

Nombres premiers, nœuds et orbites périodiques

Christopher Deninger

1 Introduction

On commence par esquisser quelques analogies entre la théorie des nombres et la théorie des nœuds, analogie qui avait à l'origine était remarquée par Manin, Mazur [Maz] et Mumford. Ces analogies furent plus tard développées par Kapranov, Morishita, Reznikov, Sikora et par de nombreux autres chercheurs. On explique alors une analogie plus structurée où les nœuds naissent des orbites fermées d'un système $\mathbb{R}$ -dynamique. Finalement, on explique notre construction récente de systèmes dynamiques pour les schémas arithmétiques qui réalisent certains aspects - mais non pas tous les aspects - de ces analogies. Au moins au début, on suppose de la part du lecteur une connaissance plus grande en analyse qu'en algèbre.

Je suis très reconnaissant à Umberto Zannier de m'avoir invité à Pise et aux organisateurs du Colloque de Giorgi de m'avoir donné l'occasion de contribuer à cette série de conférences.

2 Nombres premiers et nœuds

On explique d'abord comment un nombre premier p peut être vu comme un objet 1-dimensionnel et comment l'anneau des entiers $\mathbb{Z}$ peut être vu comme un objet 3-dimensionnel. Pour cela, on a besoin d'introduire les schémas et la topologie étale (de Grothendieck).

Pour un anneau commutatif unitaire R , le spectre $\text{spec } R$ est constitué des idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de R . Il est équipé de la topologie de Zariski dont les sous-ensembles fermés sont de la forme

$$V(S) = \{\mathfrak{p} \in \text{spec } R \mid \mathfrak{p} \supset S\}$$

avec S n'importe quel sous-ensemble de R . La topologie de Zariski n'est presque jamais de Hausdorff et l'espace topologique $\text{spec } R$ est seulement un invariant faible de R . Grothendieck a équipé $X = \text{spec } R$ avec un faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_X$. Un élément $f \in R$ donne une section globale de $\mathcal{O}_X$ et on peut voir f comme une fonction sur $\text{spec } R$ en envoyant $\mathfrak{p}$ sur la classe résiduelle $f \bmod \mathfrak{p}$ dans $\kappa(\mathfrak{p}) = \text{Quot}(R/\mathfrak{p})$. Ainsi, on n'a pas seulement un corps dans lequel nos fonctions peuvent prendre leurs valeurs mais plusieurs corps. Par exemple $f \in \mathbb{Z}$ prend ses valeurs $f((p)) \in \mathbb{F}_p$ pour les nombres premiers p et $f((0)) \in \mathbb{Q}$. En ce sens, l'idée importante que "les nombres sont des fonctions" a été réalisée. Pourtant, en travaillant avec $\text{spec } \mathbb{Z}$ de façon isolée, ce point de vue géométrique ne donne pas de nouveaux

Financé par le Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG, Fondation allemande pour la recherche) EXC 2044-390685587 (Stratégie d'excellence allemande, Mathématiques, Münster : Dynamique-Géométrie-Structure et CRC 1442 Géométrie : Déformations et rigidité)

Traduction : Denise Vella-Chemla, avril 2025, de l'article <https://arxiv.org/pdf/2301.11643>.

éclairages arithmétiques. En utilisant la fonctorialité, la situation peut être améliorée. Tout homéomorphisme d’anneaux $\varphi : R_1 \rightarrow R_2$ induit une application continue

$$\text{spec } R_2 \rightarrow \text{spec } R_1 \quad \text{via } \mathfrak{p} \mapsto \varphi^{-1}(\mathfrak{p}) .$$

On obtient même une application d’espaces localement annelés entre les “schémas affines” $\text{spec } R_i$. Les schémas affines peuvent être recollés pour donner de nouveaux “espaces”, les *schémas* de Grothendieck. De plus, en utilisant le réseau complet des schémas qui s’envoient dans $\text{spec } R$, on peut raffiner les topologies de Zariski en topologies de Grothendieck desquelles des invariants homotopiques et homologiques très intéressants de l’anneau original R peuvent être obtenus. Motivons l’idée de base derrière la topologie étale : la topologie usuelle sous-tendant notre intuition géométrique sur une variété complexe a la propriété suivante : toute application analytique dont le jacobien est inversible partout est elle-même localement inversible. Dans le contexte de la géométrie algébrique, cet énoncé n’est plus vrai pour la topologie de Zariski. L’application $x \mapsto x^2$ a sa racine carrée comme inverse local aux alentours de $x = 1$ mais la racine carrée n’est pas une application polynomiale. On peut traduire l’inversibilité du jacobien en termes d’algèbre commutative et on arrive à la classe des applications “étales” des schémas. Sans donner la définition formelle, notons simplement que l’application $\text{spec } L \rightarrow \text{spec } K$ correspondant à une inclusion des corps $K \subset L$ est étale si et seulement si l’extension L/K est finie et séparable. Pour une extension finie de corps de nombres L/K avec les anneaux d’entiers $\mathfrak{o}_L$ et $\mathfrak{o}_K$, l’application $\text{spec } \mathfrak{o}_L \rightarrow \text{spec } \mathfrak{o}_K$ est étale si et seulement si l’extension L/K est non ramifiée pour tous les premiers. En général, elle est étale loin des nombres premiers ramifiés.

L’application ci-dessus $x \mapsto x^2$ donne un homomorphisme d’anneaux $\mathbb{C}[x] \rightarrow \mathbb{C}[x]$ et l’application induite $\text{spec } \mathbb{C}[x] \leftarrow \text{spec } \mathbb{C}[x]$ est étale autour du point $\mathfrak{p} = (x - 1)$ de $\text{spec } \mathbb{C}[x]$. Pour une topologie plus proche de notre intuition que la topologie de Zariski, toutes les applications étales et en particulier celles de l’exemple devraient avoir des inverses locaux. Cela peut seulement être obtenu en généralisant la notion d’une topologie sur un ensemble X . Dans le contexte habituel, les ensembles ouverts U sont des sous-ensembles de X . Au lieu de cela, Grothendieck a considéré la classe des applications étales $f : U \rightarrow X$ comme les “ensembles ouverts” de la “topologie” étale sur X . Les intersections finies sont définies comme des produits fibrés itérés sur X , les revêtements sont aussi faciles à définir, et de nombreuses notions de topologie peuvent être étendues à ce paradigme plus général, incluant la cohomologie et les groupes fondamentaux. Maintenant nous avons atteint notre but : dans la topologie étale, les applications étales f sont localement inversibles ! La raison est triviale : considérons le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} & & U \\ & \text{id} \nearrow & \downarrow f \\ U & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Ici, l’application verticale f définit un “ensemble ouvert” sur lequel l’application étale horizontale f que nous souhaitons inverser a un inverse, notamment l’identité sur U ! Historiquement, dans [Ser58], Serre avait introduit la condition d’être “localement isotrivial” pour les fibrés sur les variétés algébriques. Ceci est une condition plus faible que la trivialité locale

pour la topologie de Zariski. Inspiré par ce travail, Grothendieck a inventé la topologie étale et l'a utilisée pour définir la cohomologie étale et le groupe fondamental étale.

Regardons maintenant l'inclusion

$$\mathrm{spec} \mathbb{F}_p \hookrightarrow \mathrm{spec} \mathbb{Z}, (0) \mapsto (p)$$

venant de la projection $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p = \mathbb{F}_p$. Le groupe étale fondamental $\widehat{\pi}_1(\mathrm{spec} \mathbb{F}_p)$ est le groupe d'automorphismes du revêtement universel (pro-)étale de $\mathrm{spec} \mathbb{F}_p$ i.e. de $\mathrm{spec} \overline{\mathbb{F}}_p$. Par conséquent, on a

$$\widehat{\pi}_1(\mathrm{spec} \mathbb{F}_p) = \mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{F}}_p).$$

Ceci est un groupe (pro-)cyclique engendré par l'automorphisme de Frobenius $x \mapsto x^p$. On peut par conséquent voir

$$(1) \quad \widehat{\pi}_1(\mathrm{spec} \mathbb{F}_p) = \widehat{\mathbb{Z}} := \varprojlim_N \mathbb{Z}/N$$

comme un analogue de

$$(2) \quad \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$$

où S^1 est le cercle.

D'ailleurs, la raison ultime pour laquelle les groupes étales fondamentaux sont toujours pro-finis comme $\widehat{\mathbb{Z}} = \varprojlim_N \mathbb{Z}/N$ est celle-ci : les polynômes en une variable ont seulement un nombre fini de zéros. Notons que le groupe $\mathbb{Z}$ dans (2) apparaît comme le groupe d'automorphismes du recouvrement $\mathbb{R} \rightarrow S^1, t \mapsto \exp 2\pi it$, et les transformations de recouvrements $t \mapsto t + n$ correspondent aux zéros en nombre infini $n \in \mathbb{Z}$ de la fonction $1 - \exp(2\pi it)$.

