

SUR L'ARTICLE DE RIEMANN,
"SUR LE NOMBRE DE NOMBRES PREMIERS
INFÉRIEURS À UNE GRANDEUR DONNÉE"

W. DITTRICH

Institut de physique théorique

Université de Tübingen

Auf der Morgenstelle 14

D-72076 Tübingen

Allemagne

Résumé : Cet article est dédié à l'un des trois membres du triumvirat de Göttingen, Gauß, Dirichlet et Riemann. C'est au dernier que je souhaiterais rendre honneur, et particulièrement à son article de 1859, qu'il présenta en personne à l'Académie de Berlin lors de son élection comme membre correspondant. Son article intitulé "Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe" ("Sur le nombre de nombres premiers inférieurs à une grandeur donnée") a révolutionné les mathématiques mondiales. Dans le présent article, on mène une analyse détaillée de l'article de Riemann, incluant des concepts nouveaux comme le prolongement analytique dans le plan complexe ; la formule du produit pour les fonctions entières ; et, en dernier lieu mais non des moindres, une étude détaillée des zéros et de celle qu'on appelle la fonction zeta de Riemann et de sa relation proche à la détermination du nombre de nombres premiers jusqu'à une certaine grandeur, i.e. une formule explicite pour la fonction de décompte des nombres premiers.

Courte biographie de Bernhard Riemann (1826 - 1866)

Bernhard Riemann est né à Breselenz près de Dannenberg en Basse-Saxe en 1826. Comme son père, il était d'abord supposé devenir pasteur, mais déjà au lycée, le talent extraordinaire de Riemann en mathématiques attira l'attention du Principal. On dit que Riemann lut le livre de Legendre de théorie des nombres de 859 pages qui lui avait été prêté par le Principal en une semaine. Il commença à étudier les mathématiques à Göttingen, où il assista aux cours de Gauß, bien qu'ils soient fermés aux étudiants de premier semestre. Riemann fut alors transféré à Berlin auprès de Jacobi et Dirichlet qui tous deux le soutinrent et l'encouragèrent ; il retourna alors à Göttingen. Sa thèse doctorale portait sur la théorie des fonctions. Pour avoir le droit d'enseigner comme professeur privé à Göttingen,

Référence : <https://arxiv.org/pdf/1609.02301.pdf>.

Traduction : Denise Vella-Chemla, août 2023.

les candidats devaient proposer trois sujets pour leur exposé d'habilitation, et normalement le chef du département choisissait le premier sujet de la liste. Le troisième sujet de Riemann était "Les bases de la géométrie", et quand il lut cela, Gauß, en tant que chef du département, choisit ce sujet pour l'exposé d'habilitation de Riemann. Très surpris, Riemann mit toutes ses recherches sur le sujet "Électricité, magnétisme, lumière et gravitation" de côté et deux mois avant sa leçon test, il créa les fondements de la géométrie différentielle. Gauß était content ! En 1855 Gauß mourut et Dirichlet lui succéda. Quand Dirichlet mourut quatre ans plus tard, Riemann prit en charge la chaire de mathématiques à l'Université de Göttingen. En 1862, il épousa Elise Koch, avec qui il eut une fille. Riemann attrapa la tuberculose et il chercha à améliorer sa santé dans le climat plus doux du Tessin, où il mourut au jeune âge de seulement 39 ans au Lac Majeur.

En plus de fonder la géométrie différentielle, Riemann fit d'autres contributions majeures ; son travail dans la théorie des fonctions a été particulièrement important ; son article "Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe" (Sur le nombre de nombres premiers inférieurs à une grandeur donnée), communiqué dans le Monatsberichte der Berliner Akademie, en novembre 1859, avec des découvertes sur la fonction zeta ; ses travaux sur la théorie de l'intégration, la transformée de Fourier, l'équation différentielle hyper-géométrique, et les équations différentielles hyperboliques et les problèmes de stabilité des solutions des équations différentielles partielles en physique mathématique. Riemann était influencé par les recherches en géométrie algébrique et topologie de ses collègues mathématiciens italiens Betti et Beltrami. La théorie de la relativité générale d'Einstein aurait été impensable sans la géométrie riemannienne.

Tous ces sujets ont occupé les mathématiciens et les physiciens théoristes pendant de nombreuses années et continueront de le faire pour de longues années encore. Aujourd'hui, exactement 150 ans après la mort de Riemann, le problème non résolu le plus grand en mathématiques pures est ce qu'on appelle l'hypothèse de Riemann, une conjecture énoncée par Riemann en 1859 dans son article sur le nombre de nombres premiers inférieurs à un certain entier positif donné x .

Les mathématiciens réalisèrent plus tard que l'hypothèse de Riemann gouverne la distribution des nombres premiers à un degré extraordinaire, ce pourquoi sa preuve est si avidement recherchée. Puisque tous les efforts de quelques-uns des meilleurs mathématiciens ont échoué jusque là, peut-être faudrait-il un autre Riemann.

Ceci est également vrai pour de nombreux modèles en théorie quantique des champs des particules élémentaires, où les résultats de Riemann sont de la plus haute importance pour

gérer les infinis à l'aide de sa régularisation de la fonction zeta. En mécanique quantique non relativiste, on a besoin de l'hamiltonien riemanien qui devient diagonalisé dans la base des nombres premiers. Le processus de mesure, i.e. l'opérateur agissant sur un objet qui nous fournira un ensemble de valeurs propres qui soit l'ensemble des nombres premiers est encore à trouver. On peut se demander quelle sorte de structure de symétrie se cache derrière un tel système physique.

N'oublions pas que le peu d'articles que Riemann a publié tout au long de sa vie traitent de problèmes physiques. De plus, du temps de Gauß, Dirichlet et Riemann, la distinction entre les disciplines mathématique et physique n'existait pas. En particulier, Riemann abordait les problèmes mathématiques et physiques non pas comme un analyste mais il les éclairait plutôt globalement d'un point de vue géométrique et topologique, ceci signifiant qu'il rendit de nombreux résultats de l'analyse plus compréhensibles en utilisant les nouvelles méthodes de la théorie des fonctions et du prolongement analytique au plan complexe dans sa totalité, simplifiant ainsi de nombreux problèmes de l'analyse réelle.

1 Vers la formule du produit d'Euler et l'extension de Riemann de la fonction zeta

Il y a une connexion très forte entre les sommes des inverses des entiers élevés à une puissance variable qu'Euler écrivit en 1737, et qu'on appelle maintenant la fonction zeta,

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \dots, \quad s > 1 \quad (1)$$

et les nombres premiers - qui, comme entiers, sont la véritable signature de la discontinuité. Euler considérait s comme une variable vraiment entière avec $s > 1$ pour assurer la convergence de la somme. En multipliant la définition de $\zeta(s)$ par $1/2^s$, on obtient

$$\frac{1}{2^s} \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^s} = \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{8^s} + \dots \quad (2)$$

et en soustrayant cela de $\zeta(s)$, on obtient

$$\begin{aligned} \zeta(s) - \frac{1}{2^s} \zeta(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^s} \\ \text{ou} \quad \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s) &= 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{9^s} + \frac{1}{11^s} + \dots \end{aligned} \quad (3)$$

Par conséquent tous les multiples du nombre premier $n = 2$ disparaissent de la somme originale de la définition de $\zeta(s)$. En bref, on trouve

$$\left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s) = \sum_{\substack{n=1 \\ \Lambda n \neq 2k}}^{\infty} \frac{1}{n^s}. \quad (4)$$

Ensuite, on multiplie ce dernier résultat par $1/3^s$ pour obtenir

$$\frac{1}{3^s} \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s) = \sum_{\substack{n=1 \\ \Lambda n \neq 2k}}^{\infty} \frac{1}{(3n)^s} = 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{9^s} + \frac{1}{15^s} + \frac{1}{21^s} + \dots \quad (5)$$

et ainsi, en soustrayant cela de $(1 - 1/2^s)\zeta(s)$, on a

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \left(1 - \frac{1}{3^s}\right) \zeta(s) &= 1 + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{11^s} + \dots \\ &= \sum_{\substack{n=1 \\ \Lambda n \neq 2k \\ \Lambda n \neq 3k}}^{\infty} \frac{1}{n^s}. \end{aligned} \quad (6)$$

Maintenant, on multiplie ce résultat par $1/5^s$ et etc. Comme on répète ce processus encore et encore, multipliant notre dernier résultat par $1/p^s$, où p dénote les nombres premiers successifs, on soustrait tous les multiples des nombres premiers. Par conséquent, puisque tous les entiers sont composés des nombres premiers (théorème fondamental d'Euclide de la théorie des nombres), on a enlevé tous les nombres du côté droit de la somme définissant $\zeta(s)$ - excepté pour le nombre 1. Ainsi notre résultat final est le produit

$$\left\{ \prod_{p \text{ premier}} (1 - p^{-s}) \right\} \zeta(s) = 1 \quad (7)$$

ou

$$\boxed{\zeta(s) = \prod_{p \text{ premier}} \frac{1}{1 - p^{-s}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad s > 1}. \quad (8)$$

L'assertion exacte d'Euler est : "Si ex serie numerorum primorum sequens formetur expressio $\prod_p \frac{p^s}{(p^s-1)}$ erit eius valor aequalis summae huius seriei $\sum_{n=1} \frac{1}{n^s}$."

Maintenant on va étendre la fonction zeta d'Euler dans le plan complexe C , ce qui est une découverte majeure de Riemann. Donc à partir de maintenant, s est une valeur complexe et on écrit

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots \quad \text{mais avec } \Re(s) > 1. \quad (9)$$

Ceci est une série infinie absolument convergente, qui est également vérifiée par le produit de tous les nombres premiers dans

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ premier}} \frac{1}{1 - p^{-s}} = \left(\frac{1}{1 - 2^{-s}} \right) \cdot \left(\frac{1}{1 - 3^{-s}} \right) \cdot \left(\frac{1}{1 - 5^{-s}} \right) \cdots \left(\frac{1}{1 - p^{-s}} \right) \cdots \quad (10)$$

$\zeta(s)$ n'a pas de zéros dans la région $\Re(s) > 1$, puisqu'aucun de ses facteurs n'a de zéros. Pourtant, avec l'extension de Riemann de zeta à tout le plan complexe, on sera capable de localiser les zéros aussi bien que les pôles. Pour montrer cela, on doit prolonger analytiquement la fonction zeta originale d'Euler à tout le plan complexe s . Un premier résultat dans cette direction sera obtenu à l'aide des séries qu'on dit de Dirichlet qui adviennent quand on calcule

$$\begin{aligned} (1 - 2^{1-s})\zeta(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} - 2^{1-s} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} (2n)^{-s} \\ &= 1 - \frac{2}{2^s} + \frac{1}{2^s} - \frac{2}{4^s} + \cdots = 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} - \frac{1}{6^s} + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s} =: \eta(s), \quad \text{série de Dirichlet.} \end{aligned} \quad (11)$$

Cette série est convergente pour tout $s \in \mathbb{C}$ avec $\Re(s) > 0$. Donc on peut définir

$$\boxed{\zeta(s) = \frac{1}{1 - 2^{1-s}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s} \quad \text{pour } \Re(s) > 0 \text{ et } 1 - 2^{1-s} \neq 0.} \quad (12)$$

Quand on écrit

$$\begin{aligned} \eta(s) + \frac{2}{2^s} \zeta(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s} + \frac{2}{2^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2n-1)^s} - \frac{1}{(2n)^s} + \frac{2}{(2n)^s} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s), \end{aligned} \quad (13)$$

on peut rassembler les résultats obtenus jusque-là en la suite d'égalités

$$\zeta(s) = \frac{1}{1 - 2^{1-s}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s} = \frac{\eta(s)}{1 - 2^{1-s}} = \frac{1}{s-1} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{(n+1)^s} - \frac{n-s}{n^s} \right). \quad (14)$$

Plus important, on peut prolonger $\zeta(s)$ dans le domaine de la bande critique $0 < \Re(s) < 1$. Bien sûr, les zéros dans le dénominateur de la représentation donnée ci-dessus doivent être exclus, i.e. de

$$1 - 2^{1-s} = 0 \quad (15)$$

découle

$$1 = e^{(1-s)\log 2} \quad (16)$$

signifiant que

$$2\pi in = (1-s)\log 2 \quad (17)$$

ou

$$s = 1 - \frac{2\pi in}{\log 2}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (18)$$

Ayant montré que la fonction zeta peut être prolongée analytiquement dans le demi-plan $\{s \in \mathbb{C} \mid \Re(s) > 0, s \neq 1\}$, on doit encore démontrer que $\zeta(s)$ a un pôle en $s = 1$:

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 1} \zeta(s) &= \lim_{s \rightarrow 1} \frac{(s-1)}{1-2^{1-s}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^{-s} = \lim_{s \rightarrow 1} \frac{(s-1)}{1-2^{1-s}} \log 2 \\ &= \lim_{s \rightarrow 1} \frac{1}{-\log 2 \cdot 2^{1-s} \cdot (-1)} \log 2 = \lim_{s \rightarrow 1} \frac{1}{2^{1-s}} = 1, \end{aligned} \quad (19)$$

où on utilise le théorème d'Abel $\lim_{x \rightarrow 1^-} \log(x+1) = \log 2$ et la continuité de $\log(x+1)$. Combien d'arguments environ de la fonction zeta sont égaux ou inférieurs à zéro ? Plus tard on montrera que la fonction zeta satisfait l'équation fonctionnelle

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s). \quad (20)$$

Cela définit $\zeta(s)$ dans la totalité du plan complexe s . Notons que le côté gauche passe par-dessus en changeant juste $s \rightarrow 1-s$ dans $\zeta(1-s)$, donc on peut calculer $\zeta(1-s)$, étant donné $\zeta(s)$, par exemple $\zeta(-15)$ en fonction de $\zeta(16)$.

Si s est un entier négatif pair, alors $\zeta(s) = 0$ parce que le facteur $\sin(\pi s/2)$ s'évanouit. Ce sont les zéros triviaux de la fonction zeta. Ainsi, tous les zéros non triviaux sont dans la bande critique de partie réelle comprise entre 0 et 1.

Voici une première curiosité qui nécessite davantage d'interprétation. Si on substitue dans l'équation fonctionnelle $s = -1$, on obtient

$$\zeta(-1) = 2^{-1} \pi^{-2} (-1) \Gamma(2) \zeta(2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\pi^2} (-1) \cdot 1 \cdot \frac{\pi^2}{6} = -\frac{1}{12}, \quad (21)$$

ce qui signifie que $\zeta(-1) = -1/12$.

Cette valeur de $\zeta(-1)$ régularisée n'a absolument rien à voir avec la représentation dans l'espace réel de $\zeta(-1)$ par la série divergente $\zeta(-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-1}} = 1+2+3+4+\dots$, qui nous

dit que la même fonction peut avoir différentes interprétations. Quelques mathématiciens très savants entretiennent l'opinion que la régularisation de la fonction zeta a balayé les laides divergences vers l'infini et a produit une "noisette dorée" de séries qui sont tout le contraire de non-convergentes. En théorie quantique, on observe le même phénomène, où la régularisation de la fonction zeta fait disparaître les infinis (effet Casimir, électrodynamique quantique, chromodynamique quantique et production de particules à proximité des trous noirs). Nous reviendrons sur ce point vers la fin de cet article.

2 Fonction de comptage des puissances de nombres premiers

Sur le chemin pour montrer la significativité des zéros de zeta pour compter les nombres premiers, Riemann a introduit une importante fonction pondérée de comptage des nombres premiers $f(x)$. On l'appellera $\Pi(x)$ alors que d'autres utilisent $J(x)$. Puisque cette fonction est de la plus haute importance, on commencera par l'introduire au moyen d'exemples.

