## Correspondance mensuelle pour promouvoir les sciences de la Terre et du Ciel.

## Août 1800

## Carl Friedrich Gauss

### XV. Calcul de la date de Pâques, par le Docteur Gauss à Braunschweig.

Le but de cet essai n'est pas de discuter de la procédure habituelle pour déterminer la date de Pâques, que l'on trouve dans tous les manuels de chronologie mathématique et qui est en soi assez simple dès lors que l'on connaît la signification et l'usage des termes techniques couramment employés — nombre d'or, épacte, douzième limite, cercle solaire et lettre du dimanche — et que l'on dispose des tables auxiliaires nécessaires ; mais plutôt de présenter une méthode pour effectuer cette tâche indépendamment de ces concepts auxiliaires et fondée uniquement sur les opérations arithmétiques les plus simples.

Nous espérons qu'une solution purement analytique sera proposée. Cette méthode sera non seulement utile au simple amateur qui ne la connaît pas, ou qui se trouve dans l'obligation de déterminer la date d'une fête dans des circonstances difficiles, sans outils adéquats, ou pour une année pour laquelle il ne peut consulter de calendrier, mais elle sera également recommandée à l'expert par sa simplicité et sa facilité d'utilisation. Les règles suivantes, que quiconque le juge utile pourra aisément mémoriser, s'appliquent à deux siècles, de 1700 à 1999. Elles peuvent cependant être facilement adaptées à tout autre siècle en modifiant les constantes et en ajoutant une exception mineure, due à la conception de notre calendrier et qui ne se produit pas durant cette période.

I. Divisez le nombre d'années pour lequel vous souhaitez calculer la date en question par 19, par 4 et par 7, et nommez les restes de ces divisions respectivement $a, b$ et $c$. Si une division est paire, notez le reste correspondant ; on ne tient plus compte des quotients. Il en va de même pour les divisions suivantes.

II. Diviser $19a + 23$ par 30, et nommer le reste $d$.

III. Enfin, divisez $2b + 4c + 6d + 3$ ou $2b + 4c + 6d + 4$, selon que l'année donnée se situe entre 1700 et 1799, ou entre 1800 et 1899, par 7 et nommez le reste $e$.

Alors Pâques tombe le $22 + d + e$ mars, ou si le nombre $d + e$ est supérieur à 9, le $d + e - 9$ avril.

*Exemples.*

Pour l'année 1744, diviser 1744 par 19 donne le reste $15 = a$ ; diviser par 4 donne également $b = 0$ ; diviser par 7 donne le reste $1 = c$. On obtient ainsi $19a + 23 = 308$, qui, divisé par 30, donne le reste $8 = d$. Enfin, $2b + 4c + 6d + 3 = 55$, divisé par 7, donne le reste $6 = e$. Par conséquent, Pâques

Références : https://archive.org/details/bub_gb_fHEEAAAAQAAJ, voir p. 706/1201 en bas à gauche (mais manquent les pages 126 et 127 du texte original) ainsi qu'ici https://webdoc.sub.gwdg.de/ebook/e/2005/gausscd/html/Osterformel/Seite1.htm.

Transcription en LaTeX : Denise Vella-Chemla, mars 2026 (utilisation outils Google Lens et translate).

tombe le 22 mars, le 8 mars et le 6 mars, soit le 5 avril, qui correspond au 149e anniversaire de Pâques.

Pour 1800, $a = 14, b = 0, c = 1$ ; $19a + 23 = 289$, $d = 19; 2b + 4c + 6d + 4 = 122$. Donc $e = 3$ ; ainsi Pâques tombe le $19 + 3 - 9d$ le 13 avril.

Pour 1818, on a $a = 13, b = 2, c = 5; 19a + 23 = 270$, donc $d = 0; 2b + 4c + 6d + 4 = 28$, donc $e = 0$, par conséquent, Pâques est le 22 mars.

Dans le dernier exemple, Pâques tombe le jour le plus tôt possible, car il est parfaitement évident que $d$ et $e$ ont ici leurs valeurs minimales. Par ailleurs, il est clair que Pâques ne peut jamais avoir lieu après le $22 + 29 + 6$ mars soit le 26 avril, puisque $d$ ne peut être supérieur à 29 et $e$ ne peut être supérieur à 6 ; or, aux XVIIIe et XIXe siècles, 29 ne pouvait être atteint [1]. Le jour de Pâques le plus tardif est donc le 26 avril.

Cette période, le 25 avril, correspond au jour où $d = 28$ et $e = 6$ coïncident. Ces deux conditions se sont réunies en 1734 et 1886. À d'autres siècles, $d = 29$ aurait pu se produire, mais dans ce cas, l'exception mentionnée précédemment s'applique, ramenant la valeur de $d$ à 28. Le 25 avril est donc bien le dernier jour possible. Développer davantage ce point serait trop long ici.

L'analyse qui permet d'établir la formule ci-dessus repose en réalité sur des principes d'arithmétique supérieure, auxquels je ne peux me référer actuellement dans aucun écrit, et qui ne peuvent donc évidemment pas être présentés ici dans toute leur simplicité ; en attendant, ce qui suit suffira toutefois à se faire une idée du fondement des préceptes et à se convaincre de leur exactitude.

