Sur les propositions formellement indécidables des *Principia Mathematica* et des systèmes apparentés I [*]

Kurt Gödel (Vienne)

1.

Le développement des mathématiques [1] dans le sens d'une plus grande exactitude a conduit, comme on le sait, à ce que de vastes domaines de celles-ci soient formalisés, de telle sorte que les démonstrations puissent s'accomplir selon quelques règles mécaniques. Les systèmes formels les plus complets établis à ce jour sont le système des *Principia Mathematica* (PM) [2] d'une part, et le système d'axiomes de la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel (développé plus avant par J. v. Neumann) [3] d'autre part. Ces deux systèmes sont si étendus que toutes les méthodes de démonstration utilisées aujourd'hui en mathématiques y sont formalisées, c'est-à-dire ramenées à quelques axiomes et règles d'inférence. Nous sommes donc proches de supposer que ces axiomes et règles d'inférence suffisent pour que l'on puisse décider également si l'on peut déduire ou non de ces axiomes toutes les questions mathématiques qui peuvent être exprimées formellement dans les systèmes concernés. Dans ce qui suit, on montrera que ce n'est pas le cas, mais qu'il existe dans les deux systèmes cités des problèmes relativement simples de la théorie des nombres entiers ordinaires [4] dont on ne peut décider s'ils peuvent être déduits ou pas à partir des axiomes. Cette circonstance ne réside pas, par exemple, dans la nature particulière des systèmes posés, mais vaut pour une classe très

[*] Voir le résumé des résultats de ce travail paru dans l'Anzeiger der Akad. d. Wiss. in Wien (math.-naturw. Kl.) 1930, Nr. 19.

1. Dans la suite de ce texte, Gödel utilise le symbole Π pour le symbole utilisé dorénavant $\forall$ et le symbole $\sim$ pour le symbole utilisé dorénavant $\neg$.

2. A. Whitehead et B. Russell, *Principia Mathematica*, 2e éd., Cambridge 1925. Nous comptons en outre parmi les axiomes du système PM : l'axiome de l'infini (sous la forme : il existe exactement un nombre dénombrable d'individus), l'axiome de réductibilité et l'axiome du choix (pour tous les types).

3. Voir A. Fraenkel, *Zehn Vorlesungen über die Grundlegung der Mengenlehre*, Wissensch. u. Hyp. Bd. XXXI. J. v. Neumann, *Die Axiomatisierung der Mengenlehre*. Math. Zeitschr. 27, 1928. Journ. f. reine u. angew. Math. 154 (1925), 160 (1929). Nous remarquons qu'aux axiomes de la théorie des ensembles donnés dans la littérature citée, il faut encore ajouter les axiomes et règles d'inférence du calcul logique pour compléter la formalisation. - Les considérations qui suivent valent aussi pour le système formel (dans la mesure où il a été établi jusqu'ici) posé ces dernières années par D. Hilbert et ses collaborateurs. Voir D. Hilbert, Math. Ann. 88, ainsi que D. Math. Sem. der Univ. Hamburg I (1922), VI (1928). P. Bernays, Math. Ann. 90. J. v. Neumann, Math. Zeitschr. 26 (1927). W. Ackermann, Math. Ann. 93.

4. C'est-à-dire, plus exactement, qu'il existe des propositions indécidables dans lesquelles, outre les constantes logiques : - (non), $\vee$ (ou), (x) (pour tout), $=$ (identique à), ne se présentent comme concepts aucun autre que $+$ (addition), $\cdot$ (multiplication), tous deux rapportés aux nombres naturels, où les préfixes (x) ne peuvent aussi se rapporter qu'à des nombres naturels.

vaste de systèmes formels, à laquelle appartiennent en particulier tous ceux qui naissent des deux systèmes que nous avons cités par l'adjonction d'un nombre fini d'axiomes [5], à condition qu'aucune proposition fausse du type indiqué dans la note 4 ne devienne démontrable par les axiomes ajoutés.

Nous esquissons, avant d'entrer dans les détails, l'idée principale de la démonstration, sans naturellement prétendre à l'exactitude. Les formules d'un système formel (nous nous limitons ici au système PM) sont, considérées extérieurement, des suites finies de symboles de base (variables, constantes logiques et parenthèses ou points de séparation), et l'on peut facilement préciser exactement quelles suites de symboles de base sont des formules sensées et lesquelles ne le sont pas [6]. De même, une démonstration n'est, du point de vue formel, rien d'autre qu'une suite finie de formules (avec certaines propriétés assignables). Pour des considérations métamathématiques, le choix des symboles de base est naturellement indifférent, et nous décidons d'utiliser des nombres naturels [7] comme tels. Une formule est donc une suite finie de nombres naturels [8] et une figure de démonstration est une suite finie de suites finies de nombres naturels. Les concepts métamathématiques (propositions) deviennent ainsi des concepts (propositions) sur les nombres naturels ou les suites de ceux-ci et donc (au moins partiellement) exprimables dans les symboles du système PM lui-même. On peut montrer en particulier que les concepts "formule", "figure de démonstration", "formule démontrable" sont définissables à l'intérieur du système PM, c'est-à-dire que l'on peut par exemple indiquer une formule $F(v)$ du PM avec une variable libre v (du type d'une suite de nombres) [9], de sorte que $F(v)$ interprétée dans son contenu dit : v est une formule démontrable. Nous construisons maintenant une proposition indécidable du système PM, c'est-à-dire une proposition A, pour laquelle ni A ni *non-A* n'est démontrable, de la manière suivante :

Une formule du PM avec exactement une variable libre, et de plus du type des nombres naturels (classe de classes), nous l'appellerons un signe de classe. Les signes de classe, nous les concevons comme ordonnés d'une manière quelconque en une suite [10], désignons le n-ième par $R(n)$ et remarquons que le concept "signe de classe" ainsi que la relation ordonnante R peuvent être définis dans le système PM. Soit α un signe de classe quelconque ; par $[z;n]$ désignons la formule qui naît du signe de classe α en ce que l'on remplace la variable libre par le symbole du nombre naturel n. Aussi la relation tripartite $x = [y;z]$ se révèle définissable à l'intérieur du PM. Nous définissons maintenant une classe K de nombres naturels de la manière suivante :

$$n \in K \equiv \overline{\mathrm{Dem}}[R(n);n]^{11a} \tag{1}$$

(où Dem$x$ signifie : x est une formule démontrable). Comme les concepts qui apparaissent dans le *definiens* sont tous définissables dans PM, il en va de même pour le concept K composé de ceux-ci,

5. Ici, dans PM, ne sont comptés comme différents que les axiomes qui ne naissent pas l'un de l'autre par simple changement de type.

6. Nous entendons ici et dans ce qui suit par "formule du PM" toujours une formule écrite sans abréviations (c'est-à-dire sans utilisation de définitions). Les définitions ne servent qu'à une écriture plus courte et sont donc en principe superflues.

7. C'est-à-dire que nous appliquons les symboles de base de manière biunivoque sur des nombres naturels. (Voir l'exécution p. 179.)

8. C'est-à-dire un remplissage d'une section de la suite des nombres par des nombres naturels. (Les nombres ne peuvent en effet pas être mis dans un ordre spatial.)

9. Il serait très facile (mais un peu fastidieux) d'écrire effectivement cette formule.

10. Par exemple selon la somme des membres croissante et, pour une somme égale, par ordre lexicographique.

c'est-à-dire qu'il existe un signe de classe S [11] [12], de sorte que la formule $[S; n]$ dit dans son contenu que le nombre naturel n appartient à K. S est identique à un signe de classe $R(q)$ déterminé, c'est-à-dire qu'il vaut

$$S = R(q)$$

pour un nombre naturel q déterminé. Nous montrons maintenant que la proposition $[R(q); q]$ [13] est indécidable dans PM. Supposons en effet que la proposition $[R(q); q]$ soit démontrable, alors elle serait aussi vraie, c'est-à-dire que d'après ce qui précède q appartiendrait à K, c'est-à-dire que d'après (1) Dem$[R(q); q]$ vaudrait, en contradiction avec l'hypothèse. Si au contraire la négation de $[R(q); q]$ était démontrable, alors $n \in \overline{K}$, c'est-à-dire Dem$[R(q); q]$ vaudrait. $[R(q); q]$ serait donc démontrable en même temps que sa négation, ce qui est encore une fois impossible.

L'analogie de cette conclusion avec l'antinomie de Richard saute aux yeux ; elle a aussi une parenté étroite avec le "Menteur" [14], car la proposition indécidable $[R(q); q]$ dit justement que q appartient à K, c'est-à-dire d'après (1), que $[R(q); q]$ n'est pas démontrable. Nous avons donc devant nous une proposition qui affirme sa propre indémontrabilité [15]. La méthode de démonstration utilisée ci-dessus s'applique manifestement à tout système formel qui, premièrement, dispose dans son contenu d'une signification et de moyens d'expression suffisants pour définir les concepts apparaissant dans la considération ci-dessus (en particulier le concept "formule démontrable"), et dans lequel, deuxièmement, toute formule démontrable est aussi vraie quant au contenu. L'exécution exacte suivante de la démonstration ci-dessus aura entre autres pour tâche de remplacer la deuxième des deux conditions qui viennent d'être citées par une condition purement formelle et beaucoup plus faible.

De la remarque que $[R(q); q]$ affirme sa propre indémontrabilité, il s'ensuit aussitôt que $[R(q); q]$ est vraie, car $[R(q); q]$ est justement indémontrable (puisqu'indécidable). La proposition indécidable dans le système PM a donc été décidée par des considérations métamathématiques. L'analyse exacte de cette circonstance remarquable conduit à des résultats surprenants concernant les démonstrations de non-contradiction des systèmes formels, qui seront traités plus en détail dans la section 4 (Théorème XI).

2.

Nous passons maintenant à l'exécution exacte de la démonstration esquissée ci-dessus et donnons d'abord une description exacte du système formel P, pour lequel nous voulons prouver l'existence de propositions indécidables. P est essentiellement le système que l'on obtient en superposant les

11. Par le trait supérieur, la négation est désignée.

12. Il n'y a naturellement pas la moindre difficulté à écrire effectivement la formule S.

13. On remarque que "$[R(q); q]$" (ou ce qui signifie la même chose "$[S; q]$") n'est qu'une description métamathématique de la proposition indécidable. Mais on peut, dès que la formule S est trouvée, déterminer aussi le nombre q et ainsi écrire effectivement la proposition indécidable elle-même.

14. Il est d'ailleurs possible de donner à chaque antinomie épistémologique une forme de démonstration d'indécidabilité apparentée.

