Traduction du latin au français d'un extrait[1] du livre *Werke : Hoehere Arithmetik* de Gauss (Denise Vella-Chemla, février 2024)

Résumé

Au sujet de certaines séries particulières.

1.

Parmi les vérités les plus significatives auxquelles la théorie de la division du cercle a ouvert l'accès, la synthèse proposée dans l'article 356 des *Disquisitiones Arithmeticae* revendique une place non négligeable en arithmétique, non seulement en raison de son élégance particulière et de sa merveilleuse créativité, qu'une autre discussion aura l'occasion d'expliquer plus en détail ci-après, mais aussi parce que sa démonstration rigoureuse et complète se heurte à des difficultés assez fréquentes. Ce qui, bien sûr, aurait dû être d'autant moins attendu, puisqu'ils ne relèvent pas tant du théorème lui-même, que d'une certaine limitation du théorème, plutôt, par laquelle la démonstration négligée est immédiatement prête et est très facilement dérivée de la théorie, comme nous l'expliquerons dans cet article. Le théorème y est présenté sous la forme suivante. En supposant que n est un nombre premier, et en désignant tous les résidus quadratiques de n entre les limites 1 et $n-1$ inclus par a, et tous les non-résidus compris entre les mêmes limites par b, et enfin par ω l'arc et par k l'intégrale déterminée par tout ce qui n'est pas divisible par n.

- I. pour les valeurs de n, de la forme $4m+1$, on aura

$$\begin{aligned}
\Sigma \cos a\,k\,\omega &= -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{n} \\
\Sigma \cos b\,k\,\omega &= -\tfrac{1}{2} \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{n}, \quad \text{et ainsi} \\
\Sigma \cos a\,k\,\omega - \Sigma \cos b\,k\,\omega &= \pm\sqrt{n} \\
\Sigma \sin a\,k\,\omega &= 0 \\
\Sigma \sin b\,k\,\omega &= 0
\end{aligned}$$

- II. pour les valeurs de n, de la forme $4m+3$, on aura

$$\begin{aligned}
\Sigma \cos a\,k\,\omega &= -\tfrac{1}{2} \\
\Sigma \cos b\,k\,\omega &= -\tfrac{1}{2} \\
\Sigma \sin a\,k\,\omega &= \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{n} \\
\Sigma \sin b\,k\,\omega &= \mp\tfrac{1}{2}\sqrt{n} \\
\Sigma \sin a\,k\,\omega - \Sigma \sin b\,k\,\omega &= \pm\sqrt{n}
\end{aligned}$$

[1] pages 11 à 15.

Ces calculs de sommes y ont été démontrées en toute rigueur, et aucune autre difficulté ne subsiste ici que dans la détermination du signe de la quantité radicale. En effet, on sait concernant le signe en question, dans la mesure où cela dépend du nombre k, que le même signe doit toujours être valable pour toutes les valeurs de k qui sont résidus quadratiques de n, et le signe opposé à celui-ci pour toutes les valeurs de k qui sont pas résidus quadratiques de n. Ici toute la tâche se concentrera sur la valeur $k = 1$. et il est clair que, dès que le signe valable pour cette valeur sera connu, les signes pour toutes les autres valeurs de k en seront immédiatement déduisibles. Car il est vrai que dans cette question même, qui à première vue semble être considérée comme l'une des plus faciles, nous nous sommes heurtés à des difficultés inattendues, et la méthode par laquelle nous avons progressé jusqu'ici sans entrave nous prive complètement de toute aide ultérieure.

2.

Il ne sera pas déplacé, avant d'aller plus loin, d'avoir développé quelques exemples de sommes au moyen de calculs numériques qu'il conviendra de faire précéder de quelques observations générales.

I. Si n est un nombre premier de la forme $4m + 1$, on note par a' tous les résidus quadratiques de n compris entre 1 et $\frac{1}{2}(n-1)$ et par b' tous les non-résidus compris entre les mêmes limites, il est clair que tous les $n - a'$ seraient compris dans les a, et que tous les $n - b'$ le seraient dans les b : donc puisque tous les $a', b', n - a', n - b'$ couvrent l'ensemble des nombres $1, 2, 3.....n - 1$, tous les a' combinés avec les $n - a'$ incluront tous les a et de même tous les b' avec tous les $n - b'$ incluront tous les b. On aura

$$\begin{aligned}
\Sigma\ \cos\ a\,k\,\omega &= \Sigma\ \cos\ a'\ k\ \omega + \Sigma\ \cos(n-a')\ k\ \omega\\
\Sigma\ \cos\ b\ k\omega &= \Sigma\ \cos\ b'\ k\ \omega + \Sigma\ \cos(n-b')\ k\ \omega\\
\Sigma\ \sin\ a\,k\,\omega &= \Sigma\ \sin\ a'\ k\ \omega + \Sigma\ \sin(n-a')\ k\ \omega\\
\Sigma\ \sin\ b\,k\,\omega &= \Sigma\ \sin\ b'\ k\ \omega + \Sigma\ \sin(n-b')\ k\ \omega
\end{aligned}$$

