Damiers et polyminos

S. W. Golomb, Université de Harvard

Notre point de départ est le problème bien connu : étant donné un damier dont deux coins opposés ont été supprimés (Fig. 1), et une boîte de dominos, où chaque domino couvre exactement deux cases du damier, est-il possible de recouvrir ce damier exactement de dominos ? La réponse est “non” ; supposons que le damier soit coloré de la manière habituelle (Fig. 1). Alors, chaque domino couvre une case claire et une case foncée. Ainsi, n dominos couvriraient n cases claires et n cases foncées, soit un nombre égal de chaque. Mais le damier de la Fig. 1 comporte plus de cases foncées que de cases claires, et il ne peut donc pas être recouvert de dominos.

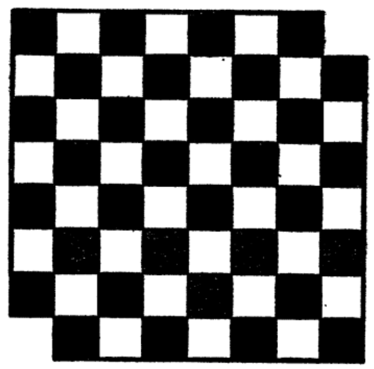

Fig. 1

Nous conserverons le damier 8×8 comme “domaine canonique”, mais nous généraliserons le “domino” au “polymino”, et nos théorèmes porteront sur tous les polyminos plus simples, représentés sur la figure 2. Plus précisément, nous définissons un n-omino comme un ensemble simplement connexe de n cases du damier qui sont “connexes par tour” [1] ; autrement dit, une tour placée sur n’importe quelle case du n-omino doit pouvoir atteindre n’importe quelle autre case du n-omino, en un nombre fini de coups.

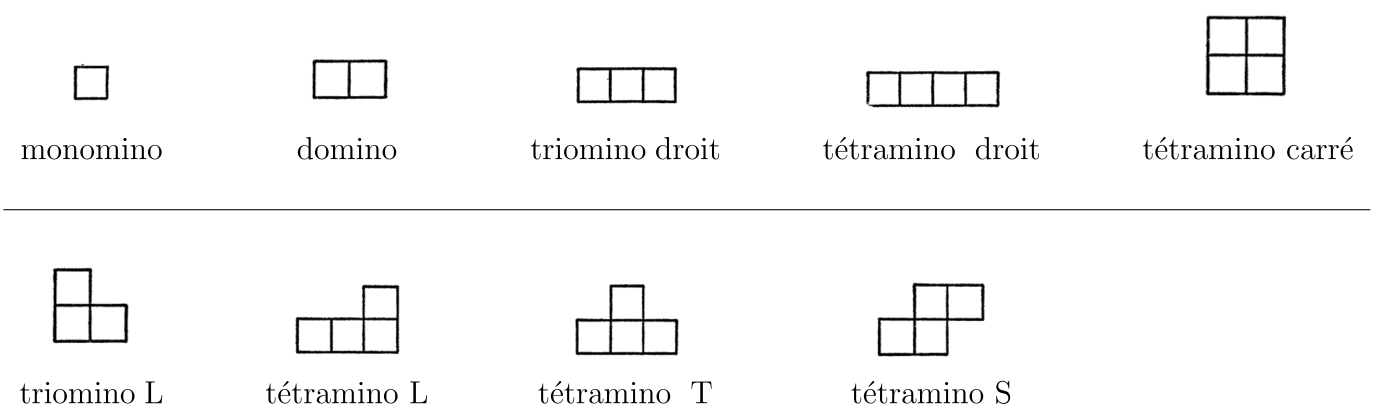

Fig. 2

The American Mathematical Monthly, Vol. 61, No. 10 (Dec., 1954), pp. 675-682.
Traduction : Denise Vella-Chemla, juillet 2025.