15. Une telle proposition n'a, contrairement aux apparences, rien de circulaire, car elle affirme d'abord l'indémontrabilité d'une formule tout à fait déterminée (à savoir la q-ième dans l'ordre lexicographique pour une certaine insertion), et ce n'est qu'après coup (pour ainsi dire par accident) qu'il s'avère que cette formule est justement celle dans laquelle elle s'exprime elle-même.

axiomes de Peano à la logique du PM [16] (nombres comme individus, relation de successeur comme concept de base non défini). Les symboles de base du système P sont les suivants :

I. Constantes : "$\sim$" (non), "$\vee$" (ou), "Π" (pour tout), "0" (Zéro), "f" (le successeur de), "(", ")" (parenthèses).

II. Variables du premier type (pour individus, c'est-à-dire nombres naturels y compris 0) : "x_1", "y_1", "z_1", ...
Variables du deuxième type (pour classes d'individus) : "x_2", "y_2", "z_2", ...
Variables du troisième type (pour classes de classes d'individus) : "x_3", "y_3", "z_3", ...
etc. pour chaque nombre naturel comme type [17].

Remarque : Les variables pour les fonctions (relations) à deux et plusieurs places sont superflues comme symboles de base, car on peut définir les relations comme classes de paires ordonnées et les paires ordonnées à nouveau comme classes de classes, par exemple la paire ordonnée a, b par $((a), (a, b))$, où (x, y) et (x) signifient les classes dont les seuls éléments sont x, y resp. x [18].

Par un signe du premier type, nous entendons une combinaison de signes de la forme :

$$a, \quad fa, \quad ffa, \quad fffa \ldots \text{ etc.}$$

où a est soit 0 soit une variable du premier type. Dans le premier cas, nous appelons un tel signe un signe de nombre. Pour $n > 1$, nous entendons par un signe du n-ième type la même chose que par variable du n-ième type. Des combinaisons de signes de la forme $a(b)$, où b est un signe du n-ième type et a un signe du $n+1$-ième type, nous les appelons formules élémentaires. La classe des formules, nous la définissons comme la plus petite classe [19], à laquelle appartiennent toutes les formules élémentaires et à laquelle appartiennent en même temps que a, b toujours aussi $\sim (a), (a) \vee (b), x\Pi(a)$ (où x est une variable quelconque) [20]. $(a) \vee (b)$, nous l'appelons la disjonction de a et b, $\sim (a)$ la négation et $x\Pi(a)$ une généralisation de a. On appelle formule propositionnelle une formule dans laquelle n'apparaît aucune variable libre (variable libre définie de la manière connue). Une formule avec exactement n variables individuelles libres (et aucune autre variable libre), nous l'appelons un signe de relation à n places, pour $n = 1$ aussi un signe de classe.

Par Subst $a\binom{v}{b}$ (où a est une formule, v une variable et b un signe du même type que v), nous entendons la formule qui naît de a lorsque l'on remplace v partout où il est libre par b [21]. Nous disons qu'une formule a est une élévation de type d'une autre b si a naît de b en ce que l'on augmente

16. L'ajout des axiomes de Peano ainsi que tous les autres changements apportés au système PM ne servent ici que pour simplifier la démonstration et sont en principe superflus.

17. On suppose qu'il y a un nombre dénombrable de signes disponibles pour chaque type de variable.

18. De même, des relations hétérogènes peuvent être définies de cette manière, par exemple une relation entre individus et classes comme une classe dont les éléments sont de la forme : $((x_2), ((x_1), x_2))$. Toutes les propositions démontrables dans PM sur les relations sont, comme un simple examen le montre, également démontrables de manière analogue avec ce traitement.

19. Par rapport à cette définition (et aux définitions analogues apparaissant plus tard), voir J. Lukasiewicz et A. Tarski, *Untersuchungen über den Aussagenkalkül*, Comptes Rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie XXIII, 1930, Cl. III.

20. $x\Pi(a)$ est donc aussi une formule quand x n'apparaît pas libre dans a. Dans ce cas, $x\Pi(a)$ signifie naturellement la même chose que a.

21. Si v n'apparaît pas libre dans a, alors Subst $a\binom{v}{b} = a$ doit être. On remarque que "Subst" est un signe de la métamathématique.

d'un même nombre le type de toutes les variables apparaissant dans b.

Les formules suivantes (I à V) sont appelées axiomes (elles sont écrites à l'aide des abréviations définies de manière connue : $\supset, \equiv, (Ex), =$ [22] et en utilisant les conventions usuelles sur l'omission de parenthèses [23]) :

I. 1. $\sim (fx_1 = 0)$
   2. $fx_1 = fy_1 \supset x_1 = y_1$
   3. $x_2(0) \cdot x_1\Pi(x_2(x_1) \supset x_2(fx_1)) \supset x_1\Pi(x_2(x_1))$

II. Toute formule qui naît des schémas suivants par insertion de formules quelconques pour p, q, r :
   1. $p \vee p \supset p$
   2. $p \supset p \vee q$
   3. $p \vee q \supset q \vee p$
   4. $(p \supset q) \supset (r \vee p \supset r \vee q)$

III. Toute formule qui naît de l'un des deux schémas
   1. $v\Pi(a) \supset$ Subst $a\binom{v}{c}$
   2. $v\Pi(b \vee a) \supset b \vee v\Pi(a)$

   en ce que l'on effectue pour a, v, b, c les insertions suivantes (et dans 1. l'opération indiquée par "Subst") :

   Pour a une formule quelconque, pour v une variable quelconque, pour b une formule dans laquelle v n'apparaît pas libre, pour c un signe du même type que v, à condition que c ne contienne aucune variable qui soit liée dans a à une place où v est libre [24].

IV. Toute formule qui naît du schéma
   1. $(Eu)(v\Pi(u(v) \equiv a))$

   en ce que l'on insère pour v resp. u des variables quelconques du type n resp. $n+1$ et pour a une formule qui ne contient pas u libre. Cet axiome remplace l'axiome de réductibilité (axiome de compréhension de la théorie des ensembles).

V. Toute formule qui naît de la suivante par élévation de type (et cette formule elle-même) :
   1. $x_1\Pi(x_2(x_1) \equiv y_2(x_1)) \supset x_2 = y_2$.

   Cet axiome signifie qu'une classe est complètement déterminée par ses éléments.

Une formule c est appelée conséquence immédiate de a et b (resp. de a), si a est la formule $(\sim (b)) \vee (c)$ (resp. si c est la formule $v\Pi(a)$, où v est une variable quelconque). La classe des formules démontrables est définie comme la plus petite classe de formules qui contient les axiomes

22. $x_1 = y_1$ est, comme dans PM I, *13, défini par $x_2\Pi(x_2(x_1) \supset x_2(y_1))$ (de même pour les types supérieurs).

23. Pour obtenir les axiomes à partir des schémas écrits, il faut encore, après exécution des insertions autorisées (dans II, III, IV), 1. éliminer les abréviations, 2. ajouter les parenthèses omises. On remarque que les expressions "Formules" ainsi créées doivent être des "formules" au sens ci-dessus. (Voir aussi les définitions exactes des concepts métamathématiques p. 182 sq.)

24. c est donc soit une variable soit 0 soit un signe de la forme $f \ldots fu$, où u est soit 0 soit une variable du 1er type. Concernant le concept "libre (lié) à une place de a" cf. l'ouvrage cité dans la note 24) Travail 1 A 5.

et est close par rapport à la relation "conséquence immédiate" [25].

Nous ordonnons maintenant les symboles de base du système P de la manière suivante, biunivoquement, aux nombres naturels :

"0"	...	1
"f"	...	3
"$\sim$"	...	5
"$\vee$"	...	7
"Π"	...	9
"("	...	11
")"	...	13

en outre, aux variables du n-ième type les nombres de la forme p^n (où p est un nombre premier > 13). Par là, à chaque suite finie de symboles de base (donc aussi à chaque formule) correspond biunivoquement une suite finie de nombres naturels. Les suites finies de nombres naturels, nous les représentons maintenant (à nouveau biunivoquement) sur des nombres naturels, en ce que nous faisons correspondre à la suite $n_1, n_2 \dots n_k$ le nombre $2^{n_1} \cdot 3^{n_2} \dots p_k^{n_k}$, où p_k signifie le k-ième nombre premier (par ordre de grandeur). Par là, non seulement à chaque symbole de base, mais aussi à chaque suite finie de ceux-ci est associé biunivoquement un nombre naturel. Le nombre associé au symbole de base (resp. à la suite de symboles de base) a, nous le désignons par $\Phi(a)$. Soit maintenant donnée une classe ou relation $R(a_1, a_2 \dots a_n)$ quelconque entre symboles de base ou suites de ceux-ci. Nous lui associons la classe (relation) $R'(x_1, x_2 \dots x_n)$ entre nombres naturels qui existe entre $x_1, x_2 \dots x_n$ si et seulement s'il existe de tels $a_1, a_2 \dots a_n$ que $x_i = \Phi(a_i)$ $(i = 1, 2, \dots n)$ et $R(a_1, a_2 \dots a_n)$ vaut. Les classes et relations de nombres naturels qui sont associées de cette manière aux concepts métamathématiques définis jusqu'ici, par exemple "Variable", "Formule", "Formule propositionnelle", "Axiome", "Formule démontrable" etc., nous les désignons par les mêmes mots en écriture cursive. La proposition qu'il y a dans le système P des problèmes indécidables, s'énonce par exemple de la manière suivante : Il y a des *Formules propositionnelles* a, de sorte que ni a ni la *Négation* de a ne sont des *Formules démontrables*.

Nous intercalons maintenant une considération intermédiaire qui n'a rien à voir avec le système formel P et donnons d'abord la définition suivante : Une fonction de la théorie des nombres [26] $\varphi(x_1, x_2 \dots x_n)$ est dite récursivement définie à partir des fonctions de la théorie des nombres $\psi(x_1, x_2 \dots x_{n-1})$ et $\mu(x_1, x_2 \dots x_{n+1})$, si pour tout $x_2 \dots x_n, k$ [27] vaut :

$$\begin{aligned} \varphi(0, x_2 \dots x_n) &= \psi(x_2 \dots x_n) \\ \varphi(k+1, x_2 \dots x_n) &= \mu(k, \varphi(k, x_2 \dots x_n), x_2 \dots x_n). \end{aligned} \tag{2}$$

Une fonction de la théorie des nombres φ est appelée récursive, s'il existe une suite finie de fonctions de la théorie des nombres $\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_n$ qui se termine par φ et qui a la propriété que chaque fonction

25. La règle d'insertion est ainsi superflue, car nous avons déjà effectué toutes les insertions possibles dans les axiomes eux-mêmes (analogue chez J. v. Neumann, *Zur Hilbertschen Beweistheorie*, Math. Zeitschr. 26, 1927).

26. C'est-à-dire son domaine de définition est la classe des nombres entiers non négatifs (resp. des n-uples de ceux-ci) et ses valeurs sont des nombres entiers non négatifs.

