Traduction, depuis le latin avec Google traduction, de l'extrait de *Elementa Doctrinae Solidorum* de Leonhard Euler dans lequel est démontrée sa formule $S + F = A + 2$.

PROPOSITION IV.

§. 33. *Dans tout solide composé de segments plans, le nombre total de segments est supérieur de 2 au nombre d'angles solides ajouté au nombre d'axes.*

DÉMONSTRATION.

Posons comme précédemment :
nombre d'angles solides $= S$
nombre d'axes $= A$
nombre de segments $= H$
Il faut démontrer que $S + H = A + 2$.

Je dois admettre que je n'ai pas encore pu établir de démonstration rigoureuse de ce théorème ; toutefois, sa validité pour tous les types de solides étudiés ne sera pas difficile à constater, de sorte que l'induction suivante peut tenir lieu de démonstration.

1. Considérons donc d'abord une pyramide [Fig. 3.] dont la base $ABCDEFG$ possède un nombre quelconque de côtés et dont le sommet est H. Soit m le nombre de côtés de la base, et m le nombre de triangles reliant la base au sommet. Cette pyramide contient donc $m + 1$ hédras, dont m sont des triangles et un est un polygone à m angles (ou côtés). Le nombre d'hédras est donc $H = m+1$, et le nombre d'angles solides est également $S = m + 1$. Le nombre total d'angles plans est alors $3m + m = 4m$, d'où le nombre d'angles $A = 2m$. Par conséquent, puisque $H + S = 2m + 2$, on a dans ce cas $H + S = A + 2$.

[Fig. 2.] 2. Soit un solide cunéiforme de base quelconque, de côtés $ABCD$, définissant la droite EF. Si la base est un polygone à m côtés, le nombre d'angles du solide sera supérieur de deux, soit $S = m + 2$. Alors, outre la base elle-même, il y aura autant de segments que de côtés de la base, donc le nombre total de segments sera $H = m + 1$. Parmi ces segments, un seul, à savoir la base, est un polygone à m côtés ; les autres seront des triangles, sauf deux, qui sont nécessairement des quadrilatères, et dont la confluence forme la droite EF. Par conséquent, outre la base à m côtés, il y a $m - 2$ triangles et 2 quadrilatères, ce qui donne le nombre total de côtés ou d'angles plans $= m + 3(m - 2) + 2, 4 = 4m + 2$, et donc le nombre d'angles $A = 2m + 1$. Par conséquent, puisque $H + S = 2m + 3$, on aura $H + S = A + 2$.

[Fig. 4.] 3. Soit un solide semblable à une arche ou à un parallélépipède rectangle, contenu dans deux bases $ABCD$ et $EFGH$, chaque base ayant le même nombre de côtés $= m$, et le nombre d'angles solides étant $S = 2m$. Alors, outre ces deux bases, les autres segments sont des quadrilatères, et leur nombre est $= m$, d'où le nombre total de segments $H = m + 2$. Or, le nombre d'angles plans pour deux segments à m côtés et m segments quadrilatéraux est $= 2m + 4m = 6m$, et donc le nombre d'angles est $A = 3m$. Par conséquent, puisque $H+S = 3m+2$, on a $H+S = A+2$.

Transcription et correction de la traduction automatique : Denise Vella-Chemla, novembre 2025.

4. Supposons que le solide ait à nouveau deux bases $ABCDE$ [Fig. 5.] et FGH, qui, cependant, n'ont pas le même nombre de côtés. Par conséquent, pour l'autre base $ABCDE$, le nombre de côtés est supérieur à $m+n$, et pour l'autre base FGH, le nombre de côtés est égal à m, et le nombre d'angles du solide sera égal à $m+n+m$, soit $S = 2m+n$. Alors, en plus des deux bases, il y aura autant de côtés que l'autre base, celle qui a le plus grand nombre de côtés, à savoir $m+n$, d'où le nombre total de côtés est $H = m+n+2$; Puisqu'une base a $m+n$ côtés, l'autre m, et que parmi les hélices restantes, dont le nombre est $m+n$, il devrait y avoir autant de quadrilatères que de côtés de la base FGH, soit m, et les autres, dont le nombre est n, devraient être triangulaires, le nombre total d'angles plans est $= m+n+m+4n+3n = 6m+4n$, le nombre d'angles sera $A = 3m+2n$. Puisque $H+S = 3m+2n+2$, on aura encore $H+S = A+2$.