Maintenant, quand on considère $\cos(n-a')k\ \omega = \cos a'\ k\omega$, $\cos(n-b')k\ \omega = \cos b'\ k\omega$, $\sin(n-a')k\ \omega = -\sin a'\ k\omega$, $\sin(n-b')k\ \omega = -\sin b'\ k\omega$, il est clair qu'en découle immédiatement

$$\begin{aligned}
\Sigma\ \sin\ a\ k\ \omega &= \Sigma\ \sin\ a'\ k\ \omega - \Sigma\ \sin\ a'\ k\ \omega = 0\\
\Sigma\ \sin\ b\ k\ \omega &= \Sigma\ \sin\ b'\ k\ \omega - \Sigma\ \sin\ b'\ k\ \omega = 0
\end{aligned}$$

La somme des cosinus prend cependant cette forme

$$\begin{aligned}
\Sigma\ \cos\ a\ k\ \omega &= 2\ \cos\ a'\ k\ \omega\\
\Sigma\ \cos\ b\ k\ \omega &= 2\ \cos\ b'\ k\ \omega
\end{aligned}$$

où l'on doit faire

$$\begin{aligned}
1 + 4\Sigma\ \cos\ a'\ k\omega &= \pm\sqrt{n}\\
1 + 4\Sigma\ \cos\ b'\ k\omega &= \mp\sqrt{n}\\
2\Sigma\ \cos\ a'\ k\ \omega - 2\Sigma\ \cos\ b'\ k\omega &= \pm\sqrt{n}
\end{aligned}$$

II. Dans le cas où n est de la forme $4m+3$, le complément de tout résidu de a à n sera un non-résidu, et le complément de tout b sera un résidu ; donc tous les $n - a$ s'accordent avec tous les b, et tous les $n - b$ avec tous les a. On obtient

$$\Sigma\ \cos\ a\,k\,\omega = \Sigma\ \cos(n-b)k\omega = \Sigma\ \cos\ b\,k\,\omega$$

par conséquent, lorsque tous les a et b combinés couvrent tous les nombres $1, 2, 3....n-1$. On a ainsi

$$\Sigma\ \cos\ a\,k\,\omega + \Sigma\ \cos\ b\,k\,\omega = \cos\ k\omega + \cos\ 2\ k\omega + \cos\ 3\ k\omega + \text{etc.} + \cos(n-1)k\ \omega = -1$$

en résumant

$$\Sigma\ \cos\ a\,k\,\omega = -\tfrac{1}{2}$$

$$\Sigma\ \cos\ b\ k\omega = -\tfrac{1}{2}$$

qui sont automatiquement satisfaites. Il en sera de même de

$$\Sigma\ \sin\ a\ k\ \omega = \Sigma\ \sin(n-b)k\ \omega = -\Sigma\ \sin\ b\ k\ \omega$$

d'où il ressort clairement les sommes

$$2\ \Sigma\ \sin\ a\ k\omega = \pm\sqrt{n}$$
$$2\ \Sigma\ \sin\ b\,k\,\omega = \mp\sqrt{n}$$

l'une dépendant de l'autre.

3.

Voici les calculs numériques pour quelques exemples :

I. Pour $n = 5$, il y a une valeur de a', qui est $a' = 1$ et une valeur de b', qui est $b' = 2$; on a

$$\cos\ \omega = +0.3090169944 \qquad \cos\ 2\ \omega = -0,8090169944$$

et ainsi $1 + 4\ \cos\ \omega = +\sqrt{5}$, $1 + 4\ \cos\ 2\omega = -\sqrt{5}$.

II. Pour $n = 13$, il y a trois valeurs pour a', qui sont $1, 3, 4$, et le même nombre de valeurs de b', qui sont $2, 5, 6$, on calcule ainsi

$\cos\ \omega$ =	+0,8854560257	$\cos\ 2\ \omega$ =	+0.5680647467
$\cos\ 3\ \omega$ =	+0,120 5366803	$\cos\ 5\ \omega$ =	-0,7485107482
$\cos\ 4\ \omega$ =	-0.3546048870	$\cos\ 6\ \omega$ =	-0,9709418174
Somme =	+0,6513878190	Somme =	-1,1513878189

Hine $1 + 4\Sigma\cos\ a'\ \omega = +\sqrt{13}$, $1 + 4\Sigma\ \cos\ b'\ \omega = -\sqrt{13}$.