D'abord, la définition de $\Pi(x)$ est donnée ainsi

$$\Pi(x) = \sum_{\substack{p^n < x \\ p \text{ premier}}} \frac{1}{n}, \quad (22)$$

i.e. pour toute puissance de premier p^n qui est plus petite que x , on somme ses fractions ; par exemple,

$$\begin{aligned} \Pi(20) = & \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{1} \right) + \left(\frac{1}{1} \right) + \left(\frac{1}{1} \right) + \left(\frac{1}{1} \right) \\ & \begin{array}{ccccccc} 2^1, 2^2, 2^3, 2^4 < 20 & 3^1, 3^2 < 20 & 5^1 < 20 & 7^1 < 20 & 11^1 < 20 & 13^1 < 20 & \\ + \left(\frac{1}{1} \right) + \left(\frac{1}{1} \right) & & & & & & \\ 17^1 < 20 & 19^1 < 20 & & & & & \end{array} \end{aligned} \quad (23)$$

Les crochets peuvent aussi être réorganisés ainsi :

$$\begin{aligned} \Pi(20) = & \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} \right) \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1} \right). \end{aligned} \quad (24)$$

La première paire de crochets compte le nombre de nombres premiers inférieurs à $x = 20$; la seconde paire compte les nombres premiers qui sont plus petits que la racine carrée de x , etc. Par conséquent, en notant $\Pi(x)$ le nombre de nombres premiers jusqu'à x , on obtient la formule de Riemann,

$$\Pi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \pi(x^{1/n}), \quad (25)$$

qui contient un nombre fini de termes, ce qui devient évident en regardant l'exemple suivant :

$$\begin{aligned} \Pi(x) &= \pi(x) + \frac{1}{2}\pi(\sqrt{x}) + \frac{1}{3}\pi(\sqrt[3]{x}) + \frac{1}{4}\pi(\sqrt[4]{x}) + \dots \\ x = 100 : \\ \sqrt{x} &= 10, \sqrt[3]{x} = 4.6415, \sqrt[4]{x} = 3.1622, \sqrt[5]{x} = 2.51188, \\ \sqrt[6]{x} &= 2.15\dots, \sqrt[7]{x} = 1.930\dots < 2. \end{aligned} \quad (26)$$

Si l'argument de Π est inférieur à 2, alors $\Pi(x) = 0$. Donc notre résultat pour $\Pi(100)$ est donné par

$$\begin{aligned} \Pi(100) &= \pi(100) + \frac{1}{2}\pi(10) + \frac{1}{3}\pi(4.6415) + \frac{1}{4}\pi(3.1622) \\ &+ \frac{1}{5}\pi(2.5118) + \frac{1}{6}\pi(2.15) + 0 + 0 + \dots \end{aligned} \quad (27)$$

En comptant les nombres premiers, on obtient

$$\begin{aligned} \Pi(100) &= 25 + \frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{5} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 1 \\ &= 28 \frac{8}{15} = 28.533. \end{aligned} \quad (28)$$

Donc, pour n'importe quel argument $x > 1$, la valeur $\Pi(x)$ peut être calculée par une somme finie. Jusque là, on a appris que $\Pi(x)$ compte les nombres premiers. Évidemment, $\Pi(x)$ est une fonction en escalier qui commence en $\Pi(0) = 0$ et augmente pour certains entiers positifs, i.e. le saut est de 1 pour les premiers, 1/2 pour les carrés de premiers, 1/3 pour les cubes de premiers. Donc nos équations définissant $\Pi(x)$ peuvent aussi s'écrire comme

$$\Pi(x) = \sum_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Theta(x - p^n), \quad (29)$$

où $\Theta(x)$ est la fonction en escalier de Heaviside donnée par $\Theta(x) = \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ \frac{1}{2} & , x = 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases} .$

Il y a encore une autre fonction de la théorie analytique des nombres dont on a besoin. On l'appelle la fonction de Möbius, elle définit l'inverse de la fonction zeta :

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = 1 - \frac{1}{2^s} - \frac{1}{3^s} - \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} - \frac{1}{7^s} + \dots \quad (30)$$

En utilisant la représentation originale

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \left(1 - \frac{1}{3^s}\right) \left(1 - \frac{1}{5^s}\right) \left(1 - \frac{1}{7^s}\right) \dots, \quad (31)$$

on peut calculer la multiplication des différents facteurs et terminer ainsi à nouveau avec

$$1 - \frac{1}{2^s} - \frac{1}{3^s} - \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} - \frac{1}{7^s} + \frac{1}{10^s} - \dots, \quad (32)$$

qui identifie les valeurs suivantes de μ :

$$\begin{aligned} \mu(1) &= 1, \mu(2) = -1, \mu(3) = -1, \mu(4) = 0, \mu(5) = -1, \\ \mu(6) &= 1, \mu(7) = -1, \mu(8) = 0, \mu(9) = 0, \mu(10) = 1, \text{ etc.} \end{aligned} \quad (33)$$

Voici la règle :

$$\mu(n) = \begin{cases} -1 & \text{si } n \text{ contient un nombre impair de nombres premiers} \\ 1 & \text{si } n \text{ contient un nombre pair de nombres premiers} \\ 0 & \text{si } n \text{ contient comme facteur un nombre premier au carré} \end{cases} \quad (34)$$

Par exemple:

$$\begin{aligned} \mu(7) &= -1; & 7 & \text{ est un nombre premier} \\ \mu(66) &= -1; & 66 = 2 \cdot 3 \cdot 11, & \text{ contient un nombre impair de nombres premiers} \\ \mu(18) &= 0; & 18 = 2 \cdot 3^2, & \text{ contient un carré de premier} \end{aligned} \quad (35)$$

Pour l'usage ultérieur, on liste les nombres de Möbius en début de liste :

$\mu(n) = -1$	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	30	31	37
$\mu(n) = 0$	4	8	9	12	16	18	20	24	25	27	28	32	36
$\mu(n) = +1$	1	6	10	14	15	21	22	26	33	34	35	38	39

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\mu(n)$	1	-1	-1	0	-1	1	-1	0	0	1	-1	0	-1	1	1	0	-1	0	-1	0

La relation entre $\Pi(x)$ et $\pi(x)$ est inversée par Riemann au moyen de la formule d'inversion de Möbius pour obtenir

$$\pi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \Pi(x^{1/n}) = \Pi(x) - \frac{1}{2}\Pi(x^{1/2}) - \frac{1}{3}\Pi(x^{1/3}) - \frac{1}{5}\Pi(x^{1/5}) + \frac{1}{6}\Pi(x^{1/6}) + \dots \quad (36)$$

Dans la partie finale de cette section, je souhaite discuter brièvement d'une certaine transformation intégrale qui sera d'un grand secours dans la prochaine section. Cette transformation de noyau $K(z, \xi) = \xi^{z-1}$ est appelée transformation de Mellin, bien que Riemann l'ait connue quarante ans avant qu'elle ne devienne connue sous ce nom.

Commençons par

$$g(z) = \int_0^{\infty} d\xi \xi^{z-1} f(\xi), \quad (37)$$

par exemple, avec le côté gauche donné par $\Gamma(s)$, $\Re(s) > 0$ et $f(x) = e^{-x}$:

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} dx e^{-x} x^{s-1} \text{ avec inverse } e^{-x} = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} ds \frac{\Gamma(s)}{x^s}. \quad (38)$$

Maintenant remplaçons x par nx ($n = 1, 2, 3, \dots$), alors multiplions les équations par des constantes c_n et sommons sur n :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s} &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} x^{s-1} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} c_n (e^{-x})^n \right\} dx, \\ \sum_{n=1}^{\infty} c_n (e^{-x})^n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\Gamma(s)}{x^s} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s} \right\} ds. \end{aligned} \quad (39)$$

On peut voir que la transformation de Mellin change la série de puissances $\sum c_n (e^{-x})^n$ en une série de Dirichlet $\sum c_n / n^s$ et l'inverse de la transformation de Mellin change une série de Dirichlet en série de puissances.

En particulier, si on note $c_n = 1$ pour tout n , alors avec $\sum (e^{-x})^n = 1/(e^x - 1)$ on obtient une représentation intégrale de la fonction zeta de Riemann :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx, \quad \Re(s) > 1 \quad (40)$$

dont l'inverse est donné par

$$\frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\Gamma(s)\zeta(s)}{x^s} ds \quad (a > 1). \quad (41)$$

Une des plus importantes formules dans l'article de Riemann est

$$\frac{\log \zeta(s)}{s} = \int_0^\infty \Pi(x)x^{-s-1} dx. \quad (42)$$

Ici on reconnaît pour la première fois la forte connexion entre les zéros de zeta et la fonction $\Pi(x)$. Pour mieux comprendre la formule ci-dessus, prenons le logarithme des deux côtés de

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}} \quad (43)$$

et en utilisant $\log(1 - x) = -x - 1/2 x^2 - 1/3 x^3 \dots$ on obtient

$$\log \zeta(s) = - \sum_p \log(1 - p^{-s}) = \sum_p p^{-s} + \frac{1}{2} \sum_p p^{-2s} + \frac{1}{3} \sum_p p^{-3s} + \dots. \quad (44)$$

Ici on utilise les identités ($\Re(s) > 1$)

$$p^{-s} = s \int_p^\infty x^{-s-1} dx, \quad p^{-2s} = s \int_{p^2}^\infty x^{-s-1} dx, \quad \dots, \quad p^{-ns} = s \int_{p^n}^\infty x^{-s-1} dx, \dots \quad (45)$$

pour écrire

$$\begin{aligned} \log \zeta(s) &= \sum_p \sum_n \frac{1}{n} p^{-ns} = \sum_p \sum_n \frac{1}{n} \cdot s \int_{p^n}^\infty x^{-s-1} dx \\ &= s \int_0^\infty \Pi(x)x^{-s-1} dx. \end{aligned} \quad (46)$$

Pour expliquer la dernière ligne, écrivons

$$\begin{aligned} s \int_0^\infty \Pi(x)x^{-s-1} dx &= s \left\{ \left[\Pi(x) \left(-1 \right) \frac{1}{2} x^{-s} \right]_0^\infty - \int_0^\infty dx d\Pi \frac{x^{-s}}{-s} \right\} \\ &= \int_0^\infty x^{-s} d\Pi(x) \quad (\text{intégrale de Stieltjes}), \end{aligned} \quad (47)$$

où la mesure $d\Pi$ a été écrite comme la densité fois dx ; plus précisément :

$$d\Pi = \left(\frac{d\Pi}{dx} \right) dx, \quad (48)$$

où $d\Pi/dx$ est la densité des nombres premiers plus la 1/2-densité des carrés de nombres premiers, plus la 1/3-densité des cubes de nombres premiers, etc.

N'oublions pas que la version calculatoire de la "formule dorée"

$$\frac{\log \zeta(s)}{s} = \int_0^{\infty} \Pi(x) x^{-s-1} dx \quad (49)$$

trouve son origine dans le produit de nombres premiers d'Euler-Riemann pour la fonction zeta et dans l'invention intelligente de la fonction en escalier $\Pi(x)$. Ce nom est justifié parce que quand x est l'exact carré d'un nombre premier, par exemple quand $x = 9 = 3^2$, $\Pi(x)$ saute d'un demi, puisque $\pi(\sqrt{x}) = \pi(3)$ saute de 1, et etc. Notons qu'au point effectif où le saut a lieu, la fonction est à mi-hauteur du saut.

Donc on a dérivé la merveilleuse formule donnée ci-dessus, qui devrait nous amener directement au résultat central de l'article de Riemann. Mais quelle est l'expression inverse, i.e. comment exprimer $\Pi(x)$ en fonction de $\zeta(x)$? On discutera de cela dans la prochaine section.

3 Riemann, un expert de la transformée de Fourier

Plus tôt on a introduit la paire d'équations

$$\begin{aligned} \frac{\log \zeta(s)}{s} &= \int_0^{\infty} \Pi(x) x^{-s-1} dx \quad (\Re(s) > 1), \\ \text{et } \Pi(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \log \zeta(s) x^s \frac{ds}{s} \quad (a > 1), \end{aligned} \quad (50)$$

quand on a discuté de la transformée de Mellin. Voyons comment Riemann a atteint le même résultat bien plus tôt en utilisant la formule d'inversion de Fourier :

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda) e^{i(x-\lambda)\mu} d\lambda \right] d\mu. \quad (51)$$

Quand on écrit

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\mu) e^{i\mu x} d\mu, \quad (52)$$

on peut considérer $\phi(\mu)$ comme les coefficients d'une expansion définie par

$$\phi(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda) e^{-i\lambda\mu} d\lambda. \quad (53)$$

Maintenant notons $s = a + i\mu$, $a = \text{const.} > 1$ et μ une variable réelle.

Alors avec $\lambda = \log x$ and $\varphi(x) = 2\Pi(e^x)e^{-ax}$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{x = e^\lambda}{\frac{dx}{x} = d\lambda} : \frac{\log \zeta(a + i\mu)}{a + i\mu} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(e^\lambda) e^{-(a+i\mu)\lambda} d\lambda \\ &=: \phi(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda) e^{-i\mu\lambda} d\lambda. \end{aligned} \quad (54)$$

Donc on peut continuer à écrire

$$(\varphi(x)) = 2\pi \Pi(e^x) e^{-ax} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log \zeta(a + i\mu)}{a + i\mu} e^{i\mu x} d\mu \quad (55)$$

et en utilisant $e^x = y$, alors $y \rightarrow x$, $s = a + i\mu$, $ds = i d\mu$, $d\mu = 1/i \cdot ds$ on obtient finalement

$$\Pi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \log \zeta(s) x^s \frac{ds}{s} \quad (a > 1), \quad (56)$$

qui est le résultat souhaité.

À partir de là, on peut directement arriver au résultat principal de l'article de 1859 de Riemann. Pourtant, pour le moment, on doit accepter deux nouvelles quantités de Riemann (des détails seront fournis ultérieurement) : la fonction entière $\xi(s)$ ($\zeta(s)$ n'est pas une fonction entière) et la formule du produit pour la fonction ξ :

$$\begin{aligned} \xi(s) &= \frac{1}{2} s(s-1) \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s), & \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) &= \frac{2}{s} \Gamma\left(1 + \frac{s}{2}\right) \\ &= (s-1) \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(1 + \frac{s}{2}\right) \zeta(s) \end{aligned} \quad (57)$$

et

$$\xi(s) = \frac{1}{2} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right), \quad (58)$$

avec ρ les zéros de la fonction zeta (égaux aux zéros de ζ).

Ainsi, en prenant le logarithme des deux côtés, on obtient

$$-\log 2 + \sum_p \log \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) = \log(s-1) - \frac{s}{2} \log \pi + \log \Gamma \left(1 + \frac{s}{2}\right) + \log \zeta(s)$$

ou $\log \zeta(s) = \sum_{\rho} \log \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) - \log 2 - \log \Gamma \left(1 + \frac{s}{2}\right) + \frac{s}{2} \log \pi - \log(s-1).$

(59)

Le premier terme du côté droit nous donne la connexion recherchée entre les zéros non triviaux de zeta et $\Pi(x)$. Cela devient évident quand on écrit

$$\Pi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\log \zeta(s)}{s} x^s ds$$
(60)

avec $\log \zeta(s)$ pris ci-dessus. Voici, alors, le résultat de Riemann :

$$\Pi(x) = \text{Li}(x) - \sum_{\rho} \text{Li}(x^{\rho}) + \log \left(\frac{1}{2}\right) + \int_x^{\infty} \frac{dt}{t(t^2-1) \log t}, \quad x > 1.$$

(61)

La somme sur ρ doit être comprise comme

$$\sum_{\text{Im}\rho > 0} (\text{Li}(x^{\rho}) + \text{Li}(x^{1-\rho}))$$
(62)

et $\text{Li}(x)$ dénote le logarithme intégral (voir ci-dessous).