5. Supposons que le corps soit à nouveau terminé par deux bases $ABCD$ et LMN [Fig. 6], et qu'il possède des angles solides E, F, G, H, I et K autour de son milieu. Soit m le nombre de côtés de la base $ABCD$, n celui de la base LMN, et p le nombre d'angles solides autour du milieu, supérieur à m et à n. Le nombre total d'angles solides est donc $S = m+n+p$. Des angles du milieu de la feuille vers la base $ABCD$, p sommets sont dirigés, dont n sont des quadrilatères et $p-n$ triangles. Ainsi, avec deux bases, le nombre total de sommets est $H = 2p+2$. Puisque l'un des quadrilatères a m côtés, l'autre n côtés, et que le nombre de quadrilatères est $= m+n$, et celui des triangles $= 2p-m-n$, le nombre total d'angles plans est $= m+n+4(m+n)+3(2p-m-n) = 6p+2m+2n$, et donc le nombre d'angles est $A = 3p+m+n$. Par conséquent, lorsque $H+S = 3p+m+n+2$, on a à nouveau $H+S = A+2$.

6. En reprenant les hypothèses précédentes, avec $m > p$ et $p > n$, le nombre d'angles solides est toujours $S = m+n+p$. À partir de la base $ABCD$, m hédrons sont dirigés vers les angles solides moyens, dont p sont des quadrilatères et $m-p$ des triangles. De ces angles moyens, p hédrons sont dirigés vers l'autre base LMN, dont n sont des quadrilatères et $p-n$ des triangles. Le nombre total d'hédrons est donc $H = 2+m+p$ ou $H = m+p+2$, chaque hédron ayant m côtés, les autres n côtés, $p+n$ quadrilatères et $m-p+p-n$ ou $m-n$ triangles. Pour cette raison, le nombre total des angles du plan sera $= m+n+4(p+n)+3(m-n) = 4p+4m+2n$, et donc le nombre d'angles $A = 2p+2m+n$. Par conséquent, lorsque $H+S = 2p+2m+n$, on aura $H+S = A+2$.

7. Si le nombre d'angles médians solides p devient inférieur à la fois à m et à n, le nombre d'angles solides reste inchangé : $S = m+n+p$. Cependant, les angles médians issus de la base $ABCD$ sont des hexagones orientés, tandis que les angles issus de l'autre base sont des hexagones n. De chaque côté p, les hexagones sont quadrangulaires, de l'autre côté $m-p$, et de l'autre côté $n-p$, triangulaires. Le nombre total d'hexagones est donc $H = 2+m+n$, soit $H = m+n+2$. Le nombre d'angles plans est alors $H = m+n+42p+3(m+n-2p) = 2p+4m+4n$. Par conséquent, le nombre d'angles est $A = p+2m+2n$. et puisque $H+S = 2m+2n+p+2$, on aura $H+S = A+2$.