Il s'avère que les groupes d'homotopie étale les plus hauts de $\mathrm{spec} \mathbb{F}_p$ s'évanouissent de telle façon que pour la topologie étale $\mathrm{spec} \mathbb{F}_p$ est un $K(\widehat{\mathbb{Z}}, 1)$ -espace, exactement de la même façon que pour la topologie ordinaire S^1 est un $K(\mathbb{Z}, 1)$ -espace. Revenons maintenant à $\mathrm{spec} \mathbb{Z}$. Sa dimension de Zariski qui correspond intuitivement à la dimension complexe est un. Donc sa dimension cohomologique étale qui correspond intuitivement à la dimension réelle habituelle devrait être 2. Pourtant les corps de résidus $\mathbb{F}_p$ des points fermés (p) ne sont pas fermés séparément et la dimension topologique étale 1 des $\mathrm{spec} \mathbb{F}_p$ s'ajoute à la dimension topologique étale de $\mathrm{spec} \mathbb{Z}$. Ces heuristiques suggèrent que la dimension cohomologique étale de $\mathrm{spec} \mathbb{Z}$ devrait être $2 \cdot 1 + 1 = 3$. Une preuve utilisant la théorie du corps de classe peut être trouvée dans [Maz73].

Du point de vue arithmétique, $\mathrm{spec} \mathbb{Z}$ n'est pas compact, parce qu'il contient seulement les (classes d'équivalence des) valeurs absolues non archimédiennes de $\mathbb{Z}$, qui correspondent aux idéaux premiers (p) , mais ne contient pas la valeur absolue archimédienne. Cette dernière est habituellement dénotée par le symbole ∞ et on peut voir $\overline{\mathrm{spec} \mathbb{Z}} = \mathrm{spec} \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ comme une compactification de $\mathrm{spec} \mathbb{Z}$.

Artin et Verdier ont étendu la topologie étale d'une façon naturelle à $\overline{\mathrm{spec} \mathbb{Z}}$. Les groupes de cohomologie qui en résultent diffèrent de ceux de $\mathrm{spec} \mathbb{Z}$ seulement par une 2-torsion, qui pour l'objectif de cette section est inoffensive, le rôle de ∞ sera plus important. Intuitivement, on peut voir $\overline{\mathrm{spec} \mathbb{Z}}$ comme une 3-variété compacte M^3 (sans frontière). Par

un théorème de Minkowski, il n'y a pas d'extensions non triviales non ramifiées partout du corps de nombres $\mathbb{Q}$. En termes de topologie étale, ce résultat peut être réénoncé en le fait que $\widehat{\pi}_1(\operatorname{spec} \mathbb{Z}) = 1$ implique $\widehat{\pi}_1(\overline{\operatorname{spec} \mathbb{Z}}) = 1$. Selon ce point de vue, $\overline{\operatorname{spec} \mathbb{Z}}$ ressemble à une 3-variété fermée *simplement connectée*, i.e. S^3 par la conjecture de Poincaré. Écrivons K_p pour le plongement $\operatorname{spec} \mathbb{F}_p \hookrightarrow \overline{\operatorname{spec} \mathbb{Z}}$. Puisque l'image est (p) , on peut voir K_p comme (p) plongé dans $\overline{\operatorname{spec} \mathbb{Z}}$. Comme expliqué ci-dessus, ceci rappelle un plongement $S^1 \hookrightarrow S^3$ i.e. d'un nœud K . Apparemment, cette observation a été faite pour la première fois par Mumford [Maz, Introduction].

Voici quelques analogies entre la situation topologique et la situation arithmétique quand pour simplifier, on traite $\operatorname{spec} \mathbb{Z}$ au lieu de $\overline{\operatorname{spec} \mathbb{Z}}$. Le groupe fondamental abélianisé du complémentaire du nœud est cyclique, $\pi_1^{\operatorname{ab}}(S^3 \setminus K) \cong \mathbb{Z}$. D'un autre côté, le groupe fondamental étale abélianisé de $\operatorname{spec} \mathbb{Z} \setminus K_p$ est le groupe de Galois de l'extension abélienne maximale de $\mathbb{Q}$ qui est non ramifié loin du nombre premier p . Par un théorème de Kronecker, ce dernier est le corps $\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})$ obtenu en adjoignant toutes les p^n -ièmes racines de l'unité à $\mathbb{Q}$ pour $n \geq 1$. Par conséquent, on a

$$\widehat{\pi}_1^{\operatorname{ab}}(\operatorname{spec} \mathbb{Z} \setminus K_p) = \operatorname{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q}) = \widehat{\mathbb{Z}}_p^\times.$$

Ici $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ est l'anneau des nombres p -adiques. Le groupe $\widehat{\mathbb{Z}}_p^\times$ n'est pas tout à fait (pro p) cyclique, mais il l'est presque. Le polynôme d'Alexander du nœud K est le polynôme caractéristique du générateur de $\pi_1^{\operatorname{ab}}(S^3 \setminus K) \cong \mathbb{Z}$ agissant sur $\pi_1^{\operatorname{ab}}(\widetilde{S^3 \setminus K}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Ici $\widetilde{S^3 \setminus K}$ est le $\mathbb{Z}$ -revêtement de $S^3 \setminus K$ correspondant au quotient

$$\pi_1(S^3 \setminus K) \longrightarrow \pi_1^{\operatorname{ab}}(S^3 \setminus K) \cong \mathbb{Z}.$$

De façon correspondante, le quotient

$$\widehat{\pi}_1(\operatorname{spec} \mathbb{Z} \setminus K_p) \longrightarrow \widehat{\pi}_1^{\operatorname{ab}}(\operatorname{spec} \mathbb{Z} \setminus K_p) \cong \widehat{\mathbb{Z}}_p^\times$$

correspond à un $\widehat{\mathbb{Z}}_p^\times$ -revêtement pro-étale $\widetilde{\operatorname{spec} \mathbb{Z} \setminus K_p}$ de $\operatorname{spec} \mathbb{Z} \setminus K_p$. L'action of $\widehat{\pi}_1^{\operatorname{ab}}(\operatorname{spec} \mathbb{Z} \setminus K_p) \cong \widehat{\mathbb{Z}}_p^\times$ sur $\widehat{\pi}_1^{\operatorname{ab}}(\widetilde{\operatorname{spec} \mathbb{Z} \setminus K_p})$ qui est le groupe de Galois de l'extension non ramifiée de l'extérieur abélien maximal de p de $\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})$, donne naissance à la fonction zeta d'Iwasawa. Iwasawa pensait en termes de groupes de Galois, l'analogie avec la théorie des nœuds via la topologie étale a été observée seulement plus tard par Mazur [Maz]. Le travail d'Iwasawa a donné naissance à une direction très féconde en théorie algébrique des nombres. Morishita et ses co-auteurs ont également appliqué les techniques de la théorie des nœuds à l'étude de la théorie d'Iwasawa non abélienne [MT17].

Voici une autre analogie bien connue. Le nombre d'enlacements $\bmod 2$ $l(K, L)$ de deux nœuds K, L peut être défini en comptant $\bmod 2$ le nombre de fois où L intersecte une surface de Seifert de frontière K . Avec cette définition, c'est un fait non trivial que l'on a

$$(3) \quad l(K, L) = l(L, K) \quad \text{dans } \mathbb{Z}/2.$$

Pour les nombres premiers impairs $p \neq l$, le symbole de résiduosités quadratiques $\left(\frac{p}{l}\right)$ vaut 1 si p est un carré $\bmod l$ et -1 dans le cas contraire. Si p ou l est congru à 1 $\bmod 4$, la célèbre loi de réciprocité de Gauss affirme que

$$(4) \quad \left(\frac{p}{l}\right) = \left(\frac{l}{p}\right).$$

Lorsqu'on voit les nombres premiers comme des nœuds, il y a de bonnes raisons de voir $\left(\frac{p}{l}\right)$ comme un analogue de $(-1)^{l(K,L)}$. En fait, il y a une preuve de (3) qui peut être traduite dans le contexte arithmétique via notre dictionnaire et qui amène alors une preuve de (4). Les limitations du fait de voir $\overline{\text{spec } \mathbb{Z}}$ comme analogue à S^3 deviennent alors apparentes. Si à la fois p et l ne sont pas congrus à 1 mod 4, la loi de réciprocité quadratique affirme que

$$\left(\frac{p}{l}\right) = -\left(\frac{l}{p}\right).$$

Selon Kapranov et Smirnov [KS, §3], la raison de cette asymétrie est la suivante : les nombres premiers p qui ne sont pas congrus à 1 mod 4 devraient correspondre aux nœuds qui ne sont pas homologues à zéro dans la 3-variété M^3 correspondant à $\overline{\text{spec } \mathbb{Z}}$ dans notre analogie. Prendre S^3 pour M^3 est une sur-simplification selon ce point de vue parce que dans S^3 , tous les nœuds sont analogues à zéro. Dans [KS], on explique comment restaurer l'analogie entre la loi de réciprocité quadratique et l'enlacement mod 2 de nœuds si l'on autorise des 3-variétés M^3 plus générales.