I. Le nombre d'or d'une année de notre calendrier est, comme chacun sait, le reste de la division de l'année par 19, auquel on ajoute 1. Il faut cependant remplacer 1 par 19 si le résultat est pair. Il en découle aisément ce que sera le nombre d'or de cette année.

II. La limite de Pâques, c'est-à-dire le jour de la pleine lune de Pâques, qui tombe une année sur deux aux XVIIIe et XIXe siècles, les valeurs $(0, 1, 2, \ldots, 18)$ peuvent être utilisées, et par conséquent aussi $d$, pour lequel la valeur 29 peut être obtenue un nombre indéterminé de fois.

L'année dont le nombre d'or est 1 tombe le 13 avril, et ainsi de suite sur un cycle de 10 ans, jusqu'à l'année dont le nombre d'or est inclus. Chaque année est décalée de 11 jours, soit de 19 jours, par rapport à l'année précédente, selon qu'elle tombait en avril ou en mars, comme on peut facilement le constater à partir d'un tableau des limites pour la date de Pâques. Par conséquent, l'année dont le nombre d'or est 2, la limite tombe le 2 avril, l'année suivante le 22 mars, l'année dont le nombre d'or est 4, le 1er avril, et ainsi de suite. Il s'ensuit que la limite ne tombe jamais avant le 1er mars ni après le 19 avril. Si l'on suppose donc qu'elle tombe le 21 mars pour l'année dont le nombre d'or est 2 (en réduisant les jours d'avril à mars), alors $D$ se situe toujours entre les limites 2 et 29 incluses. Pour $a = 0$, donc $D = 23$, pour $a = 1$, $D = 23 - 11$, pour $a = 2, D = 23 - 2 \times 11$, pour $a = 3, D = 23 - 2 \times 11 + 19$, et ainsi de suite ; et généralement $D = 23 + 19a - 30p$, où $p$ et $q$ sont déterminés par les conditions que $p + q = a$ et que $D$ se situe entre les limites 0 et 29 inclus. Par

1. La raison en est qu'il n'existe que 9 valeurs différentes pour $a$.

conséquent, $D = 23 + 19a - 30p$ devient divisible par 30, d'où l'on conclut facilement que $D$ est le reste de la division de $23 + 19a$ par 30. Par conséquent, $D = d$, ou la limite pour Pâques, tombe le $21 + d$ mars.

III. Pâques tombe désormais le premier dimanche suivant la date borne inférieure pour la pleine lune d'Otter, donc au moins un jour, au plus deux jours avant, et dans ce cas pas avant le $22+d$ mars. Si l'on prend la pleine lune d'Otter comme limite, souvent, cette date tombe entre le $22 + d + E$ mars et $E$ inclus, et doit être déterminée par la condition que ce jour soit un dimanche, pour un reste compris entre 0 et 6. Cette condition peut s'exprimer purement arithmétiquement de la manière suivante : le nombtre de jours entre le $22 + d + E$ mars de l'année donnée et un dimanche donné doit constituer un nombre de jours divisible par 7 (un nombre entier de semaines). Il faut donc supposer un dimanche donné ; je choisis le 21 mars 1700 à cet effet. Si l'on appelle $A$ le numéro de l'année donnée, et $i$ le nombre d'années bissextiles comprises entre 1700 et l'année $A$, y compris toute année bissextile égale à 1, alors $i$ sera également le nombre de jours bissextiles entre le 21 mars 1700 et le jour de Pâques de l'année $A$, et le nombre total de jours entre le 21 mars 1700 et le $22 + d + E$ mars de l'année $A$ sera $= 1 + d + E + i + 365(A - 1700)$.

Il est tout aussi évident qu'entre 1700 et 1799, cela fera

$$i = \frac{1}{4}(A - b - 1700)$$

Entre 1800 et 1899, cependant,

$$i = \frac{1}{4}(A - b - 1700) - 1.$$

Pour déterminer $E$, on a donc l'expression

$$1 + d + E + 365(A - 1700) + \frac{1}{4}(A - b - 1700)$$

ou

$$d + E + 365(A - 1700) + \frac{1}{4}(A - b - 1700)$$

en fonction de la divisibilité de $F$ par 7 et en fonction du fait que l'année soit entre 1700 et 1799 ou entre 1800 et 1899. Par conséquent, un nombre divisible par 7 doit également être obtenu en ajoutant un multiple de 7 à ce nombre, ou en le soustrayant de ce nombre, ou encore en soustrayant ce nombre d'un multiple de 7. J'ajoute d'abord ceci, pour éliminer la fraction, $\frac{7}{4}(A - b - 1700)$, qui, comme on peut facilement le voir, est divisible par 7 ; de là, j'obtiens

$$1 + d + E + 367(A - 1700) - 2b$$

ou

$$d + E + 367(A - 1700) - 2b$$

J'obtiens aussi également du $364(A - 1700)$,

$$d + E + 3A - 5099 - 2b$$

ou

$$d + E + 3A - 5100 - 2b.$$

De plus, en ajoutant 5096, on obtient

$$d + E + 3A - 3 - 2b$$

ou

$$d + E + 3A - 4 - 2b$$

Enfin, $3A - 3c$, qui est apparemment divisible par 7, est soustrait.