Cette expression calculée pour $\Pi(x)$ est alors utilisée dans la formule

$$\pi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \Pi(x^{1/n}) = \Pi(x) - \frac{1}{2} \Pi(x^{1/2}) - \frac{1}{3} \Pi(x^{1/3}) - \frac{1}{5} \Pi(x^{1/5}) + \frac{1}{6} \Pi(x^{1/6}) + \dots \quad (63)$$

Ceci est la grande prouesse de Riemann, le calcul explicite, exact, de la fonction de comptage des nombres premiers $\pi(x)$.

Réécrivons le résultat de Riemann plus explicitement :

$$\Pi(x) = \text{Li}(x) - \sum_{\text{Im}\rho > 0} (\text{Li}(x^{\rho}) + \text{Li}(x^{1-\rho})) - \log 2 + \int_x^{\infty} \frac{dt}{t(t^2-1) \log t}, \quad x > 1 \quad (64)$$

avec

$$\text{Li}(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_0^{1-\epsilon} \frac{dt}{\log t} + \int_{1+\epsilon}^x \frac{dt}{\log t} \right].$$
(65)

Si on différencie $\Pi(x)$ on obtient

$$d\Pi = \left[\frac{1}{\log x} - \sum_{\operatorname{Re}\alpha > 0} \frac{2 \cos(\alpha \log x)}{x^{1/2} \log x} - \frac{1}{x(x^2 - 1) \log x} \right] dx \quad x > 1. \quad (66)$$

α parcourt toutes les valeurs telles que $\rho = 1/2 + i\alpha$; en d'autres termes, $\alpha = -i(\rho - 1/2)$ où ρ parcourt toutes les racines de telle façon que

$$x^{\rho-1} + x^{-\rho} = x^{-\frac{1}{2}} [x^{i\alpha} + x^{-i\alpha}] = 2x^{-\frac{1}{2}} \cos(\alpha \log x). \quad (67)$$

L'hypothèse de Riemann dit que tous les α sont réels.

À nouveau, par définition de Π , la mesure $d\Pi$ est dx fois la densité des nombres premiers plus $1/2$ la densité des carrés de nombres premiers, plus $1/3$ fois la densité des cubes de nombres premiers, etc. Donc $1/(\log x)$ tout seul ne devrait pas être considéré comme une approximation de la seule densité des nombres premiers comme Gauß le suggérait, mais plutôt comme $d\Pi/dx$, i.e. la densité des nombres premiers plus $1/2$ fois la densité des carrés de nombres premiers, plus, etc.

Une assez bonne approximation néglige le dernier terme dans $d\Pi$. C'est le nombre de α qui est significatif dans $d\Pi$ que Riemann se destinait à étudier empiriquement pour voir l'influence des "termes périodiques" sur la distribution des nombres premiers. Avec les équations ci-dessus, on a atteint la fin du célèbre article de Riemann de 1859.

On a pourtant, laissé de côté un certain nombre de résultats révolutionnaires vers lesquels on souhaite se tourner maintenant.

4 Sur le chemin vers la fonction entière de Riemann

$\xi(s)$

Commençons avec la représentation intégrale de la fonction Γ d'Euler :

$$\begin{aligned} \Gamma(s) &= \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx, \\ s \rightarrow \frac{s}{2} : \quad \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) &= \int_0^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1} e^{-x} dx, \\ x = \pi t n^2 : \quad \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) &= \int_0^{\infty} (\pi t n^2)^{\frac{s}{2}-1} e^{-\pi t n^2} \pi n^2 dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-\frac{s}{2}} \frac{1}{n^s} = \int_0^{\infty} e^{-\pi t n^2} t^{\frac{s}{2}} \frac{dt}{t}, \\
\text{Prenons} \quad \sum_{n=1}^{\infty} : \quad & \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-\frac{s}{2}} \zeta(s) = \int_0^{\infty} \psi(t) t^{\frac{s}{2}} \frac{dt}{t}, \quad \Re(s) > 1, \\
& \psi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi t n^2}. \tag{68}
\end{aligned}$$

La dernière équation définit l'une des fonctions ϑ de Jacobi :

$$\Theta(x) := \vartheta_3(0, ix) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x n^2}, \quad \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi x n^2}, \quad \Theta(x) = 2\psi(x) + 1. \tag{69}$$

Également, mentionnons l'identité de Jacobi sans démonstration :

$$\Theta(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \Theta\left(\frac{1}{x}\right), \quad x > 0. \tag{70}$$

On peut facilement vérifier que

$$\frac{1 + 2\psi(x)}{1 + 2\psi\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x}}, \tag{71}$$

de telle façon que

$$\psi\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2} \Theta\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{x} \Theta(x) - \frac{1}{2} = \sqrt{x} \psi(x) + \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2}. \tag{72}$$

Maintenant, on va calculer l'intégrale suivante, qui nous donnera l'un des merveilleux résultats de Riemann.

En utilisant $\Psi(x) = x^{-1/2} \Psi(1/x) - 1/2 + 1/2x^{-1/2}$ et en séparant l'intégrale en deux parties en 1, on obtient

$$\int_0^{\infty} \Psi(x) x^{s/2} \frac{dx}{x} = \int_1^{\infty} \Psi(x) x^{s/2} \frac{dx}{x} + \int_0^1 \Psi\left(\frac{1}{x}\right) x^{\frac{s-1}{2}} \frac{dx}{x} + \frac{1}{2} \int_0^1 \left(x^{\frac{s-1}{2}} - x^{\frac{s}{2}}\right) \frac{dx}{x}. \tag{73}$$

Dans les deux dernières intégrales, on substitue $x \rightarrow 1/x$ et donc on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \Psi(x) x^{\frac{s}{2}} \frac{dx}{x} &= \int_1^{\infty} \Psi(x) \left[x^{\frac{s}{2}} + x^{\frac{1}{2}(1-s)} \right] \frac{dx}{x} + \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \left[x^{\frac{1}{2}(1-s)} - x^{-\frac{s}{2}} \right] \frac{dx}{x} \\
\int_1^{\infty} dx \left[x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} \right] &= -\frac{2}{s-1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} dx [x^{-\frac{s}{2}-1}] &= \frac{2}{s}, \\
&= \int_1^{\infty} \Psi(x) \left(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} \right) dx = \frac{1}{s} + \frac{1}{s-1}.
\end{aligned} \tag{74}$$

On a alors ici la formule importante de l'article de Riemann :

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-\frac{s}{2}} \zeta(s) &= \int_1^{\infty} \Psi(x) \left(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} \right) dx - \frac{1}{s(1-s)}. \\
&\text{pôle } \Gamma : s = 0 \\
&\text{pôle } \zeta : s = 1
\end{aligned} \tag{75}$$

Notons qu'il n'y a pas de changement du côté droit selon $s \rightarrow 1-s$!

$\pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s)$ a des pôles simples en $s = 0$ et $s = 1$. Pour supprimer ces pôles, on multiplie par $1/2s(s-1)$. C'est la raison pour laquelle Riemann définit

$$\xi(s) = \frac{1}{2} s(s-1) \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s), \tag{76}$$

qui est une fonction entière ($\zeta(s)$ est une fonction méromorphe). De façon évidente, on a $\xi(s) = \xi(1-s)$ et l'équation fonctionnelle

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-\frac{s}{2}} \zeta(s) = \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \pi^{-\frac{1}{2}(1-s)} \zeta(1-s). \tag{77}$$

On obtient le côté droit par le côté gauche en remplaçant s par $(1-s)$.

Maintenant on continue à écrire pour $\xi(s)$

$$\begin{aligned}
\xi(s) &= \frac{1}{2} - \frac{s(1-s)}{2} \int_1^{\infty} \Psi(x) \left(x^{\frac{s}{2}} + x^{\frac{1}{2}(1-s)} \right) \frac{dx}{x} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{s(1-s)}{2} \int_1^{\infty} \frac{d}{dx} \left\{ \Psi(x) \left[\frac{x^{\frac{s}{2}}}{\frac{s}{2}} + \frac{x^{\frac{1}{2}(1-s)}}{\frac{1}{2}(1-s)} \right] \right\} dx \\
&\quad + \frac{s(1-s)}{2} \int_1^{\infty} \Psi'(x) \left[\frac{x^{\frac{s}{2}}}{\frac{s}{2}} + \frac{x^{\frac{1}{2}(1-s)}}{\frac{1}{2}(1-s)} \right] ds \\
&= \frac{1}{2} + \frac{s(1-s)}{2} \Psi(1) \left[\frac{2}{3} + \frac{2}{1-s} \right] \\
&\quad + \int_1^{\infty} \Psi'(x) \left[(1-s)x^{\frac{s}{2}} + sx^{\frac{1}{2}(1-s)} \right] dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} + \Psi(1) + \int_1^{\infty} x^{\frac{s}{2}} \Psi'(x) \left[(1-s)x^{\frac{1}{2}(s-1)-1} + sx^{-\frac{s}{2}-1} \right] dx \\
&= \frac{1}{2} + \Psi(1) + \int_1^{\infty} \frac{d}{dx} \left[x^{\frac{3}{2}} \Psi'(x) \left(-2x^{\frac{1}{2}(s-1)} - 2x^{-\frac{s}{2}} \right) \right] dx \\
&\quad - \int_1^{\infty} \frac{d}{dx} \left[x^{\frac{3}{2}} \Psi'(x) \right] \left[-2x^{\frac{1}{2}(s-1)} - 2x^{-\frac{s}{2}} \right] dx \\
&= \frac{1}{2} + \Psi(1) - \Psi'(1)[-2-2] + \int_1^{\infty} \frac{d}{dx} \left[x^{\frac{3}{2}} \Psi'(x) \right] \left(2x^{\frac{1}{2}(s-1)} + 2x^{-\frac{s}{2}} \right) dx. \tag{78}
\end{aligned}$$

La différentiation de

$$2\Psi(x) + 1 = x^{-\frac{1}{2}} \left[2\Psi\left(\frac{1}{x}\right) + 1 \right] \tag{79}$$

donne facilement

$$\frac{1}{2} + \Psi(1) + 4\Psi'(1) = 0 \tag{80}$$

et utiliser cela permet de mettre la formule dans sa forme finale :

$$\xi(s) = 4 \int_1^{\infty} \frac{d}{dx} \left[x^{\frac{3}{2}} \Psi'(x) \right] x^{-\frac{1}{4}} \cosh \left[\frac{1}{2} \left(s - \frac{1}{2} \right) \log x \right] dx, \tag{81}$$

ou, comme Riemann l'écrit ($s = 1/2 + it$; $1/2$ est l'hypothèse de Riemann !):

$$\Xi(t) = \xi\left(\frac{1}{2} + it\right) = 4 \int_1^{\infty} \frac{d}{dx} \left[x^{\frac{3}{2}} \psi'(x) \right] x^{-\frac{1}{4}} \cos\left(\frac{t}{2} \log x\right) dx. \tag{82}$$

Avec

$$\frac{d}{dx} \left[x^{3/2} \psi'(x) \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^4 \pi^2 x - \frac{3}{2} n^2 \pi \right) x^{1/2} \exp(-n^2 \pi x) \tag{83}$$

et

$$v = \frac{1}{2} \log x \tag{84}$$

et alors $v = 2u$, on peut aussi écrire $\Xi\left(\frac{t}{2}\right)$ comme une transformée de Fourier

$$\Xi\left(\frac{t}{2}\right) = 8 \int_0^{\infty} du \Phi(u) \cos(ut) \tag{85}$$

avec

$$\Phi(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \pi n^2 (2n^2 \pi \exp(4u) - 3) \exp(5u - n^2 \pi \exp(4u)). \tag{86}$$

Si $\cosh[1/2(s - 1/2) \log x]$ est développé dans la série habituelle de puissances

$$\cosh y = \frac{1}{2} (e^y + e^{-y}) = \sum \frac{y^{2n}}{(2n)!}, \quad (87)$$

on peut écrire

$$\xi(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} \left(s - \frac{1}{2} \right)^{2n}, \quad (88)$$

où

$$a_{2n} = 4 \int_1^{\infty} \frac{d}{dx} [x^{3/2} \Psi'(x)] x^{-1/4} \frac{(\frac{1}{2} \log x)^{2n}}{(2n)!} dx. \quad (89)$$

Revenons à

$$\xi(s) = \frac{1}{2} s(s-1) \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s), \quad (90)$$

avec

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^{\infty} \Psi(x) \left(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} \right) dx, \quad (91)$$

et écrivons le côté droit en fonction de $s = 1/2 + it$, ce qui utilise la conjecture de Riemann $\Re(s) = 1/2$. Puisque les détails de la substitution sont évidents, on donne simplement le résultat suivant :

$$\begin{aligned} \xi\left(\frac{1}{2} + it\right) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + it\right) \left(it - \frac{1}{2}\right) \pi^{-\frac{1}{4} - i\frac{t}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{4} + i\frac{t}{2}\right) \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \\ &= \frac{-(t^2 + \frac{1}{4})}{\left[2(\sqrt{\pi})^{\frac{1}{2} + it}\right]} \Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{it}{2}\right) \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right). \end{aligned} \quad (92)$$

En particulier,

$$\xi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-1}{(8\pi^{1/4})} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \zeta\left(\frac{1}{2}\right) \quad (93)$$

avec

$$\zeta\left(\frac{1}{2}\right) = -1.4603545088, \quad \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = \sqrt{2\varpi 2\pi} = 3.6256099082, \quad (94)$$

où la constante de la lemniscate de Gauß est égale à

$$\varpi = 2.62205755429. \quad (95)$$

Tout ça mis ensemble :

$$\xi\left(\frac{1}{2}\right) = 0.4971207781 = a_0, \quad (96)$$

qui est le minimum pour la valeur réelle $\xi(s)$ en $s = 1/2$. D'ailleurs $\xi(0) = \xi(1) = -\zeta(0) = 1/2$. Le résultat ci-dessus peut aussi s'écrire

$$\Xi(t) := \xi\left(\frac{1}{2} + it\right) = \frac{1}{2} - \left(t^2 + \frac{1}{4}\right) \int_1^{\infty} \Psi(x) x^{-\frac{3}{4}} \cos\left(\frac{t}{2} \log x\right) dx. \quad (97)$$

Le côté droit de cette équation nous dit cela parce que $t \in R_e, x \in R_e$ et $\log x \in R_e$, on a

$$\operatorname{Im}\xi\left(\frac{1}{2} + it\right) = 0, \quad \text{i.e.} \quad \xi\left(\frac{1}{2} + it\right) \equiv \Xi(t) \in R_e. \quad (98)$$

Puisque $\Xi(t) = \xi(1/2 + it)$ change de signe infiniment souvent lorsque $t \rightarrow \infty$, $\xi(s)$ (et $\zeta(s)$) doivent avoir une infinité de zéros sur $\Re(s) = 1/2$.