L'union de trois nœuds dans S^3 deux à deux non liés peut encore être un lien non trivial, comme pour les anneaux borroméens. On peut montrer cela par la non trivialité de certains produits de Massey de triplets par exemple. En 1938, Redei a publié un symbole (p, l, q) défini pour trois nombres premiers p, l, q congrus à 1 mod 4 dont les symboles de résiduosités quadratiques satisfont $\left(\frac{p}{l}\right) = 1$ et $\left(\frac{p}{q}\right) = 1$. Morishita a observé que la non trivialité du symbole de Redei devrait être interprétée comme le fait que les trois nombres premiers sont reliés non trivialement alors qu'ils ne sont pas liés deux à deux. Par exemple, on peut voir les trois nombres premiers 5, 41, 61 comme un analogue du lien borroméen. Il donne également une construction complètement parallèle d'"invariants plus élevés de Milson" à la fois pour les n -uplets de nœuds et de nombres premiers, ce qui se réduit au symbole de Redei pour $n = 3$, [Mor02]. La relation entre les symboles de Redei et les produits de Massey en cohomologie de Galois est expliquée dans [Mor04]. Récemment, [AC22] a donné une application intéressante des produits de Massey aux tours infinies de corps de classes. Il y a de nombreuses autres analogies entre la théorie des nœuds et les nombres premiers et plus généralement entre la topologie 3-dimensionnelle et la théorie algébrique des nombres. On se référera au livre [Mor12] pour un large survol de cette branche des mathématiques, appelée topologie arithmétique.

3 Nombres premiers et orbites périodiques

Dans cette section, on explique certaines analogies entre la théorie des nombres et la théorie des systèmes $\mathbb{R}$ -dynamiques sur les 3-variétés M^3 avec un feuilletage 1-codimensionnel $\mathcal{F}$. À isotopie près, les orbites périodiques donnent des cercles plongés dans M^3 , i.e. des nœuds. Les analogies de la section présente améliorent celles de la section 2. Elles sont pour la plupart de nature analytique et elles sont liées à la théorie analytique des nombres, contrairement aux analogies topologiques de la section précédente. Je suis parvenu à ces analogies par un long détour via des considérations cohomologiques [Den00]. Pourtant elles peuvent être beaucoup plus facilement motivées par l'argument suivant, [Kop06]. Pour un nombre rationnel $f \in \mathbb{Q}^\times$,

les valeurs absolues p -adiques de f sont

$$|f|_p = p^{-\text{ord}_p f} \quad \text{si } f = p^{\text{ord}_p f} \frac{a}{b} \quad \text{avec } 0 \neq b, a \in \mathbb{Z} \text{ premier à } p.$$

On a également la valeur absolue archimédienne ordinaire $|f|_\infty := |f|$. La formule du produit qui découle immédiatement de ces définitions affirme que

$$\prod_{p \leq \infty} |f|_p = 1.$$

En prenant le log, on obtient

$$(5) \quad \sum_{p \neq \infty} \text{ord}_p f \cdot \log p - \log |f|_\infty = 0.$$

Cela rappelle, mais en étant plus compliqué, la formule

$$(6) \quad \sum_{x \in X} \text{ord}_x f = 0$$

pour une fonction méromorphe f sur une surface de Riemann X . Dans (6), seuls les entiers sont ajoutés, alors que dans (5), les entiers sont multipliés par les nombres transcendants $\mathbb{Q}$ -linéairement indépendants $\log p$, et il y a également le terme $\log |f|_\infty$ qui semble de nature différente. Une formule comme (5) mais sans un terme correspondant à $-\log |f|_\infty$ a été observée par Ghys dans le contexte des laminations de surfaces de Riemann. Kopei a plus tard montré comment inclure un analogue de $-\log |f|_\infty$: comme dans [Den08], considérons les triplets $(\bar{X}, \mathcal{F}, \phi)$ où $\bar{X}$ est une 3-variété fermée lisse avec un feuilletage 1-codimensionnel $\mathcal{F}$ par des surfaces de Riemann, et ϕ est un flot, tel que chaque application ϕ^t envoie les feuilles de $\mathcal{F}$ sur des feuilles (possiblement autres). Le flot devrait être non dégénéré, ce qui implique qu'il y a seulement un nombre fini de points fixes x et pour tout $C > 0$, il y a seulement un nombre fini d'orbites fermées γ de longueur $l(\gamma) \leq C$. Les points fixes de ϕ devraient être dans un nombre fini de feuilles compactes. Toutes les autres feuilles devraient être non compactes et le flot devrait leur être transversal. Soit X le complémentaire ouvert dans $\bar{X}$ de l'union sur le nombre fini de feuilles compactes de $\mathcal{F}$. Puisque les feuilles compactes contiennent des points fixes, elles sont invariantes selon le flot et deviennent des systèmes sous-dynamiques de codimension un. La variété ouverte X est invariante selon le flot et feuilletée par les feuilles non compactes de $\mathcal{F}$.

Le triplet $(X, \mathcal{F}, \phi^t)$ peut être décrit plus explicitement comme suit. Prenons une feuille F de $\mathcal{F}$ (elles sont toutes difféomorphes), soit Y_ϕ l'espace vectoriel engendré par le flot et soit ω_ϕ la 1-forme sur X qui est nulle sur le fibré tangent $T\mathcal{F}$ au feuilletage et telle que $\langle \omega_\phi, Y_\phi \rangle = 1$. Pour le groupe de période

$$\Lambda = \left\{ \int_\gamma \omega_\phi \mid \gamma \in \pi_1^{\text{ab}}(X) \right\} \subset \mathbb{R}$$

on a $\Lambda = \{t \in \mathbb{R} \mid \phi^t(F) = F\}$. Par exemple, si γ est une orbite périodique alors $l(\gamma) \in \Lambda$ et $\phi^{l(\gamma)}$ est l'application de retour de Poincaré sur F . Le groupe Λ agit diagonalement

sur $F \times \mathbb{R}$. De plus, l'action est sans point fixe et proprement discontinue. L'application $F \times \mathbb{R} \rightarrow X, (x, t) \mapsto \phi^t(x)$ induit un difféomorphisme de $F \times_{\Lambda} \mathbb{R}$ avec X . Ici, les feuilles de $\mathcal{F}$ correspondent aux images de $F \times \{s\}$ dans $F \times_{\Lambda} \mathbb{R}$ et ϕ^t devient une translation par t via le second facteur. Dans [ALKL22] et [KMNT21], les formes possibles des triplets $(\overline{X}, \mathcal{F}, \phi^t)$ sont déterminées. Par exemple, les feuilletages de Reeb $\mathcal{F}$ sur $\overline{X} = S^3$ avec les flots adéquats sont des possibilités. Rappelons que le feuilletage de Reeb de S^3 s'obtient en recollant deux tores solides $S^1 \times D$ feuilletés par des paraboloïdes concentriques s'étendant infiniment, le long de leur frontière commune. Ainsi, il y a une unique feuille compacte, le 2-tore $S^1 \times S^1$ et toutes les autres feuilles sont difféomorphes au plan.

N'importe quel choix d'une métrique lisse $T\mathcal{F}$ sur $\overline{X}$ définit des structures conformes sur les feuilles qui varient continûment dans la direction transverse. Ainsi, pour une 3-variété lisse avec un feuilletage lisse 1-codimensionnel, on obtient la structure d'une *lamination de surface de Riemann* [Ghy99]. Soit f une fonction lisse $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ -valuée dont les restrictions à toutes les feuilles F de $\mathcal{F}$ sont holomorphes et soit $d_{\mathcal{F}}f$ la dérivée extérieure de f le long des feuilles. En appliquant le théorème de Stoke à la forme différentielle $\frac{1}{2\pi i} f^{-1} d_{\mathcal{F}}f \wedge \omega_{\phi}$ sur le complémentaire dans $\overline{X}$ de voisinages disjoints tubulaires ouverts des orbites périodiques et des ε -voisinages $U_{\varepsilon}(K)$ des feuilles compactes K , Kopei a obtenu la formule suivante pour $\varepsilon > 0$ petit dans [Kop06]

$$(7) \quad \sum_{\gamma} \text{ord}_{\gamma} f \, l(\gamma) - \sum_x \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_{\varepsilon}(K_x)} f^{-1} d_{\mathcal{F}}f \wedge \omega_{\phi} = 0 .$$