[1] *Note de la traductrice : il s’agit ici de la tour du jeu d’échecs, qui se déplace soit le long d’une ligne, soit le long d’une colonne d’un échiquier, d’un nombre de cases quelconque.*

Considérons d'abord les triominos. Il est clairement impossible de recouvrir le damier 8×8 avec des triominos, car 64 n'est pas divisible par 3. Nous allons donc essayer de recouvrir le damier avec 21 triominos et un monomino.

Il est impossible de recouvrir le damier avec 21 triominos droits et un monomino dans le coin supérieur gauche. Pour le démontrer, colorions le damier de trois couleurs : a, b et c, comme illustré à la figure 3. Il y a 21 cases de couleur a, 22 cases de couleur b et 21 cases de couleur c. Chaque triomino droit recouvre une case de couleur a, une case de couleur b et une case de couleur c, de sorte que les triominos droits recouvrent toujours un nombre égal de cases a, de cases b et de cases c. Mais le coin supérieur gauche est un carré a, de sorte que le recouvrir avec un monomino ne laisse que 20 carrés a, mais 22 carrés b et 21 carrés c. Ces nombres sont inégaux ; par conséquent, le recouvrement avec des triominos droits est impossible.

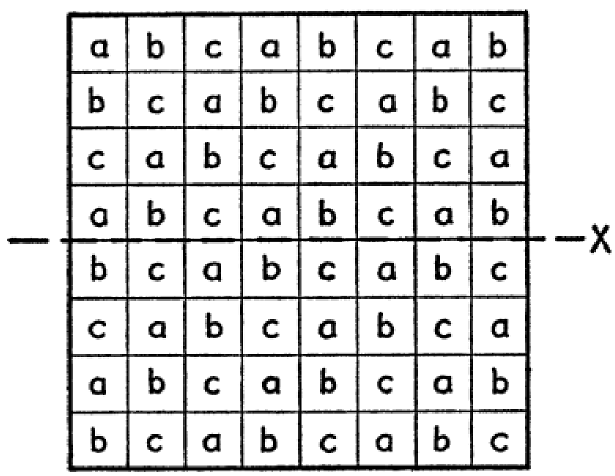

Fig. 3

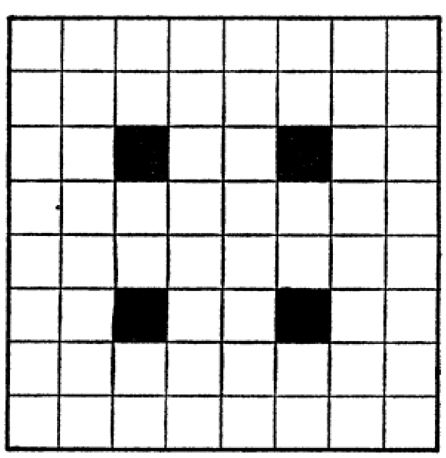

Fig. 4

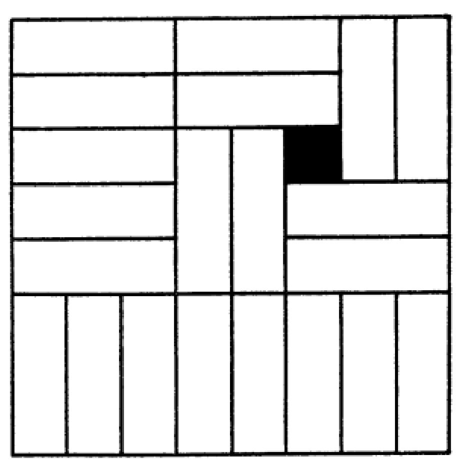

Fig. 5

Le même argument montre que si le monomino est placé sur une case de couleur a ou c, le reste du plateau ne peut être recouvert de triominos droits. Enfin, supposons que le monomino soit placé sur une case de couleur b. Par exemple, le coin inférieur gauche. Par symétrie selon l'axe des x, le problème est le même que lorsque le monomino était dans le coin supérieur gauche, et que le recouvrement était impossible. En fait, seules les cases de couleur b symétriques à d'autres cases de couleur b sont des emplacements possibles pour le monomino. Les seules cases de ce type sont les quatre cases noires de la figure 4. La figure 5 montre que si le monomino est placé sur l'une de ces cases, le reste du damier peut être recouvert de triominos droits.