27. Les petites lettres latines (éventuellement avec indices) sont dans ce qui suit toujours des variables pour des nombres entiers non négatifs (sauf indication expresse du contraire).

φ_k de la suite est soit récursivement définie à partir de deux des fonctions précédentes [28] soit une constante soit la fonction successeur $x+1$. La longueur de la plus courte suite de φ_i qui appartient à une fonction récursive φ, est appelée son *degré*. Une relation entre nombres naturels $R(x_1 \dots x_n)$ est appelée récursive [29], s'il existe une fonction récursive $\varphi(x_1 \dots x_n)$, de sorte que pour tous $x_1, x_2 \dots x_n$

$$R(x_1 \dots x_n) \sim [\varphi(x_1 \dots x_n) = 0]^{29}.$$

Les théorèmes suivants s'appliquent :

Théorème I. Toute fonction (relation) qui naît de fonctions (relations) récursives par insertion de fonctions récursives à la place des variables est récursive ; de même toute fonction qui naît de fonctions récursives par définition récursive selon le schéma (2).

Théorème II. Si R et S sont des relations récursives, alors le sont aussi $\overline{R}, R \vee S$ (donc aussi $R \ \& \ S$).

Théorème III. Si les fonctions $\varphi(x), \psi(y)$ sont récursives, alors l'est aussi la relation : $\varphi(x) = \psi(y)$ [30].

Théorème IV. Si la fonction $\varphi(\mathfrak{x})$ et la relation $R(x, \mathfrak{y})$ sont récursives, alors le sont aussi les relations S, T

$$S(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \sim (Ex)[x \leq \varphi(\mathfrak{x}) \ \ \& \ \ R(x, \mathfrak{y})]$$

$$T(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \sim (x)[x \leq \varphi(\mathfrak{x}) \to R(x, \mathfrak{y})]$$

ainsi que la fonction ψ

$$\psi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \varepsilon x[x \leq \varphi(\mathfrak{x}) \ \ \& \ \ R(x, \mathfrak{y})],$$

où $\varepsilon x F(x)$ signifie : le plus petit nombre x pour lequel $F(x)$ vaut et 0 s'il n'existe pas un tel nombre.

Le théorème I découle immédiatement de la définition de "récursif". Les théorèmes II et III reposent sur le fait que les fonctions de la théorie des nombres correspondant aux concepts logiques $\sim, \vee, =$ sont

$$\alpha(x), \beta(x, y), \gamma(x, y)$$

à savoir :

$$\alpha(0) = 1; \quad \alpha(x) = 0 \text{ pour } x \neq 0$$

$$\beta(0, x) = \beta(x, 0) = 0; \quad \beta(x, y) = 1 \text{ si } x, y \text{ sont tous deux } \neq 0$$

$$\gamma(x, y) = 0 \text{ si } x = y; \quad \gamma(x, y) = 1 \text{ si } x \neq y$$

28. Plus exactement : par insertion de certaines des fonctions précédentes aux places vides de l'une des fonctions précédentes, par ex. $\varphi_k(x_1, x_2) = \varphi_p[\varphi_q(x_1, x_2), \varphi_r(x_2)]$ $(p, q, r < k)$. Toutes les variables du côté gauche doivent aussi apparaître du côté droit (de même dans le schéma de récursion (2)).

29. Les classes nous les comptons parmi les relations (relations à une place). Les relations récursives R ont naturellement la propriété que l'on peut décider pour chaque n-uple de nombres spécial si $R(x_1 \dots x_n)$ vaut ou non.

30. Nous utilisons les lettres allemandes $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ comme désignation abrégée pour des n-uples de variables quelconques, par ex. $x_1, x_2 \dots x_n$.

récursives, comme on peut facilement s'en convaincre. La démonstration du théorème IV est brièvement la suivante : Selon l'hypothèse, il existe une fonction récursive $\rho(x, \mathfrak{y})$, de sorte que :

$$R(x, \mathfrak{y}) \sim [\rho(x, \mathfrak{y}) = 0].$$

Nous définissons maintenant selon le schéma de récursion (2) une fonction $\chi(x, \mathfrak{y})$ de la manière suivante :

$$\chi(0, \mathfrak{y}) = 0$$
$$\chi(n+1, \mathfrak{y}) = (n+1) \cdot a + \chi(n, \mathfrak{y}) \cdot \alpha(a)$$

où $a = \alpha[\alpha(\rho(0, \mathfrak{y}))] \cdot \alpha[\rho(n+1, \mathfrak{y})] \cdot \alpha[\chi(n, \mathfrak{y})]$. $\chi(n+1, \mathfrak{y})$ est donc soit $= n+1$ (si $a = 1$) soit $= \chi(n, \mathfrak{y})$ (si $a = 0$). Le premier cas se produit manifestement si et seulement si tous les facteurs de a sont 1, c'est-à-dire si vaut :

$$\overline{R}(0, \mathfrak{y}) \ \ \& \ \ R(n+1, \mathfrak{y}) \ \ \& \ \ [\chi(n, \mathfrak{y}) = 0].$$

Il s'ensuit que la fonction $\chi(n, \mathfrak{y})$ (considérée comme fonction de n) reste 0 jusqu'à la plus petite valeur de n pour laquelle $R(n, \mathfrak{y})$ vaut, et qu'à partir de là, cette valeur étant atteinte (si toutefois $R(0, \mathfrak{y})$ vaut, alors $\chi(n, \mathfrak{y})$ est constant et $= 0$). Par conséquent vaut :

$$\psi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \chi(\varphi(\mathfrak{x}), \mathfrak{y})$$
$$S(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \sim R[\psi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}), \mathfrak{y}]$$

La relation T peut être ramenée par négation à un cas analogue à S, ce qui prouve le théorème IV.

Les fonctions $x + y, x \cdot y, x^y$, ainsi que les relations $x < y, x = y$ sont, comme on peut facilement s'en convaincre, récursives et nous définissons maintenant, en partant de ces concepts, une suite de fonctions (relations) $1 - 45$, dont chacune est définie à partir des précédentes au moyen des procédés cités dans les théorèmes I à IV. Ce faisant, plusieurs étapes de définition autorisées d'après les théorèmes I à IV sont le plus souvent réunies en une seule. Chacune des fonctions (relations) $1-45$, parmi lesquelles se trouvent par ex. les concepts "Formule", "Axiome", "Conséquence immédiate" apparaissant sous le signe $\mathfrak{z}$. B. les concepts "*Formule*", "*Axiome*", "*conséquence immédiate*", est donc récursive.

1. $x/y \equiv (Ez)[z \leq x \ \ \& \ \ x = y \cdot z]$ [31]
   x est divisible par y [32].
2. $\mathrm{Prim}(x) \equiv (\overline{Ez})[z \leq x \ \ \& \ \ z \neq 1 \ \ \& \ \ z \neq x \ \ \& \ \ x/z] \ \ \& \ \ x > 1$
   x est un nombre premier.
3. $0 \ \mathrm{Pr} \ x \equiv 0$
   $(n+1) \ \mathrm{Pr} \ x \equiv \varepsilon y[y \leq x \ \ \& \ \ \mathrm{Prim}(y) \ \ \& \ \ x/y \ \ \& \ \ y > n \ \mathrm{Pr} \ x]$
   $n \ \mathrm{Pr} \ x$ est le n-ième (par ordre de grandeur) nombre premier contenu dans x [33].

31. Ce signe $\equiv$ est utilisé au sens de "égalité de définition", représente donc dans les définitions soit $=$, soit $\sim$ (du reste, la symbolique est celle de Hilbert).

32. Partout où, dans les définitions suivantes, l'un des signes $(x), (Ex), \varepsilon x$ apparaît, il est suivi d'une restriction. Cette restriction ne sert qu'à garantir la nature récursive du concept défini (cf. Théorème IV). Sans cette restriction, la définition des concepts définis ne serait le plus souvent pas correcte.

33. Pour $0 < n \leq z$, si z est le nombre de nombres premiers distincts contenus dans x. On remarque que pour $n = z + 1$, $n \ \mathrm{Pr} \ x = 0$!

4. $0! \equiv 1$
   $(n+1)! \equiv (n+1) \cdot n!$
5. $\Pr(0) \equiv 0$
   $\Pr(n+1) \equiv \varepsilon y[y \leq \{\Pr(n)\}! + 1 \ \& \ \mathrm{Prim}(y) \ \& \ y > \Pr(n)]$
   $\Pr(n)$ est le n-ième nombre premier (par ordre de grandeur).
6. $n \ \mathrm{Gl} \ x \equiv \varepsilon y[y \leq x \ \& \ x/(n \ \Pr \ x)^y \ \& \ \overline{x/(n \ \Pr \ x)^{y+1}}]$
   $n \ \mathrm{Gl} \ x$ est le n-ième membre de la suite de nombres associée au nombre x (pour $n > 0$ et n non supérieur à la longueur de cette suite).
7. $l(x) \equiv \varepsilon y[y \leq x \ \& \ y \ \Pr \ x > 0 \ \& \ (y+1) \ \Pr \ x = 0]$
   $l(x)$ est la longueur de la suite de nombres associée à x.
8. $x * y \equiv \varepsilon z\{z \leq [\Pr(l(x) + l(y))]^{x+y} \ \&$
   $(n)[n \leq l(x) \to n \ \mathrm{Gl} \ z = n \ \mathrm{Gl} \ x] \ \&$
   $(n)[0 < n \leq l(y) \to (n + l(x)) \ \mathrm{Gl} \ z = n \ \mathrm{Gl} \ y]\}$
   $x * y$ correspond à l'opération de "juxtaposition" de deux suites finies de nombres.
9. $R(x) \equiv 2^x$
   $R(x)$ correspond à la suite de nombres constituée uniquement du nombre x (pour $x > 0$).
10. $E(x) \equiv R(11) * x * R(13)$
    $E(x)$ correspond à l'opération de "mise entre parenthèses" [11 et 13 sont associés aux symboles de base "(" et ")"].
11. $n \ \mathrm{Var} \ x \equiv (Ez)[13 < z \leq x \ \& \ \mathrm{Prim}(z) \ \& \ x = z^n] \ \& \ n \neq 0$
    x est une variable du n-ième type.
12. $\mathrm{Var}\ (x) \equiv (En)[n \leq x \ \& \ n \ \mathrm{Var} \ x]$
    x est une variable.
13. $\mathrm{Neg}(x) \equiv R(5) * E(x)$
    $\mathrm{Neg}(x)$ est la négation de x.
14. $x \ \mathrm{Dis} \ y \equiv E(x) * R(7) * E(y)$
    $x \ \mathrm{Dis} \ y$ est la disjonction de x et y.
15. $x \ \mathrm{Gen} \ y \equiv R(x) * R(9) * E(y)$
    $x \ \mathrm{Gen} \ y$ est la généralisation de y au moyen de la variable x (à condition que x soit une variable).
16. $0 \ \mathrm{N} \ x \equiv x$
    $(n+1) \ \mathrm{N} \ x \equiv R(3) * n \ \mathrm{N} \ x$
    $n \ \mathrm{N} \ x$ correspond à l'opération : "n-fois préfixer le signe f devant x".
17. $Z(n) \equiv n \ \mathrm{N} \ [R(1)]$
    $Z(n)$ est le signe de nombre pour le nombre n.
18. $\mathrm{Typ}'_1(x) \equiv (Em, n)\{m, n \leq x \ \& \ [m = 1 \vee 1 \ \mathrm{Var} \ m] \ \& \ x = n \ \mathrm{N} \ [R(m)]\}$ [34]
    x est un signe du premier type.
19. $\mathrm{Typ}_n(x) \equiv [n = 1 \ \& \ \mathrm{Typ}'_1(x)] \vee [n > 1 \ \& \ (Ev)\{v \leq x \ \& \ n \ \mathrm{Var} \ v \ \& \ x = R(v)\}]$
    x est un signe du n-ième type.