Ici γ couvre les orbites périodiques et $\text{ord}_{\gamma} f \in \mathbb{Z}$ est défini comme étant l'ordre de la fonction méromorphe $f|_F$ en un point $z \in F \cap \gamma \neq \emptyset$. Puisque $\text{ord}_z(f|_F) \in \mathbb{Z}$ varie continûment avec $z \in \gamma$, ceci est indépendant de la feuille F et du point choisi $z \in F \cap \gamma$. De plus, x couvre les points fixes et K_x est la feuille compacte contenant x . En comparant (5) et (7), on voit que dans l'analogie, les nombres premiers p correspondent aux orbites périodiques γ où $\log p$ correspond à $l(\gamma)$. Incidemment, notons que si on avait une bijection $p \leftrightarrow \gamma$ avec $\log p = l(\gamma)$, alors la fonction zeta de Riemann serait une fonction zeta de Ruelle

$$\zeta(s) = \prod_{\gamma} (1 - e^{-sl(\gamma)})^{-1} \quad \text{pour } \text{Re } s > 1 .$$

La question de savoir si un système dynamique naturel existe ayant cette propriété est assez ancienne et nous discuterons de nos progrès dans la réponse à cette question dans la dernière section. Revenons à notre analogie. De (5) et (7), on voit également que la valeur absolue archimédienne $|\cdot|_{\infty}$ de $\text{spec } \overline{\mathbb{Z}}$ devrait correspondre à un point fixe x . Plus généralement, il y a un analogue de (5) pour les corps de nombres K . Cela montre que les idéaux premiers $0 \neq \mathfrak{p} \in \text{spec } \mathfrak{o}_K$ correspondent aux orbites périodiques γ où $\log N\mathfrak{p} \hat{=} l(\gamma)$ et les valeurs absolues archimédiennes en nombre fini correspondent aux points fixes en nombre fini. Notons que toute orbite périodique γ vient avec les plongements

$$\mathbb{R}/l(\gamma)\mathbb{Z} \hookrightarrow X \quad t \bmod l(\gamma) \mapsto \phi^t(x)$$

pour les choix des points $x \in \gamma$. Les plongements pour les différents choix de x sont isotopiques (via ϕ^t pour un t adéquat) et par conséquent, définissent le même nœud dans $\overline{X}$. Ainsi, l'analogie de systèmes dynamiques entre les nombres premiers et les orbites périodiques précise l'analogie précédentes entre les nombres premiers et les nœuds.

Il y a plusieurs analogies renforcées entre $\overline{\text{spec } \mathbb{Z}}$ et les systèmes de la forme $(\overline{X}, \mathcal{F}, \phi^t)$. Par exemple, la réciprocité de Hilbert a un analogue dynamique comme montré dans [KMNT21]. La conjecture de Lichtenbaum sur l'ordre d'évanouissement et sur le coefficient dominant de la fonction zeta de Hasse-Weil d'un schéma algébrique régulier sur $\text{spec } \mathbb{Z}$ en fonction de la cohomologie Weil-étale peut être traduit presque littéralement dans le contexte dynamique, où on peut le démontrer dans certaines conditions, cf. [Den08], également [Den06]. La démonstration utilise le travail de Álvarez-López et Kordyukov et le théorème de Cheeger-Müller.

Voici une autre analogie qui avait été trouvée précédemment [Den01, 3.5 Corollaire]. Les “formules explicites de la théorie analytique des nombres” sont une égalité entre deux distributions de la droite réelle, cf. [Wei52]. Restreintes à $\mathbb{R}^{>0}$, elles ont une forme particulièrement simple : dans l'espace des distributions $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{>0})$, on a

$$(8) \quad 1 - \sum_{\rho} e^{t\rho} + e^t = \sum_p \log p \sum_{k \geq 1} \delta_{k \log p} + (1 - e^{-2t})^{-1} .$$

Ici ρ couvre les zéros de $\zeta(s)$ dans $0 < \text{Re } s < 1$, pour $\alpha \in \mathbb{C}$, la fonction localement intégrable $e^{t\alpha}$ est vue comme une distribution, et δ_x est la distribution delta de Dirac à support dans x . En l'évaluant sur une fonction test $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{>0})$ et en posant $\Phi(\alpha) = \int_{\mathbb{R}} e^{t\alpha} \varphi(t) dt$, la formule (8) prend la forme plus familière

$$\Phi(0) - \sum_{\rho} \Phi(\rho) + \Phi(1) = \sum_p \log p \sum_{k \geq 1} \varphi(k \log p) + \int_0^\infty \frac{\varphi(t)}{1 - e^{-2t}} dt .$$

Pour l'analogie du feuilletage, supposons qu'il existe une métrique $g_{\mathcal{F}}$ de $T\mathcal{F}$ telle que ϕ^t agit avec un facteur conforme $e^{\alpha t}$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors le spectre du générateur infinitésimal θ du groupe des opérateurs $(\phi^t)^*$ pour $t \in \mathbb{R}$ sur l'espace des L^2 -formes harmoniques globales par feuille $\ker \Delta_{\mathcal{F},(2)}^1$ est constitué des valeurs propres ρ . Si $\dim \overline{X} = 3$ et s'il n'y a pas de feuilles compactes, de telle façon que $\overline{X} = X$ et que le flot est partout transversal aux feuilles, alors la formule suivante est vérifiée dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{>0})$ pour certains signes $\pm$ qui peuvent être aisément rendus explicites

$$(9) \quad 1 - \sum_{\rho} e^{t\rho} + e^{\alpha t} = \sum_{\gamma} l(\gamma) \sum_{k \geq 1} \pm \delta_{kl(\gamma)} .$$

De plus, on a $\text{Re } \rho = \frac{\alpha}{2}$ pour toutes les valeurs propres ρ . L'équation (9) est un théorème d'indice transverse pour la $\mathbb{R}$ -action ϕ^t et le complexe $(\Lambda^\bullet T^* \mathcal{F}, d_{\mathcal{F}})$ qui est elliptique dans la direction de la feuille. Pour t fixé, l'opérateur ϕ^{t*} sur $\ker \Delta_{\mathcal{F},(2)}^i$ n'est pas de classe trace si $\ker \Delta_{\mathcal{F},(2)}^i$ est de dimension infinie. Pourtant, pour $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, la trace de l'opérateur mollifié $\int_{\mathbb{R}} \phi^{t*} \varphi(t) dt$ sur $\ker \Delta_{\mathcal{F},(2)}^i$ existe et par nos suppositions, nous avons

$$\begin{aligned} \langle \text{Tr}(\phi^* \mid \ker \Delta_{\mathcal{F},(2)}^i), \varphi \rangle &:= \text{Tr} \int_{\mathbb{R}} \phi^{t*} \varphi(t) dt \\ &= \sum_{\rho} \int_{\mathbb{R}} e^{t\rho} \varphi(t) dt \\ &= \langle \sum_{\rho} e^{t\rho}, \varphi \rangle . \end{aligned}$$

Les seules valeurs propres ρ de θ sur $\ker \Delta_{\mathcal{F},(2)}^i$ pour $i = 0, 2$ sont 0 et α par nos conditions. Ainsi, le côté gauche de (9) peut être vu comme l’indice transverse défini par Atiyah pour les actions de groupes de Lie compacts et par Hörmander en général. Il est donné par la caractéristique d’Euler suivante

$$\sum_i (-1)^i \text{Tr}(\phi^* | \ker \Delta_{\mathcal{F},(2)}^i) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) .$$

Incidentement, $\ker \Delta_{\mathcal{F},(2)}^i$ peut aussi s’interpréter comme le quotient maximal de Hausdorff de la cohomologie L^2 par feuille

$$H_{\mathcal{F},(2)}^i(X) = \ker d_{\mathcal{F},(2)}^i / \text{im } d_{\mathcal{F},(2)}^{i-1} .$$

La formule (9) ne contient pas de terme correspondant à $(1 - e^{-2t})^{-1}$ dans (8) parce qu’on a supposé que ϕ^t n’avait pas de point fixe. Si l’on autorise les points fixes, alors la trace distributionnelle définie ci-dessus peut ne pas exister. Une extension de la théorie de l’indice transverse à une telle situation plus générale a été réalisée seulement récemment par Álvarez-López, Leichtnam et Kordyukov, cf. [ALKL23], [ALKL21]. Elle est plus compliquée que le cas transverse et elle amène à des formules qui sont assez semblables aux formules explicites de la théorie des nombres, même comme distributions sur toutes celles de $\mathbb{R}$.

On peut montrer que le facteur conforme $e^{\alpha t}$ pour une métrique $g_{\mathcal{F}}$ comme ci-dessus doit nécessairement être 1, i.e. $\alpha = 0$, ce qui implique que les valeurs propres ρ de θ sur $\ker \Delta_{\mathcal{F},(2)}^1$ ont une partie réelle $\text{Re } \rho = 0$. Par comparaison avec l’hypothèse de Riemann, on souhaiterait de façon évidente que $\alpha = 1$ soit une possibilité dans l’analogue géométrique $(\overline{X}, \mathcal{F}, \phi^t)$. Ceci est seulement un exemple qui montre que la classe des variétés compactes lisses est trop restrictive pour vraiment réécrire les formules explicites de la théorie analytique des nombres comme un théorème de l’indice transverse. On peut montrer que $\alpha = 1$ peut être obtenu si pour $\overline{X}$, on utilise la structure locale (complètement déconnectée) $\times$ (sphère 3-dimensionnelle), cf. [Lei07]. Dans [Ghy99] et [MS06] on explique comment faire de l’analyse d’EDP sur de tels espaces. Les analogies de la théorie d’Arakelov avec les systèmes dynamiques feuilletés ont été obtenus dans [Kop11]. Récemment, on a trouvé la raison pour laquelle une théorie de la cohomologie de type Weil à valeurs complexes pour les courbes arithmétiques $\overline{\text{spec } \sigma_K}$ ne peut pas avoir une structure réelle fonctorielle, [Den22b]. Puisque les groupes de cohomologie par feuille ou les espaces des formes harmoniques globales par feuille ont toujours des structures réelles naturelles, cela montre que nos analogies ne sont pas parfaites de ce point de vue. Il nous manque un “twist” fondamental, excluant quelque part les structures réelles sur la cohomologie.