Nous avons ainsi prouvé : *Une condition nécessaire et suffisante pour que le damier puisse être recouvert de 21 triominos droits et d'un monomino est que le monomino soit placé sur l'une des cases noires de la figure 4.*

Jusqu'à présent, nous avons principalement travaillé sur des preuves de "non-existence". Notre prochain résultat va dans le sens inverse :

Peu importe où un monomino est placé sur le damier, les cases restantes peuvent toujours être recouvertes de 21 triominos droits.

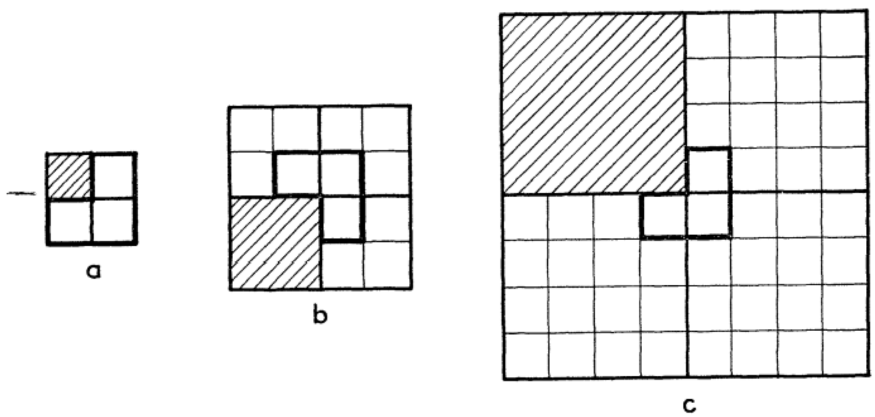

FIG. 6

La preuve se déroule par induction sur des damiers de $2^n \times 2^n$. Pour un damier de 2×2 (Fig. 6-a), il est clair que partout où un monomino est placé, le reste peut être recouvert par un triomino droit. Étant donné un damier de 4×4, nous le divisons en quadrants (Fig. 6-b). Soit un monomino dans l'un de ces quadrants, disons le troisième. Chacun des quadrants est un damier de 2×2 ; nous pouvons donc placer un monomino dans chaque quadrant et recouvrir le reste de l'échiquier avec des triominos droits. Dans le troisième quadrant, le monomino est déjà assigné. Dans les trois autres quadrants, nous plaçons nos monominos au centre (Fig. 6-b) ; puis nous pouvons remplacer ces trois monominos par un seul triomino. Nous avons ainsi recouvert l'échiquier 4×4 avec un monomino en position pré-assignée et 5 triominos droits. Le cas 8×8, et le cas général, sont traités de la même manière (Fig. 6-c). Nous divisons en quadrants ; le monomino pré-assigné se trouve dans l'un de ces quadrants, et nous pouvons terminer le recouvrement de ce quadrant avec des triominos droits par le cas précédent. Dans chacun des trois autres quadrants, nous introduisons des monominos dans les cases centrales. De nouveau, par le cas précédent, les autres quadrants peuvent être recouverts par des triominos droits. Et les monominos des trois cases centrales peuvent être remplacés par un seul triomino droit.

Cette démonstration est similaire au théorème de Bolzano-Weierstrass en deux dimensions. Nous continuons à subdiviser en quadrants jusqu'à trouver un monomino, notre analogue discret d'un point d'accumulation [2].

