(ut)g(zx) = 0$  si  $t \notin |u|^{-1}[1 - \epsilon, \mu_\epsilon]$  ou  $|z| \notin |u|[\frac{1-\epsilon}{\mu_\epsilon}, \frac{\mu_\epsilon}{1-\epsilon}]$ .

Alors on écrit

$$\begin{aligned} & E_S \mathfrak{F}_S E_S^{-1}(1 - S_\Lambda)V_S(h)S_\Lambda E_S \mathfrak{F}_S^t E_S^{-1}(1 - P_\Lambda)F(x) \\ &= \int_{\mathbb{A}_S} \Psi_S(xu)(1 - S_\Lambda(u)) du \int_0^\infty g(ut) dt \int_{C_S} S_\Lambda(z)g(zx)|z| d^\times z \int_{\mathbb{A}_S} \sqrt{|x/y|}(1 - P_\Lambda(y))F(y)\Psi_S(-yz) dy. \end{aligned}$$

Similairement à ce qui a été fait dans l'équation (4.1), on peut écrire

$$\begin{aligned} \int_{C_S} S_\Lambda(z) g(z) |z| d^\times z \int_{\mathbb{A}_S} \sqrt{|x/y|} (1 - P_\Lambda(y)) F(y) \Psi_S(-yz) dy \\ = \int_{C_S} \left[ \int_{\frac{1}{\Lambda} < |z|} g(z) \Psi_S(z) dz \right] \sqrt{|x/y|} (1 - P_\Lambda(y)) F(y) |y| d^\times y. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} E_S \mathfrak{F}_S E_S^{-1} (1 - S_\Lambda) V_S(h) S_\Lambda E_S \mathfrak{F}_S^t E_S^{-1} (1 - P_\Lambda) F(x) \\ = \int_{|u| \leq \frac{1}{\Lambda}} \Psi_S(ux) du \int_0^\infty g(ut) dt \int_{C_S} \sqrt{|xy|} \left[ \int_{\frac{1}{\Lambda} < |z|} g(z) \Psi_S(z) dz \right] (1 - P_\Lambda(y)) F(y) d^\times y. \end{aligned}$$

Un argument presque identique, présenté dans (4.3)–(4.5), montre que l'on peut déplacer les deux premiers termes de l'intégrale ci-dessus dans  $\int_{C_S} \cdots d^\times y$  pour obtenir

$$\begin{aligned} E_S \mathfrak{F}_S E_S^{-1} (1 - S_\Lambda) V_S(h) S_\Lambda E_S \mathfrak{F}_S^t E_S^{-1} (1 - P_\Lambda) F(x) \\ = \int_{C_S} \sqrt{|xy|} \left\{ \int_{|u| \leq \frac{1}{\Lambda}} \Psi_S(ux) du \int_0^\infty g(ut) dt \right\} \left[ \int_{\frac{1}{\Lambda} < |z|} g(z) \Psi_S(z) dz \right] (1 - P_\Lambda(y)) F(y) d^\times y. \end{aligned}$$

Puisque  $E_S \mathfrak{F}_S E_S^{-1} (1 - S_\Lambda) V_S(h) S_\Lambda E_S \mathfrak{F}_S^t E_S^{-1} (1 - P_\Lambda)$  est borné, l'identité ci-dessus est vérifiée pour tous les éléments  $F$  de  $L^2(C_S)$ . Par le lemme 2.5,

$$\text{trace}_{E_S(Q_\Lambda)} (1 - S_\Lambda) T_h = \int_{C_S, \Lambda < |x|} |x| d^\times x \int_{\mathbb{A}_S, |u| \leq \frac{1}{\Lambda}} \Psi_S(ux) du \int_0^\infty g(ut) dt \int_{\mathbb{A}_S, \frac{1}{\Lambda} < |z|} g(z) \Psi_S(z) dz.$$