34. $m, n \leq x$ signifie : $m \leq x \ \& \ n \leq x$ (de même pour plus de 2 variables).

20. $\mathrm{Elf}(x) \equiv (Ey,z,n)[y,z,n \leq x \ \ \& \ \ \mathrm{Typ}_n(y) \ \ \& \ \ \mathrm{Typ}_{n+1}(z) \ \ \& \ \ x = z * E(y)]$
x est une formule élémentaire.

21. $\mathrm{Op}(x,y,z) \equiv x = \mathrm{Neg}(y) \vee x = y \ \mathrm{Dis} \ z \vee (Ev)[v \leq x \ \ \& \ \ \mathrm{Var}\ (v) \ \ \& \ \ x = v \ \mathrm{Gen} \ y]$
x est une formule qui naît de y par négation, disjonction ou généralisation.

22. $\mathrm{F}R(x) \equiv (n)\{0 < n \leq l(x) \rightarrow \mathrm{Elf}(n \ \mathrm{Gl} \ x) \vee (Ep,q)[0 < p,q < n \ \ \& \ \ \mathrm{Op}(n \ \mathrm{Gl} \ x, p \ \mathrm{Gl} \ x, q \ \mathrm{Gl} \ x)]\} \ \ \& \ \ l(x) > 0$
x est une suite de formules dont chacune est soit une formule élémentaire soit engendrée à partir des précédentes par les opérations de négation, disjonction, généralisation.

23. $\mathrm{Form}(x) \equiv (En)\{n \leq (\mathrm{Pr}[l(x)^2])^{x \cdot l(x)} \ \ \& \ \ \mathrm{F}R(n) \ \ \& \ \ x = [l(n)] \ \mathrm{Gl} \ n\}$ [35]
x est une formule (c'est-à-dire le dernier membre d'une suite de formules n).

24. $v \ \mathrm{Geb} \ n,x \equiv \ \mathrm{Var}\ (v) \ \ \& \ \ \mathrm{Form}(x) \ \ \& \ \ (Ea,b,c)\{a,b,c \leq x \ \ \& \ \ x = a * (v \ \mathrm{Gen} \ b) * c \ \ \& \ \ \mathrm{Form}(b) \ \ \& \ \ l(a)+1 \leq n \leq l(a)+l(v \ \mathrm{Gen} \ b)\}$
La variable v est liée en n-ième place dans x.

25. $v \ \mathrm{Fr} \ n,x \equiv \ \mathrm{Var}\ (v) \ \ \& \ \ \mathrm{Form}(x) \ \ \& \ \ v = n \ \mathrm{Gl} \ x \ \ \& \ \ n \leq l(x) \ \ \& \ \ \overline{v \ \mathrm{Geb} \ n,x}$
La variable v est libre en n-ième place dans x.

26. $v \ \mathrm{Fr} \ x \equiv (En)[n \leq l(x) \ \ \& \ \ v \ \mathrm{Fr} \ n,x]$
v apparaît dans x comme variable libre.

27. $\mathrm{Su} \ x\binom{v}{y} \equiv \varepsilon z\{z \leq [\mathrm{Pr}(l(x)+l(y))]^{x+y} \ \ \& \ \ [(Eu,v)u,v \leq x \ \ \& \ \ x = u * R(n \ \mathrm{Gl} \ x) * v \ \ \& \ \ z = u * y * v \ \ \& \ \ n = l(u)+1]\}$
$\mathrm{Su} \ x\binom{v}{y}$ naît de x lorsque l'on insère y à la place du n-ième membre de x (à condition que $0 < n \leq l(x)$).

28. $0 \ \mathrm{St} \ v,x \equiv \varepsilon n\{n \leq l(x) \ \ \& \ \ v \ \mathrm{Fr} \ n,x \ \ \& \ \ (Ep)[n < p \leq l(x) \ \ \& \ \ v \ \mathrm{Fr} \ p,x]\}$
$(k+1) \ \mathrm{St} \ v,x \equiv \varepsilon n\{n < k \ \mathrm{St} \ v,x \ \ \& \ \ v \ \mathrm{Fr} \ n,x \ \ \& \ \ (Ep)[n < p < k \ \mathrm{St} \ v,x \ \ \& \ \ v \ \mathrm{Fr} \ p,x]\}$
$k \ \mathrm{St} \ v,x$ est la $k+1$-ième place dans x (comptée à partir de la fin de la formule x), à laquelle v est libre dans x (et 0 s'il n'y a pas une telle place).

29. $A(v,x) \equiv \varepsilon n\{n \leq l(x) \ \ \& \ \ n \ \mathrm{St} \ v,x = 0\}$
$A(v,x)$ est le nombre de places auxquelles v est libre dans x.

30. $\mathrm{Sb}_0 x\binom{v}{y} \equiv x$
$\mathrm{Sb}_{k+1} x\binom{v}{y} \equiv \mathrm{Su}[\mathrm{Sb}_k x\binom{v}{y}]\binom{v}{y} \qquad (k \ \mathrm{St} \ v,x)$

31. $\mathrm{Sb}x\binom{v}{y} \equiv \mathrm{Sb}_{A(v,x)} x\binom{v}{y}$ [36]
$\mathrm{Sb}x\binom{v}{y}$ est le concept défini ci-dessus $\mathrm{Subst} \ a\binom{v}{b}$ [37].

32. $x \ \mathrm{Imp} \ y \equiv [\mathrm{Neg}(x)] \ \mathrm{Dis} \ y$
$x \ \mathrm{Con} \ y \equiv \mathrm{Neg}\{[\mathrm{Neg}(x)] \ \mathrm{Dis} \ [\mathrm{Neg}(y)]\}$
$x \ \mathrm{Aeq} \ y \equiv (x \ \mathrm{Imp} \ y) \ \mathrm{Con} \ (y \ \mathrm{Imp} \ x)$
$v \ \mathrm{Ex} \ y \equiv \mathrm{Neg}\{v \ \mathrm{Gen} \ [\mathrm{Neg}(y)]\}$

35. L'estimation $n \leq (\mathrm{Pr}[l(x)^2])^{x \cdot l(x)}$ se reconnaît à peu près ainsi : La longueur de la plus courte suite de formules associée à x est au plus égale au nombre de ses sous-formules. Mais il y a au plus $l(x)$ sous-formules de longueur 1, au plus $l(x)-1$ de longueur 2 etc., en tout donc au plus $\frac{l(x)[l(x)+1]}{2} \leq l(x)^2$. Les nombres premiers qui entrent en ligne de compte sont donc tous plus petits que $\mathrm{Pr}\{[l(x)^2]\}$, leur nombre est $\leq l(x)^2$ et leurs exposants (qui sont des sous-formules de x) sont $\leq x$.

36. Si v n'est pas une variable ou x n'est pas une formule, alors $\mathrm{Sb}x\binom{v}{y} = x$.

37. Au lieu de $\mathrm{Sb}[\mathrm{Sb}x\binom{v}{y}]\binom{w}{z}$ nous écrivons : $\mathrm{Sb}x\binom{vw}{yz}$ (analogue pour plus de deux variables).

33. n Th $x \equiv \varepsilon y\{y \leq x^{l(x)^n}\ \ \&\ \ (k)[k \leq l(x) \to (k \text{ Gl } x \leq 13\ \ \&$
$k \text{ Gl } y = k \text{ Gl } x) \vee (k \text{ Gl } x > 13\ \ \&$
$k \text{ Gl } y = k \text{ Gl } x \cdot [1\text{Pr}(k \text{ Gl } x)]^n)]\}$
n Th x est la n-ième élévation de type de x (si x et n Th x sont des formules).

Les axiomes I, 1 à 3 correspondent à trois nombres déterminés que nous désignons par z_1, z_2, z_3, et nous définissons :

34. $Z\text{-Ax}(x) \equiv (x = z_1 \vee x = z_2 \vee x = z_3)$
35. $A_1\text{-Ax}(x) \equiv (Ey)[y \leq x\ \ \&\ \ \text{Form}(y)\ \ \&\ \ x = (y \text{ Dis } y) \text{ Imp } y]$
x est une formule naissant par insertion dans le schéma d'axiomes II, 1. De manière analogue sont définis A_2-Ax, A_3-Ax, A_4-Ax correspondant aux axiomes II, 2 à 4.
36. $A\text{-Ax}(x) \equiv A_1\text{-Ax}(x) \vee A_2\text{-Ax}(x) \vee A_3\text{-Ax}(x) \vee A_4\text{-Ax}(x)$
x est une formule naissant par insertion dans un axiome propositionnel.
37. $Q(z, y, v) \equiv (En, m, w)\{n \leq l(y)\ \ \&\ \ m \leq l(z)\ \ \&\ \ w \leq z\ \ \&$
$w = m \text{ Gl } z\ \ \&\ \ w \text{ Geb } n, y\ \ \&\ \ v \text{ Fr } n, y\}$
z ne contient aucune variable qui soit liée dans y à une place où v est libre.
38. $L_1\text{-Ax}(x) \equiv (Ev, y, z, n)\{v, y, z, n \leq x\ \ \&\ \ n \text{ Var } v\ \ \ \&$
$\text{Typ}_n(z)\ \ \&\ \ \text{Form}(y) \& Q(z, y, v)\ \ \ \&$
$x = (v \text{ Gen } y) \text{ Imp } [\text{Sb}y\binom{v}{z}]\}$
x est une formule naissant du schéma d'axiomes III, 1 par insertion.
39. $L_2\text{-Ax}(x) \equiv (Ev, q, p)\{v, q, p \leq x\ \ \&\ \ \text{Var } (v)\ \ \&$
$\text{Form}(p)\ \ \&\ \ v \text{ Fr } p\ \ \&\ \ \text{Form}(q)\ \ \&$
$x = [v \text{ Gen } (p \text{ Dis } q)] \text{ Imp } [p \text{ Dis } (v \text{ Gen } q)]\}$
x est une formule naissant du schéma d'axiomes III, 2 par insertion.
40. $R\text{-Ax}(x) \equiv (Eu, v, y, n)[u, v, y, n \leq x\ \ \&\ \ n \text{ Var } v\ \ \&$
$(n+1) \text{ Var } u\ \ \&\ \ \overline{u \text{ Fr } y}\ \ \&\ \ \text{Form}(y)\ \ \&$
$x = uEx\{v \text{ Gen } [[R(u) * E(R(v))] \text{ Aeq } y]\}]$
x est une formule naissant du schéma d'axiomes IV, 1 par insertion.