Il y a une autre forme utile de $\xi(s)$ qu'on obtient en commençant par sa définition originale

$$\begin{aligned} \xi(s) &= \frac{s(s-1)}{2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-\frac{s}{2}} \zeta(s) \\ &= e^{\ln \Gamma(\frac{s}{2})} \pi^{-\frac{s}{2}} \frac{s(s-1)}{2} \zeta(s). \end{aligned} \quad (99)$$

Alors en posant $s = 1/2 + it$, on a

$$\begin{aligned} \xi\left(\frac{1}{2} + it\right) &= e^{\ln \Gamma\left(\frac{\frac{1}{2}+it}{2}\right)} \pi^{-\frac{\frac{1}{2}+it}{2}} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + it\right) \left(\frac{1}{2} + it - 1\right) \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \\ &= \left[e^{R_e \ln\left(\frac{\frac{1}{2}+it}{2}\right)} \pi^{-\frac{1}{4}} \cdot \frac{-t^2 - \frac{1}{4}}{2} \right] \left[e^{i \operatorname{Im} \ln \Gamma\left(\frac{\frac{1}{2}+it}{2}\right)} \pi^{-\frac{it}{2}} \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \right] \\ &= \left[-e^{R_e \ln\left(\frac{\frac{1}{2}+it}{2}\right)} \pi^{-\frac{1}{4}} \frac{t^2 + \frac{1}{4}}{2} \right] \left[e^{i \operatorname{Im} \ln \Gamma\left(\frac{\frac{1}{2}+it}{2}\right)} \pi^{-\frac{it}{2}} \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \right]. \end{aligned} \quad (100)$$

Notons que le premier facteur entre crochets est négatif. Pour le second facteur on a

$$Z(t) = e^{i\vartheta(t)} \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right), \quad \vartheta(t) = \operatorname{Im} \ln \Gamma\left(\frac{\frac{1}{2} + it}{2}\right) - \frac{t}{2} \ln \pi. \quad (101)$$

Ainsi, $Z(t)$ et ξ sont toujours de signes opposés.

Maintenant, on doit calculer $\vartheta(t)$ et $\zeta(1/2+it)$. Pour l'analyse numérique, il suffit d'utiliser

$$\vartheta(t) \sim \frac{t}{2} \log \frac{t}{2\pi} - \frac{t}{2} - \frac{\pi}{8} + \frac{1}{48t}, \quad (102)$$

qu'on peut appliquer pour calculer les racines de $\xi(s)$ sur la droite critique.

5 La représentation par un produit de $\xi(s)$ et $\zeta(s)$ par Riemann (1859) et Hadamard (1893)

Le but de Riemann (avant Weierstrass !) était de démontrer que $\xi(s)$ peut être développé en un produit infini

$$\xi(s) = \xi(0) \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right), \quad (103)$$

où ρ parcourt toutes les racines de $\xi(\rho) = 0$. Il n'a pas démontré effectivement cette formule mais il avait raison, comme cela a été montré plus tard par Hadamard. Mais l'on doit admettre que Riemann devait avoir une forte idée de la formule du produit que Weierstrass allait bientôt introduire comme une représentation essentielle en théorie des fonctions, ici les fonctions entières, i.e. les fonctions qui peuvent être déterminées par leurs zéros.

Comme bref rappel, voici la représentation en produit de Weierstrass de la fonction Γ :

$$\Gamma(x) = e^{-\gamma x} \frac{1}{x} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{x}{k}}}{\left(1 + \frac{x}{k}\right)}, \quad (104)$$

où γ est la constante d'Euler-Mascheroni,

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \right] \simeq 0.5772157. \quad (105)$$

De cette formule produit découle, avec l'aide de

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \Gamma(x)(-x)\Gamma(-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}, \quad (106)$$

la représentation en produit de $\sin(\pi x)$:

$$\begin{aligned} \sin(\pi x) &= -\frac{\pi}{x} \frac{1}{\Gamma(x)\Gamma(-x)} = -\frac{\pi}{x} \left(e^{\gamma x} x \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{x}{k}\right)}{e^{\frac{x}{k}}} \right) \left(e^{-\gamma x} (-x) \prod_{k>1}^{\infty} \frac{\left(1 - \frac{x}{k}\right)}{e^{-\frac{x}{k}}} \right) \\ &= \pi x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right), \end{aligned} \quad (107)$$

un polynôme de degré infini. De façon similaire, Euler voyait $\sin(\pi x)$ comme un polynôme de degré infini quand il conjectura, et finalement démontra, la formule de $\sin(\pi x)$.

Aussi, pourquoi ne pas penser à $\xi(s)$ comme à un polynôme de degré infini et ne pas écrire une formule de produit déterminée par son infinité de zéros ρ ? C'est ce qu'Hadamard a fait

en 1893 dans un article dans lequel il a étudié les fonctions entières et leurs représentations comme produits infinis – comme Weierstrass. Il a pu démontrer que la formule de produit de Riemann était correcte :

$$\xi(s) = \xi(0) \prod_{\rho} \left(1 - \frac{\xi}{\rho}\right). \quad (108)$$

$\xi(s)$ est une fonction entière. Le produit infini est compris comme devant être pris dans un ordre qui apparie chaque racine à la racine correspondante $1 - \rho$. La démonstration de Hadamard de la formule produit pour ξ a été désignée par von Mangoldt comme “la première réelle avancée dans le domaine en 34 ans”, c’est-à-dire la première avancée depuis Riemann.

Hadamard a montré qu’il était possible de construire la fonction ζ comme un produit infini, étant donnés ses zéros

$$\zeta(s) = f(s) \prod_{\zeta(\rho)=0} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{\frac{s}{\rho}}, \quad f(s) = \frac{1}{2(s-1)} \left(\frac{2\pi}{e}\right)^s. \quad (109)$$

Par conséquent, en incluant les zéros triviaux et non triviaux, il obtint

$$\zeta(s) = \frac{1}{2(s-1)} \left(\frac{2\pi}{e}\right)^s \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{2n}\right) e^{-\frac{s}{2n}} \cdot \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{\frac{s}{\rho}}. \quad (110)$$

Pour le premier produit, on utilise la représentation par produit fournie par Weierstrass :

$$\frac{1}{\Gamma(1+s)} = e^{\gamma s} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{n}\right) e^{-\frac{s}{n}}, \quad (111)$$

et ainsi on obtient la formule du produit de Hadamard, qui est convergente dans $C \setminus \{1\}$:

$$\zeta(s) = \frac{e^{(\log 2\pi - 1 - \frac{\gamma}{2})s}}{2(s-1)\Gamma(1 + \frac{s}{2})} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{\frac{s}{\rho}}. \quad (112)$$

Une forme légèrement simplifiée du produit de Hadamard est

$$\zeta(s) = \frac{\pi^{s/2}}{2(s-1)\Gamma(1 + \frac{s}{2})} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right). \quad (113)$$

Ici on prend les paires de racines ρ et $-\rho$ ensemble de telle façon que les exposants $e^{-s/\rho}$ s’annulent.

La dernière expression montre que la fonction ζ peut être complètement construite par ses racines (une spécialité de Riemann) et la singularité en $s = 1$. Pourtant, pour obtenir une convergence absolue, on doit introduire ρ et $-\rho$ par paire dans le produit.

Maintenant, on rappelle la fonction entière de Riemann $\xi(s)$ et la façon dont elle est reliée à la fonction (non entière) ζ :

$$\xi(s) = \frac{s(s-1)}{2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-\frac{s}{2}} \zeta(s). \quad (114)$$

Alors

$$\frac{s(s-1)}{2} \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \cdot \frac{\pi^{s/2}}{2(s-1)\Gamma\left(1+\frac{s}{2}\right)} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right), \quad \Gamma\left(1 + \frac{s}{2}\right) = \frac{s}{2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \quad (115)$$

ou

$$\xi(s) = \frac{1}{2} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) \quad (116)$$

et en utilisant $\xi(0) = \frac{1}{2}$, on a en effet

$$\xi(s) = \xi(0) \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right), \quad (117)$$

qui est le résultat de Riemann de 1859 !

Puisque les zéros de $\zeta(s)$ et de $\xi(s)$ dans la bande critique coïncident, on peut également écrire

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \frac{\pi^{s/2}}{2(s-1)\Gamma\left(1+\frac{s}{2}\right)} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) \left(1 - \frac{s}{1-\rho}\right) \\ &= \frac{\pi^{s/2}}{2(s-1)\Gamma\left(1+\frac{s}{2}\right)} \left(1 - \frac{s}{\frac{1}{2} + 14.134i}\right) \left(1 - \frac{s}{\frac{1}{2} - 14.134i}\right) \left(1 - \frac{s}{\frac{1}{2} + 21.022i}\right) (\dots), \end{aligned} \quad (118)$$

où on a utilisé les premiers zéros sur l'axe $\Re(s) = 1/2$.

6 Dérivation de la formule de Von Mangoldt pour $\Psi(x)$

Il y a une autre version, plus moderne, de la formule de Riemann pour $\Pi(x)$, i.e.

$$\Pi(x) = \text{Li}(x) - \sum_{\rho} \text{Li}(x^{\rho}) + \log \xi(0) + \int_x^{\infty} \frac{dt}{t(t^2-1) \log t} \quad (x > 1). \quad (119)$$

C'est la formule de von Mangoldt pour $\Psi(x)$, qui contient essentiellement la même information que la formule $\Pi(x)$ de Riemann. Sur le chemin de la formule explicite pour

$\Psi(x)$, on a besoin d'une représentation particulière de la fonction de discontinuité. Donc commençons simplement par vérifier

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s-\beta} &= \int_1^{\infty} x^{-s} x^{\beta-1} dx, & \Re(s-\beta) > 0, \\
x = e^\lambda &:= \int_0^{\infty} e^{-\lambda s} e^{\lambda(\beta-1)} e^\lambda d\lambda = \int_0^{\infty} e^{-\lambda s} e^{\lambda\beta} d\lambda, \\
s = a + i\mu &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda(a+i\mu)} e^{\lambda\beta} \alpha \lambda, \\
\frac{1}{a+i\mu-\beta} &= \int_0^{\infty} e^{-i\lambda\mu} e^{\lambda(\beta-a)} d\lambda, & a > \Re\beta, \\
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a+i\mu-\beta} e^{i\mu x} d\mu &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\mu x} d\mu \int_0^{\infty} e^{-i\lambda\mu} e^{\lambda(\beta-a)} d\lambda \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_0^{\infty} e^{i(x-\lambda)\mu} d\mu \right] e^{\lambda(\beta-a)} d\lambda \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(x-\lambda) e^{\lambda(\beta-a)} d\lambda \\
&= \begin{cases} 2\pi e^{x(\beta-a)}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}. \tag{120}
\end{aligned}$$

Jusque là on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a+i\mu-\beta} e^{x(a+i\mu)} d\mu = \begin{cases} e^{x\beta}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}. \tag{121}$$

Avec $e^x = y$ et $s = a + i\mu$, on obtient le facteur de discontinuité (fonction en escalier)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{1}{s-\beta} y^s ds = \begin{cases} y^\beta, & y > 1 \\ 0, & y < 1 \end{cases} \stackrel{\beta=0}{=} \begin{cases} 1, & y > 1 \\ \frac{1}{2}, & y = 0 \\ 0, & y < 1 \end{cases} \quad a > 0. \tag{122}$$

Maintenant on revient à la fonction zeta d'Euler-Riemann,

$$\zeta(z) = \prod_{p \in P} \frac{1}{1-p^{-z}}, \quad \Re(z) > 1 \tag{123}$$

et on prend le logarithme :

$$\begin{aligned}
\log \zeta(z) &= - \sum_p \log(1 - p^{-z}) = - \sum_p \log(1 - e^{-z \log p}) , \\
\frac{d}{dz} \log \zeta(z) &= - \sum_p \frac{1}{1 - p^{-z}} \frac{d}{dz} (1 - e^{-z \log p}) = - \sum_p \frac{1}{1 - p^{-z}} \log p \cdot p^{-z} \\
&= - \sum_p \frac{p^{-z}}{1 - p^{-z}} \log p = - \sum_p \sum_{\nu=1}^{\infty} p^{-\nu z} \log p \\
&= \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} . \\
\cdot \frac{x^z}{z} : \frac{x^z}{z} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\log p}{p^{\nu z}} &= \sum_p \left(\frac{x}{p} \right) \frac{\log p}{z} = - \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} \cdot \frac{x^z}{z} , \\
\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \sum_{p,\nu=1}^{\infty} \left(\frac{x}{p} \right)^z \frac{\log p}{z} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} - \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} \frac{x^z}{z} dz \\
\text{ou } \sum_{\nu=1}^{\infty} \log p \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \left(\frac{x}{p} \right)^z \frac{1}{z} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} - \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} \frac{x^z}{z} dz \\
y = \frac{x}{p^\nu} : \sum_{\nu=1}^{\infty} \log p \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{y^z}{z} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} - \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} \frac{x^z}{z} dz . \tag{124}
\end{aligned}$$

Ici on utilise le 1 du facteur de discontinuité du côté gauche et ainsi, on obtient la fonction de Chebyshev $\Psi(x)$:

$$\Psi(x) = \sum_{p^\nu < x} \log p = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} - \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} \frac{x^z}{z} dz . \tag{125}$$

On doit donc sommer le logarithme de tous les nombres premiers jusqu'à x .

$p^\nu > x$ devrait signifier $y < 1$, mais pour ce cas, la formule de discontinuité donne zéro.

L'intégrale du côté droit peut être évaluée à l'aide du théorème des résidus. Les contri-

butions aux résidus de $\zeta'(z)/\zeta(z) \cdot x^z/z$ viennent de

Singularité	Raison	Résidu
0	$\frac{x^z}{z}$	$\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} = \frac{-\frac{1}{2} \log 2\pi}{-\frac{1}{2}} = \log(2\pi)$
1	pôle de ζ $\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = -\frac{1}{z-1} + \gamma + \dots$	$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \left(\frac{-1}{z-1} + \mathcal{O}(1) \right) \frac{x^z}{z} = \frac{-x^1}{1} = -x$
$-2, -4, -6, \dots$	zéros triviaux de $\zeta(z)$	$\frac{1}{2}x^{-2}, \frac{1}{4}x^{-4}, \frac{1}{6}x^{-6}, \dots$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-2n}}{2n} = \frac{1}{2} \log\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$
ρ	zéros non triviaux de $\zeta(z)$	$\frac{x^\rho}{\rho}$

(126)

ce qui amène à la formule explicite exacte

$$\Psi(x) = x - \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) - \sum_{\zeta(\rho)=0} \frac{x^\rho}{\rho}. \quad (127)$$

On appelle cette formule la formule de von Mangoldt (1895) et c'est une des formules les plus importantes de la théorie analytique des nombres. $\Psi(x)$ est réelle et donne les sauts pour les puissances de nombres premiers x . Bien que le dernier terme ait l'air complexe, il ne l'est pas, puisque les zéros entrent par paires et donc c'est aussi un nombre réel.

$\Psi(x)$ est équivalent à la fonction $\Pi(x)$ de Riemann et on doit admettre que la formule pour $\Psi(x)$ a été déduite beaucoup plus aisément que la formule pour $\Pi(x)$, avec laquelle on avait commencé cette section. Il n'est pas étonnant qu'on l'ait considérée entre-temps comme préférable à $\Pi(x)$.

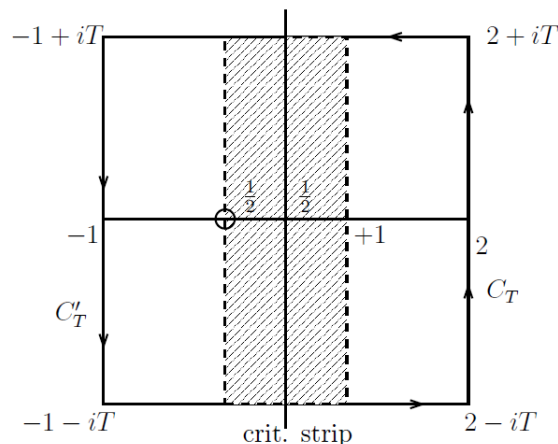
7 Le nombre de racines dans la bande critique

Le théorème suivant a originellement été formulé par Riemann – mais non démontré. Ce n'est qu'en 1905 que von Mangoldt a démontré que le nombre de zéros de ζ dans la bande critique $0 < \Re(s) < 1, 0 < t < T$ est donné par

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi}. \quad (128)$$

Pour prouver cette assertion, supposons que $T \geq 3$ et que $\zeta(s) \neq 0$ pour $t = T$.