Ceci achève la démonstration du lemme.  $\square$

*Démonstration du théorème 1.4 :* En choisissant  $\Lambda = 1$  dans le lemme 5.3, on obtient :

$$\begin{aligned} \text{trace}_{E_S(Q_\Lambda)} \{ (1 - S_\Lambda) T_h \} \\ = \int_{C_S, 1 < |x|} |x| d^\times x \int_{\mathbb{A}_S, |u| < 1} \Psi_S(ux) du \int_0^\infty g(ut) dt \int_{\mathbb{A}_S, 1 < |z|} g(z) \Psi_S(z) dz, \quad (5.3) \end{aligned}$$

où l'on peut supposer que  $1 - \epsilon < |ut| < \mu_\epsilon$  et  $1 - \epsilon < |zt| < \mu_\epsilon$  car  $g(ut)g(zt) = 0$  si  $u, z, t$  ne satisfont pas simultanément ces deux inégalités. D'après ces deux inégalités, on a

$$\max \left( \frac{1 - \epsilon}{|u|}, \frac{1 - \epsilon}{|z|} \right) < |t| < \min \left( \frac{\mu_\epsilon}{|u|}, \frac{\mu_\epsilon}{|z|} \right).$$

Puisque  $|u| < 1$  et  $1 < |z|$  by (5.3), on a

$$\frac{1 - \epsilon}{|u|} < |t| < \frac{\mu_\epsilon}{|z|}.$$

Cette inégalité implique que

$$1 - \epsilon < |t| < \mu_\epsilon, |z| < \frac{\mu_\epsilon}{1 - \epsilon}, \text{ and } \frac{1 - \epsilon}{\mu_\epsilon} < |u|. \quad (5.4)$$

En utilisant (5.4), on peut écrire

$$\begin{aligned} & \text{trace}_{E_S(Q_\Lambda)} \{(1 - S_\Lambda)T_h\} \\ &= \int_{C_S, 1 < |x|} |x| d^\times x \int_{\mathbb{A}_S, \frac{1-\epsilon}{\mu_\epsilon} < |u| < 1} \Psi_S(ux) du \int_{1-\epsilon}^{\mu_\epsilon} g(ut) dt \int_{\mathbb{A}_S, 1 < |z| < \frac{\mu_\epsilon}{1-\epsilon}} g(zt) \Psi_S(zx) dz. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Pour  $t \in [1 - \epsilon, \mu_\epsilon]$ , de même que dans (2.3), on obtient :

$$\int_{\mathbb{A}_S, 1 < |z| < \frac{\mu_\epsilon}{1-\epsilon}} g(zt) \Psi_S(zx) dz \ll_S |x|^{-1}. \quad (5.6)$$

De même que dans (2.2) et (2.4), d'après (5.6) et l'intégration par parties par rapport à la variable  $u$ , on trouve que

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{A}_S, \frac{1-\epsilon}{\mu_\epsilon} < |u| < 1} \Psi_S(ux) du \int_{1-\epsilon}^{\mu_\epsilon} g(ut) dt \int_{\mathbb{A}_S, 1 < |z| < \frac{\mu_\epsilon}{1-\epsilon}} g(zt) \Psi_S(zx) dz \\ &= \sum_{k, l \in N_S} \frac{\mu(k)}{\pi l x} \int_{1-\epsilon}^{\mu_\epsilon} \left\{ g(t) \sin\left(2\pi x \frac{l}{k}\right) - t \int_{\frac{1-\epsilon}{\mu_\epsilon} < |u| < 1} g'(ut) \sin\left(2\pi u x \frac{l}{k}\right) du \right\} dt \\ & \quad \times \int_{\mathbb{A}_S, 1 < |z| < \frac{\mu_\epsilon}{1-\epsilon}} g(zt) \Psi_S(zx) dz \ll \frac{1}{|x|^2} \sum_{k, l \in N_S} \frac{|\mu(k)|}{l} \ll_S |x|^{-2}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

L'inégalité ci-dessus implique que la série

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{A}_S, \frac{1-\epsilon}{\mu_\epsilon} < |u| < 1} \Psi_S(ux) du \int_{1-\epsilon}^{\mu_\epsilon} g(ut) dt \int_{\mathbb{A}_S, 1 < |z| < \frac{\mu_\epsilon}{1-\epsilon}} g(zt) \Psi_S(zx) dz \\ &= \sum_{\gamma \in O_S^*} \int_{\gamma I_S, \frac{1-\epsilon}{\mu_\epsilon} < |u| < 1} \Psi_S(ux) du \int_{1-\epsilon}^{\mu_\epsilon} g(ut) dt \int_{\mathbb{A}_S, 1 < |z| < \frac{\mu_\epsilon}{1-\epsilon}} g(zt) \Psi_S(zx) dz \ll_S |x|^{-2} \end{aligned}$$