8. Bien que ces exemples puissent suffire à prouver la vérité de la proposition, il est néanmoins souhaitable de la confirmer davantage à partir de solides réguliers. Pour le tétraèdre, le nombre de faces est $H = 4$. Comme elles sont triangulaires, le nombre d'angles plans est de 12, et donc le nombre de côtés $A = 6$. Chaque angle solide étant formé de trois plans, leur nombre est $S = \frac{12}{3} = 4$. On en déduit $H+S = 8 = A+2$. Pour l'hexaèdre, $H = 6$. Chaque face étant quadrilatérale, le

nombre d'angles plans est de 24, et donc le nombre de côtés $A = 12$. Les trois angles plans formant un solide, le nombre de solides est $S = \frac{24}{3} = 8$, et donc $H + S = 14 = A + 2$. Pour l'octaèdre, $H = 8$, dont les sommets sont trilatéraux, le nombre total d'angles plans est de 24, et donc le nombre d'angles $A = 12$. Puisque les quatre angles plans forment un solide, le nombre d'angles solides est de $S = \frac{24}{4} = 6$, et donc $H + S = 14 = A + 2$.

Pour le dodécaèdre, on a $H = 12$. Ses faces sont des pentagones ; le nombre d'angles plans est donc de $5 \times 12 = 60$, et par conséquent le nombre d'angles $A = 30$. Comme les trois angles plans convergent vers le solide, le nombre d'angles solides est de $S = 20$, donc $H + S = 32 = A + 2$.

Pour l'icosaèdre, on a $H = 20$. Ses faces sont des triangles ; le nombre d'angles plans est de 60, et le nombre d'angles $A = 30$. Comme chaque angle solide est composé de cinq faces, leur nombre est de $S = 12$, donc $H + S = 32 = A + 2$.

Puisque la vérité de la proposition est donc évidente dans tous ces cas, il ne fait aucun doute qu'elle est vraie dans tous les solides, et la proposition semble ainsi suffisamment démontrée.

COROLL. I.

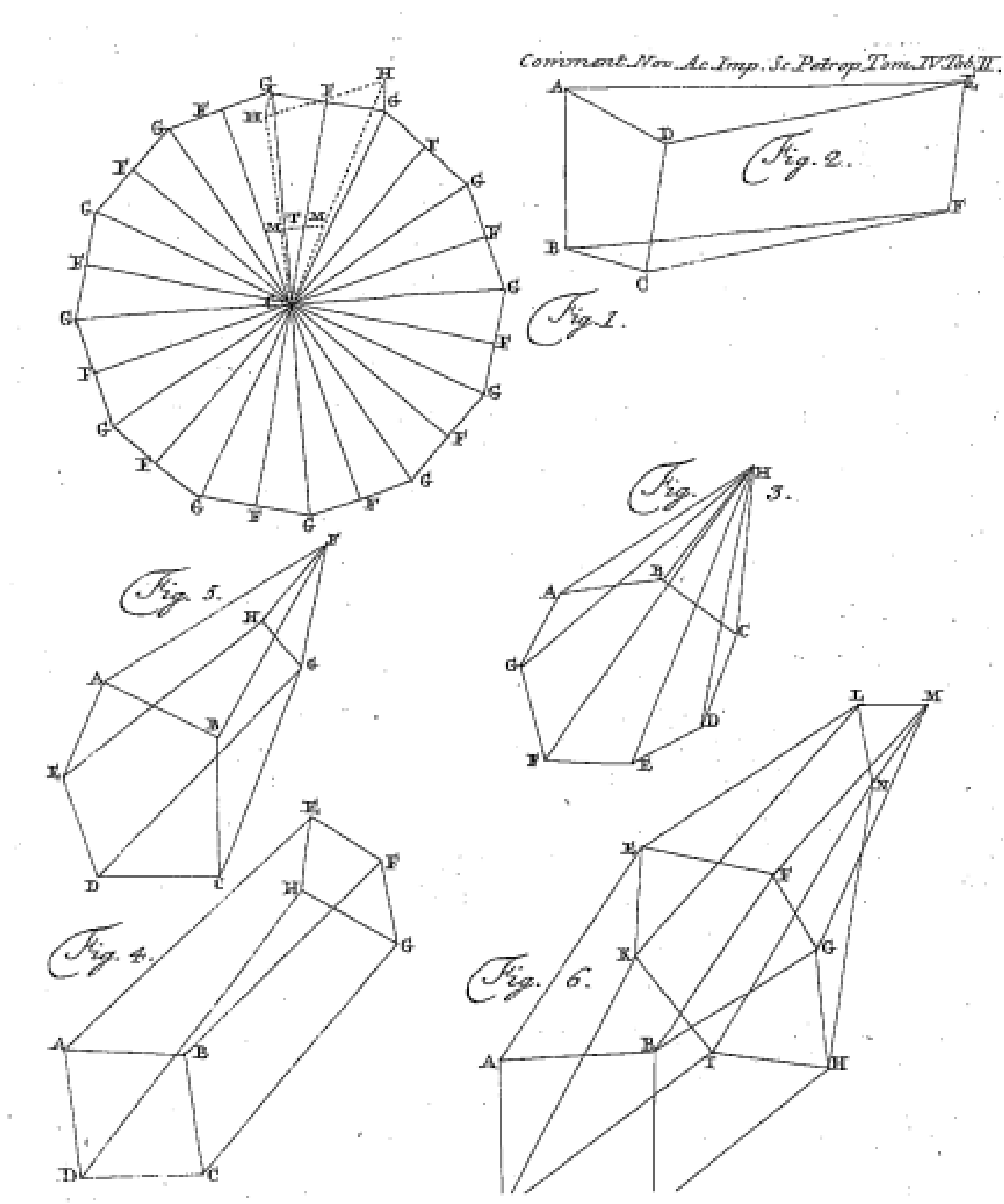
§. 34. Par conséquent, si, dans un solide quelconque, le nombre d'angles solides S est donné par le nombre d'hédrons H, on en déduit immédiatement le nombre d'angles A, car $A = H + S - 2$.