À l'axiome V, 1 correspond un nombre déterminé z_4 et nous définissons :

41. $M\text{-Ax}(x) \equiv (En)[n \leq x\ \ \&\ \ x = n \text{ Th } z_4]$.
42. $\text{Ax}(x) \equiv Z\text{-Ax}(x) \vee A\text{-Ax}(x) \vee L_1\text{-Ax}(x) \vee L_2\text{-Ax}(x) \vee R\text{-Ax}(x) \vee M\text{-Ax}(x)$
x est un axiome.
43. $\text{Fl}(x, y, z) \equiv y = z \text{ Imp } x \vee (Ev)[v \leq x\ \ \&\ \ \text{Var } (v)\ \ \&\ \ x = v \text{ Gen } y]$
x est une conséquence immédiate de y et z.
44. $\text{Dem}(x) \equiv (n)\{0 < n \leq l(x) \to \text{Ax}(n \text{ Gl } x) \vee (Ep, q)[0 < p, q < n\ \ \&$
$\text{Fl}(n \text{ Gl } x, p \text{ Gl } x, q \text{ Gl } x)]\}\ \ \&\ \ l(x) > 0$
x est une figure de démonstration (une suite finie de formules dont chacune est soit un axiome soit une conséquence immédiate de deux des précédentes).
45. $xBy \equiv \text{Dem}(x)\ \ \&\ \ [l(x)] \text{ Gl } x = y$
x est une démonstration pour la formule y.
46. $\text{Dem}(x) \equiv (Ey)yBx$
x est une formule démontrable. [Dem(x) est le seul des concepts $1 - 46$ dont on ne puisse affirmer qu'il est récursif.]

Le fait que l'on peut formuler hardiment ainsi : Toute relation récursive est définissable à l'intérieur du système P (celui-ci étant interprété quant au contenu), sans avoir à recourir à une interprétation quant au contenu des formules de P, est exprimé exactement par le théorème suivant :

Théorème V : À chaque relation récursive $R(x_1 \dots x_n)$ correspond un n-place *signe de relation* r (avec les *variables libres*[38] $u_1, u_2 \dots u_n$), de sorte que pour tous les n-uples de nombres $(x_1 \dots x_n)$ vaut :

$$R(x_1 \dots x_n) \to \text{Dem}\left[\text{Sb}\left(r_{Z(x_1)\dots Z(x_n)}^{u_1 \dots u_n}\right)\right] \tag{3}$$

$$\overline{R}(x_1 \dots x_n) \to \text{Dem}\left[\text{NegSb}\left(r_{Z(x_1)\dots Z(x_n)}^{u_1 \dots u_n}\right)\right] \tag{4}$$

Nous nous contentons ici d'esquisser la démonstration de ce théorème, car elle ne présente aucune difficulté de principe et est assez fastidieuse[39]. Nous démontrons le théorème pour toutes les relations $R(x_1 \dots x_n)$ de la forme : $x_1 = \varphi(x_2 \dots x_n)$[40] (où φ est une fonction récursive) et appliquons l'induction complète selon le degré de φ. Pour les fonctions du premier degré (c'est-à-dire les constantes et la fonction $x + 1$), le théorème est trivial. Soit donc φ du m-ième degré. Il naît de fonctions de degré inférieur $\varphi_1 \dots \varphi_k$ par les opérations d'insertion ou de définition récursive. Comme pour $\varphi_1 \dots \varphi_k$ tout est déjà démontré par hypothèse inductive, il y a des *signes de relation* $r_1 \dots r_k$ correspondants, de sorte que (3), (4) valent. Les processus de définition par lesquels φ naît de $\varphi_1 \dots \varphi_k$ (insertion et définition récursive) peuvent tous être formellement imités dans le système P. Si l'on fait cela, on obtient à partir de $r_1 \dots r_k$ un nouveau *signe de relation* r[41], pour lequel on peut facilement démontrer la validité de (3), (4) en utilisant l'hypothèse inductive. Un *signe de relation* r, qui est associé de cette manière à une relation récursive[42], doit être appelé récursif.

Nous arrivons maintenant au but de nos développements. Soit $\varkappa$ une classe quelconque de *Formules*. Nous désignons par $Flg(\varkappa)$ (conséquence de $\varkappa$) l'ensemble le plus petit de *Formules* qui contient toutes les *Formules* de $\varkappa$ et tous les Ax*iomes* et est clos par rapport à la relation "*conséquence immédiate*". $\varkappa$ est appelé ω-non-contradictoire s'il n'existe aucun *signe de classe* a, de sorte que :

$$(n)\,[\text{Sb}\,(a_{Z(n)}^{v}) \in Flg(\varkappa)] \;\;\&\;\; [\text{Neg}(v\ \text{Gen}\ a)] \in Flg(\varkappa)$$

où v est la variable libre du signe de classe a.

Tout système ω-non-contradictoire est naturellement aussi non-contradictoire. Il n'en va pas de même, comme on le montrera plus tard, de la réciproque. Le résultat général sur l'existence de propositions indécidables s'énonce :

Théorème VI : À chaque classe récursive ω-non-contradictoire $\varkappa$ de *Formules* correspond un *signe de relation* récursif r, de sorte que ni v Gen r ni Neg(v Gen r) n'appartiennent à $Flg(\varkappa)$ (où v est la variable libre de r).

38. Les variables $u_1 \dots u_n$ peuvent être choisies arbitrairement. Il y a par ex. toujours un r avec les variables libres 17, 19, 23 … pour lequel (3) et (4) valent.

39. Le théorème V repose naturellement sur le fait que, pour une relation récursive R, on peut décider pour chaque n-uple de nombres à partir des axiomes du système P si la relation R vaut ou non.

40. Il s'ensuit sa validité pour toute relation récursive, puisqu'une telle relation est équivalente à $0 = \varphi(x_1 \dots x_n)$, où φ est récursive.

41. Lors de l'exécution exacte de cette démonstration, r n'est naturellement pas défini au moyen de l'interprétation quant au contenu, mais par sa constitution purement formelle.

42. Ce qui, interprété quant au contenu, exprime l'existence de cette relation.

Démonstration : Soit $\varkappa$ une classe récursive ω-non-contradictoire quelconque de *Formules*. Nous définissons :

$$\begin{aligned}\mathrm{Dem}_{\varkappa}(x) \equiv \\ \mathrm{Fl}(n\ \mathrm{Gl}\ x, p\ \mathrm{Gl}\ x, q\ \mathrm{Gl}\ x)\}]\ \ \&\ \ l(x) > 0\end{aligned} \tag{5}$$

(cf. le concept analogue 44)

$$xB_{\varkappa}y \equiv \mathrm{Dem}_{\varkappa}(x)\ \ \&\ \ [l(x)]\ \mathrm{Gl}\ x = y \tag{6}$$

$$\mathrm{Dem}_{\varkappa}(x) \equiv (Ey)yB_{\varkappa}x \tag{6.1}$$

(cf. les concepts analogues 45, 46). Il vaut manifestement :

$$(x)[\mathrm{Dem}_{\varkappa}(x) \sim x \in Flg(\varkappa)] \tag{7}$$

$$(x)[\mathrm{Dem}(x) \to \mathrm{Dem}_{\varkappa}(x)] \tag{8}$$

Nous définissons maintenant la relation :

$$Q(x,y) \equiv xB_{\varkappa}\left[\mathrm{Sb}\left(y^{19}_{Z(y)}\right)\right]. \tag{8.1}$$

Comme $xB_{\varkappa}y$ [selon (6), (5)] et $\mathrm{Sb}\left(y^{19}_{Z(y)}\right)$ (selon Déf. 17, 31) sont récursifs, $Q(x,y)$ l'est aussi. Selon le théorème V et (8), il existe donc un *signe de relation* q (avec les variables libres 17, 19), de sorte que vaut :

$$xB_{\varkappa}\left[\mathrm{Sb}\left(y^{19}_{Z(y)}\right)\right] \to \mathrm{Dem}_{\varkappa}\left[\mathrm{Sb}\left(q^{1719}_{Z(x)Z(y)}\right)\right] \tag{9}$$

$$\overline{xB_{\varkappa}\left[\mathrm{Sb}\left(y^{19}_{Z(y)}\right)\right]} \to \mathrm{Dem}_{\varkappa}\left[\mathrm{NegSb}\left(q^{1719}_{Z(x)Z(y)}\right)\right] \tag{10}$$

Nous posons :

$$p = 17\ \mathrm{Gen}\ q \tag{11}$$

(p est un *signe de classe* avec la variable libre 19) et

$$r = \mathrm{Sb}\left(q^{19}_{Z(p)}\right) \tag{12}$$

(r est un *signe de classe* récursif avec la variable libre 17 [43]). Alors vaut :

$$\mathrm{Sb}\left(p^{19}_{Z(p)}\right) = \mathrm{Sb}\left([17\ \mathrm{Gen}\ q]^{19}_{Z(p)}\right) = 17\ \mathrm{Gen}\ \mathrm{Sb}\left(q^{19}_{Z(p)}\right) = 17\ \mathrm{Gen}\ r \tag{13}$$

[en raison de (11) et (12)] en outre :

$$\mathrm{Sb}\left(q^{1719}_{Z(x)Z(p)}\right) = \mathrm{Sb}\left(r^{17}_{Z(x)}\right) \tag{14}$$

[selon (12)]. Si l'on pose maintenant p pour y dans (9) et (10), il résulte, compte tenu de (13) et (14) :

$$\overline{xB_{\varkappa}(17\ \mathrm{Gen}\ r)} \to \mathrm{Dem}_{\varkappa}\left[\mathrm{Sb}\left(r^{17}_{Z(x)}\right)\right] \tag{15}$$

$$xB_{\varkappa}(17\ \mathrm{Gen}\ r) \to \mathrm{Dem}_{\varkappa}\left[\mathrm{NegSb}\left(r^{17}_{Z(x)}\right)\right] \tag{16}$$

Il en résulte :

43. r naît donc du signe de relation récursif q par remplacement d'une variable par un nombre déterminé (p).