III. Pour $n = 17$, on a 4 valeurs de a', ici $1, 2, 4, 8$, et le même nombre de valeurs pour b', qui sont $3, 5, 6, 7$. On peut calculer les cosinus

$\cos\ \omega$ =	+0.932472294	$\cos\ 3\ \omega$ =	+0.4457383 558
$\cos\ 2\ \omega$ =	+0,7390089172	$\cos\ 5\ \omega$ =	-0,2736629901
$\cos\ 4\ \omega$ =	+0,0922683595	$\cos\ 6\ \omega$ =	-0,60 26346364
$\cos\ 8\ \omega$ =	-0,9829730997	$\cos\ 7\ \omega$ =	-0,8502171357
Somme =	+0,7807764064	Somme =	-1,2807764065

Donc $1 + 4\Sigma\ \cos\ a'\ \omega = +\sqrt{17}, \quad 1 + 4\Sigma\ \cos\ b'\ \omega = -\sqrt{17}$.

IV. Pour $n = 3$, la valeur de a est unique, $a = 1$ à quoi correspond sin $\omega = +0.8660254038$.

Donc $2 \sin \omega \quad = \quad +\sqrt{3}$.

V. Pour $n = 7$, il y a trois valeurs pour a, qui sont $1, 2, 4$: on a donc les sinus

$$\begin{array}{rcl} \sin\ \omega & = & +0.7818314825 \\ \sin 2\ \omega & = & +0,9749279122 \\ \sin 4\ \omega & = & -0,4338837391 \\ \hline \text{Somme} & = & +1,3228756556, \end{array}$$

donc $\quad 2\ \Sigma \sin a\ \omega = +\sqrt{7}$.

VI. Pour $n = 11$, les valeurs de a sont $1, 3, 4, 5, 9$, auxquelles correspondent les sinus

$$\begin{array}{rcl} \sin\ \omega & = & +0,5406408175 \\ \sin 3\ \omega & = & +0,9898214419 \\ \sin\ 4\ \omega & = & +0,7557495744 \\ \sin\ 5\ \omega & = & +0,2817325568 \\ \sin\ 9\ \omega & = & -0,9096319954 \\ \hline \text{Somme} & = & +1,6583123952, \end{array}$$

et donc $\quad 2\ \Sigma\ \sin\ a\ \omega = +\sqrt{11}$.

VII. Pour $n = 19$, les valeurs de a sont $1, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 16, 17$, auxquelles correspondent les sinus

$$\begin{array}{rcl} \sin\ \omega & = & +0,3246994692 \\ \sin\ 4\ \omega & = & +0.9694002659 \\ \sin\ 5\ \omega & = & +0,9965844930 \\ \sin\ 6\ \omega & = & +0,9157733267 \\ \sin\ 7\ \omega & = & +0.7357239107 \\ \sin\ 9\ \omega & = & +0.1645945903 \\ \sin 11\ \omega & = & -0,4759473930 \\ \sin 16\ \omega & = & -0,8371664783 \\ \sin 17\ \omega & = & -0,6142127127 \\ \hline \text{Somme} & = & +2,1794494718, \end{array}$$

donc $\quad 2\ \Sigma\ \sin\ a\ \omega = +\sqrt{19}$.

Transcription de la section 356 des Recherches arithmétiques (page 463 et suivantes dans le livre aux éditions Jacques Gabay).

On doit surtout remarquer les équations auxiliaires par lesquelles on détermine, pour une valeur quelconque de n, les sommes des périodes qui forment l'ensemble Ω : elles sont liées d'une manière étonnante avec les propriétés les plus abstraites du nombre n. Mais ici nous restreindrons nos considérations aux deux cas suivants : 1^o à l'équation du second degré qui donne les sommes des périodes de $\frac{n-1}{2}$ termes ; 2^o quand $n-1$ est divisible par 3, à l'équation du troisième degré qui donne les sommes des périodes de $\frac{n-1}{3}$ termes.

Faisons, pour abréger, $\frac{1}{2}(n-1) = m$ et désignons par g une racine primitive quelconque, Ω sera composé de deux périodes $(m, 1)$ et (m, g), la première contenant les racines $[1], [g^2], [g^4], ...[g^{n-3}]$, et la seconde les racines $[g], [g^3], [g^5], ... : [g^{n-2}]$. Supposons que les résidus minima positifs des nombres $g^2, g^4, ...g^{n-3}$ suivant le module n, soient R, R', R'', etc., abstraction faite de l'ordre, et que les résidus des nombres $g, g^3 \cdots g^{n-2}$ soient N, N', N'' etc. ; les racines des périodes $(m, 1)$ et (m, g) coïncideront avec