COROLL. 2.

§. 35. Si, dans un solide quelconque, le nombre d'angles solides S est donné par le nombre d'angles A, on en déduit facilement le nombre d'hédrons H, car $H = A - S + 2$.

COROLL. 3.

§. 36. Si, dans un solide quelconque, le nombre d'hédrons H est donné par le nombre d'angles A, on en déduit facilement le nombre d'angles solides S, car $S = A - H + 2$.



Transcription par outil d'OCR de l'original en latin.

PROPOSITIO IV.

§. 33. *In omni solido hedris planis incluso aggregatum ex numero angulorum solidorum et ex numero hedrarum binario excedit numerum acierum.*

DEMONSTRATI.

Scilicet wi ponatur vt hactenus :
numerus angulorum solidorum =S
numerus acierum = A
numerus hedrarum =H
demonstrandum est, esse $S + H = A + 2$.

Fateri equidem cogor, me huius theorematis demonstrationem firmam adhuc eruere non potuisse; interim tamen eius veritas pro omnibus solidorum generibus, ad quae examinabitur, non difficulter agnoscetur, ita vt. sequens inductio vicem demonstrationis gerere queat.

1. Consideremus ergo primo pyramidem quamcum [Fig. 3.] que super basi ABCDEFG quotcunque laterum constitutam et in apicem H definentem. Sit numerus laterum basis $= m$, totidemque triangula a basi ad apicem vsque affurgent. Includitur ergo haec pyramis $m + 1$ hedris, quarum m sunt triangula, vna vero polygonum m angulorum seu laterum. Erit itaque numerus hedrarum $H = m + 1$, atque numerus angulorum solidorum pariter est $S = m + 1$. Deinde numerus omnium angulorum planorum est $= 3m + m = 4m$ vnde numerus acierum erit $A = 2m$. Cum igitur fit $H + S = 2m + 2$ erit vtique hoc casu $H + S = A + 2$.

