

Note sur deux problèmes liés aux graphes

E. W. Dijkstra

Nous considérons des points (nœuds), dont certaines ou toutes les paires sont reliées par une arête ; la longueur de chaque arête est donnée. Nous nous limitons au cas où il existe au moins un chemin entre deux nœuds quelconques. Nous considérons maintenant deux problèmes.

Problème 1. Construire l'arbre de longueur totale minimale entre les n nœuds. (Un arbre est un graphe avec un et un seul chemin entre deux nœuds d'une paire quels qu'ils soient).

Au cours de la construction que nous présentons ici, les arêtes sont subdivisées en trois ensembles :

- I. les branches définitivement affectées à l'arbre en construction (elles formeront un sous-arbre) ;
- II. les branches à partir desquelles la prochaine branche à ajouter à l'ensemble I sera sélectionnée ;
- III. les branches restantes (rejetées ou non encore considérées).

Les nœuds sont subdivisés en deux ensembles :

- A. les nœuds reliés par les branches de l'ensemble I,
- B. les nœuds restants (une et une seule branche de l'ensemble II mènera à chacun de ces nœuds).

Nous commençons la construction en choisissant un nœud arbitraire comme seul élément de l'ensemble A , et en plaçant toutes les branches qui aboutissent à ce nœud dans l'ensemble II. Au départ, l'ensemble I est vide. À partir de là, nous effectuons les deux étapes suivantes de manière répétée.

Étape 1. La branche la plus courte de l'ensemble II est retirée de cet ensemble et ajoutée à l'ensemble I. Par conséquent, un nœud est transféré de l'ensemble B à l'ensemble A .

Étape 2. Considérons les branches partant du nœud qui vient d'être transféré à l'ensemble A et aboutissant aux nœuds qui se trouvent encore dans l'ensemble B . Si la branche considérée est plus longue que la branche correspondante dans l'ensemble II, elle est rejetée ; si elle est plus courte, elle remplace la branche correspondante dans l'ensemble II, et cette dernière est rejetée.

Nous revenons ensuite à l'étape 1 et répétons le processus jusqu'à ce que les ensembles II et B soient vides. Les branches de l'ensemble I forment l'arbre requis.

La solution présentée ici est préférable à celle de J. B. KRUSKAL [1] et à celles de H. LOBERMAN et A. WEINBERGER [2]. Dans leurs solutions, toutes les $\frac{1}{2}n(n-1)$ branches possibles sont d'abord triées par longueur. Même si la longueur des branches est une fonction calculable des coordonnées des nœuds, leur méthode exige que les données de toutes les branches soient stockées simultanément. Notre méthode ne requiert que le stockage simultané des données pour au plus n branches, à savoir les branches des ensembles I et II et la branche considérée à l'étape 2.

Référence : Numerische Mathematik 1, 269-271, 1959.

Transcription en L^AT_EX : Denise Vella-Chemla, mars 2026.

Problème 2. Trouver le chemin de longueur totale minimale entre deux nœuds donnés P et Q .

Nous utilisons le fait que, si R est un nœud sur le chemin minimal de P à Q , la connaissance de ce dernier implique la connaissance du chemin minimal de P à R . Dans la solution présentée, les chemins minimaux de P aux autres nœuds sont construits par ordre de longueur croissante jusqu'à ce que Q soit atteint.

Au cours de la recherche de la solution, les nœuds sont subdivisés en trois ensembles :

- A. les nœuds pour lesquels le chemin de longueur minimale à partir de P est connu ; les nœuds seront ajoutés à cet ensemble par ordre croissant de longueur minimale du chemin à partir du nœud P ;
- B. les nœuds à partir desquels le prochain nœud à ajouter à l'ensemble A sera sélectionné ; cet ensemble comprend tous les nœuds qui sont connectés à au moins un nœud de l'ensemble A mais qui n'appartiennent pas encore à A eux-mêmes ;
- C. les nœuds restants.

Les branches sont également subdivisées en trois ensembles :

- I. les branches présentes dans les chemins minimaux du nœud P aux nœuds de l'ensemble A ;
- II. les branches à partir desquelles la prochaine branche à placer dans l'ensemble I sera sélectionnée ; une seule et unique branche de cet ensemble mènera à chaque nœud de l'ensemble B ;
- III. les branches restantes (rejetées ou non encore considérées).

Pour commencer, tous les nœuds sont dans l'ensemble C et toutes les branches sont dans l'ensemble III. Nous transférons maintenant le nœud P dans l'ensemble A et, à partir de ce moment, nous répétons les étapes suivantes.

Étape 1. Considérons toutes les branches r reliant le nœud qui vient d'être transféré à l'ensemble A aux nœuds R des ensembles B ou C . Si le nœud R appartient à l'ensemble B , nous vérifions si l'utilisation de la branche r donne lieu à un chemin plus court de P à R que le chemin connu qui utilise la branche correspondante dans l'ensemble II. Si ce n'est pas le cas, la branche r est rejetée ; si, en revanche, l'utilisation de la branche donne lieu à une connexion plus courte entre P et R que celle obtenue jusqu'à présent, elle remplace la branche correspondante dans l'ensemble II et cette dernière est rejetée. Si le nœud R appartient à l'ensemble C , il est ajouté à l'ensemble B et la branche est ajoutée à l'ensemble II.

Étape 2. Chaque nœud de l'ensemble B ne peut être connecté au nœud P que d'une seule manière si nous nous limitons aux branches de l'ensemble I et à une branche de l'ensemble II. En ce sens, chaque nœud de l'ensemble B est à une certaine distance du nœud P : le nœud à la distance minimale de P est transféré de l'ensemble B à l'ensemble A , et la branche correspondante est transférée de l'ensemble II à l'ensemble I. Nous retournons ensuite à l'étape 1 et répétons le processus jusqu'à ce que le nœud Q soit transféré à l'ensemble A . On a alors trouvé la solution.

Remarque 1. Le processus ci-dessus peut également être appliqué dans le cas où la longueur d'une branche dépend de la direction dans laquelle elle est parcourue.

Remarque 2. Pour chaque branche des ensembles I et II, il est conseillé d'enregistrer ses deux nœuds (par ordre de distance croissante par rapport à P), ainsi que la distance entre P et le nœud de la branche le plus éloigné de P . Pour les branches de l'ensemble I, ceci est la distance minimale réelle ; pour les branches de l'ensemble II, il s'agit seulement du minimum obtenu jusqu'à présent.

La solution donnée ci-dessus est préférable à la solution de L. R. FORD [3] telle que décrite par C. BERGE [4], car, quel que soit le nombre de branches, nous n'avons pas besoin de stocker simultanément les données de toutes les branches, mais seulement celles des branches des ensembles I et II, et ce nombre est toujours inférieur à n . De plus, la quantité de travail à effectuer semble être considérablement moindre.

Références

- [1] KRUSKAL JR., J. B. : Sur le plus court sous-arbre couvrant d'un graphe et le problème du voyageur de commerce. Proc. Amer. Math. Soc. 7, 48-50 (1956).
- [2] LOBERMAN, H., A. WEINBERGER : Procédures formelles pour connecter des terminaux avec une longueur totale de fil minimale. J. Ass. Comp. Mach. 4, 428-437 (1957).
- [3] FORD, L. R. : Théorie des flux de réseau. Document Rand Corp., P-923, 1956.
- [4] BERGE, C. : Théorie des graphes et ses applications, pp. 68-69. Paris : Dunod 1958.

Centre mathématique
2e Boerhaavestraat 49
Amsterdam-O

(Reçu le 11 juin 1959)