Considérons alors la zone rectangulaire R_T dans le plan complexe :

Figure 1: Limites de R_T

Les zéros de la fonction ξ sont identiques à ceux de la fonction ζ dans la zone critique. La symétrie par rapport à l'axe $\Re(s) = 1/2$ amène (rappelons-nous du résidu logarithmique)

$$2N(T) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R_T} \frac{\xi'(s)}{\xi(s)} ds. \quad (129)$$

De l'équation fonctionnelle de ξ on obtient

$$\begin{aligned} \xi(1-s) &= \xi(s) \\ -\frac{\xi'(1-s)}{\xi(1-s)} &= \frac{\xi'(s)}{\xi(s)}. \end{aligned} \quad (130)$$

$C'_T(C_T)$ est la limite du côté gauche (droit) de R_T :

$$\begin{aligned} \int_{C'_T} \frac{\xi'(s)}{\xi(s)} ds &= \int_{C_T} \frac{\xi'(1-s)}{\xi(1-s)} d(1-s) = \int_{C_T} \frac{\xi'(s)}{\xi(s)} ds \\ &> N(T) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_T} \frac{\xi'(s)}{\xi(s)} ds. \end{aligned} \quad (131)$$

Maintenant, en utilisant la représentation suivante de la fonction ξ ,

$$\xi(s) = \frac{s(s-1)}{2} \pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) \quad (132)$$

on prend le logarithme

$$\log \xi(s) = -\log 2 + \log s + \log(s-1) - \frac{s}{2} \log \pi + \log \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) + \log \zeta$$

$$\begin{aligned}
> \frac{d}{ds} \log \xi(s) &= \frac{\xi'(s)}{\xi(s)} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2} \log \pi + \frac{1}{2} \frac{\Gamma'(\frac{s}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})} + \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \\
> 2\pi i N(T) &= \underbrace{\int_{C_T} \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} \right) ds}_{\textcircled{1}} - \underbrace{\int_{C_T} \frac{1}{2} \log \pi ds}_{\textcircled{2}} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_{C_T} \frac{\Gamma'(\frac{s}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})} ds}_{\textcircled{3}} + \int_{C_T} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds \quad (133)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\textcircled{1} \quad \int_{C_T} \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} \right) ds &= \frac{1}{2} \int_{\partial R_T} \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} \right) ds \stackrel{\text{resid}}{=} \frac{1}{2} 2\pi i (1+1) = 2\pi i \\
\textcircled{2} \quad \int_{C_T} \frac{1}{2} \log \pi ds &= \frac{1}{2} \log \pi \left(\left(\frac{1}{2} + iT \right) - \left(\frac{1}{2} - iT \right) \right) = iT \log \pi \\
\textcircled{3} \quad \int_{C_T} \frac{1}{2} \frac{\Gamma'(\frac{s}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})} ds &= \log \Gamma \left(\frac{s}{2} \right) \Big|_{\frac{1}{2}-iT}^{\frac{1}{2}+iT} \\
&= \log \Gamma \left(\frac{1}{4} + i\frac{T}{2} \right) - \log \Gamma \left(\frac{1}{4} - i\frac{T}{2} \right) \quad (134)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log \Gamma(\bar{s}) &= \overline{\log \Gamma(s)} := 2i \operatorname{Im} \log \Gamma \left(\frac{1}{4} + i\frac{T}{2} \right) \\
\stackrel{\text{Développons}}{T \geq 3} &= 2i \operatorname{Im} \left(\log \sqrt{2\pi} + \left(-\frac{1}{4} + i\frac{T}{2} \right) \log \left(i\frac{T}{2} \right) - i\frac{T}{2} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{T} \right) \right) \\
&= 2i \operatorname{Im} \left(\log \sqrt{2\pi} + \left(-\frac{1}{4} + i\frac{T}{2} \right) \left(\log \frac{T}{2} + i\frac{\pi}{2} \right) - i\frac{T}{2} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{T} \right) \right) \\
&= 2i\pi \left(\frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2} - \frac{T}{2\pi} \right) - \frac{1}{8} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{T} \right). \quad (135)
\end{aligned}$$

Notre résultat immédiat est alors

$$2\pi i N(T) = 2\pi i - iT \log \pi + 2\pi i \left(\frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2} - \frac{T}{2\pi} - \frac{1}{8} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{T} \right) \right) + \int_{C_T} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds. \quad (136)$$

$$\boxed{N(T) = 1 - \frac{T}{2\pi} \log \pi + \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2} - \frac{T}{2\pi} - \frac{1}{8} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{T} \right) + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_T} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds.} \quad (137)$$

Le dernier terme peut être séparé en deux parties, dont les résultats sont fournis sans détailler davantage les calculs :

$$\int_{2-iT}^{2+iT} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds = \mathcal{O}(1), \quad \text{pour } T \geq 3 \quad (138)$$

et en utilisant

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{2}-iT}^{2-iT} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds &= \int_{1/2}^2 \frac{\zeta'(\sigma - iT)}{\zeta(\sigma - iT)} d\sigma = \overline{\int_{1/2}^2 \frac{\zeta'(\sigma - iT)}{\zeta(\sigma + iT)} ds} \\
&= \overline{\int_{\frac{1}{2}+iT}^{2+iT} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds} \\
> \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\frac{1}{2}-iT}^{2-iT} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds + \int_{2+iT}^{\frac{1}{2}+iT} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds \right) &= \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left(\int_{2+iT}^{\frac{1}{2}+iT} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds \right). \quad (139)
\end{aligned}$$

Jusque-là, on a trouvé

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + \frac{7}{8} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{T}\right) + \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left(\int_{2+iT}^{\frac{1}{2}+iT} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds \right). \quad (140)$$

En utilisant

$$\begin{aligned}
\int_{2+iT}^{\frac{1}{2}+iT} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds &= \log \zeta \left(\frac{1}{2} + iT \right) - \log \zeta(2 + iT) \\
> \operatorname{Im} \left(\int_{2+iT}^{\frac{1}{2}+iT} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds \right) &= \arg \left(\zeta \left(\frac{1}{2} + iT \right) \right) - \arg (\zeta(2 + iT)). \quad (141)
\end{aligned}$$

On peut montrer que le module de la dernière expression est $\mathcal{O}(\log T)$.

Par conséquent, notre résultat final pour le nombre de zéros dans la bande critique avec $0 < T$ est donné par

$$\boxed{N(T) = \frac{T}{2\pi} \left(\log \frac{T}{2\pi} - 1 \right) + \mathcal{O}(\log T)}. \quad (142)$$

Comme mentionné ci-dessus, cette formule a été donnée par Riemann en 1859, mais seulement démontrée par von Mangoldt en 1905.

D'ailleurs, on peut aussi approximer $\operatorname{Im} \log \Gamma(1/4 + it/2)$ et ainsi obtenir

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} \left\{ \log \Gamma \left(\frac{1}{4} + \frac{it}{2} \right) \right\} &= \frac{t}{2} \log \left(\frac{t}{2} \right) - \frac{t}{2} - \frac{\pi}{8} - \frac{t}{2} \log \pi + \mathcal{O}(t^{-1}) \\
\text{i.e. } \vartheta(t) &= \frac{t}{2} \log \left(\frac{t}{2\pi} \right) - \frac{t}{2} - \frac{\pi}{8} + \mathcal{O}(t^{-1}). \quad (143)
\end{aligned}$$

Cela nous amène au résultat utile

$$N(T) = \frac{1}{\pi} \vartheta(T) + 1 + \frac{1}{\pi} \arg \zeta \left(\frac{1}{2} + iT \right), \quad (144)$$

avec

$$\frac{1}{\pi} \arg \zeta \left(\frac{1}{2} + iT \right) = \mathcal{O}(\log T) \quad \text{pour } T \rightarrow \infty. \quad (145)$$

On peut ainsi conclure pour le nombre de zéros de ζ dans la bande critique :

$$\begin{aligned} 1. \quad & N(T) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \infty \\ 2. \quad & N(T) \sim \frac{T}{2\pi} \log T. \end{aligned} \quad (146)$$

Cela découle de

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} + \mathcal{O}(\log T), \quad (147)$$

qui quand on le divise par $T/2\pi \log T$, amène à

$$\frac{N(T)}{\frac{T}{2\pi} \log T} = \frac{\log T - \log 2\pi}{\log T} + \frac{C}{T/2\pi} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 1. \quad (148)$$

Ce résultat devrait être comparé au théorème des nombres premiers (Gauß 1796, alors qu'il avait 15 ans)

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} \right) = 1. \quad (149)$$

Von Koch a démontré en 1901 : si l'hypothèse de Riemann ($\Re(s) = \frac{1}{2}$) est vraie, alors

$$\pi(x) = \text{Li}(x) + \mathcal{O}(\sqrt{x} \log x), \quad (150)$$

i.e. l'erreur dans l'approximation $\pi(x) \sim \text{Li}(x)$ est de l'ordre de $\sqrt{x} \log x$.

8 Régularisation de la fonction zeta de Riemann

Dans cette dernière section, on souhaite introduire le concept de la fonction zeta en lien avec la régularisation de certains problèmes en physique quantique dans lesquels interviennent des quantités infinies. Pour cette raison, on considère un opérateur A avec des valeurs propres positives, réelles discrètes $\{a_n\}$, i.e. $Af_n(x) = a_n f(x)$ et on définit sa fonction de zeta associée par

$$\zeta_A(s) = \sum_n a_n^{-s} = \sum_n e^{-s \ln a_n}, \quad (151)$$

où n parcourt toutes les valeurs propres. Si on choisit pour A l'opérateur de Hamilton de l'oscillateur harmonique, par exemple, on obtient (à part le point d'énergie nulle) exactement la fonction zeta. Par différentiation normale, il découle maintenant :

$$\zeta'_A(0) = - \sum_n \ln a_n e^{-s \ln a_n} \Big|_{s=0} = - \ln \left(\prod_n a_n \right). \quad (152)$$

Cela suggère la définition

$$\det A = \exp [-\zeta'_A(0)], \quad (153)$$

que nous utiliserons exclusivement dans la suite. L'avantage de cette méthode est que $\zeta'_A(0)$ n'est pas singulier pour de nombreux opérateurs présentant un intérêt physique. Comme exemple des nombreuses applications à des problèmes aussi bien relativistes que non relativistes en théorie quantique des champs, on choisira l'effet Casimir.

Cet effet est une force de répulsion non classique électromagnétique, attractive ou répulsive qui advient entre des conducteurs électriquement neutres dans le vide. La grandeur de cette force a d'abord été calculée par Casimir pour le cas de la conduction idéale, infiniment étendue dans des plaques parallèles ; son résultat a été une force

$$F = - \frac{\pi^2}{240} \cdot \frac{\hbar c}{a^4}, \quad (154)$$

où a est la distance entre les plaques et le signe négatif indique que les plaques s'attirent l'une l'autre. Cette force dépend apparemment seulement des constantes fondamentales \hbar et c en dehors de la distance entre les plaques ; elle ne dépend pas, pourtant, de la constante de couplage α entre les champs de Maxwell et de matière. Son caractère propre à la mécanique quantique est révélé par le fait que F s'évanouit dans la limite classique $\hbar \rightarrow 0$.

La dérivation par Casimir de F était basée sur le concept de vide (de particules) en électrodynamique quantique représentant les oscillations au point zéro d'un nombre infini d'oscillateurs harmoniques. Comme résultat, on obtient l'énergie totale du vide en sommant sur les énergies au point nul $1/2\hbar\omega_{\vec{k}}$ de tous les modes autorisés avec un vecteur de nombre d'onde \vec{k} et de polarisation σ ,

$$E = \sum_{\vec{k}, \sigma} \frac{1}{2} \hbar \omega_{\vec{k}}. \quad (155)$$

Si on évalue cette équation pour le cas de deux plaques parallèles à distance a l'une de l'autre, on obtient effectivement une énergie totale divergente $E(a)$, mais la différence

d'énergie $E(a) - E(a + \delta a)$ est finie ($\delta a =$ changement infinitésimal dans la distance entre les plaques), amenant aussi à une force finie par unité d'aire,

$$F = -\frac{\partial E(a)}{\partial a}. \quad (156)$$

Pour calculer cette différence d'énergie ou force, on introduit en général un UV-cut-off, i.e. l'énergie E est remplacée par

$$\sum_{\vec{k}, \sigma} \frac{1}{2} \hbar \omega_{\vec{k}} e^{-\frac{b}{\pi c} \omega_{\vec{k}}} \quad (157)$$

et dans le résultat final, la limite $b \rightarrow 0$ est considérée.

La dérivation de F , pourtant, peut donner l'impression que l'apparence de la force de Casimir est liée à l'existence de fluctuations au point zéro du champ électromagnétique quantifié.

Pour éviter le problème de l'énergie du vide divergente, dans la suite, on considérera le problème selon Hawking du point de vue de la quantisation de l'intégrale de chemin et de la régularisation de la fonction zeta. Ici, il est à nouveau non nécessaire de faire référence à l'oscillation du vide. Pour des raisons de simplicité, on souhaite considérer l'effet Casimir seulement pour la théorie d'un champ réel, scalaire qui est définie par ($\hbar = c = 1!$)

$$\mathcal{L}(\phi) = -\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - V(\phi), \quad (158)$$

avec le potentiel arbitraire V .

D'abord, on associe le champ ϕ à une source externe J ,

$$\mathcal{L}(\phi) \rightarrow \mathcal{L}(\phi) + J\phi. \quad (159)$$

On peut alors écrire l'amplitude du vide $\langle 0_+ | 0_- \rangle^J$ ou l'action $W[J]$ sous la forme

$$\langle 0_+ | 0_- \rangle^J = e^{iW[J]} = \int [d\phi] e^{i \int d^4x \{ \mathcal{L}(\phi) + J\phi \}}, \quad (160)$$

où on garantit la convergence de l'intégrale de chemin par la substitution $m^2 \rightarrow m^2 - i\epsilon$, $\epsilon > 0$. On a supposé que $|0_- \rangle$ or $|0_+ \rangle$ décrit un vide qui n'est pas "perturbé" par la présence de certaines géométries, i.e. l'intégrale de chemin est, sans restrictions par des conditions aux bornes, à prendre sur tous les champs ϕ . Cela change dès qu'on introduit

les deux plaques dans le vide, par exemple, perpendiculairement à l'axe des z (points d'intersection : $z = 0$ et $z = a$) et cela a pour conséquence que seuls ces champs devraient contribuer à l'intégrale de chemin qui devrait s'évanouir sur la surface des plaques, i.e. pour lequel il est vérifié que

$$\phi(x_0, x_1, x_2, 0) = \phi(x_0, x_1, x_2, a) = 0 \quad (161)$$

pour des (x_0, x_1, x_2) arbitraires. On obtient alors

$$\begin{aligned} \langle 0_+ | 0_- \rangle_a^J &= e^{iW(a, [J])} \\ &= \int_{\mathcal{F}_a} [d\phi] \exp \left[i \int d^4x \left\{ -\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} (m^2 - i\epsilon) \phi^2 - V(\phi) - J\phi \right\} \right], \end{aligned} \quad (162)$$

où $\int_{\mathcal{F}_a}$ suggère que l'intégrale de chemin doit seulement être prise sur l'espace réduit des fonctions \mathcal{F}_a définies par les conditions aux bornes. Avec ça, on a représenté l'amplitude du vide ou l'action pour le cas plus général comme une fonction du paramètre géométrique a et comme une fonctionnelle de la source externe J . Pour approcher les conditions de l'effet Casimir en électrodynamique quantique, on choisit maintenant $J = 0$ ainsi qu'un champ libre ϕ ($V = 0$), sans masse ($m = 0$). Selon l'intégration partielle

$$\langle 0_+ | 0_- \rangle_a = e^{iW(a)} = \int_{\mathcal{F}_a} [d\phi] e^{-\frac{i}{2} \int d^4x \phi \{-\partial^2 - i\epsilon\} \phi}. \quad (163)$$

L'intégrale de Gauß donne

$$\langle 0_+ | 0_- \rangle_a = e^{iW(a)} = \int_{\mathcal{F}_a} [d\phi] e^{-\frac{1}{2} \int d^3x d\tau \phi \{-\square_E\} \phi}. \quad (164)$$

Ici, N est une constante (divergente) qu'on posera $= 1$, puisqu'elle contribue seulement comme constante non physique additionnelle à $W(a)$. En écrivant \square_E/\mathcal{F}_a , on veut dire que les seules valeurs propres avec fonctions propres dans \mathcal{F}_a peuvent être utilisées pour évaluer le déterminant. De plus (en accord avec la contrainte), une rotation de Wick $t \rightarrow i\tau$ a été faite, i.e. $\square_E = \partial_\tau^2 + \Delta$.