[Fig. 2.] 2. Sit solidum cuneiforme a basi quocunque laterum ABCD in aciem EF definens. Sit basis polygonum m laterum, erit numerus angulorum solidorum binario maior seu $S = m + 2$. Deinde praeter ipsam basin tot aderunt hedrae, quot latera habet basis, vnde numerus omnium hedrarum erit $H = m + 1$, ex his hedris vna nempe basis est polygonum m laterum, reliquae erunt triangula duabus exceptis, quae esse debent quadrilatera, suoque concursu aciem E F constituunt; praeter basin ergo m laterum, habentur $m-2$ triangula et 2 quadrilatera, ex quo numerus omnium laterum um seu angulorum planorum erit $= m+3(m-2)+2.4 = 4m+2$, hincque prodit numerus acierum $A = 2m + 1$. Cum ergo sit $H + S = 2m + 3$ erit $H + S = A + 2$.

[Fig. 4.] 3. Sit solidum arcae seu cistae simile, intra duas bases ABCD et EFGH contentum, vtraque autem basis eundem habeat laterum numerum $= m$, eritque numerus angulorum solidorum $S = 2m$. Deinde praeter has duas bases reliquae hedrae erunt quadrilaterae, earumque numerus $= m$, vnde numerus omnium hedrarum erit $H = m + 2$. Angulorum autem planorum numerus ob duas hedras m laterum et m hedras quadrilateras $= 2m + 4m = 6m$, hincque acierum numerus concluditur $A = 3m$. Quare, cum sit $H + S = 3m + 2$, erit denuo $H + S = A + 2$.

4. Habeat denuo solidum duas bases ABCDE, [Fig. 5.] et FGH, quae autem non eodem gaudeant laterum numero. Sit ergo pro altera basi ABCDE numerus laterum maior $= m+n$, pro altera vero basi FGH numerus laterum $= m$, eritque numerus angulorum solidorum $= m+n+m$, seu $S = 2m+n$. Tum praeter duas bases tot erunt hedrae, quot latera habet altera basis, quae maiori laterum numero gaudet, scilicet $m+n$, vnde omnium hedrarum numerus est $H = m+n+2$; quarum cum altera basis habeat latera $m+n$, altera m, inter reliquas vero hedras, quarum numerus est $m+n$, tot esse debeant quadrilaterae, quot basis FGH habet latera, nempe m, ceterae vero, quarum numerus est n, sint triangulares, omnium angulorum planorum numerus est $= m+n+m+4n+3n = 6m+4n$,

erit numerus acierum $A = 3m+2n$. Cum igitur sit $H+S = 3m+2n+2$, erit iterum $H+S = A+2$.

5. Sit corpus denuo in duas bases ABCD et [Fig. 6.] LMN terminatum, circa medium autem habeat angulos solidos E, F, G, H, I, K. Sit numerus laterum basis ABCD $= m$, basis LMN $= n$, numerus autem angulorum solidorum circa medium sit $= p$, qui sit maior, quam m et quam n. Erit ergo numerus omnivm angulorum solidorum $S = m+n+p$. Tum ab angulis folidis mediis ad basin ABCD dirigentur hedrae numero $= p$, quarum n erunt quadrilaterae, reliquae $p-n$ triangulares, sic cum duabus basibus numerus omnium hedrarum erit $= 2+p+p$ seu $H = 2p+2$. Quarum cum vna habeat m latera, alia n latera, et quadrilaterarum numerus sit $= m+n$, trigonalium $= 2p-m-n$, erit omnium angulorum planorum numerus $= m+n+4(m+n)+3(2p-m-n) = 6p+2m+2n$, ideoque numerus acierum prodit $A = 3p+m+n$. Quare cum fit $H+S = 3p+m+n+2$, erit denuo $H+S = A+2$.

