Sur les produits de matrices idempotentes

J. A. Erdos [1]

Dans la référence [1], J. M. Howie considère le semi-groupe de transformations des ensembles et prouve (Théorème 1) que toute transformation d'un ensemble fini qui n'est pas une permutation peut s'écrire comme un produit d'idempotents. En vue d'établir une analogie entre les théories des transformations des ensembles finis et les transformations linéaires des espaces vectoriels de dimension finie, le théorème de Howie suggère un résultat correspondant pour les matrices. Le but de la présente note est de prouver un tel résultat.

Théorème : *Toute matrice carrée singulière peut s'écrire comme un produit de matrices idempotentes.*

Preuve. Si E est une matrice idempotente et si P est non-singulière, alors $P^{-1}EP$ est également idempotente et par conséquent, il suffit de prouver que tout matrice singulière est similaire à un produit d'idempotents. Deux preuves séparées de cela sont fournies. La première est une preuve inductive pour les matrices qui sont similaires à des matrices triangulaires et par conséquent, cette preuve s'applique en général seulement pour les matrices sur un corps algébriquement clos. Pour une preuve valide pour les matrices sur n'importe quel corps, une construction explicite est donnée en section II. Il est clair que la preuve II est suffisante à établir le résultat mais comme cette preuve s'appuie sur la "forme canonique rationnelle" et comme la preuve I est si simple, il est intéressant de fournir les deux preuves.

1. *Preuve pour les matrices qui sont similaires à des matrices triangulaires.*

On procède par induction sur l'ordre de la matrice, et on émet l'hypothèse d'induction que le théorème est valide pour de telles matrices d'ordre $n-1$. Supposons qu'une matrice A est d'ordre n. Comme A est singulière, elle est similaire à une matrice triangulaire supérieure dont la première colonne est nulle et ainsi on peut partitionner cette matrice ainsi

$$\left[\begin{array}{c:c:c} 0 & X & \alpha \\ \hdashline 0 & T & Y \\ \hdashline 0 & 0 & \lambda \end{array}\right]$$

où T est d'ordre $n-2$. Si T est singulière, il en est de même de

$$\begin{bmatrix} T & Y \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

1. reçu le 5 août 1966.

Transcription et traduction : Denise Vella-Chemla, avril 2025.

et par l'hypothèse d'induction,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & T & Y \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

peut s'écrire comme un produit d'idempotents. Mais

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & T & Y \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & X & \alpha \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & X & \alpha \\ 0 & T & Y \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

et la matrice par laquelle on multiplie à droite est idempotente. Donc il est suffisant de considérer le cas où T est non singulière.

Soit $Z = XT^{-1}$, et soit

$$B = \begin{bmatrix} 0 & X & 0 \\ 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Alors par l'hypothèse d'induction, B peut s'écrire comme un produit d'idempotents. On a maintenant deux cas.

(i) $ZY = \alpha$. Soit

$$E = \begin{bmatrix} 0 & Z & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 1 & -Z & 1 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & Z & \lambda + \alpha \\ 0 & I & Y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Alors un calcul direct montre que E et F sont idempotentes et, en utilisant $X = ZT$, que

$$EFB = A.$$

(ii) $ZY - \alpha = k \neq 0$. Soit

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ -\lambda/k & (\lambda/k)Z & 0 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & I & Y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

À nouveau, E et F sont des idempotents et

$$EFB = A.$$

Pour le cas de l'ordre 2, on a

$$\begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \lambda/\alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

si $\alpha \neq 0$ et

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ;$$

donc le théorème est valide pour les matrices d'ordre 2.

Le résultat s'ensuit.

II. *Preuve pour le cas général.*

Il est bien connu (voir par exemple [2], section III), que toute matrice est similaire à une matrice de la forme

$$A = \mathrm{diag}\{C_1, C_2, ..., C_k\},$$

où C_1 est une matrice carrée d'ordre n_i de la forme

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_i & b_i & c_i & \dots & z_i \end{bmatrix}$$

Comme A est singulière, on peut faire en sorte que C_k soit singulière et alors $a_k = 0$. Notons que si $n_i = 1, C_i$ se réduit à $[a_i]$. Cette réduction peut s'effectuer sur tout corps.

Soit E_0 la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{bmatrix}$$

et, pour $1 \leq i \leq n-1$, soit E_i

$$\left[\begin{array}{c:c:c} I_{i-1} & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & \begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & I_{n-i-1} \end{array}\right]$$

où I_t dénote la matrice identité d'ordre t. Alors la prémultiplication de toute matrice par E_i ajoute la $(i+1)^{\text{eme}}$ ligne à la i^{eme} ligne et réduit la $(i+1)^{\text{eme}}$ ligne à zéro. E_i est clairement idempotente.

Soit

$$N = E_{n-1}E_{n-2}\ldots E_1E_0.$$

Alors on voit facilement que

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

Pour $i \leq k$, soit $r_i = \sum_{j=1}^{i-1} n_j$ et, pour $i < k$ soit

$$\left[\begin{array}{c:c:c} I_{r_i} & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ a_i & b_i & \ldots & z_i & 0 \end{matrix} & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & I_{n-r_{i+1}-1} \end{array}\right]$$

Alors un calcul montre que, pour tout i, F_i est idempotent et que, si

$$B = NF_1F_2 \ldots F_{k-1},$$

alors B coïncide avec A excepté dans la dernière ligne, la dernière ligne de B étant nulle.

Maintenant soit

$$G = \left[\begin{array}{c:cccccc} I_{r_k} & & & & 0 & & \\ \hdashline & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ & b_k & c_k & d_k & \ldots & z_k & 0 \end{array}\right]$$

Alors, puisque $a_k = 0, GB = A$ et G est un idempotent. Par conséquent, A est le produit

$$GE_{n-1}E_{n-2} \ldots E_1E_0F_1F_2 \ldots F_{k-1}$$

et le théorème est démontré.

Références

1. J. M. Howie, The subsemigroup generated by the idempotents of a full transformation semi-group, *J. London Math. Soc.* 41 (1966), 707-716.
2. B. L. van der Waerden, *Modern algebra*, Vol. II (New York, 1950).

Université de Glasgow
Glasgow, W.2
Adresse actuelle : King's College, Londres, W.C.2.