1. 17 Gen r n'est pas $\varkappa$-démontrable [44]. Car si c'était le cas, il y aurait (selon 6.1) un n, de sorte que $nB_{\varkappa}(17\ \text{Gen}\ r)$. Selon (16) vaudrait donc : $\text{Dem}_{\varkappa}\left[\text{NegSb}\left(r_{Z(n)}^{17}\right)\right]$, tandis que d'autre part, de la $\varkappa$-démontrabilité de 17 Gen r découle aussi celle de $\text{Sb}\left(r_{Z(n)}^{17}\right)$. $\varkappa$ serait donc contradictoire (à plus forte raison ω-contradictoire).
2. Neg(17 Gen r) n'est pas $\varkappa$-démontrable.

   Démonstration : Comme on vient de le prouver, 17 Gen r n'est pas $\varkappa$-démontrable, c'est-à-dire que vaut $(n)\overline{nB_{\varkappa}(17\ \text{Gen}\ r)}$. Il s'ensuit selon (15) $\text{Dem}_{\varkappa}\left[\text{Sb}\left(r_{Z(n)}^{17}\right)\right]$, ce qui, ensemble avec $\text{Dem}_{\varkappa}[\text{Neg}(17\ \text{Gen}\ r)]$, entrerait en conflit avec l'ω-non-contradiction de $\varkappa$.

17 Gen r est donc indécidable à partir de $\varkappa$, ce qui prouve le théorème VI.

On peut facilement se convaincre que la démonstration qui vient d'être menée est constructive [45], c'est-à-dire qu'elle est intuitionnistiquement irréprochable. Est démontré ce qui suit : Soit donnée une classe $\varkappa$ de *Formules* définie de manière récursive quelconque. Si une décision formelle (à partir de $\varkappa$) pour la *Formule propositionnelle* (effectivement vérifiable) 17 Gen r est présentée, alors on peut indiquer effectivement :

1. Une *démonstration* pour Neg(17 Gen r).
2. Pour chaque n quelconque une *démonstration* pour $\text{Sb}\left(r_{Z(n)}^{17}\right)$, c'est-à-dire qu'une décision formelle de 17 Gen r aurait pour conséquence la vérifiabilité effective d'une ω-contradiction.

Nous voulons appeler une relation (classe) entre nombres naturels $R(x_1 \ldots x_n)$ *décidable au sens de la définition* s'il existe un *signe de relation* r à n places, de sorte que (3) et (4) (cf. Théorème V) valent. En particulier, selon le théorème V, toute relation récursive est donc décidable au sens de la définition. De manière analogue, un *signe de relation* doit être appelé décidable au sens de la définition s'il est associé de cette manière à une relation décidable au sens de la définition. Il suffit maintenant, pour l'existence de propositions indécidables, de supposer de la classe $\varkappa$ qu'elle est ω-non-contradictoire et décidable au sens de la définition. Car la décidabilité au sens de la définition se transmet de $\varkappa$ à $xB_{\varkappa}y$ (cf. (5), (6)) et à $Q(x, y)$ (cf. (8.1)) et c'est seulement cela qui a été utilisé dans la démonstration ci-dessus. La proposition indécidable a dans ce cas la forme v Gen r, où r est un *signe de classe* décidable au sens de la définition (il suffit d'ailleurs même que $\varkappa$ soit décidable au sens de la définition dans le système étendu par $\varkappa$).

Si l'on suppose de $\varkappa$, au lieu de l'ω-non-contradiction, seulement la non-contradiction, alors il ne s'ensuit certes pas l'existence d'une proposition indécidable, mais bien l'existence d'une propriété (r), pour laquelle on ne peut indiquer ni de contre-exemple, ni prouver qu'elle revient à tous les nombres. Car pour prouver que 17 Gen r n'est pas $\varkappa$-démontrable, on n'a utilisé que la non-contradiction de $\varkappa$ (cf. p. 189) et de $\overline{\text{Dem}_{\varkappa}(17\ \text{Gen}\ r)}$ il s'ensuit selon (15) que pour chaque nombre x, $\text{Sb}\left(r_{Z(x)}^{17}\right)$, par conséquent que pour aucun nombre $\text{NegSb}\left(r_{Z(x)}^{17}\right)$ n'est $\varkappa$-démontrable. Si l'on adjoint Neg(17 Gen r) à $\varkappa$, on obtient une classe de *Formules* $\varkappa'$ non-contradictoire mais

44. x est $\varkappa$-démontrable, doit signifier : $x \in Flg(\varkappa)$, ce qui, d'après (7), signifie la même chose que : $\text{Dem}_{\varkappa}(x)$.

45. C'est-à-dire qu'elle est intuitionnistiquement irréprochable. Est démontré ce qui suit : Soit donnée une classe $\varkappa$ de *Formules* définie de manière récursive quelconque. Si une décision formelle (à partir de $\varkappa$) pour la *Formule propositionnelle* (effectivement vérifiable) 17 Gen r est présentée, alors on peut indiquer effectivement : 1. Une *démonstration* pour Neg(17 Gen r). 2. Pour chaque n quelconque une *démonstration* pour $\text{Sb}\left(r_{Z(n)}^{17}\right)$, c'est-à-dire qu'une décision formelle de 17 Gen r aurait pour conséquence la vérifiabilité effective d'une ω-contradiction.

non ω-non-contradictoire. $\varkappa'$ est non-contradictoire, car sinon 17 Gen r serait $\varkappa$-démontrable. $\varkappa'$ n'est cependant pas ω-non-contradictoire, car en raison de $\mathrm{Dem}_{\varkappa}(17\ \mathrm{Gen}\ r)$ et (15) vaut : $(x)\mathrm{Dem}_{\varkappa}\mathrm{Sb}\left(r_{Z(x)}^{17}\right)$, à plus forte raison donc aussi : $(x)\mathrm{Dem}_{\varkappa'}\mathrm{Sb}\left(r_{Z(x)}^{17}\right)$ et d'autre part vaut naturellement : $\mathrm{Dem}_{\varkappa'}[\mathrm{Neg}(17\ \mathrm{Gen}\ r)]$ [46].

Un cas spécial du théorème VI est celui où la classe $\varkappa$ est constituée d'un nombre fini de *Formules* (et éventuellement de celles qui en naissent par *élévation de type*). Toute classe finie $\varkappa$ est naturellement récursive. Soit a le plus grand nombre contenu dans $\varkappa$. Alors vaut dans ce cas pour $\varkappa$:

$$x \in \varkappa \sim (Em, n)[m \leq x \ \ \& \ \ n \leq a \ \ \& \ \ n \in \varkappa \ \ \& \ \ x = m\ \mathrm{Th}\ n]$$

$\varkappa$ est donc récursif. Cela permet par ex. de conclure que même à l'aide de l'axiome du choix (pour tous les types) ou de l'hypothèse du continu généralisée, toutes les propositions ne sont pas décidables, à condition que ces hypothèses soient ω-non-contradictoires.

Dans la démonstration du théorème VI, on n'a utilisé d'autres propriétés du système P que les suivantes :

1. La classe des axiomes et les règles d'inférence (c'est-à-dire la relation "conséquence immédiate") sont définissables de manière récursive (dès que l'on remplace les symboles de base d'une manière quelconque par des nombres naturels).
2. Toute relation récursive est définissable à l'intérieur du système P (au sens du théorème V).

Il y a donc dans tout système formel qui satisfait aux conditions 1, 2 et qui est ω-non-contradictoire, des propositions indécidables de la forme $(x)F(x)$, où F est une propriété de nombres naturels définie de manière récursive, et de même dans toute extension d'un tel système par une classe d'axiomes ω-non-contradictoire définissable de manière récursive. Parmi les systèmes qui satisfont aux conditions 1, 2, appartiennent, comme on peut facilement le confirmer, le système d'axiomes de la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel et celui de v. Neumann [47], en outre le système d'axiomes de la théorie des nombres, qui consiste en les axiomes de Peano, la définition récursive [selon le schéma (2)] et les règles logiques [48]. La condition 1 est en général remplie par tout système dont les règles d'inférence sont les habituelles et dont les axiomes naissent (de manière analogue à P) par insertion à partir d'un nombre fini de schémas [49].

46. L'existence de $\varkappa$ non-contradictoire et non ω-non-contradictoire est par là naturellement prouvée seulement sous la condition qu'il existe en général des $\varkappa$ non-contradictoires (c'est-à-dire que P est non-contradictoire).

47. La démonstration de la condition 1 se présente même ici plus simplement que dans le cas du système P, car il n'y a qu'une sorte de variables de base (resp. deux chez J. v. Neumann).

48. Cf. le Problème III dans la conférence de D. Hilbert : *Probleme der Grundlegung der Mathematik*. Math. Ann. 102.

49. La raison profonde de l'incomplétude qui affecte tous les systèmes formels des mathématiques sera montrée dans la IIe partie de ce travail, à savoir que la formation de types toujours plus élevés peut être poursuivie à l'infini (cf. D. Hilbert, *Über das Unendliche*, Math. Ann. 95, S. 184), tandis qu'il n'y a qu'un nombre dénombrable de types dans chaque système formel. On peut montrer en effet que les propositions indécidables posées ici deviennent décidables par adjonction de types supérieurs (par ex. du type ω au système P). Quelque chose d'analogue vaut aussi pour le système d'axiomes de la théorie des ensembles.

3.

Nous tirons maintenant du théorème VI d'autres conséquences et donnons à cet effet la définition suivante :

Une relation (classe) est appelée arithmétique, si elle peut être définie uniquement au moyen des concepts $+, \cdot$ [addition et multiplication, rapportés aux nombres naturels [50]] et des constantes logiques $\vee, \sim, (x), =$, où (x) et $=$ ne peuvent se rapporter qu'à des nombres naturels [51]. En conséquence, le concept "proposition arithmétique" est défini. En particulier, par ex. les relations "plus grand" et "congru à un module" sont arithmétiques, car il vaut :

$$x > y \sim (Ez)[y = x + z]$$

$$x \equiv y \pmod{n} \sim (Ez)[x = y + z \cdot n \vee y = x + z \cdot n]$$

Il vaut le

Théorème VII : Toute relation récursive est arithmétique. Nous démontrons le théorème sous la forme : Toute relation de la forme $x_0 = \varphi(x_1 \dots x_n)$, où φ est récursive, est arithmétique, et appliquons l'induction complète selon le degré de φ. φ ait le s-ième degré ($s > 1$). Alors vaut soit :

1. $\varphi(x_1 \dots x_n) = \varrho[\chi_1(x_1 \dots x_n), \chi_2(x_1 \dots x_n) \dots \chi_m(x_1 \dots x_n)]$ [52] (où ϱ et tous les χ_i ont un degré inférieur à s) ou :
2. $\varphi(0, x_2 \dots x_n) = \psi(x_2 \dots x_n)$
   $\varphi(k+1, x_2 \dots x_n) = \mu[k, \varphi(k, x_2 \dots x_n), x_2 \dots x_n]$ (où ψ, μ ont un degré inférieur à s).