6. Positis iisdem atque in casu praecedente, sit $m > p$ et $p > n$, erit vt ante numerus angulorum solidorum $S = m+n+p$. A basi autem ABCD iam m hedrae ad angulos solidos medios dirigentur, quarum erunt p quadrangulares, et $m-p$ triangulares. Ab angulis autem mediis ad alteram basin LMN dirigentur p hedrae, quarum erunt n quadrilaterae, et $p-n$ trigonales. Hinc ergo omnium hedrarum numerus erit $= 2+m+p$ seu $H = m+p+2$, quarum hedrarum vna est m laterum, alia n laterum, $p+n$ quadrilaterae, et $m-p+p-n$ feu $m-n$ trilaterae. Hanc ob rem omnivm angulorum planorum numerus erit $= m+n+4(p+n)+3(m-n) = 4p+4m+2n$, hincque acierum numerus $A = 2p+2m+n$. Vnde cum fit $H+S = 2p+2m+n$, erit $H+S = A+2$.

7. Si angulorum solidorum mediorum numerus p minor fit vtroque numero m et n, erit quidem vt ante angulorum solidorum numerus $S = m+n+p$. Sed iam a basi ABCD ad angulos medios dirigentur hedraem, ab altera vero bafi hedrae n, et vtrinque erunt p quadrangulares, ex illa vero parte $m-p$, ex hac vero $n-p$ triangulares. Vnde numerus omnium hedrarum erit $= 2+m+n$ seu $H = m+n+2$: angulorum autem planorum numerus erit $= m+n+4.2p+3(m+n-2p) = 2p+4m+4n$. Quare acierum numerus prodit $A = p+2m+2n$; et cum sit $H+S = 2m+2n+p+2$, erit $H+S = A+2$.

8. Etsi haec sufficere possent ad veritatem propositionis enincendam, tamen eam praeterea ex corporibus regularibus confirmare lubet. Pro tetraedro quidem erit numerus hedrarum $H = 4$, quae cum sint triangulares, erit omnium angulorum planorum numerus $= 12$, ideoque acierum numerus $A = 6$, et quia singuli anguli solidi ex tribus planis formantur, erit eorum numerus $S = \frac{12}{3} = 4$: hinc $H+S = 8 = A+2$. Pro hexaëdro est $H = 6$, et ob singulas hedras quadrilateras angulorum planorum numerus $= 24$, ideoque acierum numerus $A = 12$, ac dum terni anguli plani vnum solidum constituunt erit solidorum numerus $S = \frac{24}{3} = 8$, sicque $H+S = 14 = A+2$. Pro octaëdro est $H = 8$, cuius hedrae cum sint trilaterae, erit omnium angulorum planorum numerus $= 24$, ideoque numerus acierum $A = 12$, ac dum quaterni anguli plani vnum solidum formant, erit angulorum solidorum numerus $S = \frac{24}{4} = 6$ sicque $H+S = 14 = A+2$.

Pro dodecaedro est $H = 12$, cuius hedrae cum sint pentagonae, erit numerus angulorum planorum $5.12 = 60$, ideoque numerus acierum $A = 30$. Deinde quia terni anguli plani ad solidum concurrunt, erit numerus angulorum solidorum $S = 20$, ergo $H+S = 32 = A+2$.

Pro icosaedro est $H = 20$, cuius hedrae cum sint trigonales, erit angulorum planorum numerus $= 60$, numerusque acierum $A = 30$. Tum vero quia singuli anguli solidi constant quinis planis, erit eorum numerus $S = 12$, ideoque $H + S = 32 = A + 2$.

Cum igitur veritas propositionis in his omnibus casibus sibi constet, dubium est nullum, quin ea in omnibus omnino solidis locum habeat, sicque propositio sufficienter videtur demonstrata.

COROLL. I.

§. 34. Si ergo in quopiam solido detur numerus angulorum solidorum S cum numero hedrarum H, inde statim cognoscetur numerus acierum A, cum sit $A = H + S - 2$.

COROLL. 2.

§. 35. Datis autem in solido quocunque numero angulorum solidorum S cum numero acierum A, inde facile colligitur numerus hedrarum H, cum sit $H = A - S + 2$.

COROLL. 3.

§. 36. Datis autem in solido quocunque numero hedrarum H vna cum numero acierum A, inde facile reperietur numerus angulorum solidorum S, quia est $S = A - H + 2$.