4 Systèmes dynamiques pour les schémas arithmétiques

Dans cette section, on rappelle la construction des systèmes dynamiques topologiques “feuilletés” pour les schémas arithmétiques donnés dans [Den22a] et on explique leurs propriétés de base. On trouve d’abord une construction *extrinsèque* de la feuille typique avec ses applications retour de Poincaré, en étant guidés par l’idée d’utiliser les éléments de Frobenius dans les groupes de Galois pour engendrer les orbites périodiques. La définition

suivante plus générale et *intrinsèque* conceptuelle, en utilisant les points à valeur dans $\mathbb{C}$ des espaces de Witt rationnels, est venue plus tard, après avoir compris le travail de Kucharczyk et Scholze [KS18]. La définition extrinsèque précédente est alors devenue un théorème, notamment le théorème 4.1 ci-dessous. Nos systèmes dynamiques ont quelques-unes des propriétés que nous attendions des analogies de la section 3, mais en aucun cas elles n'ont *toutes* ces propriétés. Nous les avons vues comme une première étape importante dans notre quête pour appliquer l'analyse des systèmes dynamiques à la théorie des nombres. Puisque l'arithmétique sur les corps p -adiques est mieux comprise que sur les corps de nombres, on a également étudié une version p -adique de notre construction. Dans cette situation, il y a une modification très naturelle du système dynamique et il s'est avéré être relié de façon très proche à la courbe de Fargues-Fontaine, un des objets fondamentaux dans la théorie de Hodge p -adique.

Avant de pouvoir définir les espaces de Witt rationnels, on doit rappeler ce que sont les vecteurs de Witt rationnels $W_{\text{rat}}(R)$ d'un anneau commutatif unitaire R . Comme ensemble, $W_{\text{rat}}(R)$ contient les fonctions rationnelles f parmi les séries de puissances $f \in R[[t]]$, avec $f(0) = 1$, i.e. $f = P/Q$ avec $P, Q \in R[t], P(0) = 1 = Q(0)$. L'addition dans $W_{\text{rat}}(R)$ est définie comme étant la multiplication de fonctions rationnelles. En suivant Almkvist [Alm74], on écrit $f \in W_{\text{rat}}(R)$ comme un quotient

$$f = \frac{\det(1 - t\varphi \mid V)}{\det(1 - t\psi \mid W)} ,$$

où V et W sont des R -modules projectifs de rang fini équipés par des endomorphismes φ et ψ . Si $\tilde{f}$ a une expression correspondante alors la somme $f + \tilde{f}$ dans $W_{\text{rat}}(R)$ sera représentée par $(\varphi \oplus \tilde{\varphi}, V \oplus \tilde{V})$ et $(\psi \oplus \tilde{\psi}, W \oplus \tilde{W})$. Par définition, le produit de f et $\tilde{f}$ dans $W_{\text{rat}}(R)$ est représenté par $(\varphi \otimes \tilde{\varphi}, V \otimes \tilde{V})$ et $(\psi \otimes \tilde{\psi}, W \otimes \tilde{W})$. On peut vérifier que ceci est indépendant de tout choix, et en fait le produit dans $W_{\text{rat}}(R)$ coïncide avec le produit dans le gros anneau de Witt $W(R) = 1 + tR[[t]]$. Cela amène à la description K -théorique de $W_{\text{rat}}(R)$ dans [Alm74]. Maintenant soit X un schéma, par exemple $X = \text{spec } R$ et soit $W_{\text{rat}}(\mathcal{O}_X)$ la faisceau-isation du préfaisceau de Zariski $U \mapsto W_{\text{rat}}(\mathcal{O}_X(U))$. Pour tout $x \in X$, on a $W_{\text{rat}}(\mathcal{O}_X)_x = W_{\text{rat}}(\mathcal{O}_{X,x})$. On appelle l'espace annelé

$$W_{\text{rat}}(X) = (X_{\text{top}}, W_{\text{rat}}(\mathcal{O}_X)) ,$$

l'espace rationnel de Witt de X , où X_{top} est l'espace topologique sous-tendant X . Si S est un autre schéma, on définit un morphisme $P : S \rightarrow W_{\text{rat}}(X)$ comme un morphisme d'espaces annelés $(P, P^\sharp)$ tel que pour tout $s \in S$, il existe un homomorphisme d'anneaux (déterminé de manière unique) $\tilde{P}_s^\sharp$ qui rend le diagramme suivant commutatif

$$(10) \quad \begin{array}{ccc} W_{\text{rat}}(\mathcal{O}_{X,f(s)}) & \xrightarrow{P_s^\sharp} & \mathcal{O}_{S,s} \\ \downarrow & & \downarrow \\ W_{\text{rat}}(\kappa(f(s))) & \xrightarrow{\tilde{P}_s^\sharp} & \kappa(s) . \end{array}$$

Ici κ dénote le corps de restes. Les tiges $W_{\text{rat}}(\mathcal{O}_X)_s$ ne sont pas des anneaux locaux en général et $W_{\text{rat}}(X)$ n'est pas un espace localement annelé. La condition (10) remplace la

condition habituelle de localité dans la théorie des schémas. L'ensemble des points S -valués de $W_{\text{rat}}(X)$ est

$$W_{\text{rat}}(X)(S) = \text{Mor}(S, W_{\text{rat}}(X)) .$$

Si $S = \text{spec } A$ est affine, on définit $W_{\text{rat}}(X)(A) = W_{\text{rat}}(X)(S)$. Les homomorphismes canoniques d'anneaux

$$W_{\text{rat}}(R) \longrightarrow R, \quad f \longmapsto -f'(0)/f(0)$$

induisent un morphisme canonique

$$X \longrightarrow W_{\text{rat}}(X) .$$

Par composition, on obtient une injection

$$X(S) \hookrightarrow W_{\text{rat}}(X)(S) .$$

Par conséquent, $W_{\text{rat}}(X)(S)$ contient les points classiques S -valués de X .

Les morphismes $W_{\text{rat}}(Y) \rightarrow W_{\text{rat}}(X)$ entre deux espaces de Witt rationnels sont définis comme ci-dessus. Tout morphisme $\alpha : Y \rightarrow X$ de schémas induit un morphisme $W_{\text{rat}}(\alpha) : W_{\text{rat}}(Y) \rightarrow W_{\text{rat}}(X)$ et on obtient un foncteur fidèle mais non pleinement fidèle à partir des schémas vers les espaces de Witt rationnels. Par exemple, les endomorphismes de Frobenius commutant F_ν pour $\nu \geq 1$ de la théorie des vecteurs de Witt induisent des endomorphismes de Frobenius commutant F_ν sur $W_{\text{rat}}(X)$. On a $F_{p^n} = W_{\text{rat}}(F^n)$ si X est un $\mathbb{F}_p$ -schéma et $F : X \rightarrow X$ est le Frobenius absolu, mais en général les F_ν ne sont pas induits par des morphismes de schémas. Le monoïde multiplicatif $\mathcal{N}$ des entiers positifs agit par conséquent sur $W_{\text{rat}}(X)$ et donc, également sur $W_{\text{rat}}(X)(S)$ pour tout S . On décrit maintenant comment les sections globales f de X donnent naissance à des fonctions A -valuées sur $W_{\text{rat}}(X)(A)$ en utilisant l'application (de Teichmüller) multiplicative

$$[\] : R \longrightarrow W_{\text{rat}}(R) \quad \text{with } [r] = 1 - rt .$$

Notamment, pour $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ considérons ses images $[f]$ dans $W_{\text{rat}}(\mathcal{O}_X(X))$ et donc dans $W_{\text{rat}}(\mathcal{O}_X)(X)$. Un point $P \in W_{\text{rat}}(X)(\mathbb{C})$ donne un morphisme de faisceaux $P^\# : W_{\text{rat}}(\mathcal{O}_X) \rightarrow P_* \mathcal{O}_{\text{spec } \mathbb{C}}$. On définit la valeur de f dans P comme étant l'image de $[f] \in W_{\text{rat}}(\mathcal{O}_X)(X)$ dans $(P_* \mathcal{O}_{\text{spec } \mathbb{C}})(X) = \mathbb{C}$ selon cette application. De cette manière, on obtient une application multiplicative de $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ vers la $\mathbb{C}$ -algèbre des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ sur $W_{\text{rat}}(X)(\mathbb{C})$.