converge absolument et uniformément par rapport à  $|x| > 1$ . Par (5.6) et (5.7), on peut changer l'ordre d'intégration et écrire (5.5) comme

$$\begin{aligned} & \text{trace}_{E_S(Q_\Lambda)} \{(1 - S_\Lambda)T_h\} \\ &= \int_{\mathbb{A}_S, \frac{1-\epsilon}{\mu_\epsilon} < |u| < 1} du \int_{C_S, 1 < |x|} \Psi_S(ux) |x| d^\times x \int_{1-\epsilon}^{\mu_\epsilon} g(|ut|) \left[ \int_{\mathbb{A}_S, 1 < |z| < \frac{\mu_\epsilon}{1-\epsilon}} g(|zt|) \Psi_S(zx) dz \right] dt \\ &= \sum_{\gamma \in O_S^*} \int_{I_S, \frac{1-\epsilon}{\mu_\epsilon} < |u| < 1} du \int_{C_S, 1 < |x|} \Psi_S(u\gamma x) |x| d^\times x \int_{1-\epsilon}^{\mu_\epsilon} g(|ut|) dt \int_{\mathbb{A}_S, 1 < |z| < \frac{\mu_\epsilon}{1-\epsilon}} g(|zt|) \Psi_S(zx) dz \end{aligned} \quad (5.8)$$

avec la somme (5.8) convergeant absolument.

En effectuant les changements de variables dans (5.8) d'abord  $x \rightarrow x/\gamma$  et ensuite  $z \rightarrow z\gamma$ , on déduit que

$$\begin{aligned} & \text{trace}_{E_S(Q_\Lambda)} \{(1 - S_\Lambda)T_h\} \\ &= \sum_{\gamma \in O_S^*} \int_{I_S, \frac{1-\epsilon}{\mu_\epsilon} < |u| < 1} du \int_{C_S, 1 < |x|} \Psi_S(ux) |x| d^\times x \int_{1-\epsilon}^{\mu_\epsilon} g(|ut|) dt \int_{\mathbb{A}_S, 1 < |z| < \frac{\mu_\epsilon}{1-\epsilon}} g(|zt|) \Psi_S(zx) dz, \end{aligned} \quad (5.9)$$

où (5.9) additionne le même nombre une infinité de fois.

Puisque la somme (5.9) est finie par le lemme 5.3, on doit avoir

$$\int_{I_S, \frac{1-\epsilon}{\mu_\epsilon} < |u| < 1} du \int_{C_S, 1 < |x|} \Psi_S(ux) |x| d^\times x \int_{1-\epsilon}^{\mu_\epsilon} g(|ut|) dt \int_{\mathbb{A}_S, 1 < |z| < \frac{\mu_\epsilon}{1-\epsilon}} g(|zt|) \Psi_S(zx) dz = 0. \quad (5.10)$$

En combinant (5.9) et (5.10), on obtient que

$$\text{trace}_{E_S(Q_\Lambda)} \{(1 - S_\Lambda) T_h\} = 0.$$

Par le lemme 5.2,

$$\text{trace}_{E_S(Q_\Lambda)}(T_h) \geq 0.$$

Ceci complète la preuve du théorème 1.4. □

## 6 Preuve du théorème 1.5

*Preuve :* Par les théorèmes 1.1–1.4,

$$\Delta(h) = \text{trace}_{E_S(Q_\Lambda^\perp)}(T_h) + \text{trace}_{E_S(Q_\Lambda)}(T_h) \geq 0.$$

Puisque

$$h_{n,\epsilon}(x) = \int_0^\infty g_{n,\epsilon}(xy) g_{n,\epsilon}(y) dy = \int_0^\infty \frac{1}{xy} g_{n,\epsilon}\left(\frac{1}{xy}\right) \frac{1}{y} g_{n,\epsilon}\left(\frac{1}{y}\right) dy = h(x),$$

on a

$$\Delta(h_{n,\epsilon}) = \Delta(h) \geq 0.$$

Du théorème 1.2, on déduit que  $\lambda_n \geq 0$  pour  $n = 1, 2, \dots$ . Alors l'hypothèse de Riemann [19, p. 148] découle du critère de Li [15] qui énonce qu'une condition nécessaire et suffisante pour que les zéros non triviaux de la fonction zeta de Riemann soient sur la droite critique est que  $\lambda_n$  est non négatif pour tout entier positif  $n$ .