De la définition originale du déterminant, il découle que

$$\begin{aligned} \langle 0_+ | 0_- \rangle_a &= e^{iW(a)} = \left[\exp \left\{ -\zeta'_{-\square_E/\mathcal{F}_a}(0) \right\} \right]^{-\frac{1}{2}} \\ &= \exp \left[\frac{1}{2} \zeta'_{-\square_E/\mathcal{F}_a}(0) \right]. \end{aligned} \quad (165)$$

L'opérateur $-\square_E/\mathcal{F}_a$ a pour spectre

$$\left\{ k_0^2 + k_1^2 + k_2^2 + \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 \mid k_0, k_1, k_2 \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \right\} \quad (166)$$

et ainsi, la fonction zeta

$$\zeta_{-\square_E/\mathcal{F}_a}(s) = 2 \frac{A}{(2\pi)^2} \frac{T_E}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_0 dk_1 dk_2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[k_0^2 + k_1^2 + k_2^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \right]^{-s}. \quad (167)$$

Ici, le facteur 2 permet les deux possibilités de polarisation du photon, qui, dans notre modèle simple, n'a pas d'analogue. De plus, AT_E est un volume de normalisation dans un espace trois-dimensionnel $(0, 1, 2)$, où le temps euclidien T_E est lié à un intervalle de temps de normalisation (de Minkowski) T par $T_E = iT$. Éliminer le terme indépendant d'un $(n = 0)$ dans la dernière équation amène simplement à soustraire une constante (infinie) de $W(a)$.

Une évaluation plus avancée de $\zeta_{-\square_E/\mathcal{F}_a}(s)$ prend maintenant la forme

$$\begin{aligned} \zeta_{-\square_E/\mathcal{F}_a}(s) &= 2AT_E \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} dk k^2 \left[k^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \right]^{-s} \\ &= \frac{8\pi}{(2\pi)^3} AT_E \left(\frac{\pi}{a}\right)^{3-2s} \sum_{n=1}^{\infty} n^{3-2s} \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(s - \frac{3}{2}\right)}{\Gamma(s)} \\ &= \frac{4\pi}{(2\pi)^3} AT_E \left(\frac{\pi}{a}\right)^{3-2s} \zeta(2s-3) \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(s - \frac{3}{2}\right)}{\Gamma(s)}. \end{aligned} \quad (168)$$

La dérivée est

$$\begin{aligned} \zeta'_{-\square_E/\mathcal{F}_a}(0) &= \frac{4\pi}{(2\pi)^3} AT_E \left(\frac{\pi}{a}\right)^3 \zeta(-3) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) \left. \frac{d}{ds} \frac{1}{\Gamma(s)} \right|_{s=0} \\ &= \frac{\pi^2}{360a^3} AT_E. \end{aligned} \quad (169)$$

Finalement, on obtient

$$\langle 0_+ | 0_- \rangle = e^{iW(a)} = e^{-\epsilon(a)T_E} = e^{-i\epsilon(a)T}, \quad (170)$$

avec

$$\epsilon(a) = -\frac{\pi^2}{720a^3} A. \quad (171)$$

L'apparence du facteur de phase $e^{-i\epsilon(a)T}$ dans l'amplitude du vide nous permet d'identifier $\epsilon(a)$ comme le déplacement de l'énergie du vide et d'écrire, pour la force par unité de surface

$$F = -\frac{1}{A} \frac{\partial \epsilon}{\partial a}, \quad (172)$$

ce qui amène à

$$F = -\frac{\pi^2}{240} \cdot \frac{1}{a^4} \quad (173)$$

ou, après avoir remis \hbar et c

$$F = -\frac{\pi^2}{240} \cdot \frac{\hbar c}{a^4}. \quad (174)$$

Ceci est précisément le résultat de Casimir que nous avons maintenant complètement dérivé à l'aide de la régularisation de la fonction de Riemann, qui a complètement éliminé l'énergie divergente au point zéro. La même procédure trouve des applications en électrodynamique quantique et en chromodynamique quantique, et peut être étudiée dans la liste de références (i.e. voir [9,10,11]).

Remerciements

Je souhaite exprimer ma gratitude aux bibliothécaires du "Handschriftenabteilung" (le Département des documents manuscrits) à l'Université de Göttingen pour m'avoir permis d'accéder aux manuscrits originaux de Riemann, et en particulier aux originaux concernant les nombres premiers.

Appendice : Suppléments

La fonction ζ de Riemann peut être étendue méromorphiquement à la région $\{s : \Re(s) > 0\}$ dans et à droite de la bande critique $\{s : 0 \leq \Re(s) < 1\}$. C'est une région suffisante de prolongement méromorphe pour de nombreuses applications en théorie analytique des nombres. Les zéros de la fonction ζ dans la bande critique sont connus sous le nom de zéros non triviaux de ζ .

Il est remarquable que ζ vérifie une équation fonctionnelle en établissant une symétrie autour de la droite critique $\{s : \Re(s) = \frac{1}{2}\}$ plutôt qu'autour de l'axe réel. Une conséquence de cette symétrie est que la fonction ζ peut être étendue méromorphiquement à tout le plan complexe avec un pôle simple en $s = 1$ et aucun autre pôle. Pour toute la région

$\mathbb{C} \setminus \Re(s) = 1$ incluant la bande critique on a l'équation fonctionnelle :

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{s\pi}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s), \quad \Re(s) < 0 \quad (175)$$

ou, de façon équivalente, l'identité entre les fonctions méromorphes $\zeta(s)$:

$$\zeta(1-s) = \frac{2}{(2\pi)^s} \cos\left(\frac{s\pi}{2}\right) \Gamma(s) \zeta(s). \quad (176)$$

Le prolongement analytique donné ici permet de relier $\zeta(s)$ pour les valeurs positives de $\Re(s)$ avec les valeurs aux nombres négatifs, par exemple :

$$\zeta(-1) = 2^{-1} \pi^{-2} (-1) \Gamma(2) \zeta(2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\pi^2} \cdot (-1) \cdot 1 \cdot \frac{\pi^2}{6} = -\frac{1}{12}, \quad (177)$$

i.e.

$$\zeta_R(-1) = -\frac{1}{12}, \quad (178)$$

où l'indice R est ajouté pour distinguer la fonction ζ de Riemann de celle d'Euler, dont elle est une extension, i.e.

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} = \prod_{p \text{ premier}} \frac{1}{1-p^{-x}} \quad \text{convergeant pour } x > 1$$

$$\frac{1}{1^x} + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \dots = \prod_{p \text{ premier}} \frac{p^x}{p^x - 1} = \left(\frac{2^x}{2^x - 1}\right) \left(\frac{3^x}{3^x - 1}\right) \left(\frac{5^x}{5^x - 1}\right) \dots$$

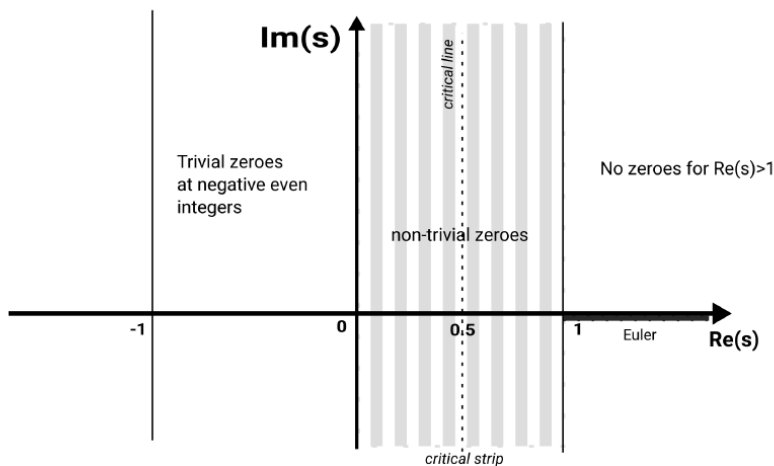


Figure 2: Les différents domaines de définition de la fonction ζ de Riemann de (179)

Quand on étend cette fonction au plan complexe complet s , alors la fonction ζ de Riemann vient en trois représentations différentes :

$$\zeta(s) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ premier}} \frac{p^s}{p^s - 1}, & \Re(s) > 1 \\ (1 - 2^{1-s}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}, & 0 < \Re(s) < 1 \\ 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{s\pi}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s), & \Re(s) < 0 \end{cases} \quad (179)$$

Où $\zeta(s)$ est-elle égale à 0 ?

1. Il n'y a aucun zéro pour $\Re(s) > 1$ puisque là, $\zeta(s) > 0$.
2. il n'y a pas de zéros non triviaux dans la bande $0 < \Re(s) < 1$, symétrique autour de $\Re(s) = \frac{1}{2}$.
3. il y a des zéros triviaux pour $s = -2, -4, \dots$, donc pour $\Re(s) < 0$.

Il y a un pôle en $s = 1$.

L'origine de l'équation fonctionnelle pour la fonction η de Dirichlet

Euler dans son article "Remarques sur un beau rapport entre les séries des puissances tant directes que réciproques" écrit les équations fonctionnelles suivantes

$$\frac{1 - 2^{n-1} + 3^{n-1} - 4^{n-1} + 5^{n-1} - 6^{n-1} + \dots}{1 - 2^{-n} + 3^{-n} - 4^{-n} + 5^{-n} - 6^{-n} + \dots} = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots (n-1)(2^n - 1)}{(2^{n-1} - 1)\pi^n} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\frac{1 - 3^{n-1} + 5^{n-1} - 7^{n-1} + \dots}{1 - 3^{-n} + 5^{-n} - 7^{-n} + \dots} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots (n-1)(2^n)}{\pi^n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) .$$

Il finit alors son travail en démontrant que les assertions ci-dessus sont vraies pour des nombres entiers positifs et négatifs ainsi que pour les valeurs fractionnaires de n .

De nos jours, on écrit avec $s \in \mathbb{C}$:

$$\eta(1-s) = -\frac{(2^s - 1)}{\pi^s(2^{s-1} - 1)} \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(s) \eta(s) \quad (180)$$

qui est l'équation fonctionnelle de la fonction η de Dirichlet.

Hardy a donné une démonstration pour le cas où s est remplacé par $s + 1$ dans la dernière équation :

$$\eta(-s) = 2 \frac{(1 - 2^{-s-1})}{1 - 2^{-s}} \pi^{-s-1} s \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(s) \eta(s+1) \quad . \quad (181)$$

De la relation $\eta(s) = (1 - 2^{1-s}) \zeta(s)$ on peut montrer que η a des zéros en les points $s_k = 1 + \frac{2\pi i k}{\ln 2}$ pour tout $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, par exemple $s_1 = 1 + 9.0647i$. Pour $k = 0$ on trouve plutôt $\eta(1) = \ln 1 = 0.69315$. Rappelons que $\zeta(1) = \infty$.

Quand on écrit

$$\zeta(s) = \frac{\eta(s)}{1 - 2^{1-s}}$$

on réalise que $\eta(s)$ ainsi que $(1 - 2^{1-s})$ ont les mêmes zéros s_k avec $k = 1, 2, 3, \dots$. $\eta(s)$ est également nulle aux points où $\zeta(s)$ est nulle. Ce sont les zéros triviaux $s = -2, -4, -6, \dots$ tels que

$$\eta(-2) = \eta(-4) = \eta(-6) = \dots = 0 \quad .$$

Finalement, η , comme ζ , présente les zéros non triviaux dans la bande critique $\{s \in \mathbb{C} \mid 0 < \Re(s) < 1\}$. La célèbre hypothèse de Riemann non démontrée stipule que tous les zéros non triviaux de ζ sont sur l'axe $\Re(s) = \frac{1}{2}$.

$\zeta(s)$ est une fonction méromorphe. Plus tard on rencontrera la fonction ξ de Riemann, $\xi(s) = \frac{1}{2} s(s-1) \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$. $\xi(s)$ est une fonction entière, elle a des zéros non triviaux, pourtant elle n'a ni zéros triviaux, ni pôles. On a également : $\xi(s) = \xi(1-s)$.

Les tables (1) indiquent que la fonction Γ et les facteurs trigonométriques dans l'équation fonctionnelle ((175), (176), resp.) sont liés aux zéros triviaux et aux pôles de la fonction ζ , mais n'ont pas d'incidence directe sur la distribution des zéros non triviaux, ce qui est la caractéristique la plus importante de la fonction ζ pour les buts de la théorie analytique des nombres, au-delà du fait qu'ils sont symétriques autour de l'axe réel et de la droite critique $x = \frac{1}{2}$. Les fonctions exponentielles telles que 2^{s-1} ou π^{-s} n'ont ni zéros ni pôles. En particulier, l'hypothèse de Riemann ne va pas être résolue juste par une analyse plus poussée de la fonction Γ .

Un remarquable fait historique : Euler, en 1749 (110 ans avant Riemann !) a découvert que la série suivante est convergente :

$$\phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s} \quad (182)$$

On appelle aussi cela la fonction η de Dirichlet. Cette série est reliée à ζ par

$$\phi(s) = (1 - 2^{1-s}) \zeta(s) \quad (183)$$

s	$\zeta(s)$
$-2\mathbb{N}$	0
$-\mathbb{N}$	$\frac{-B_{n+1}}{n+1}$
-7	$\frac{1}{240}$
-5	$\frac{-1}{252}$
-3	$\frac{1}{20}$
-1	$\frac{-1}{12}$
0	$-\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	-1.46035450
1	∞
$\frac{3}{2}$	2.6123753486
2	$\frac{\pi^2}{6} \approx 1.6449340$ (Euler, Bâle)
$\frac{5}{2}$	1.3414872572
3	1.2020569
$\frac{7}{2}$	1.1267338673
4	$\frac{\pi^4}{90} \approx 1.082323233$

(a) Quelques valeurs de $\zeta(s)$

Fonction	zéros non triviaux	zéros triviaux	Pôles
$\zeta(s)$	Oui	$-2, -4, -6, \dots$	1
$\zeta(1-s)$	Oui	$3, 5, \dots$	0
$\sin \frac{\pi s}{2}$	Non	$2\mathbb{N}$	Non
$\cos \frac{\pi s}{2}$	Non	$2\mathbb{N} + 1$	Non
$\sin \pi s$	Non	\mathbb{N}	Non
$\Gamma(s)$	Non	Non	$0, -1, -2, \dots$
$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$	Non	Non	$0, -2, -4, \dots$
$\Gamma(1-s)$	Non	Non	$1, 2, 3, \dots$
$\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)$	Non	Non	$1, 3, 5, \dots$
$\xi(s)$	Oui	Non	Non

(b) Propriétés de quelques fonctions

Table 1: Propriétés et valeurs particulières de la fonction ζ de Riemann.