Dans le premier cas vaut :

$$x_0 = \varphi(x_1 \dots x_n) \sim (Ey_1 \dots y_m)[R(x_0, y_1 \dots y_m) \ \& \ S_1(y_1, x_1 \dots x_n) \ \& \ \dots \ \& \ S_m(y_m, x_1 \dots x_n)],$$

où R resp. S_i sont les relations arithmétiques existant selon l'hypothèse inductive avec $x_0 = \varrho(y_1 \dots y_m)$ resp. $y = \chi_i(x_1 \dots x_n)$. Donc $x_0 = \varphi(x_1 \dots x_n)$ est arithmétique dans ce cas.

Dans le second cas, nous appliquons le procédé suivant : On peut exprimer la relation $x_0 = \varphi(x_1 \dots x_n)$ à l'aide du concept "suite de nombres" (f) [53] de la manière suivante :

$$x_0 = \varphi(x_1 \dots x_n) \sim (Ef)\{f_0 = \psi(x_2 \dots x_n) \ \& \ (k)[k < x_1 \to f_{k+1} = \mu(k, f_k, x_2 \dots x_n)] \ \& \ x_0 = f_{x_1}\}$$

Si $S(y, x_2 \dots x_n)$ resp. $T(z, x_1 \dots x_{n+1})$ sont les relations arithmétiques existant selon l'hypothèse inductive avec $y = \psi(x_2 \dots x_n)$ resp. $z = \mu(x_1 \dots x_{n+1})$, il vaut donc :

$$\begin{aligned} x_0 = \varphi(x_1 \dots x_n) \sim (Ef)\{&S(f_0, x_2 \dots x_n) \ \& \ (k)[k < x_1 \to \\ &T(f_{k+1}, k, f_k, x_2 \dots x_n)] \ \& \ x_0 = f_{x_1}\} \end{aligned} \tag{17}$$

50. Le zéro doit être compté ici et dans ce qui suit parmi les nombres naturels.

51. La définition d'un tel concept doit donc aussi être construite uniquement au moyen des signes cités, des variables pour les nombres naturels $x, y \dots$ et des signes $0, 1$ (les variables de fonctions et d'ensembles ne doivent pas apparaître). (Dans les préfixes, peut naturellement se trouver à la place de x aussi toute autre variable de nombre.)

52. Il n'est naturellement pas nécessaire que tous les $x_1 \dots x_n$ apparaissent effectivement dans les χ_i [cf. l'exemple dans la note 31)].

53. f signifie ici une variable dont le domaine de valeurs est les suites de nombres naturels. Par f_k, on désigne le $k+1$-ième membre d'une suite f (avec f_0 le premier).

Nous remplaçons maintenant le concept "suite de nombres" par "paire de nombres", en associant à la suite de nombres f la paire de nombres n, d ($f^{(n,d)} = [n]_{1+(k+1)d}$) où $[n]_p$ désigne le plus petit reste non négatif de n modulo p.

Il vaut alors le

Lemme 1 : Si f est une suite quelconque de nombres naturels et k un nombre naturel quelconque, alors il existe une paire de nombres naturels n, d, de sorte que $f^{(n,d)}$ et f coïncident dans les k premiers membres.

Démonstration : Soit l le plus grand des nombres $k, f_0, f_1 \ldots f_{k-1}$. On détermine n de sorte que :

$$n \equiv f_i \pmod{1 + (i+1)l!} \text{ pour } i = 0, 1 \ldots k-1$$

ce qui est possible, car deux des nombres $1 + (i+1)l!$ $(i = 0, 1 \ldots k-1)$ sont relativement premiers entre eux. Car un nombre premier contenu dans deux de ces nombres devrait aussi être contenu dans la différence $(i_1 - i_2)l!$ et donc, parce que $|i_1 - i_2| < l$, être contenu dans $l!$, ce qui est impossible. La paire de nombres $n, l!$ fournit alors ce qui est demandé. Comme la relation $x = [n]_p$ est définie par :

$$x \equiv n \pmod{p} \;\; \& \;\; x < p$$

et est donc arithmétique, la relation $P(x_0, x_1 \ldots x_n)$ définie de la manière suivante :

$$\begin{aligned} &P(x_0 \ldots x_n) \\ &\quad \equiv (En, d)\{S([n]_{d+1}, x_2 \ldots x_n) \;\; \& \\ &\qquad\qquad (k)[k < x_1 \to T([n]_{1+d(k+2)}, k, [n]_{1+d(k+1)}, x_2 \ldots x_n)] \;\; \& \\ &\qquad\qquad x_0 = [n]_{1+d(x_1+1)}\} \end{aligned}$$

est aussi arithmétique, laquelle est équivalente à $x_0 = \varphi(x_1 \ldots x_n)$ selon (17) et le lemme 1 (pour la suite f dans (17), seul son déroulement jusqu'au $x_1 + 1$-ième membre entre en ligne de compte). Le théorème VII est ainsi démontré.

Conformément au théorème VII, il y a pour tout problème de la forme $(x)F(x)$ (F récursif) un problème arithmétique équivalent et, comme toute la démonstration du théorème VII (pour chaque F spécial) peut être formalisée à l'intérieur du système P, cette équivalence est démontrable dans P. Donc vaut :

Théorème VIII : Dans chacun des systèmes formels cités dans le théorème VI [54], il y a des propositions arithmétiques indécidables.

Il en va de même (selon la remarque de la page 190) pour le système d'axiomes de la théorie des ensembles et ses extensions par des classes d'axiomes récursives ω-non-contradictoires.

Nous déduisons enfin le résultat suivant :

54. Ce sont les systèmes ω-non-contradictoires qui naissent de P par adjonction d'une classe d'axiomes définie de manière récursive.

Théorème IX : Dans tous les systèmes formels cités dans le théorème VI [55] il y a des problèmes indécidables du *calcul fonctionnel restreint* [56] (c'est-à-dire des formules du calcul fonctionnel restreint, pour lesquelles ni l'universalité ni l'existence d'un contre-exemple n'est démontrable) [57].

Ceci repose sur :

Théorème X : Tout problème de la forme $(x)F(x)$ (F récursif) peut être ramené à la question de la satisfaisabilité d'une formule du calcul fonctionnel restreint (c'est-à-dire que pour chaque F récursif, on peut indiquer une formule du calcul fonctionnel restreint dont la satisfaisabilité est équivalente à la justesse de $(x)F(x)$).

Nous comptons parmi le calcul fonctionnel restreint (c.f.) les formules qui se construisent à partir des symboles de base : $\sim, \vee, (x), =; x, y \ldots$ (variables individuelles) $F(x), G(x,y), H(x,y,z) \ldots$ (variables de propriétés et de relations) [58], où (x) et $=$ ne peuvent se rapporter qu'à des individus. Nous ajoutons à ces signes encore une troisième sorte de variables $\varphi(x), \psi(x,y), \chi(x,y,z)$ etc., qui représentent des fonctions d'objets (c'est-à-dire que $\varphi(x), \psi(x,y)$ etc. désignent des fonctions biunivoques dont les arguments et les valeurs sont des individus [59]. Une formule qui, outre les signes du c.f. cités en premier, contient encore des variables de la troisième sorte ($\varphi(x), \psi(x,y) \ldots$ etc.) est appelée une formule au sens large (a.s.l.) [60]. Les concepts "satisfaisable", "universellement valide" se transmettent sans autre aux formules a.s.l. et vaut la proposition que l'on peut indiquer à chaque formule a.s.l. A une formule habituelle du c.f. B, de sorte que la satisfaisabilité de A est équivalente à celle de B. B naît de A en ce que l'on remplace les variables de la troisième sorte $\varphi(x), \psi(x,y) \ldots$ apparaissant dans A par des expressions de la forme : $(\imath z)F(z,x), (\imath z)G(z,x,y) \ldots$, c'est-à-dire par des fonctions "descriptives" au sens du PM I * 14, et que l'on multiplie logiquement la formule ainsi obtenue avec une expression [61] qui dit que toutes les places de $\varphi, \psi \ldots$ insérées $F, G \ldots$ sont univoques par rapport à la première place vide.

Nous montrons maintenant qu'à tout problème de la forme $(x)F(x)$ (F récursif) correspond un problème équivalent concernant la satisfaisabilité d'une formule a.s.l., d'où découle le théorème X après la remarque faite.

Comme F est récursif, il existe une fonction récursive $\Phi(x)$, de sorte que $F(x) \sim [\Phi(x) = 0]$, et

55. Dans mon travail : *Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls*, Monatsh. f. Math. u. Phys. XXXVII, 2, j'ai montré que chaque formule du calcul fonctionnel restreint est soit valide soit réfutable ; l'existence de cette réfutation n'est cependant pas prouvable selon le théorème IX (dans les systèmes formels cités).

56. Cf. Hilbert-Ackermann, *Grundzüge der theoretischen Logik*. Dans le système P, on entend par formules du calcul fonctionnel restreint celles qui naissent des formules du calcul fonctionnel restreint du PM par le remplacement indiqué p. 176 des relations par des classes de types supérieurs.

57. Dans mon travail : *Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls*, Monatsh. f. Math. u. Phys. XXXVII, 2, j'ai montré que chaque formule du calcul fonctionnel restreint est soit valide soit réfutable ; l'existence de cette réfutation n'est cependant pas prouvable selon le théorème IX (dans les systèmes formels cités).

58. D. Hilbert et W. Ackermann ne comptent pas le signe $=$ parmi le calcul fonctionnel restreint. Il y a pour chaque formule dans laquelle ce signe apparaît, une autre sans ce signe, qui est satisfaisable en même temps qu'elle (cf. le travail cité dans la note 55).

59. Et le domaine de définition doit être à chaque fois l'ensemble de tous les individus.

60. Des variables de la troisième sorte peuvent aussi se trouver à toutes les places d'individus des variables individuelles, par ex. : $y = \varphi(x), F(x, \varphi(y)), G[\psi(x, \varphi(y)), x]$ etc.

