DISCUSSIONS

"La conjecture de Goldbach peut être résolue en une minute" : Sur un prétendu problème de l'intuitionnisme

Alexander George

Selon l'intuitionnisme, les mathématiques sont l'étude de certains aspects de l'expérience humaine rendus possibles par nos capacités de construction mentale. Selon cette conception, une caractéristique importante de cette expérience (idéalisée à juste titre) est qu'elle est toujours finie dans le temps, sans être limitée par une limite temporelle particulière. Admettons ce cadre de base pour le reste. Cela conduit à une thèse centrale de l'intuitionnisme : il existe une différence fondamentale entre une tâche dont l'achèvement nécessite un nombre fini d'étapes (aussi important soit-il) et une tâche qui nécessiterait un nombre infini d'opérations, cette dernière étant une tâche dont l'achèvement ne répond à aucun aspect de l'expérience humaine qui est l'objet des mathématiques. Ce cadre de base mène à la thèse centrale via ce que j'appellerai l'affirmation de connexion : si un nombre fini d'opérations peut être accompli en un temps fini, un nombre infini d'opérations ne le peut pas.

Il a été suggéré que cette thèse centrale de l'intuitionnisme est réellement indépendante du cadre de base de l'intuitionnisme au motif que l'affirmation de connexion est fausse, c'est à dire que nous pouvons accomplir, en un temps fini, une tâche qui implique un nombre infini d'étapes. Considérons, par exemple, la conjecture de Goldbach : tout nombre pair (supérieur à 2) est la somme de deux nombres premiers. La conjecture est encore ouverte, mais, prétend-on, nous pouvons voir comment, en principe du moins, nous pourrions déterminer sa valeur de vérité en une minute. Nous pouvons en principe vérifier si 4 est Goldbach (c'est à dire est la somme de deux nombres premiers) en $1/2$ minute, et nous pouvons en principe vérifier si 6 est Goldbach en $1/4$ minute, et ainsi de suite. Puisque $\sum 1/(2^n) = 1$, il semble que nous puissions en principe déterminer en une minute au plus la valeur de vérité de la conjecture de Goldbach. Et l'intuitionniste ne peut s'opposer à aucune des capacités que cet argument suppose qu'il est logique d'attribuer à un mathématicien idéalisé : vérifier si le $n^{\text{ième}}$ nombre pair (supérieur à 2) est Goldbach en $60/(2^n)$ secondes est sûrement quelque chose que l'intuitionniste nous accordera comme étant en principe possible à faire.

Cette proposition a été longuement débattue, et récemment, elle a été remarquée dans le contexte de l'intuitionnisme [1]. Voici l'objet de la présente note : cet argument en faveur de l'indépendance de la thèse centrale de l'intuitionnisme par rapport au cadre général de l'intuitionnisme (que nous tenons, encore une fois, pour les besoins de cette discussion, comme universellement admis) suppose, pour l'essentiel, la négation de cette thèse centrale (et pose donc la question suivante). Pourquoi ? Parce que cet argument en faveur de l'indépendance procède d'une attaque contre l'affirmation de connexion, attaque qui suppose, je le soutiendrai, la négation de la thèse centrale.

On peut le constater en considérant la base sur laquelle l'intuitionniste juge que nous pouvons en principe effectuer une action A : cela pourrait être en observant qu'il existe une extension finie de nos pouvoirs (mémoire, vitesse de calcul, etc.) qui permettrait l'achèvement réel de A (ou une collection complète de telles extensions) [2]. C'est pourquoi l'intuitionniste admettra que nous pouvons en

[1] Voir par exemple "A Problem for Intuitionism: The Apparemment Possibility of Performing Infinitely Many Tasks in a Finite Time" d'A. W. Moore, [Proceedings of the Aristotelian Society, 19891990], et les références qui y sont citées. Contrairement à l'analyse proposée dans le texte, la réponse de Moore s'appuie sur des thèses philosophiques générales concernant la nature du sens.

[2] Il y a des raisons d'être mécontent de cette caractérisation de "en principe" [voir, par exemple, mon article "The

principe vérifier si 4 est Goldbach en 30 secondes, que nous pouvons en principe vérifier si 6 est Goldbach en 15 secondes, etc. Mais est ce qu'il s'ensuit que nous pouvons en principe déterminer la valeur de vérité de la conjecture de Goldbach en une minute ? Seulement s'il existe une extension finie de nos pouvoirs (ou un ensemble complet de tels pouvoirs) qui permettrait une telle détermination. Mais c'est précisément ce qui n'existe pas à moins que nous ne puissions donner un sens à l'infini achevé, comme nous pouvons le faire au fini. L'inférence de *Nous sommes en principe capables de faire* A_1*, Nous sommes en principe capables de faire* A_2*,..., et Nous sommes en principe capables de faire* A_n à *Nous sommes en principe capables de faire* A_1*, et* A_2 *et... et* A_n est en effet légitime, pour tout n (en supposant que les A_i sont des actions mutuellement cohérentes). Pourquoi ? Parce que, étant donné les extensions finies de nos pouvoirs nécessaires pour effectuer les A_i, il existe une extension finie de nos capacités qui permettrait d'effectuer la conjonction (ou, si vous préférez, un ensemble de telles extensions). Supposer que les choses sont sensiblement similaires dans le cas de la conjecture de Goldbach revient à supposer que l'infini peut être assimilé au fini, exactement comme le nie la thèse centrale de l'intuitionnisme. Car ce dont nous aurions besoin, c'est d'un nombre infini d'extensions finies de nos pouvoirs, et la thèse centrale affirme en réalité qu'il n'existe pas de collection complète les contenant toutes. Par conséquent, affirmerait l'intuitionniste, il n'a pas été démontré que nous puissions en principe déterminer la valeur de vérité de la conjecture de Goldbach.

En bref, soutenir ainsi que nous pouvons, en principe, accomplir un nombre infini de tâches en un temps fini requiert une hypothèse très proche de la négation de la thèse centrale, à savoir que nous pouvons considérer comme une totalité achevée l'infinité d'extensions finies de nos pouvoirs nécessaires à une telle exécution. Par conséquent, cet argument en faveur de l'indépendance par rapport au cadre fondamental de la thèse centrale suppose de fait la négation de cette dernière et pose donc la question en litige. [3].

Département de philosophie
Lycée Amherst
Amherst, Massachusetts 01002

Conveyability of Intuitionism, an Essay on Mathematical Cognition", Journal of Philosophical Logic 17 (1988)]. Mais elle est utile pour illustrer mon propos, qui s'applique, je crois, à d'autres caractérisations. En proposant cette caractérisation de "en principe", l'intuitionniste suppose bien sûr une version de ce que j'ai appelé la thèse centrale de l'intuitionnisme. C'est légitime : nous imaginons un objecteur cherchant à convaincre l'intuitionniste, qui détient le cadre de base, adhère à l'affirmation de connexion et donc affirme la thèse centrale, que cette dernière est réellement indépendante de l'intuitionnisme, au motif que cette affirmation est fausse. Il incombe à l'objecteur de fournir un argument contre cette affirmation que l'intuitionniste ne considérera pas comme une pétition de principe, en particulier un argument qui, de son point de vue, ne présuppose pas la fausseté de la thèse centrale.

[3]Merci à Jyl Gentzler, Adrian Moore et Dan Velleman pour leurs commentaires utiles.