

Traduction d'un extrait du livre *Circulant matrices* de Philip J. Davis (Denise Vella-Chemla, juin 2023)

(p. 27) : Matrice dite push

Parmi les matrices de permutation, la matrice

$$(2.4.14) \quad \pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

joue un rôle fondamental dans la théorie des matrices circulantes. Elle correspond à la permutation de décalage *vers l'avant* $\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 3, \dots, \sigma(n-1) = n, \sigma(n) = 1$, c'est-à-dire au cycle $\sigma = (1, 2, 3, \dots, n)$ générant le groupe cyclique d'ordre n (π est pour "push"). On a

$$(2.4.15) \quad \pi^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

correspondant à σ^2 pour lequel $\sigma^2(1) = 3, \sigma^2(2) = 4, \dots, \sigma^2(n) = 2$. Similairement, pour π^k et σ^k . La matrice π^n correspond à $\sigma^n = I$, de telle façon que

$$(2.4.16) \quad \pi^n = I$$

Notons également que

$$(2.4.17) \quad \pi^T = \pi^* = \pi^{-1} = \pi^{n-1}$$

Une instance particulière de (2.4.13) est

$$(2.4.18) \quad \pi A \pi^T = (a_{i+1, j+1})$$

où $A = (a_{i, j})$ et les indices sont pris mod n .

(p. 119 et suivantes)

4.4. n -gones imbriqués

(voir la section 1.4.) Soit $Z = (z_1, z_2, \dots, z_n)^T$ désignant les sommets d'un n -gone et appliquons itérativement la transformation $C (= c_s)$ où

$$(4.4.1) \quad \begin{aligned} C &= \text{circ}(s, t, 0, 0, \dots, 0) \\ &= sI + t\pi, \quad s > 0, t > 0, s + t = 1. \end{aligned}$$

Les valeurs propres de C sont les nombres $\lambda_k = s + tw^{k-1}$, $k = 1, 2, \dots, n$. Ces nombres sont les combinaisons linéaires strictement convexes de 1 et w^{k-1} . Donc, $\lambda_1 = 1$ et pour $k = 2, \dots, n$, on a $|\lambda_k| < 1$. Voir la figure 4.4.1. En fait, ces nombres sont sur un cercle intérieur et tangent au cercle unité en $z = 1$. On a

$$\begin{aligned}
(4.4.2) \quad |\lambda_k|^2 &= \left| s + t \left(\cos\left(\frac{2\pi(k-1)}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi(k-1)}{n}\right) \right) \right|^2 \\
&= \left| s^2 + t^2 + 2st \cos\left(\frac{2\pi(k-1)}{n}\right) \right|^2, \quad k = 1, 2, \dots, n
\end{aligned}$$

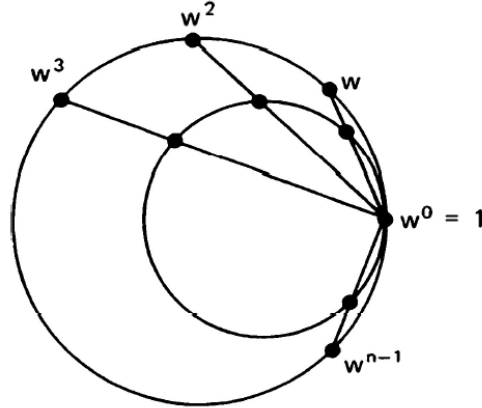


FIG. 4.4.1

Il est clair que les valeurs propres de valeurs proches de $\lambda_1 = 1$ sont λ_2 et $\lambda_n (= \bar{\lambda}_2)$ pour lesquelles

$$(4.4.3) \quad |\lambda_2|^2 = |\lambda_n|^2 = \left| s^2 + t^2 + 2st \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \right|^2$$

À partir de (3.4.14), on a pour $r = 0, 1, \dots$,

$$(4.4.4) \quad C^r z = B_1 Z + \lambda_2^r B_2 Z + \dots + \lambda_n^r B_n Z,$$

donc

$$(4.4.4') \quad \lim_{r \rightarrow \infty} C^r Z = B_1 Z.$$

Puisqu'à partir de (3.4.13), $B_1 = 1/n \text{ circ}(1, 1, \dots, 1)$, $B_1 Z = (1/n)(z_1 + z_2 + \dots + z_n)(1, 1, \dots, 1)^T$. Donc, lorsque $r \rightarrow \infty$, chaque composante de $C^r Z$ s'approche de la c.g. de Z avec une rapidité géométrique. Il est utile, par conséquent, de supposer que la c.g. est en $z = 0$, en éliminant le premier terme dans (4.4.4). Alors on suppose que

$$(4.4.5) \quad z_1 + z_2 + \dots + z_n = 0$$

Une analyse asymptotique plus poussée peut être menée selon la ligne de la *méthode des puissances* en analyse numérique pour le calcul des valeurs propres de la matrice. Écrivons

$$(4.4.6) \quad C^r Z = \lambda_2^r B_2 Z + \lambda_n^r B_n Z + (\lambda_3^r B_3 + \dots + \lambda_{n-1}^r B_{n-1}) Z.$$