Pour les schémas normaux X avec corps de fonctions dénombrable, on définit une topologie naturelle sur $W_{\text{rat}}(X)(\mathbb{C})$ dans [Den22a, section 7] et la construction précédente donne une application multiplicative

$$(11) \quad [\] : \Gamma(X, \mathcal{O}) \longrightarrow C^0(W_{\text{rat}}(X)(\mathbb{C}), \mathbb{C}) .$$

Pour $X = \text{spec } \mathbb{Z}$, cette application interprète les nombres, i.e. les éléments de $\Gamma(\text{spec } \mathbb{Z}, \mathcal{O}) = \mathbb{Z}$ comme des fonctions continues non triviales à valeurs dans $\mathbb{C}$ sur l'espace de Hausdorff connecté infini-dimensionnel $W_{\text{rat}}(\text{spec } \mathbb{Z})(\mathbb{C})$. Le résultat qui suit découlant de [KS18, Lemme 4.9] rend les points de $W_{\text{rat}}(X)(\mathbb{C})$ un peu plus explicites mais même pour $X = \text{spec } \mathbb{Z}$, on n'a pas une compréhension satisfaisante de cet espace. On change quelque peu la notation.

Théorème 4.1. *Soit $\mathfrak{X}_0$ un schéma normal de corps de fonctions K_0 et soit $\mathfrak{X}$ la normalisation de $\mathfrak{X}_0$ dans une fermeture algébrique K de K_0 . Soit $G = \text{Aut}(K/K_0)$ le groupe de Galois absolu de K_0 et appelons*

$$\dot{\mathfrak{X}}(\mathbb{C}) = \{(\mathfrak{x}, \overline{P}^\times) \mid \mathfrak{x} \in \mathfrak{X}, \overline{P}^\times \in \text{Hom}(\kappa(\mathfrak{x})^\times, \mathbb{C}^\times)\}.$$

Alors il y a une bijection naturelle $\mathcal{N}$ -équivariante

$$W_{\text{rat}}(\mathfrak{X}_0)(\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \dot{\mathfrak{X}}_0(\mathbb{C}) := \dot{\mathfrak{X}}(\mathbb{C})/G.$$

Ici, $\sigma \in G$ agit sur $\dot{\mathfrak{X}}(\mathbb{C})$ via $(\mathfrak{x}, \overline{P}^\times)^\sigma = (\mathfrak{x}^\sigma, \overline{P}^\times \circ \sigma)$ et $\nu \in \mathcal{N}$ agit de façon G -équivariante via $F_\nu(\mathfrak{x}, \overline{P}^\times) = (\mathfrak{x}, \overline{P}^\times \circ (\cdot)^\nu)$.

L'espace $W_{\text{rat}}(\mathfrak{X}_0)(\mathbb{C}) = \dot{\mathfrak{X}}_0(\mathbb{C})$ est presque la feuille typique du système dynamique “feuilleté” que nous allons construire. Le monoïde $\mathcal{N}$ agit sur $\dot{\mathfrak{X}}_0(\mathbb{C})$ par des applications injectives et on a besoin de les inverser pour obtenir une action de groupe par $(\mathbb{Q}^{>0}, \cdot)$ via les homéomorphismes. On réalise cela en formant l'espace colimite sur $\mathcal{N}$ vu comme un poset ordonné par la divisibilité

$$\check{\mathfrak{X}}_0(\mathbb{C}) = \text{colim}_{\mathcal{N}} \dot{\mathfrak{X}}_0(\mathbb{C}).$$

Notons qu'au niveau des fonctions, on a une limite sur les Frobenii, qui résulte du processus d'inclinaison en géométrie p -adique. En posant

$$X_0 = (\check{\mathfrak{X}}_0(\mathbb{C}) \times \mathbb{R}^{>0})/\mathbb{Q}^{>0}$$

où $\mathbb{Q}^{>0}$ agit diagonalement. Soit $t \in \mathbb{R}$ agissant sur X_0 en assignant $\phi^t[P, u] = [P, e^t u]$. Le “feuilletage” 1-codimensionnel $\mathcal{F}$ laisse les images de $\check{\mathfrak{X}}_0(\mathbb{C}) \times \{u\}$ dans X_0 pour $u \in \mathbb{R}^{>0}$. Il est partout transversal au flot et chaque ϕ^t envoie des feuilles sur des feuilles. En général, le système dynamique (X_0, ϕ^t) a trop d'orbites périodiques, puisque le $\mathcal{N}$ -espace $W_{\text{rat}}(\mathfrak{X}_0)(\mathbb{C})$ n'en sait pas suffisamment sur l'addition dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_0}$. Dans la situation p -adique locale ci-dessous, on connaît la modification correcte à effectuer. Pourtant, dans le cas global présentement, on peut seulement imposer une condition “admissible” $\mathcal{E}$ sur les caractères $\overline{P}^\times : \kappa(\mathfrak{x})^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ dans la description du théorème 4.1. Ce que l'on sait de façon sûre, c'est que les restrictions de $\overline{P}^\times$ vers $\mu(\kappa(\mathfrak{x}))$ doivent avoir des noyaux finis (condition $\mathcal{E}_{\text{tors}}$) et que pour $\text{char } \kappa(\mathfrak{x}) > 0$, l'image de $\overline{P}^\times$ ne doit pas être une torsion à moins que $\kappa(\mathfrak{x})^\times$ soit lui-même une torsion. Par exemple, $\mathcal{E}$ peut être la condition que $\ker \overline{P}^\times$ est toujours fini (resp. finiment engendré). On se référera à [Den22a, section 4] pour une discussion détaillée. Avec les modifications triviales, on obtient un $G \times \mathcal{N}$ -espace $\dot{\mathfrak{X}}(\mathbb{C})_{\mathcal{E}}$, un $\mathcal{N}$ -espace $\dot{\mathfrak{X}}_0(\mathbb{C})_{\mathcal{E}}$ et un système dynamique “feuilleté” $(X_{0\mathcal{E}}, \mathcal{F}, \phi^t)$.

Théorème 4.2. *Soit $\mathfrak{X}_0$ normal de type fini sur $\text{spec } \mathbb{Z}$, par exemple $\mathfrak{X}_0 = \text{spec } R_0$ pour un anneau finiment engendré intégralement clos R_0 . Alors on a*

$$\{x_0 \in X_{0\mathcal{E}} \mid \phi^t(x_0) = x_0 \text{ pour un certain } t > 0\} = \coprod_{\mathfrak{x}_0} \Gamma_{\mathfrak{x}_0}.$$

Ici, $\mathfrak{x}_0$ couvre les points fermés de $\mathfrak{X}_0$, i.e. les idéaux maximaux $\mathfrak{m}_0$ de R_0 si $\mathfrak{X}_0 = \text{spec } R_0$. Les sous-ensembles compacts $\Gamma_{\mathfrak{x}_0} \subset X_0$ contiennent les orbites périodiques de longueur $\log N_{\mathfrak{x}_0}$ où $N_{\mathfrak{x}_0} = |\kappa(\mathfrak{x}_0)|$ ($= |R_0/\mathfrak{m}_0|$) et ils sont deux à deux disjoints. En fait, $\Gamma_{\mathfrak{x}_0}$ est un espace fibré sur le groupe compact $\text{Aut}(\overline{\mathbb{F}}_p^\times)/\text{Aut}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ où $p = \text{char } \kappa(\mathfrak{x})$ avec pour fibres les orbites compactes dans $\Gamma_{\mathfrak{x}_0}$.

Le théorème affirme que les points fermés de $\mathfrak{X}_0$, par exemple les nombres premiers p si $\mathfrak{X}_0 = \text{spec } \mathbb{Z}$ correspondent non pas aux orbites périodiques individuelles γ comme dans les analogies de la section 3 mais aux paquets compacts d'orbites périodiques ayant toutes pour longueur $\log N_{\mathfrak{X}_0}$ i.e. $\log p$ si $\mathfrak{X}_0 = \text{spec } \mathbb{Z}$. Ceci rappelle les tores invariants de la dynamique de Hamilton.

Il découle de l'existence d'éléments de Frobenius dans le groupe de Galois G que les points fermés fournissent les orbites périodiques dans $X_{0\mathcal{E}}$. Il est plus difficile de montrer que toute orbite périodique provient d'un point fermé, i.e. appartient à $\Gamma_{\mathfrak{X}_0}$ pour un certain $\mathfrak{X}_0$, cf. les [Den22a, Théorèmes 5.2 et 6.1].

La preuve du résultat suivant nécessite des altérations de la théorie de de Jong si $\dim \mathfrak{X}_0 \geq 2$ et des théorèmes d'approximation de la théorie des nombres.