Venons-en maintenant aux tétraminos. Il est facile de recouvrir entièrement le damier de tétraminos droits, carrés, tétraminos T ou tétraminos L. Cela devrait être clair d'après la figure 7. En revanche, il est impossible de recouvrir entièrement le damier de tétraminos S. En particulier, il est impossible de placer des tétraminos S [3] sur le damier de telle sorte qu'une seule arête soit entièrement recouverte. Je laisse ici les détails en exercice.

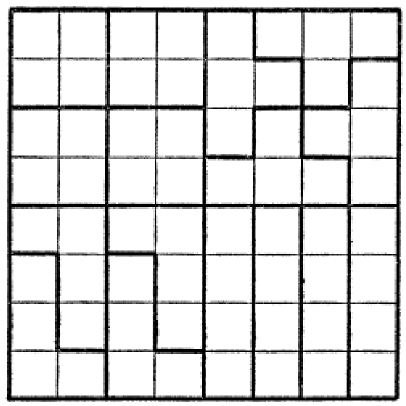

Fig. 7

Des problèmes de tétraminos intéressants sont obtenus de la manière suivante : supposons que nous essayions de couvrir l'échiquier avec 15 tétraminos T et un tétramino carré. C'est impossible. Considérons en effet le coloriage ordinaire d'un damier (cf. Fig. 1). Ici, un tétramino carré couvre deux cases sombres et deux cases claires, un nombre pair de chaque. Mais un tétramino T couvrira trois cases claires et une case sombre, ou bien trois cases sombres et une case claire, dans tous les cas un nombre impair de chaque. Il y a 15 tétraminos T, un nombre impair, chacun couvrant un nombre impair de cases claires et un nombre impair de cases sombres. Par un résultat d'arithmétique élémentaire, un nombre impair de nombres impairs est impair ; par un autre résultat, un nombre pair plus un nombre impair est impair. Ainsi, 15 tétraminos T et un tétramino carré couvrent un nombre impair de cases sombres et un nombre impair de cases claires. Mais avec le coloriage ordinaire d'un damier, il y a un nombre pair de cases de chaque type.

Un résultat similaire est valable pour les tétraminos L : le damier ne peut pas être recouvert par 15 tétraminos L et un tétramino carré. Pour le prouver, introduisons le coloriage de la figure 8. Ici encore, un tétramino carré recouvre deux cases claires et deux cases foncées, tandis que chaque tétramino L recouvre trois cases de l'une et une de l'autre, un nombre impair de chaque. Ainsi, 15 tétraminos L et un tétramino carré recouvriront un nombre impair de cases foncées et un nombre

[2] *Note de la traductrice : on peut se reporter à ce cours de Xavier Oudot pour augmenter ses connaissances à propos de cette phrase. https://denisevellachemla.eu/Bolzano-Weierstrass-cours-Oudot.pdf.*

[3] *Note de la traductrice : dans le texte en anglais, les tétraminos qu'on a traduit ici par tétraminos S sont dits "skew", ce qui se traduit par gauches, les opposant en quelque sorte aux tétraminos droits ; la traduction par les mots "droit" et "S" ne rend pas compte de cette opposition entre le fait d'être un objet symétrique, ou un objet chiral : le tétramino S est chiral.*

impair de cases claires ; mais il est clair qu'il y a un nombre pair de cases claires et de cases foncées sur la figure 8.

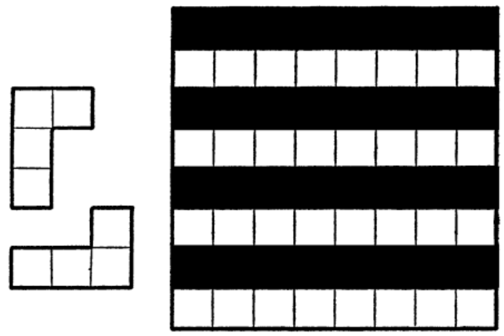

Fig. 8

Nous démontrons le résultat correspondant pour les tétraminos droits et les tétraminos S dans un seul théorème : *L'échiquier ne peut être recouvert par un tétramino carré et 15 autres tétraminos dont certains (ou tous) sont droits et les autres sont des tétraminos S.*