61. C'est-à-dire forme la conjonction.

pour Φ il existe une suite de fonctions $\Phi_1, \Phi_2 \ldots \Phi_n$, de sorte que : $\Phi_n = \Phi$, $\Phi_1(x) = x + 1$ et pour chaque Φ_k $(1 < k \leq n)$ vaut soit :

$$(x_2 \ldots x_m)[\Phi_k(0, x_2 \ldots x_m) = \Phi_p(x_2 \ldots x_m)] \tag{18}$$

$$(x, x_2 \ldots x_m)\{\Phi_k[\Phi_1(x), x_2 \ldots x_m] = \Phi_q[x, \Phi_k(x, x_2 \ldots x_m), x_2 \ldots x_m]\} \quad p, q < k \tag{19}$$

soit :

$$(x_1 \ldots x_m)[\Phi_k(x_1 \ldots x_m) = \Phi_r(\Phi_{i_1}(\mathfrak{x}_1) \ldots \Phi_{i_s}(\mathfrak{x}_s))] \tag{19}$$

$r < k$, $i_v < k$ (pour $v = 1, 2 \ldots s$) ou :

$$(x_1 \ldots x_m)[\Phi_k(x_1 \ldots x_m) = \Phi_1(\Phi_1 \ldots \Phi_1(0))] \tag{20}$$

En outre, nous formons les propositions :

$$(x)\overline{\Phi_1(x) = 0} \ \ \& \ \ (x, y)[\Phi_1(x) = \Phi_1(y) \rightarrow x = y] \tag{21}$$

$$(x)[\Phi_n(x) = 0] \tag{22}$$

Nous remplaçons maintenant dans toutes les formules (18), (19), (20) (pour $k = 2, 3 \ldots n$) et dans (21) (22) les fonctions Φ_i par des variables de fonctions φ_i, le nombre 0 par une variable individuelle x_0 n'apparaissant pas par ailleurs, et formons la conjonction C de toutes les formules ainsi obtenues. La formule $(Ex_0)C$ a alors la propriété demandée, c'est-à-dire :

1. Si $(x)[\Phi(x) = 0]$ vaut, alors $(Ex_0)C$ est satisfaisable, car les fonctions $\Phi_1, \Phi_2 \ldots \Phi_n$ donnent alors manifestement, insérées pour $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_n$, une proposition juste dans $(Ex_0)C$.
2. Si $(Ex_0)C$ est satisfaisable, alors $(x)[\Phi(x) = 0]$ vaut.

Démonstration : Soient $\Psi_1, \Psi_2 \ldots \Psi_n$ les fonctions existant selon l'hypothèse, lesquelles donnent une proposition juste dans $(Ex_0)C$ insérées pour $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_n$. Leur domaine d'individus soit $\mathfrak{I}$. En raison de la justesse de $(Ex_0)C$ pour les fonctions Ψ_i, il y a un individu a (dans $\mathfrak{I}$), de sorte que toutes les formules (18) à (22) passent à des propositions justes (18') à (22') lors du remplacement des Φ_i par Ψ_i et de 0 par a. Si nous formons maintenant la plus petite sous-classe de $\mathfrak{I}$, qui contient a et est close par rapport à l'opération $\Psi_1(x)$. Cette sous-classe ($\mathfrak{I}'$) a la propriété que chacune des fonctions Ψ_i appliquée à des éléments de $\mathfrak{I}'$ redonne des éléments de $\mathfrak{I}'$. Car pour Ψ_1, cela vaut selon la définition de $\mathfrak{I}'$ et en raison de (18'), (19'), (20') cette propriété se transmet des Ψ_i à indice inférieur à ceux d'indice supérieur. Les fonctions qui naissent des Ψ_i par restriction au domaine d'individus $\mathfrak{I}'$, nous les appelons Ψ_i'. Pour ces fonctions aussi, toutes les formules (18) à (22) valent (lors du remplacement de 0 par a et de Φ_i par Ψ_i').

En raison de la justesse de (21) pour Ψ_1' et a, on peut appliquer biunivoquement les individus de $\mathfrak{I}'$ sur les nombres naturels etc., de sorte que a passe en 0 et la fonction Ψ_1' en la fonction successeur Φ_1. Par cette application, toutes les fonctions Ψ_i' passent cependant en les fonctions Φ_i et en raison de la justesse de (22) pour Ψ_n' et a vaut $(x)[\Phi_n(x) = 0]$ ou $(x)[\Phi(x) = 0]$, ce qui était à démontrer [62].

Comme on peut aussi exécuter les considérations qui conduisent au théorème X (pour chaque F spécial) à l'intérieur du système P, l'équivalence entre une proposition de la forme $(x)F(x)$ (F

62. Du théorème X découle par ex. que le problème de Fermat et le problème de Goldbach seraient résolus si l'on avait résolu le problème de décision du c.f.

récursif) et la satisfaisabilité de la formule correspondante du c.f. est démontrable dans P et il s'ensuit donc de l'indécidabilité de l'une celle de l'autre, ce qui prouve le théorème IX [63].

4.

Des résultats de la section 2 découle un résultat remarquable concernant une démonstration de non-contradiction du système P (et de ses extensions), qui est exprimé par le théorème suivant :

Théorème XI : Soit $\varkappa$ une classe de *Formules* récursive non-contradictoire [64] quelconque, alors vaut : La *Formule propositionnelle* qui affirme que $\varkappa$ est non-contradictoire n'est pas $\varkappa$-démontrable ; en particulier, la non-contradiction de P n'est pas démontrable dans P [65], à condition que P soit non-contradictoire (dans le cas contraire, toute assertion est naturellement démontrable).

La démonstration est (esquissée) la suivante : Soit $\varkappa$ une classe de *Formules* récursive choisie une fois pour toutes pour les considérations suivantes (dans le cas le plus simple, la classe vide). Pour la démonstration du fait que 17 Gen r n'est pas $\varkappa$-démontrable [66], on a utilisé, comme il ressort de la p. 189, uniquement la non-contradiction de $\varkappa$, c'est-à-dire qu'il vaut :

$$Wid(\varkappa) \to \overline{\mathrm{Dem}_\varkappa(17\ \mathrm{Gen}\ r)} \tag{23}$$

c'est-à-dire selon (6.1) :

$$Wid(\varkappa) \to (x)\overline{xB_\varkappa(17\ \mathrm{Gen}\ r)}$$

Selon (13), 17 Gen $r = \mathrm{Sb}\left(p^{19}_{Z(p)}\right)$ et donc :

$$Wid(\varkappa) \to (x)\overline{xB_\varkappa \mathrm{Sb}\left(p^{19}_{Z(p)}\right)}$$

c'est-à-dire selon (8.1) :

$$Wid(\varkappa) \to (x)Q(x,p) \tag{24}$$

Nous constatons maintenant ce qui suit : Tous les concepts définis (resp. assertions démontrées) dans la section 2 [67] et la section 4 jusqu'ici sont aussi exprimables (resp. démontrables) dans P. Car on n'a partout utilisé que les méthodes de définition et de démonstration habituelles des mathématiques classiques, telles qu'elles sont formalisées dans le système P. En particulier, $\varkappa$ est (comme toute classe récursive) définissable dans P. Soit w la *Formule propositionnelle* par laquelle $\mathrm{Wid}(\varkappa)$ est exprimé dans P. La relation $Q(x,y)$ est exprimée selon (8.1), (9), (10) par le *signe de relation* q, par conséquent $Q(x,p)$ par r [car selon (12) $r = \mathrm{Sb}\left(q^{19}_{Z(p)}\right)$] et la proposition $(x)Q(x,p)$ par 17 Gen r.

63. Le théorème IX vaut naturellement aussi pour le système d'axiomes de la théorie des ensembles et ses extensions par des classes d'axiomes ω-non-contradictoires définissables de manière récursive, puisqu'il y a aussi dans ces systèmes des propositions indécidables de la forme $(x)F(x)$ (F récursif).

64. $\varkappa$ est non-contradictoire (en abrégé $\mathrm{Wid}(\varkappa)$) est défini de la manière suivante : $\mathrm{Wid}(\varkappa) \equiv (Ex)[\mathrm{Form}(x)\ \&\ \mathrm{Dem}_\varkappa(x)]$.

65. Cela découle si l'on insère pour $\varkappa$ la classe vide de *Formules*.

66. r dépend naturellement (comme p) de $\varkappa$.

67. De la définition de "récursif" p. 179 jusqu'à la démonstration du théorème VI inclus.

En raison de (24), w Imp (17 Gen r) est donc démontrable dans P [68] (à plus forte raison $\varkappa$-démontrable). Si maintenant w était $\varkappa$-démontrable, alors 17 Gen r le serait aussi et il s'ensuivrait selon (23) que $\varkappa$ n'est pas non-contradictoire.

Il est à remarquer que cette démonstration est aussi constructive, c'est-à-dire qu'elle permet, si une *démonstration* de w à partir de $\varkappa$ est présentée, de dériver effectivement une contradiction à partir de $\varkappa$. Toute la démonstration du théorème XI peut aussi être transposée mot pour mot au système d'axiomes de la théorie des ensembles M et aux mathématiques classiques [69] et fournit aussi le résultat : Il n'y a pas de démonstration de non-contradiction pour M resp. A, qui pourrait être formalisée à l'intérieur de M resp. A, à condition que M resp. A soit non-contradictoire. Il est expressément remarqué que le théorème XI (et les résultats correspondants sur M, A) ne se trouve en aucune contradiction avec le point de vue formaliste de Hilbert. Car celui-ci ne présuppose que l'existence d'une démonstration de non-contradiction menée par des moyens finis et il serait concevable qu'il y ait des démonstrations finies qui ne peuvent pas se représenter dans P (resp. M, A).

Comme pour toute classe non-contradictoire $\varkappa$, w n'est pas $\varkappa$-démontrable, il y a donc déjà toujours (à partir de $\varkappa$) des propositions indécidables (à savoir w), si Neg(w) n'est pas $\varkappa$-démontrable ; en d'autres termes, on peut dans le théorème VI remplacer la condition de l'ω-non-contradiction par la suivante : La proposition "$\varkappa$ est contradictoire" n'est pas $\varkappa$-démontrable. (On remarque qu'il y a des $\varkappa$ non-contradictoires pour lesquels cette assertion est $\varkappa$-démontrable).

Nous nous sommes limités dans ce travail essentiellement au système P et n'avons fait qu'indiquer les applications à d'autres systèmes. En toute généralité, les résultats seront énoncés et démontrés dans une suite paraissant prochainement. Dans ce travail, la démonstration du théorème XI menée seulement de manière esquissée sera aussi exposée en détail.

(Reçu : 17. XI. 1930.)

68. Que l'on puisse conclure de (23) à la justesse de w Imp (17 Gen r) repose simplement sur le fait que la proposition indécidable 17 Gen r, comme mentionné juste au début, affirme sa propre indémontrabilité.

69. Cf. J. v. Neumann, *Zur Hilbertschen Beweistheorie*, Math. Zeitschr. 26, 1927.