Théorème 4.3. *Soit $\mathfrak{X}_0$ un schéma normal intégral de type fini qui est plat sur $\text{spec } \mathbb{Z}$. Alors les espaces X_0 et $X_{0\mathcal{E}}$ sont connectés. En fait, ils sont presque connectés par chemins : pour toute paire de points x_0 et x'_0 dans $X_{0\mathcal{E}}$ et toute paire de voisinages $U_0 \ni x_0$ et $U'_0 \ni x'_0$, il y a des points $y_0 \in U_0$ et $y'_0 \in U'_0$ qui peuvent être connectés par un chemin continu.*

Un autre résultat, qui est plus fort que la connexité, affirme que le groupe de cohomologie par feuille $H_{\mathcal{F}}^0(X_{0\mathcal{E}})$ est un-dimensionnel. C'est essentiellement le groupe des sections globales du faisceau de fonctions continues à valeurs dans $\mathbb{R}$ sur $X_{0\mathcal{E}}$ qui sont localement constantes le long des feuilles de $\mathcal{F}$, cf. [Den22a, section 10].

L'espace $X_{0\mathcal{E}}$ est infini-dimensionnel si $\dim \mathfrak{X}_0 \geq 1$ et on pourrait espérer que le système sous-dynamique obtenu comme fermeture de l'union de toutes ses orbites compactes pourrait être significativement plus petit. Pourtant, ce n'est pas le cas, comme cela découle de [Den22a, Théorème 8.2]. La fermeture est le sous-système obtenu en remplaçant $\dot{\mathfrak{X}}(\mathbb{C})_{\mathcal{E}}$ dans les constructions précédentes par le sous-espace des paires $(\mathfrak{x}, \overline{P}^{\times})$ avec $\overline{P}^{\times} : \kappa(\mathfrak{x})^{\times} \rightarrow S^1$ un caractère unitaire. Pour $\dim \mathfrak{X}_0 \geq 2$, ceci est conditionné par un résultat en approximation diophantienne qui devrait être démontrable et qui est connu pour $\dim \mathfrak{X}_0 = 1$ et $\mathfrak{X}_0$ plat sur $\text{spec } \mathbb{Z}$.

Le résultat suivant rend la structure du système dynamique X_0 plus claire. Considérons la projection naturelle $\dot{\mathfrak{X}}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{X}$ envoyant $(\mathfrak{x}, \overline{P}^{\times})$ sur $\mathfrak{x}$. Soit $\dot{\mathfrak{X}}(\mathbb{C})_p$ resp. $\dot{\mathfrak{X}}(\mathbb{C})_{\mathbb{Q}}$ les fibres de la composition $\dot{\mathfrak{X}}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{X} \rightarrow \text{spec } \mathbb{Z}$ sur (p) resp. (0) . Considérons le sous-espace G -invariant

$$\dot{\mathfrak{X}}(\mathbb{C})_{\text{in}} = \{(\mathfrak{x}, \overline{P}^{\times}) \in \dot{\mathfrak{X}}(\mathbb{C}) \mid \overline{P}^{\times}|_{\mu(\kappa(\mathfrak{x}))} \text{ est injective} \}$$

et posons

$$\dot{\mathfrak{X}}(\mathbb{C})_{p,\text{in}} = \dot{\mathfrak{X}}(\mathbb{C})_{\text{in}} \cap \dot{\mathfrak{X}}(\mathbb{C})_p \quad \text{et} \quad \dot{\mathfrak{X}}(\mathbb{C})_{\mathbb{Q},\text{in}} = \dot{\mathfrak{X}}(\mathbb{C})_{\text{in}} \cap \dot{\mathfrak{X}}(\mathbb{C})_{\mathbb{Q}}.$$

Il y a des sous-espaces de $\dot{\mathfrak{X}}(\mathbb{C})$ et les topologies quotient sur

$$\dot{\mathfrak{X}}_0(\mathbb{C})_{p,\text{in}} = \dot{\mathfrak{X}}(\mathbb{C})_{p,\text{in}}/G \quad \text{et} \quad \dot{\mathfrak{X}}_0(\mathbb{C})_{\mathbb{Q},\text{in}} = \dot{\mathfrak{X}}(\mathbb{C})_{\mathbb{Q},\text{in}}/G$$

sont en accord avec les topologies du sous-espace dans $\dot{\mathfrak{X}}_0(\mathbb{C})$. Pour tout p , l'endomorphisme de Frobenius F_p de $\dot{\mathfrak{X}}_0(\mathbb{C})$ se restreint à un homéomorphisme de $\dot{\mathfrak{X}}_0(\mathbb{C})_{p,\text{in}}$. Par conséquent, $p^{\mathbb{Z}} \subset \mathbb{Q}^{>0}$ agit sur $\dot{\mathfrak{X}}_0(\mathbb{C})_{p,\text{in}}$ via $p \leftrightarrow F_p$.

Théorème 4.4. *L'application canonique ϕ^t -équivariante suivante est une bijection continue (et similairement après avoir imposé une condition admissible $\mathcal{E}$)*

$$\dot{\mathfrak{X}}_0(\mathbb{C})_{\mathbb{Q}, \text{in}} \times \mathbb{R}^{>0} \amalg \coprod_p \dot{\mathfrak{X}}_0(\mathbb{C})_{p, \text{in}} \times_{p^{\mathbb{Z}}} \mathbb{R}^{>0} \xrightarrow{\sim} X_0 = \dot{\mathfrak{X}}_0(\mathbb{C})_{\mathcal{E}_{\text{tors}}} \times_{\mathbb{Q}^{>0}} \mathbb{R}^{>0}.$$

Au vu du théorème 4.3, l'application du théorème n'est pas un homéomorphisme puisque X_0 est connecté, alors que le côté gauche est disconnecté.

On discute maintenant de la relation que notre construction entretient avec le travail de Kucharczyk et Scholze [KS18]. Considérons un corps de caractéristique zéro contenant toutes les racines de l'unité, et fixons un homomorphisme injectif $\iota : \mu(F) = \mu(\overline{F}) \hookrightarrow \mathbb{C}^\times$. L'application de Teichmüller multiplicative $[\] : F^\times \hookrightarrow W_{\text{rat}}(F)$ et l'application multiplicative ι donnent les homomorphismes d'anneaux

$$\mathbb{Z}[\mu(F)] \longrightarrow W_{\text{rat}}(F) \quad \text{et} \quad \mathbb{Z}[\mu(F)] \longrightarrow \mathbb{C}$$

sur l'anneau de groupes de $\mu(F)$. Soit

$$\mathfrak{X}_F = \text{spec}(W_{\text{rat}}(F) \otimes_{\mathbb{Z}[\mu(F)]} \mathbb{C}).$$

On peut montrer que les composantes connexes de $W_{\text{rat}}(\text{spec } F)(\mathbb{C})$ sont paramétrées par les plongements $\mu(F) \hookrightarrow \mathbb{C}^\times$ et que $\mathfrak{X}_F(\mathbb{C})$ est la composante correspondant à ι . Pour les espaces topologiques arbitraires connectés pointés (Z, z) , Kucharczyk et Scholze définissent un groupe fondamental profini $\pi_1^{\text{ét}}(Z, z)$ qui classe les recouvrements finis de Z . Un de leurs principaux résultats est un isomorphisme de $\pi_1^{\text{ét}}(\mathfrak{X}_F(\mathbb{C}), x)$ avec le groupe de Galois absolu de F . Ils calculent également la cohomologie de faisceaux de $\mathfrak{X}_F(\mathbb{C})$ avec coefficients dans $\mathbb{Z}/n$ et $\mathbb{Q}$. Pour $\mathbb{Z}/n$, ils démontrent qu'elle est isomorphe à la cohomologie de Galois de F avec $\mathbb{Z}/n$ -coefficients en utilisant le travail de Rost et Voevodsky sur la conjecture de Bloch-Kato. Pour les $\mathbb{Q}$ -coefficients, la cohomologie de $\mathfrak{X}_F(\mathbb{C})$ est la partie fixe de Galois de $\Lambda^\bullet(\overline{F}^\times \otimes \mathbb{Q})$. Un groupe plus naturel serait le K -groupe de Milnor de F tensorisé par $\mathbb{Q}$. L'absence de relations de Steinberg en cohomologie rationnelle est une indication que l'espace $\mathfrak{X}_F(\mathbb{C})$ et par conséquent, également, notre espace $W_{\text{rat}}(X)(\mathbb{C})$ ne code pas suffisamment d'information à propos de la structure additive de F resp. $\mathcal{O}_X$.