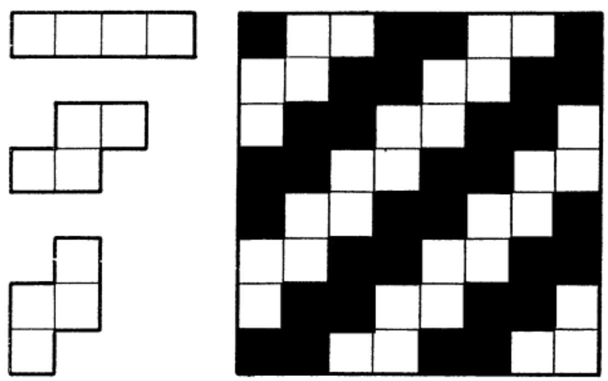

Fig. 9

Nous introduisons cette fois la coloration de la figure 9. Ici, c'est le tétramino carré qui couvre un nombre impair de cases sombres et un nombre impair de cases claires, tandis que les tétraminos droits en couvrent toujours deux de chaque sorte, et les tétraminos S en couvrent soit deux de chaque sorte, soit quatre de l'une et aucune de l'autre. Dans tous les cas, les tétraminos droits comme les tétraminos S couvrent un nombre pair de cases sombres et un nombre pair de cases claires. En additionnant le nombre impair de cases de chaque couleur couvertes par le tétramino carré, on constate que les 16 tétraminos en question couvrent toujours un nombre impair de cases sombres et un nombre impair de cases claires. Or, chaque ligne de la figure 9 comporte quatre cases claires et quatre cases sombres ; le plateau entier est donc composé d'un nombre pair de cases de chaque couleur et ne peut donc pas être couvert par les tétraminos donnés.

Nous pouvons maintenant procéder dans plusieurs directions.

1. *Problèmes sur le tore.* Si l'on courbe le damier jusqu'à ce que les côtés droit et gauche se rencontrent, on obtient un cylindre. Si l'on prend ce cylindre et qu'on le courbe jusqu'à ce que le haut et le

bas se rencontrent, on obtient un beignet, ou tore. Tout recouvrement par des polyminos, qui était possible auparavant sur le damier ordinaire, l'est toujours sur le tore. Les théorèmes d'impossibilité doivent cependant être réexaminés.

Nous savons que l'on peut recouvrir le damier avec un monomino et 21 triominos droits (Fig. 5), à condition que le monomino soit placé sur une case appropriée. Sur le tore, chaque case est identique, de sorte que le recouvrement est possible quel que soit le monomino. (Notez que sur le tore, un triomino droit ne recouvrira pas toujours une case de couleur a, une case de couleur b et une case de couleur c, comme le montre la figure 3.)

Les théorèmes des tétraminos sont les mêmes sur le tore, car les différents tétraminos couvrent toujours le même nombre de cases claires et foncées que sur le damier plat, du moins pour le coloriage ordinaire du damier et les coloriages des figures 8 et 9. De plus, nous pouvons utiliser ce fait pour conclure quelque chose sur le damier original : puisque les quatre cases des coins du damier forment un tétramino carré sur le tore, il est impossible de supprimer les quatre cases des coins d'un damier et de couvrir le reste avec 15 tétraminos T, 15 tétraminos L, ou une combinaison de 15 tétraminos droits et S.

2. *Signification algébrique des coloriages.* Considérant les cases du damier comme des points du réseau dans le plan, les cases claires et foncées du coloriage ordinaire sont les deux classes résiduelles des entiers de Gauss. $a + bi$ modulo $1 + i$. La coloration de la figure 3 montre les trois classes résiduelles de $a + b\omega$ modulo $1 + \omega$, où ω est une racine cubique primitive de l'unité.

3. *Pseudo-polyminos.* Si l'on admet des polyminos connexes "dames" et "tours" [4], on obtient les pseudo-polyminos, dont les plus simples apparaissent dans la figure 10.