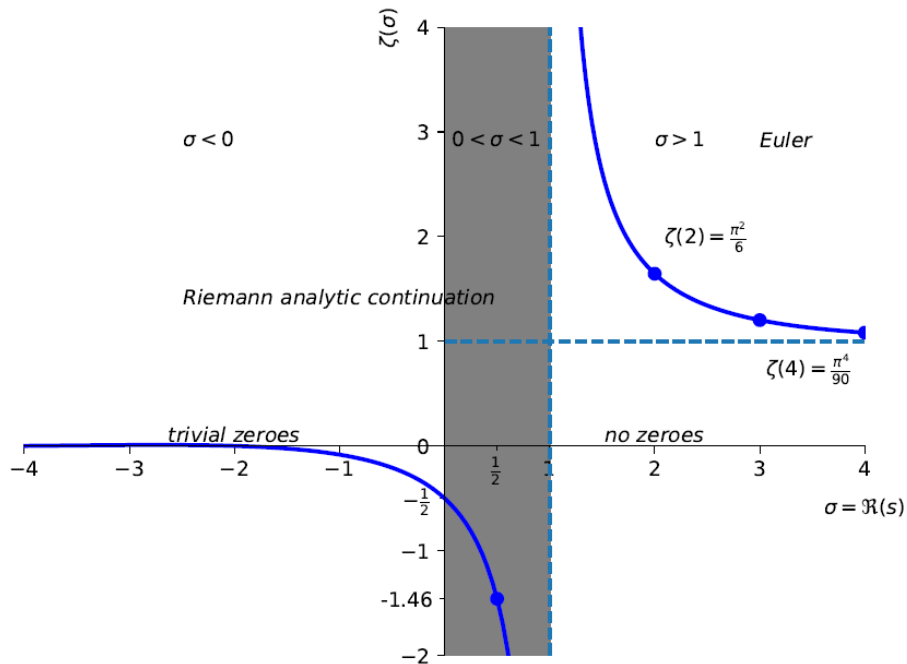


Figure 3: Comportement de la fonction ζ de Riemann pour les arguments réels.

Dans la bande critique $0 < s < 1$, on a :

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= \frac{2^{s-1}}{2^{s-1} - 1} \phi(s) = \frac{1}{1 - 2^{1-s}} \phi(s) \\ &= \frac{1}{1 - 2^{1-s}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}, \quad \Re(s) > 0, 1 - 2^{1-s} \neq 0.\end{aligned}\quad (184)$$

D'Euler, on a

$$\frac{\phi(1-n)}{\phi(n)} = \frac{-(n-1)!(2^n - 1)}{(2^{n-1} - 1)\pi^n} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right), \quad (185)$$

et il dit de plus : “je hasarderais que la conjecture suivante :

$$\frac{\phi(1-s)}{\phi(s)} = -\frac{\Gamma(s)(2^s - 1) \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)}{(2^{s-1} - 1)\pi^s} \quad (186)$$

est vraie pour tout s ”. On sait que $(\eta(s) =)\phi(s) = (1 - 2^{1-s})\zeta(s)$, ce qui amène directement de (186) à

$$\zeta(1-s) = \frac{2}{(2\pi)^s} \Gamma(s) \zeta(s) \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right), \quad \forall s \in \mathbb{C} \setminus 1 \quad (187)$$

et ceci est la célèbre équation fonctionnelle qui a été démontrée par Riemann en 1859 (mais elle avait été conjecturée par Euler en 1749 !). Il est probablement correct de supposer que Riemann était très familier de la contribution d'Euler.

Avec la série alternée de Dirichlet en main, on peut déjà énoncer une assertion importante par rapport aux zéros de la fonction ζ dans la bande critique $0 < \Re(s) = \sigma < 1$, qui est importante pour l'hypothèse de Riemann, et qui énonce que tous les zéros non triviaux de ζ sont sur la droite $\Re(s) = \frac{1}{2}$.

Pour montrer cela, on commence par

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad s := \sigma + it \quad (188)$$

qui est convergente pour $\Re(s) > 1$, est une fonction méromorphe et a un pôle en $s = 1$. Ensuite soit

$$n^s = n^{\sigma+it} = n^{\sigma} n^{it} = n^{\sigma} e^{it \ln n} = |n|^{\sigma} (\cos(t \ln n) + i \sin(t \ln n)) \quad (189)$$

d'où il suit immédiatement que

$$\zeta(s) = \Re(\zeta(s)) + i \Im(\zeta(s)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}} [\cos(t \ln n) - i \sin(t \ln n)] \quad (190)$$

$$\Rightarrow \Re(\zeta(s)) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\sigma} \cos(t \ln n) \quad (191)$$

$$\Im(\zeta(s)) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\sigma} \sin(t \ln n) \quad (192)$$

qui sont convergentes pour $\sigma > 1, t \in \mathbb{R}$. Ensuite considérons la fonction ϕ d'Euler comme donnée dans (182), qui est également connue sous le nom de fonction η de Dirichlet. Une extension du domaine de ζ à la région $0 < \sigma < 1$, i.e. dans la bande critique, est obtenue en réécrivant (183) comme

$$\zeta(s) = \frac{1}{1 - 2^{1-s}} \eta(s). \quad (193)$$

Notons que seule la bande critique est importante pour l'hypothèse de Riemann. Notons de plus que η est convergente pour $\sigma = \Re(s) > 0$ et que la série harmonique alternée suivante,

$$\eta(1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln 2 \approx 0.69315, \quad (194)$$

s'obtient à partir de

$$\ln(x+1) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots \quad -1 < x \leq 1, \quad (195)$$

où x est supposée être réelle. On peut réécrire la fonction η de Dirichlet de la façon suivante :

$$\eta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2n-1)^s} - \frac{1}{(2n)^s} \right). \quad (196)$$

De là, on obtient d'une façon simple (c.f. (191), (192)):

$$\Re(\eta(s)) = \sum_{n=1}^{\infty} [(2n-1)^{-\sigma} \cos(t \ln(2n-1)) - (2n)^{-\sigma} \cos(t \ln(2n))] \quad (197)$$

$$\Im(\eta(s)) = \sum_{n=1}^{\infty} [(2n)^{-\sigma} \sin(t \ln(2n)) - (2n-1)^{-\sigma} \sin(t \ln(2n-1))] \quad . \quad (198)$$

En utilisant $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{3}{4}\pi\right)$, on obtient alors

$$\begin{aligned} \Re(\eta(s)) + \Im(\eta(s)) &= \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(2n-1)^{-\sigma} \sin\left(t \ln(2n-1) + \frac{3}{4}\pi\right) \right. \\ &\quad \left. - (2n)^{-\sigma} \sin\left(t \ln(2n) + \frac{3}{4}\pi\right) \right] \neq 0 \quad \forall \sigma \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \forall t \quad , \quad (199) \end{aligned}$$

i.e. η ne possède pas de racine sur la moitié gauche de la bande critique, et à cause de la formule de réflexion (176), cela est aussi vrai du côté droit, i.e. les zéros peuvent seulement être sur la droite critique $\sigma = \frac{1}{2}$, ce qui est l'**hypothèse de Riemann**.

Théorème. Si $\Re(s) = \sigma > 0$, on a

$$(1 - 2^{1-s})\zeta(s) = \eta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} \quad , \quad (200)$$

qui implique que $\zeta(s) < 0$ si s est réel et $0 < s < 1$.

Preuve. D'abord supposons que $\sigma > 1$ (Euler : $\Re(s) > 1$). Alors on a

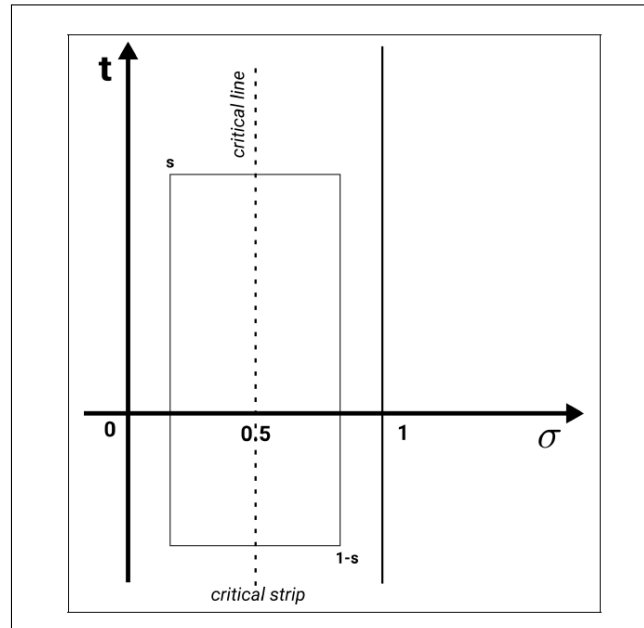
$$\begin{aligned} (1 - 2^{1-s})\zeta(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^s} \\ &= (1 + 2^{-s} + 3^{-s} + \dots) - 2(2^{-s} + 4^{-s} + 6^{-s} + \dots) \\ &= 1 - 2^{-s} + 3^{-s} - 4^{-s} + \dots = \text{fonction } \zeta \text{ alternée,} \end{aligned}$$

ce qui prouve (200) pour $\Re(s) = \sigma > 1$. Pourtant, si $\sigma > 0$ la série du côté droit converge, ainsi (200) est aussi vérifiée pour $\sigma > 0$ par prolongement analytique, i.e. quand s est réel alors la somme dans (200) est une série alternée avec une limite positive.

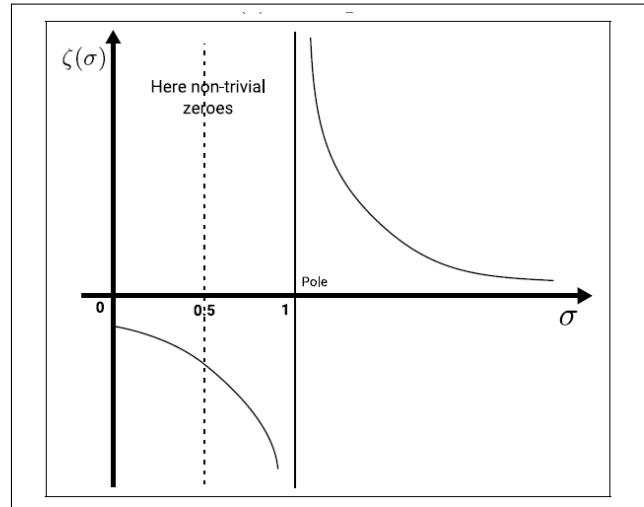
Si $0 < s < 1$, alors le facteur $1 - 2^{1-s}$ devient négatif. Par conséquent $\zeta(s)$ est aussi négative (n'a pas de zéros !) dans $0 < s < 1$. □

Notons que $\eta(1) = \dots = \ln 2 \approx 0.69315$ (c.f. (194)) alors que $\zeta(1) = \infty$, c'est-à-dire que $s = 1$ est un pôle de la fonction méromorphe ζ . De plus on a

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2} \quad . \quad (201)$$



(a) L'argument



(b) La fonction

Figure 4: Un regard plus attentif au comportement de ζ . En se référant à 4b, on a $|\zeta(\frac{1}{2} - \sigma)| > |\zeta(\frac{1}{2} + \sigma)|$ or $|\zeta(\frac{1}{2} - \sigma)| > |\zeta(\frac{1}{2})|$. Aucun zéro de ζ sur la moitié gauche et sur la moitié droite de la bande critique ce qui est équivalent à l'hypothèse de Riemann.

Preuve. En commençant par l'équation fonctionnelle

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s) = \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\pi^{-\frac{1-s}{2}}\zeta(1-s) \quad (202)$$

on résout $\zeta(s)$ pour obtenir

$$\zeta(s) = \pi^{\frac{s}{2}}\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\frac{\zeta(1-s)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}$$

$$s \rightarrow 0 : \zeta(0) = \pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\lim_{s \rightarrow 0}\frac{\zeta(1-s)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}.$$

Puisque les résidus de ζ en $s = 1$ et de Γ en $s = 0$ sont tous les deux égaux à 1, i.e.

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \dots, \quad \Gamma(s) = \frac{1}{s} + \dots, \quad (203)$$

on a

$$\zeta(1-s) = -\frac{1}{s} + \dots, \quad \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \frac{2}{s} + \dots \quad (204)$$

et donc

$$\lim_{s \rightarrow 0}\frac{\zeta(1-s)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} = \lim_{s \rightarrow 0}-\frac{\frac{1}{s} + \dots}{\frac{2}{s} + \dots} = -\frac{1}{2} \quad (205)$$

d'où il découle, en utilisant $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$

$$\zeta(0) = \pi^{-\frac{1}{2}}\pi^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \implies \zeta(0) = -\frac{1}{2}. \quad (206)$$

□

Des équations eqs. (98), (99), on a

$$t, x, \psi(x), \ln(x) \in \mathbb{R}.$$

Donc $\Im\mathfrak{m}\xi\left(\frac{1}{2} + it\right) = 0$, i.e. $\xi\left(\frac{1}{2} + it\right) \equiv \Xi(t) \in \mathbb{R}$ et par conséquent

$$\Xi(t) = \xi\left(\frac{1}{2} + it\right) = -\frac{t^2 + \frac{1}{4}}{2(\sqrt{\pi})^{\frac{1}{2}+it}}\Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{it}{2}\right)\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)$$

$$\xi\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8\pi^{\frac{1}{4}}}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\zeta\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0.4971207781 =: a_0$$

$$\zeta\left(\frac{1}{2}\right) \approx -1.4603545088$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = \sqrt{2\bar{\omega}2\pi} \approx 3.6256099082$$

où dans la dernière équation $\bar{\omega}$ est ce qu'on appelle la constante de la lemniscate de Gauss.

Quelques valeurs particulières :

$$\xi(0) = \xi(1) = -\zeta(0) = \frac{1}{2} . \quad (207)$$

Preuve. En utilisant $\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)$ ainsi que $\Gamma(1 + \frac{s}{2}) = \frac{s}{2}\Gamma(\frac{s}{2})$ on obtient

$$\xi(s)|_{s=0} = (s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(1 + \frac{s}{2})\zeta(s)|_{s=0} \Leftrightarrow \xi(s) = -1 \cdot 1 \cdot \Gamma(1) \cdot \zeta(0) = \frac{1}{2} \quad (208)$$

Donc

$$\xi(0) = \frac{1}{2} .$$

De façon similaire, utiliser la propriété de réflexion $\xi(s) = \xi(1-s)$ amène :

$$\begin{aligned} \xi(s) &= (-s)\pi^{-\frac{1}{2}(1-s)}\Gamma(\frac{3}{2} - \frac{s}{2})\zeta(1-s) \\ &\Rightarrow \xi(1) = -1 \cdot 1 \cdot \Gamma(1) \cdot \zeta(0) = \frac{1}{2} \\ &\implies \xi(1) = \frac{1}{2} \quad (209) \end{aligned}$$

□

Équation fonctionnelle de Riemann

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma(\frac{1-s}{2})\zeta(1-s), \quad (210)$$

dont la symétrie est évidente quand $s \rightarrow 1-s$ est remplacé des deux côtés de l'équation.