$$d + E + 3c - 3 - 2b$$

ou

$$d + E + 3c - 4 - 2b$$

En soustrayant $7c + 7d$, on obtient

$$3 + 2b + 4c + 6d - E$$

ou

$$4 + 2b + 4c + 6d - E$$

qui doit donc être divisible par 7. Il en ressort clairement que $E$ sera le reste que l'on obtient lorsqu'on calcule

$$3 + 2b + 4c + 6d$$

ou

$$4 + 2b + 4c + 6d$$

qui, divisé par 7, donc $E = e$.

Elle tombe donc souvent le $22 + d + e$ mars, ou (parfois) le $d + e - 9$ avril.

Les deux règles générales pour calculer la date de Pâques, selon le calendrier julien et le calendrier grégorien.

| Elle provient de la division | avec | le reste |
|---|---|---|
| l'an | 19 | $a$ |
| l'an | 4 | $b$ |
| l'an | 7 | $c$ |
| le nombre $19a + M$ | 30 | $d$ |
| le nombre $2b + 4c + 6d + N$ | 7 | $e$ |

Pâques tombe le $22 + d + e$ mars ou le $d + e - 9$ avril.

$M$ et $N$ trouve les nombres qui, dans le calendrier julien, ont des valeurs qui restent inchangées indéfiniment, tandis que dans le calendrier grégorien, elles restent inchangées pendant au moins 100 ans ; à savoir, dans le premier, $M = 15, N = 6$ ; dans le second, de son introduction jusqu'en 1699, $M = 12, N = 2$.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| pour | $1700 \ldots 1799$ | $M = 23, N = 3$ | pour | $2100 \ldots 2199$ | $M = 24, N = 6$ |
| pour | $1800 \ldots 1899$ | $M = 23, N = 4$ | pour | $2200 \ldots 2299$ | $M = 25, N = 0$ |
| pour | $1900 \ldots 1999$ | $M = 24, N = 5$ | pour | $2300 \ldots 2399$ | $M = 26, N = 1$ |
| pour | $2000 \ldots 2099$ | $M = 24, N = 5$ | pour | $2400 \ldots 2499$ | $M = 25, N = 1$ |

En général, les valeurs de $M$ et $N$ pour un siècle donné, de $100k$ à $100k+99$, peuvent être trouvées dans le calendrier grégorien selon la règle suivante :

Il y a $k$ $\begin{Bmatrix} 3 \\ 4 \end{Bmatrix}$divise les quotients (entiers) $\begin{Bmatrix} p \\ q \end{Bmatrix}$ où aucun rétroviseur n'est pris des restes ;

Alors c'est : $\begin{Bmatrix} M \\ N \end{Bmatrix}$ est le reste de la division de $\begin{Bmatrix} 15+k-p-q \\ 4+k-q \end{Bmatrix} par \begin{Bmatrix} 30 \\ 7 \end{Bmatrix}$.

*Exemple.*

Pour les 100 années de 4700 à 4799, $k = 47, p = 15, q = 11$ ; donc $15+k-p-q = 36; 4+k-q = 40$ ; donc $M = 6, N = 5$. Ainsi, par exemple, pour l'année 4763, $a = 13, b = 3, c = 3, 19a + M = 253, d = 13, 2b+4c+6d+N = 101, e = 3$. Pâques tombe le $13+3-9d$, c'est-à-dire le 7 avril selon le calendrier grégorien.

Selon la méthode julienne, cependant, $19a + M = 262, d = 22, 2b + 4c + 6d + N = 156, e = 2$. Donc Pâques tombe le $22 + 2 - 9 = 15$ avril.

Le calendrier grégorien ne prévoit que deux exceptions aux règles ci-dessus.

I. Si le calcul indique que Pâques tombe le 26 avril, on utilise toujours le 19 avril. Il est facile de constater que ce cas ne peut se produire que si le calcul donne $d = 29$ et $e = 6$ ; la valeur 29 ne peut être obtenue que si $11M + 11$ divisé par 30 donne un reste inférieur à 19 ; pour cela, $M$ doit prendre l'une des 19 valeurs suivantes

$$0, 2, 3, 5, 6, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 21, 22, 24, 25, 27, 29.$$

Si le calcul donne $d = 28, e = 6$, et que l'on ajoute la condition que $11M + 11$ par 30 donne un reste inférieur à 19, si Pâques ne découle pas du calcul, mais plutôt le 25, mais plutôt le 18 avril, mais est facilement négligé.

Il est facile de voir que ce cas ne peut se produire que dans les siècles où $M$ a l'une des huit valeurs suivantes : $2, 5, 10, 13, 16, 21, 24, 29$.

Ces deux exceptions mises à part, les règles ci-dessus sont tout à fait générales.