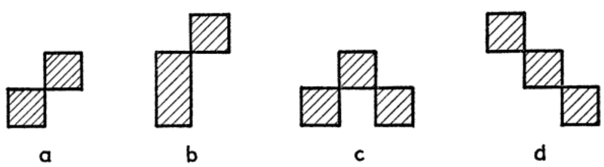

Fig. 10

Je recommande les problèmes suivants :

(i) Montrer que l'échiquier ne peut pas être recouvert par 21 pseudo-triominos de types 10-c et 10-d, et un monomino.

(ii) Montrer que l'échiquier peut être recouvert par 21 pseudo-triominos de type 10-b et un monomino. Où placer le monomino ?

(iii) Trouvez tous les pseudo-tétraminos.

[4] *Note de la traductrice : se reporter à la remarque concernant les pièces tours : les dames au jeu d'échecs ont des déplacements supplémentaires par rapport aux tours : elles peuvent également se déplacer en diagonale.*

On peut généraliser encore plus loin, jusqu'aux quasi-polyminos, qui n'ont pas besoin d'être connectés. La figure 11 montre d'abord un quasi-triomino ; puis comment deux d'entre eux peuvent être combinés pour former un hexomino ; et comment, en utilisant 10 de ces hexominos, un des quasi-triominos d'origine et un monomino, recouvrir le damier. Il est ainsi possible de recouvrir le damier avec 21 de ces quasi-triominos et un monomino.

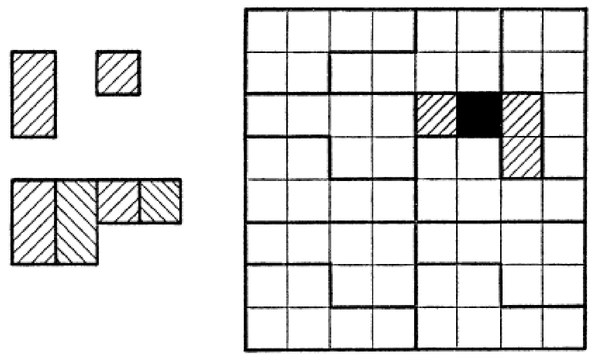

Fig. 11

4. *Pentaminos.* Il existe douze pentaminos distincts. Ils apparaissent tous sur la figure 12, ce qui résout le problème suivant : est-il possible de placer les 12 pentaminos simultanément sur le damier ? La solution illustrée ici est la "meilleure", dans le sens où les quatre cases restantes ne forment pas simplement un tétramino, mais un tétramino carré, au centre du damier.

D'autres problèmes de pentamino intéressants surviennent lorsqu'on tente de couvrir l'échiquier avec 12 pentaminos d'un même type et un tétramino carré.

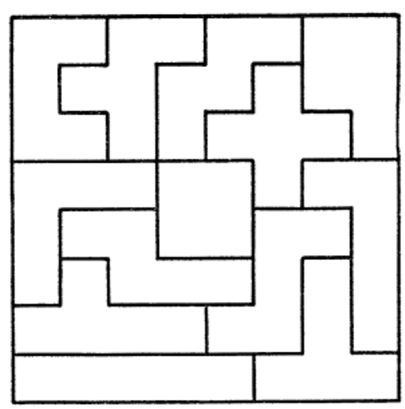

Fig. 12

5. *Le damier.* La forme du damier peut être modifiée à volonté pour obtenir de nouveaux problèmes. Par exemple, est-il possible de placer les douze pentaminos distincts sur un damier de 3×20 ? On peut également envisager des problèmes de polyminos en 3 dimensions, voire plus. Cependant, j'ai indiqué précédemment que je me limiterais pour l'instant au damier de 8×8.

Une autre modification possible, d'ordre assez fondamental, serait d'utiliser des tuiles hexagonales plutôt que carrées pour le damier et les objets qui le recouvrent.