Preuve. En commençant avec la fonction Γ d'Euler

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1}e^{-t} dt . \quad (211)$$

En utilisant $s \rightarrow \frac{s}{2}$, le résultat ci-dessus devient

$$\Gamma(\frac{s}{2}) = \int_0^\infty t^{\frac{s}{2}-1}e^{-t} dt . \quad (212)$$

Ensuite, on peut utiliser la substitution $t = \pi n^2 x$ ($dt = \pi n^2 dx$) pour obtenir

$$\begin{aligned} \Gamma(\frac{s}{2}) &= \int_0^\infty (\pi n^2 x)^{\frac{s}{2}-1} e^{-\pi n^2 x} \pi n^2 dx \\ \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\frac{1}{n^s} &= \int_0^\infty x^{\frac{s}{2}-1} e^{-\pi n^2 x} dx . \end{aligned}$$

La sommation sur n amène

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \frac{1}{n^s} &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1} e^{-\pi n^2 x} dx \\
\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} &= \int_0^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x} dx \\
\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) &= \int_0^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x}}_{\text{fortement relié à la fonction } \vartheta \text{ de Jacobi.}} dx \\
\vartheta(x) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 x} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x} = 1 + 2\psi(x), \quad x > 0. \\
\Rightarrow \int_0^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x} dx &= \int_0^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \psi(x) dx.
\end{aligned}$$

On sépare l'intégrale du côté droit en deux parties :

$$\int_0^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \psi(x) dx = \int_1^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \psi(x) dx + \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1} \psi(x) dx. \quad (213)$$

Regardons $\vartheta(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \vartheta\left(\frac{1}{x}\right)$ or $2\psi(x) + 1 = \frac{1}{\sqrt{x}}(1 + \psi\left(\frac{1}{x}\right))$. Les équations (72) dans le corps de l'article sont

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= \frac{1}{\sqrt{x}} \psi\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
\int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1} \psi(x) dx &= \int_0^1 x^{\frac{1}{2}-1} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \psi\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2} \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(x^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}} \psi\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2} \left(x^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}} - x^{\frac{s}{2}-1} \right) \right) dx \\
&= \int_0^1 x^{\frac{s-3}{2}} \psi\left(\frac{1}{x}\right) dx + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} x^{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} - \frac{1}{\frac{s}{2}} x^{\frac{s}{2}} \right]_0^1 \\
&= \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}} \psi\left(\frac{1}{x}\right) dx + \frac{1}{s(s-1)} \\
&\stackrel{(*)}{=} \int_{\infty}^1 \left(\frac{1}{y} \right)^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}} \psi(y) \left(-\frac{1}{y^2} \right) dy + \frac{1}{s(s-1)} \\
&\stackrel{y \rightarrow x}{=} \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x} \right)^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}} \psi(x) \frac{dx}{x^2} + \frac{1}{s(s-1)} \\
\Rightarrow \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1} \psi(x) dx &= \int_1^{\infty} x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} \psi(x) dx + \frac{1}{s(s-1)} \\
\int_0^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \psi(x) dx &= \int_1^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \psi(x) dx + \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1} \psi(x) dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_1^\infty x^{\frac{s}{2}-1} \psi(x) dx + \int_1^\infty x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} \psi(x) dx + \frac{1}{s(s-1)} \\
&= \int_1^\infty \left(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} \right) \psi(x) dx + \frac{1}{s(s-1)},
\end{aligned}$$

où dans (*) la substitution $x = \frac{1}{y}$, $dx = -\frac{1}{y^2} dy$, $\int_0^1 \rightarrow \int_\infty^1$ a été utilisée. Rappelons qu'on a commencé avec $\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \int_0^\infty x^{\frac{s}{2}-1} \psi(x) dx$ et que l'on est parvenu à

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \int_1^\infty \left(x^{\frac{s}{2}} + x^{\frac{1-s}{2}} \right) \frac{\psi(x)}{x} dx - \frac{1}{s(s-1)}. \quad (214)$$

Notons que le dernier terme amène le pôle de Γ en $s = 0$ et de ζ en $s = 1$. Notons également que le côté droit ne change pas selon $s \rightarrow 1 - s$, ce qui implique l'équation fonctionnelle de Riemann

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s).$$

Riemann a utilisé 4-5 lignes pour dériver cette relation ! □

Dans (214) on a utilisé

$$\begin{aligned}
x^{\frac{s}{2}} &= x^{\frac{\sigma+it}{2}} = e^{\frac{\sigma \ln(x)}{2} + i \frac{t}{2} \ln(x)} = e^{\frac{\sigma \ln(x)}{2}} \left[\cos\left(\frac{t}{2} \ln(x)\right) + i \sin\left(\frac{t}{2} \ln(x)\right) \right] \\
x^{\frac{1-s}{2}} &= e^{\frac{(1-\sigma) \ln(x)}{2}} \left[\cos\left(\frac{t}{2} \ln(x)\right) - i \sin\left(\frac{t}{2} \ln(x)\right) \right] \\
x^{\frac{s}{2}} + x^{\frac{1-s}{2}} &= \left(e^{\frac{\sigma \ln(x)}{2}} + e^{\frac{(1-\sigma) \ln(x)}{2}} \right) \cos\left(\frac{t}{2} \ln(x)\right) \\
&\stackrel{y=\frac{t}{2} \ln(x)}{=} \left(e^{\sigma \frac{y}{2}} + e^{(1-\sigma) \frac{y}{2}} \right) \cos(y) \\
&\stackrel{R.H.: \sigma=\frac{1}{2}}{=} \left(e^{\frac{y}{2t}} + e^{\frac{y}{2t}} \right) \cos(y) = 2e^{\frac{y}{2t}} \cos(y) \\
&= 2e^{\frac{1}{4} \ln(x)} \cos(y) = 2x^{\frac{1}{4}} \cos\left(\frac{t}{2} \ln(x)\right)
\end{aligned}$$

et dont la partie imaginaire s'évanouit pour $\sigma = \frac{1}{2}$. Donc

$$\Xi(t) := \xi\left(\frac{1}{2} + it\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} s(s-1) \int_1^\infty \psi(x) \cdot 2 \cdot e^{\frac{1}{4} \ln(x)} \cos\left(\frac{t}{2} \ln(x)\right) \frac{dx}{x} \quad (215)$$

est une fonction réelle, qui est mentionnée dans l'article de Berlin de Riemann à la page 147 comme

$$\Xi(t) = \frac{1}{2} - \left(t^2 + \frac{1}{4}\right) \int_1^\infty \psi(x) x^{-\frac{3}{4}} \cos\left(\frac{t}{2} \ln(x)\right) dx; \quad (216)$$

de plus,

$$\Im \xi\left(\frac{1}{2} + it\right) = 0, \Rightarrow \xi\left(\frac{1}{2} + it\right) = \Xi(t) \in \mathbb{R}. \quad (217)$$

Qu'est-ce qu'une fonction ?

Pourquoi $1 + 2 + 3 + 4 + \dots = -\frac{1}{12}$ est-elle une valeur régularisée ? Une réaction normale à cette assertion est : ce n'est pas un résultat vrai. C'est de la foutaise que de dire que $1 + 2 + 3 + \dots$ a une valeur finie, tant qu'on ne spécifie pas ce qu'est une fonction (le concept de fonction) et comment on la calcule, i.e. quelle représentation est choisie, quel est son domaine de définition, etc.

Les deux assertions suivantes sont, pourtant, vraies :

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots \rightarrow \infty, \quad \text{i.e. diverge,}$$

$$\zeta_{\text{Riemann}}(-1) = -\frac{1}{12} \quad .$$

Question: Dans quelle représentation cette dernière assertion est-elle vraie ? On a besoin d'une compréhension plus générale d'une fonction ainsi que d'une représentation dans laquelle la valeur de la fonction est calculée.

Il est bien connu qu'une fonction peut avoir différentes représentations, par exemple, en prenant la fonction sinus :

$$f(z) = \begin{cases} \sin(z) & \\ \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} & \text{Euler} \\ z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots & \text{développement de Taylor} \\ z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 n^2}\right) & \text{développement en produit} \end{cases} \quad (218)$$

Le développement de Taylor est un développement en somme infinie de la fonction sinus, on a seulement besoin des puissances de z . Le développement en produit de la fonction sinus nécessite toute l'infinité des zéros de la fonction sinus. On voit qu'il y a de nombreuses manières différentes d'écrire une seule fonction (par exemple sinus), i.e. de nombreuses expressions différentes pour effectuer différents calculs !

Qu'est-ce que tout cela signifie-t-il pour la fonction zeta ? Commençons par la définition d'Euler (1737):

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad s > 1$$

$$= 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots, \quad s > 1 \text{ pour avoir la convergence,}$$

qui est la somme des inverses des puissances des entiers. Substituer de façon évidente des nombres négatifs pour s n'est pas autorisé, même $s = 1$ n'est pas permis.

Si on ignore la condition de convergence $s > 1$, alors on peut écrire

$$\zeta_{\text{Euler}}(-1) = 1 + \frac{1}{2^{-1}} + \frac{1}{3^{-1}} + \dots = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots \quad , \quad (219)$$

qui est un pur non-sens, parce que ça n'est pas correctement défini. $s = -1$ est simplement non autorisé dans la définition (représentation) d'Euler de la fonction zeta, qui est seulement définie sur l'axe réel $1 < x \equiv s$. Mais il y a une autre représentation attribuée à Riemann, qui peut être étendue à tout le plan complexe, $s \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, i.e. incluant la valeur $\Re(s) = -1$.

$$\zeta(s) = \begin{cases} \zeta_E(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} & \Re(s) > 1, \text{ Euler (1797)} \\ \zeta_R(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s) & s \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}, \text{ Riemann (1859)} \end{cases} \quad (220)$$

Notons que cette dernière fonction n'est pas donnée comme une série mais comme une fonction méromorphe.

Dans la représentation de Riemann on obtient

$$\begin{aligned} \zeta_R(-1) &= 2^{-1} \pi^{-2} \sin\left(\frac{-\pi}{2}\right) \Gamma(1 - (-1)) \zeta(1 - (-1)) \\ &= 2^{-1} \pi^{-2} (-1) \Gamma(2) \zeta(2) \\ &= 2^{-1} \pi^{-2} (-1) \cdot 1 \cdot \frac{\pi^2}{6} = -\frac{1}{12} \quad , \end{aligned}$$

où dans la troisième égalité, on a utilisé $\Gamma(2) = (2-1)! \cdot 1 = 1$, $\zeta(2) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$.

Ceci est une assertion vraie dans la représentation de la fonction zeta de Riemann

$$-\frac{1}{12} = \zeta_R(-1) \neq \zeta_E(-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \Big|_{s=-1} \equiv 1 + 2 + 3 + 4 + \dots \quad (221)$$

alors que la représentation d'Euler n'est pas définie pour $s = -1$.

La fonction de comptage des nombres premiers $\pi(x)$.

Assertion:

$$\begin{aligned} \frac{\ln \zeta(s)}{s} &= \int_2^{\infty} \frac{\pi(x)}{x(x^s - 1)} dx, \quad s > 1 \\ \zeta(s) &= \prod_{p \in \text{Premiers}} \frac{1}{1 - p^{-s}}, \quad s > 1 \\ \ln \zeta(s) &= \ln \prod_{p \in \text{Premiers}} \frac{1}{1 - p^{-s}} = \sum_{p \in \text{Premiers}} \ln \frac{1}{1 - p^{-s}} \end{aligned} \quad (222)$$

où $\pi(x)$ est le nombre de nombres premiers inférieurs à x . Remplacer la sommation sur les nombres premiers par une sommation sur tous les entiers amène

$$\ln \zeta(s) = \sum_{n=2}^{\infty} \{\pi(n) - \pi(n-1)\} \ln \frac{1}{1-n^{-s}} \quad (223)$$

où

$$\pi(n) - \pi(n-1) = \begin{cases} 1, & n \text{ un nombre premier} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

projections en dehors des nombres premiers, par exemple

$$\pi(2) - \pi(1) = 1 - 0 = 1$$

$$\pi(3) - \pi(2) = 2 - 1 = 1$$

$$\pi(4) - \pi(3) = 2 - 2 = 0$$

⋮

$$\begin{aligned} (223) \Rightarrow \ln \zeta(s) &= \sum_{n=2}^{\infty} \pi(n) \ln \frac{1}{1-n^{-s}} - \sum_{n=2}^{\infty} \pi(n-1) \ln \frac{1}{1-n^{-s}} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \pi(n) \ln \frac{1}{1-n^{-s}} - \sum_{n=2}^{\infty} \pi(n) \ln \frac{1}{1-(n+1)^{-s}} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \pi(n) (\ln(1-(n+1)^{-s}) - \ln(1-n^{-s})). \end{aligned} \quad (224)$$

Maintenant utilisons

$$\frac{d}{dx} \ln(1-x^{-s}) = \frac{1}{1-x^{-s}} (sx^{-s-1}) = \frac{s}{x(x^s-1)}. \quad (225)$$

Intégrons des deux côtés pour obtenir

$$\ln(1-x^{-s}) = s \int \frac{1}{x(x^s-1)} dx + C \quad (226)$$

et utilisons cela dans (224), alors que convertir l'intégrale indéfinie en une intégrale sur $[n, n+1]$:

$$\begin{aligned} \ln \zeta(s) &= \sum_{n=2}^{\infty} \underbrace{\pi(n)}_{\text{const. sous l'intégrale}} \int_n^{n+1} \frac{s}{x(x^s-1)} dx \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{s\pi(x)}{x(x^s-1)} dx \quad n : 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 4, \dots \\ \ln \zeta(s) &= \int_2^{\infty} \frac{s\pi(x)}{x(x^s-1)} dx \end{aligned}$$

ou

$$\frac{\ln \zeta(s)}{s} = \int_2^{\infty} \frac{\pi(x)}{x(x^s - 1)} dx \quad .$$

Ceci conclut la démonstration.

Pour $s > 1$, il n'y a pas de zéros non triviaux de ζ . De tels zéros sont localisés dans la bande critique $0 < \Re(s) = \sigma < 1$. L'hypothèse de Riemann énonce que $\sigma = \frac{1}{2}$ pour tous les zéros de la fonction ζ .

Donc la formule (222) n'est pas applicable et on doit faire un prolongement analytique dans le plan complexe complet s .

Références

- [1] B. Riemann, Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse. Monatsberichte der Berliner Akademie, November 1859, 671-680.
- [2] M. Edwards, Riemann's Zeta Function, Dover Publications, New York 2001.
- [3] D. Laugwitz, Bernhard Riemann 1826-1866, Birkhäuser Verlag, 1996.
- [3a] R. Ayoub, Am. Mathem. Monthly **81**, No. 10, 1067 (1974).
- [4] J. Havil, Gamma, Princeton University Press, 2003.
- [5] J. Derbyshire, Prime Obsession, New York: Penguin, 2014.
- [6] J. Stillwell, Mathematics and its history, Springer Verlag, 2002.
- [7] G.W. Gibbons, Phys. Letters **60A**, 385 (1977).
- [8] G.W. Hawking, Com. Math. Phys. **55**, 133 (1977).
- [9] W. Dittrich, M. Reuter, Effective Lagrangians in QED, Lecture Notes in Physics, **220**, Springer Verlag 1985.
- [10] W. Dittrich, M. Reuter, Effective QCD-Lagrangian with ζ -Function Regularization, Phys. Letters **128 B**, No. 5, 321 (1983).

- [11] W. Dittrich, M. Reuter Regularization schemes for the Casimir Effect, *Eur. J. Phys.* **6**, 33 (1985).
- [12] E.C. Titchmarsh and D.R. Heath-Brown, *The Theory of the Riemann Zeta Function*, 2nd ed., Oxford University Press, Oxford, England, 1986.