

## Note introductive à l'article de Gödel de 1932

Dans cette brève note sur la logique propositionnelle intuitionniste (**H**)<sup>1</sup>, Gödel montre que

- (1) **H** ne peut être considéré comme un système de logique multivaluée<sup>2</sup>

(c'est-à-dire qu'on ne peut trouver un ensemble fini  $M$  de valeurs de vérité, avec un sous-ensemble  $D \subset M$  de valeurs désignées, plus une interprétation de  $\rightarrow, \wedge, \vee$  par des opérations binaires sur  $M$  et une interprétation de  $\neg$  par une opération unaire sur  $M$ , telles que  $\mathbf{H} \vdash A$  si et seulement si, pour toutes les valuations  $\phi$  dans  $M$ ,  $\phi(A) \in D$  et si

- (2) il existe une chaîne descendante infinie de logiques de force intermédiaire entre **A** (logique propositionnelle classique) et **H**.

D'après l'argument de Gödel, on peut penser à cette chaîne comme à une chaîne de la forme

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}_2 \supset \mathbf{L}_3 \supset \mathbf{L}_4 \supset \dots,$$

où  $\mathbf{L}_n$  désigne l'ensemble des formules propositionnelles identiquement valides sur l'algèbre de Heyting linéairement ordonnée à  $n$  éléments (pseudo-algèbre booléenne). Une axiomatisation finie de  $\mathbf{L}_n$  ( $n \geq 2$ ) a été donnée pour la première fois par I. Thomas (1962), à partir de l'axiomatisation par Dummett (1959) de la logique **LC** des tautologies sur l'algèbre de Heyting linéaire de type d'ordre  $\omega$ . On peut axiomatiser **LC** en ajoutant à **H** l'axiome  $(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)$ , ou, de manière équivalente, la caractérisation suivante de  $\vee$  :

$$(A \vee B) \leftrightarrow [((A \rightarrow B) \rightarrow B) \wedge ((B \rightarrow A) \rightarrow A)].$$

$\mathbf{L}_n$  est alors axiomatisable comme **LC** +  $F_{n+1}$ , où  $F_{n+1}$  est défini comme dans la note de Gödel.

Il est à noter que (1) découle en fait de (2), puisqu'il n'est pas difficile de montrer que toute logique propositionnelle caractérisée par un ensemble fini de valeurs de vérité (au sens indiqué ci-dessus) et contenant **H** ne possède qu'un nombre fini de renforcements propres.

Le second résultat de Gödel peut être considéré comme la première contribution à l'étude de la logique propositionnelle intermédiaire. Il existe aujourd'hui une abondante littérature sur le sujet. On trouvera un aperçu de cette littérature jusqu'en 1970 dans Hosoi et Ono (*Hosoi, T. and H. Ono, Intermediate propositional logics (A survey), J. of Tsuda College, 5, 1973.*). Minari (*Minari, P. Completeness theorems for some intermediate predicate calculi. Stud Logica 42, 431-441, 1983.*) présente une bibliographie exhaustive accompagnée de commentaires historiques. Les raisons d'étudier les logiques intermédiaires sont principalement techniques ; par exemple, elles donnent lieu à des théories algébriques intéressantes.

---

1. Pour les systèmes formels désignés par  $A$  et  $H$  dans le texte de Gödel, nous utilisons respectivement les caractères gras **A** et **H**, pour une meilleure clarté typographique.

2. Pour une introduction aux logiques multivaluées, voir, par exemple, *Rautenberg 1979*, chapitre III.

Dans la dernière ligne de sa note, Gödel énonce la propriété de disjonction de **H**; Gentzen en a donné une démonstration dans son article de 1935.

A. S. TROELSTRA

---

## Sur le calcul propositionnel intuitionniste

Kurt Gödel

1932)

[Réponse à une question posée par HAHN :] Pour le système  $H$ , établi par HEYTING<sup>3</sup>, du calcul propositionnel intuitionniste, les théorèmes suivants sont valides :

- I. *Il n'existe aucune réalisation avec un nombre fini d'éléments (valeurs de vérité) pour laquelle les formules démontrables dans  $H$  sont satisfaites (c'est-à-dire, qui donnent des valeurs distinctes par substitution arbitraire).*
- II. *Entre  $H$  et le système  $A$  du calcul propositionnel ordinaire se trouvent une infinité de systèmes, c'est-à-dire qu'il existe une suite décroissante de systèmes, qui englobent tous  $H$  et sont contenus dans  $A$ .*

La démonstration découle des faits suivants : Soit  $F_n$  la formule :

$$\sum_{1 \leq i < k \leq n} (a_i \supset \subset a_k)$$

où  $\sum$  désigne l'opération  $\vee$  itérée et  $a_i$  sont les variables propositionnelles.  $F_n$  est satisfaite pour toute réalisation comportant moins de  $n$  éléments, pour laquelle toutes les formules démontrables dans  $H$  sont vérifiées. Pour chaque substitution, au moins un terme de  $F_n a_i$  et  $a_k$  est remplacé par le même élément  $e$ , et  $e \supset \subset e \vee b$  donne une valeur distinguée pour tout  $b$ , car la formule  $a \supset \subset a \vee b$  est démontrable dans  $H$ . De plus, soit  $S_n$  la réalisation suivante :

$$\begin{aligned} \text{Éléments : } & \{1, 2, \dots, n\}, \text{ élément neutre : } 1; \\ & a \vee b = \min(a, b); \quad a \wedge b = \max(a, b); \\ & a \supset b = 1 \text{ pour } a \geq b; \quad a \supset b = b \text{ pour } a < b \\ & \neg a = n \text{ pour } a \neq n, \quad \neg n = 1. \end{aligned}$$

Alors, pour  $S_n$ , toutes les formules de  $H$  et la formule  $F_{n+1}$ , ainsi que toutes les formules  $F_i$  d'indice supérieur, sont vérifiées, tandis que  $F_n$  et  $|$  appliquée à toutes les formules  $F_i$  d'indices inférieurs ne le sont pas. En particulier, il s'ensuit qu'aucune formule  $F_n$  n'est démontrable dans  $H$ . Par ailleurs, il est généralement admis qu'une formule de la forme  $A \vee B$  ne peut être démontrée dans  $H$  que si  $A$  peut l'être ou  $B$  peut l'être.

---

3. Heyting 1990