$$[1], [R], [R'], [R''], etc., \quad [N], [N'], [N''], etc.$$

respectivement. Or il est clair que tous les nombres $1, R, R', R''$, etc. sont résidus quadratiques de n ; comme ils sont différents, moindres que n et au nombre de $\frac{n-1}{2}$, il s'ensuit que ce sont effectivement tous les résidus quadratiques de n, positifs et plus petits que lui (n^o 96). Il suit de là en même temps, que les nombres N, N', N'', etc. qui sont tous différents entre eux, et des nombres $1, R, R'$, etc., et qui, joints à ces derniers, épuisent les nombres $1, 2, 3, ..., n-1$ sont tous les non-résidus quadratiques positifs de n et plus petits que lui. Si l'on suppose maintenant que l'équation dont $(m, 1), (m, g)$ sont racines, soit

$$x^2 - Ax + B = o,$$

on a

$$A = (m, 1) + (m, g) = -1, \quad B = (m, 1) \times (m, g);$$

or (n^o 345),

$$(m, 1) \times (m, g) = (m, N+1) + (m, N'+1) + (m, N''+1) + \text{etc.} = W$$

et peut par conséquent être mis sous la forme

$$\alpha(m, 0) + \beta(m, 1) + \gamma(m, g).$$

Pour déterminer les coefficients α, β, γ, observons : 1^o. qu'on a $\alpha+\beta+\gamma = 0$, puisque le nombre des périodes de W est m ; 2^o. que $\beta = \gamma$ (n^o 350) puisque $(m, 1) \times (m, g)$ est une fonction invariable des sommes $(m, 1)$ et (m, g) qui composent la période plus grande $(n-1, 1)$ 3^o. que tous les nombres $N+1, N'+1, N''+1$, etc. étant compris entre les limites 2 et $n+1$, il est clair que nulle période de W ne coïncidera avec $(n, 0)$, ou qu'il n'y en aura qu'une, par exemple (m, n) ; on aura donc $\alpha = 1$ ou $= 0$ suivant que $n-1$ sera ou ne sera pas parmi les nombres N, N', etc.; il suit de la que dans le premier cas on aura $\alpha = 1, \beta = \gamma = \frac{m-1}{2}$ et dans le second $\alpha = 0, \beta = \gamma = \frac{m}{2}$ et comme β et γ doivent être entiers, le premier cas aura lieu, c'est-à-dire que $n-1$ ou -1 se trouvera parmi les non-résidus de n lorsque m sera impair, c'est-à-dire lorsque n sera de la forme $4n+3$; le second aura lieu au contraire quand m sera pair, c'est-à-dire quand n sera de la forme $4n+1$. Ainsi, comme on a $(m,0)=m$ et $(m,1)+(m,g)=-1$, le produit cherché sera donc, suivant les mêmes circonstances, $\frac{1}{2}(m+1)$ ou $\frac{-1}{2}m$ et l'équation sera, dans le premier cas,

$$x^2+x+\frac{1}{4}(n+1)=0,\ \text{qui donne}\ x=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}i\sqrt{n},$$

et dans le second

$$x^2+x-\frac{1}{4}(n-1)=0,\ \text{qui donne}\ x=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{n}.$$

Ainsi, quelle que soit la racine que l'on ait prise pour [1], si l'on désigne par $\Sigma[R]$ la somme de toutes les racines $[1],[R],[R']$, etc., et par $\Sigma[N]$ celle des racines $[N],[N']$, etc., on aura

$$\Sigma[R]-\Sigma[N]=\pm\sqrt{n}\ \text{ ou }\ =\pm i\sqrt{n},$$

suivant que $n\equiv 1$ ou $\equiv 3$ (mod. 4). Il suit facilement de là que k étant un nombre entier quelconque non-divisible par n, on a

$$\Sigma\ \cos\tfrac{kRP}{n}-\Sigma\ \cos\tfrac{kNP}{n}=\pm\sqrt{n},\qquad \text{ou }=0,$$

$$\Sigma\ \sin\tfrac{kRP}{n}-\Sigma\ \sin\tfrac{kNP}{n}=0,\qquad \text{ou }=\pm\sqrt{n},$$

suivant que $n\equiv 1$ ou $\equiv 3$ (mod. 4), théorèmes remarquables par leur élégance.

Au reste, nous ferons observer que le signe supérieur a lieu quand k est l'unité, ou plus généralement quand k est résidu quadratique de n, et le signe inférieur, quand k est non-résidu. Ces théorèmes conservent toute leur élégance, ou plutôt en acquièrent encore davantage, lorsque n est un nombre composé quelconque ; mais nous sommes forcés de supprimer ces recherches qui demanderaient trop de développement, et de les réserver pour une autre occasion.