Ceci complète la preuve du théorème 1.5. □

## Références

- [1] E. Bombieri, *The Riemann hypothesis*. Dans : The Millennium Prize Problems, 107—124, Clay Math. Inst., Cambridge (2006).
- [2] E. Bombieri, *Remarks on Weil’s quadratic functional in the theory of prime numbers, I*, Rend. Mat. Acc. Lincei, Serie 9, 11 (2000), n° 3, 183–233.
- [3] E. Bombieri and J. C. Lagarias, *Complements to Li’s criterion for the Riemann hypothesis*, J. Number Theory 77 (1999), 274–287.
- [4] C. Brislawn, *Traceable integral kernels on countably generalized measure spaces*, Pacific J. Math 150 (1991), 229–240.
- [5] F. Bruhat, *Distributions sur un groupe localement compact et applications à l’étude des représentations des groupes  $p$ -adiques*, Bull. Soc. Math. France 89 (1961), 43–75.
- [6] A. Connes, *Trace formula in noncommutative geometry and the zeros of the Riemann zeta function*, Selecta Math 5 (1999), 29–106.
- [7] A. Connes and C. Consani, *Weil positivity and trace formula, the archimedean place*, Sel. Math. New Ser. 27, 77 (2021).
- [8] A. Connes and M. Marcolli, *Noncommutative Geometry, Quantum Fields, and Motives*, Colloquium Publications, Vol. 55, Amer. Math. Soc., 2008.
- [9] J. B. Conrey, *More than two fifths of the zeros of the Riemann zeta function are on the critical line*, J. Reine Angew. Math. 399 (1989), 1–26.
- [10] S. Feng, *Zeros of the Riemann zeta function on the critical line*, J. Number Theory 132 (2012), n° 4, 511–542.
- [11] J. Hadamard, *Sur la distribution des zéros de la fonction zeta(s) et ses conséquences arithmétiques*, Bull. Soc. math. France 24 (1896), 199–220.
- [12] G. H. Hardy, *Sur les zéros de la fonction  $\zeta(s)$  de Riemann*, Comptes Rendus de l’Académie des Sciences 158 (1914), 1012–1014.
- [13] N. Levinson, *More than one third of zeros of Riemann’s zeta-function are on  $\Re s = 1/2$* , Advances in Math. 13 (1974), 383–436.
- [14] Xian-Jin Li, *On the explicit formula related to Riemann’s zeta-function*, Int. J. Number Theory 11 (2015), 2451–2486.
- [15] Xian-Jin Li, *The positivity of a sequence of numbers and the Riemann hypothesis*, J. Number Theory 65 (1997), 325–333.
- [16] R. Meyer, *On a representation of the idele class group related to primes and zeros of  $L$ -functions*, Duke Math. J. 127 (2005), 519–595.
- [17] C.-J. de la Vallée Poussin, *Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers*, Ann. Soc. scient. Bruxelles 20 (1896), 183–256.

- [18] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics. I : Functional Analysis*, Academic Press, 1980, New York.
- [19] B. Riemann, *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*, Bernhard Riemann, Mathematische Werke, New York, Dover, 1953, 145–153.
- [20] A. Selberg, *On the zeros of Riemann's zeta-function*, *Skr. Norske Vid. Akad. Oslo I.* (1942). n° 10, 59 p.
- [21] J. T. Tate, *Fourier analysis in number fields and Hecke's zeta-functions*, Algebraic Number Theory, édité par Cassels & Fröhlich, New York, Academic Press, 1967, 305–347.
- [22] E. C. Titchmarsh, *The Theory of Functions*, Second Edition, Oxford, 1939.
- [23] A. Weil, *Sur les formules explicites de la théorie des nombres*, *Izv. Mat. Nauk.*, (Ser. Mat.) 36 (1972), 3–18.
- [24] A. Weil, *Sur certains groupes d'opérateurs unitaires*, *Acta Math* 111 (1964), 143–211.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ BRIGHAM YOUNG, PROVO, UTAH 84602, ÉTATS-UNIS.