Dans [DW23], on a introduit et étudié un groupe fondamental pro-algébrique $\pi_E(Z, z)$ sur tout corps E pour les espaces topologiques pointés connectés (Z, z) . Son quotient pro-étale maximal est $\pi_1^{\text{ét}}(Z, z)$ vu comme un schéma de groupe sur E . Pour la “bonne” version de $\mathfrak{X}_F(\mathbb{C})$ discutée dans l'introduction de [KS18], on s'attend à ce que le groupe fondamental pro-algébrique soit profondément relié au groupe de Galois motivique pour des motifs sur F à coefficients dans E . Dans [DW23, section 5], on a calculé $\pi_E(\mathfrak{X}_F(\mathbb{C}), x)$ pour des corps algébriquement fermés E de caractéristique nulle. Sa composante connexe est commutative et sa partie unipotente est reliée aux extensions des motifs de Tate. Pour la partie réductive, on n'a pu voir aucune relation avec les motifs, i.e. avec le groupe de Serre. Selon notre opinion, cela montre seulement que $\mathfrak{X}_F(\mathbb{C})$ et que nos espaces $W_{\text{rat}}(\mathfrak{X}_0)(\mathbb{C})$ sont seulement les premières étapes (mais dans la bonne direction).

Pour l'inspiration, on a regardé la situation la mieux comprise dans laquelle $\mathfrak{X}_0$ est un schéma normal de type fini sur $\text{spec } \mathbb{Z}_p$ à la place de $\text{spec } \mathbb{Z}$. Pour comparer avec la théorie

de Hodge p -adique, il est raisonnable d'étudier $W_{\text{rat}}(\mathfrak{X}_0)(\mathfrak{o})$ où $\mathfrak{o}$ est l'anneau de valuation dans la complétion $\mathbb{C}_p$ de $\overline{\mathbb{Q}_p}$. On a démontré que

$$W_{\text{rat}}(\mathfrak{X}_0)(\mathfrak{o}) = W_{\text{rat}}(\mathfrak{X})(\mathfrak{o})/G.$$

Ici, comme précédemment, $\mathfrak{X}$ est la normalisation de $\mathfrak{X}_0$ dans $\overline{K_0}$, avec K_0 le corps de fonctions de $\mathfrak{X}_0$ et G son groupe de Galois absolu. Les points de $W_{\text{rat}}(\mathfrak{X})(\mathfrak{o})$ sont certains diagrammes déterminés par les points $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in \mathfrak{X}$ avec $\mathfrak{y} \in \overline{\{\mathfrak{x}\}}$ et les applications multiplicatives $P_{\mathfrak{y}} : \mathcal{O}_{\overline{\{\mathfrak{x}\}}, \mathfrak{y}} \rightarrow \mathfrak{o}$ envoyant 1 sur 1 et 0 sur 0. Ici, on sait comment modifier nos constructions pour obtenir le système F_p -dynamique correct : on doit imposer la condition que la réduction mod p de l'application multiplicative $P_{\mathfrak{y}}$, i.e. la composition

$$(12) \quad \mathcal{O}_{\overline{\{\mathfrak{x}\}}, \mathfrak{y}} \xrightarrow{P_{\mathfrak{y}}} \mathfrak{o} \longrightarrow \mathfrak{o}/p$$

est *additive*. Les détails techniques sont plus compliqués mais c'est le cœur du matériau. Il s'avère maintenant que les éléments des A_{inf} -anneaux de Fontaine deviennent des fonctions ordinaires $\mathfrak{o}$ -valuées sur les systèmes sous-dynamiques résultants. Judith Lutz a démontré que cette représentation de A_{inf} par des fonctions est fidèle. En outre, par exemple pour $\mathfrak{X}_0 = \text{spec } \mathbb{Z}_p$, on a obtenu une bijection naturelle du sous-système avec les points de la courbe de Fontaine-Fargue. Cela utilise le travail de Fontaine-Wintenberger dans sa reformulation par Scholze et Kedlaya. On peut reformuler l'additivité de (12) en fonction des valeurs absolues mais l'analogue correct que l'on doit imposer à $W_{\text{rat}}(\mathfrak{X})(\mathbb{C})$ pour $\mathfrak{X}_0/\mathbb{Z}$ n'a toujours pas été déterminé d'une manière claire.

Références

- [AC22] Eric Ahlqvist, Magnus Carlson. Massey products in the étale cohomology of number fields, 2022.
- [ALKL21] Jesús A. Álvarez López, Yuri A. Kordyukov, Eric Leichtnam. Zeta invariants of Morse forms, 2021. <https://arxiv.org/pdf/2112.03191>.
- [ALKL22] Jesús A. Álvarez López, Yuri A. Kordyukov, Eric Leichtnam. Simple foliated flows. *Tohoku Math. J. (2)*, 74(1) :53–81, 2022.
- [ALKL23] Jesús A. Álvarez López, Yuri A. Kordyukov, Eric Leichtnam. A trace formula for foliated flows, 2023. in preparation.
- [Alm74] Gert Almkvist. The Grothendieck ring of the category of endomorphisms. *J. Algebra*, 28 :375–388, 1974.
- [Den00] Christopher Deninger. On dynamical systems and their possible significance for arithmetic geometry. In *Regulators in analysis, geometry and number theory*, volume 171 of *Progr. Math.*, pages 29–87. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2000.
- [Den01] Christopher Deninger. Number theory and dynamical systems on foliated spaces. *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein.*, 103(3) :79–100, 2001.
- [Den06] Christopher Deninger. A dynamical systems analogue of Lichtenbaum's conjectures on special values of Hasse-Weil zeta functions, 2006. <https://arxiv.org/pdf/math/0605724>.
- [Den08] Christopher Deninger. Analogies between analysis on foliated spaces and arithmetic geometry. In *Groups and analysis*, volume 354 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 174–190. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2008.
- [Den22a] Christopher Deninger. Dynamical systems for arithmetic schemes, 2022. 1807.06400.
- [Den22b] Christopher Deninger. There is no “Weil”-cohomology theory with real coefficients for arithmetic curves, 2022. <https://arxiv.org/pdf/2204.02714>, to appear in *Ann Sc. Norm. Super. Pisa*.

- [DW23] Christopher Deninger, Michael Wibmer. On the pro-algebraic fundamental group of topological spaces and amalgamated products of affine group schemes, 2023. in preparation.
- [Ghy99] Étienne Ghys. Laminations par surfaces de Riemann. In *Dynamique et géométrie complexes (Lyon, 1997)*, volume 8 of *Panor. Synthèses*, pages ix, xi, 49–95. Soc. Math. France, Paris, 1999.
- [KMNT21] Junhyeong Kim, Masanori Morishita, Takeo Noda, Yuji Terashima. On 3-dimensional foliated dynamical systems and Hilbert type reciprocity law. *Münster J. Math.*, 14(2) :323–348, 2021.
- [Kop06] Fabian Kopei. A remark on a relation between foliations and number theory. In *Foliations 2005*, pages 245–249. World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2006.
- [Kop11] Fabian Kopei. A foliated analogue of one- and two-dimensional Arakelov theory. *Abh. Math. Semin. Univ. Hambg.*, 81(2) :141–189, 2011.
- [KS] M. Kapranov, A. Smirnov. Cohomology determinants and reciprocity laws : number field case. Preprint, <https://cage.ugent.be/kthas/Fun/library/KapranovSmirnov.pdf>.
- [KS18] Robert A. Kucharczyk, Peter Scholze. Topological realisations of absolute Galois groups. In *Cohomology of arithmetic groups*, volume 245 of *Springer Proc. Math. Stat.*, pages 201–288. Springer, Cham, 2018.
- [Lei07] Eric Leichtnam. Scaling group flow and Lefschetz trace formula for laminated spaces with p -adic transversal. *Bull. Sci. Math.*, 131(7) :638–669, 2007.
- [Maz] Barry Mazur. Remarks on the Alexander polynomial. <https://bpb-us-e1.wpmucdn.com/sites.harvard.edu/dist/a/189/files/2023/01/Remarks-on-the-Alexander-Polynomial.pdf>.
- [Maz73] Barry Mazur. Notes on étale cohomology of number fields. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 6 :521–552 (1974), 1973.
- [Mor02] Masanori Morishita. On certain analogies between knots and primes. *J. Reine Angew. Math.*, 550 :141–167, 2002.
- [Mor04] Masanori Morishita. Milnor invariants and Massey products for prime numbers. *Compos. Math.*, 140(1) :69–83, 2004.
- [Mor12] Masanori Morishita. *Knots and primes*. Universitext. Springer, London, 2012. An introduction to arithmetic topology.
- [MS06] Calvin C. Moore, Claude L. Schochet. *Global analysis on foliated spaces*, volume 9 of *Mathematical Sciences Research Institute Publications*. Cambridge University Press, New York, second edition, 2006.
- [MT17] Masanori Morishita, Yuji Terashima. p -Johnson homomorphisms and pro- p groups. *J. Algebra*, 479 :102–136, 2017.
- [Ser58] J.P. Serre. Espaces fibrés algébriques. *Séminaire Claude Chevalley*, tome 3, exp. no 1 :1–37, 1958.
- [Wei52] André Weil. Sur les “formules explicites” de la théorie des nombres premiers. *Comm. Sém. Math. Univ. Lund [Medd. Lunds Univ. Mat. Sem.]*, 1952(Tome Supplémentaire) :252–265, 1952.