Alors, puisque $|\lambda_n| = |\lambda_2|$,

$$(4.4.7) \quad \frac{C^r Z}{|\lambda_2|^r} = \frac{\lambda_2^r}{|\lambda_2|^r} B_2 Z + \frac{\lambda_n^r}{|\lambda_n|^r} B_n Z + \left(\frac{\lambda_3^r}{|\lambda_2|^r} B_3 + \dots + \frac{\lambda_{n-1}^r}{|\lambda_2|^r} B_{n-1} \right) Z.$$

Maintenant, puisque $|\lambda_3|, |\lambda_4|, \dots, |\lambda_{n-1}| < |\lambda_2|$, le terme entre parenthèses approche 0 lorsque $r \rightarrow \infty$. On le désigne par $\varepsilon(r)$. (C'est un vecteur colonne). Soit

$$(4.4.8) \quad \begin{aligned} \lambda_2 &= |\lambda_2|e^{i\theta} \\ \theta &= \tan^{-1} \left(\frac{t \sin 2\pi/n}{s + t \cos 2\pi/n} \right). \\ \lambda_n &= |\lambda_2|e^{-i\theta} \end{aligned}$$

Donc,

$$(4.4.9) \quad \frac{C^r Z}{|\lambda_2|^r} = e^{ir\theta} B_2 Z + e^{-ir\theta} B_n Z + \varepsilon(r).$$

Écrivons

$$(4.4.10) \quad Y_r = e^{ir\theta} B_2 Z + e^{-ir\theta} B_n Z,$$

de telle façon que

$$(4.4.11) \quad \frac{C^r Z}{|\lambda_2|^r} = Y_r + \varepsilon(r).$$

Puisqu'à partir de (3.4.9) $B_k = F^* \Lambda_k F$, on a

$$\begin{aligned} Y_r &= e^{ir\theta} B_2 Z + e^{-ir\theta} B_n Z \\ &= F^* \text{diag}(0, e^{ir\theta}, 0, \dots, 0, e^{-ir\theta}) F Z. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \|Y_r\|^2 &= Y_r^* Y_r = Z^* F^* \text{diag}(0, 1, 0, \dots, 0, 1) F Z \\ &= \widehat{Z}^* \text{diag}(0, 1, \dots, 0, 1) \widehat{Z} \\ &= |\widehat{z}_2|^2 + |\widehat{z}_n|^2 \\ &= \text{constante (en ce qui concerne } r). \end{aligned}$$

De ceci découle immédiatement que *si la seconde et la $n^{\text{ième}}$ composantes de FZ , la transformée de Fourier de Z , sont toutes deux non nulles, alors les Y_r sont une famille de n -gones non nuls de moment d'inertie constant.*

Dans ce cas, alors, la vitesse de convergence de $C^r Z$ est précisément $|\lambda_2|^{-r}, r \rightarrow \infty$. Notons à partir de (4.4.3) ou de la Figure 4.4.1 que lorsque $n \rightarrow \infty$, $\lambda_2 \rightarrow 1$, de telle façon que *plus il y a de sommets dans le n -gone, plus lente est la convergence.*

La séquence des n -gones $C^r Z / |\lambda_2|^r$ sera dite *normalisée* et on appellera famille Y_r l'“approche” par les n -gones normalisés. Cela présente un intérêt de regarder la nature géométrique des Y_r .

Lemme. Soit $Z = (z_1, z_2, \dots, z_n)^T$. Soit

$$(4.4.12) \quad p_Z(u) = z_1 + z_2 u + z_3 u^2 + \dots + z_n u^{n-1}$$

Pour $r = 1, 2, \dots, n$, soit

$$(4.4.13) \quad k = n + 1 - r.$$

Alors

$$(4.4.14) \quad B_r Z = \frac{1}{n} (p_Z(w^k))(1, \bar{w}^k, \bar{w}^{2k}, \dots, \bar{w}^{(n-1)k})^T.$$

En particulier,

$$(4.4.15) \quad B_2 Z = \frac{1}{n} (p_Z(\bar{w}))(1, w, w^2, \dots, w^{n-1})^T,$$

$$(4.4.16) \quad B_n Z = \frac{1}{n} (p_Z(w))(1, w, \bar{w}, \bar{w}^2, \dots, \bar{w}^{n-1})^T.$$

PREUVE. À partir de (3.4.12), $B_r = 1/n \text{ circ}(1, w^k, w^{2k}, \dots, w^{(n-1)k})$. Par conséquent, chaque ligne de B_r est la ligne précédente multipliée par \bar{w}^k . Évident. Les identités devraient maintenant être évidentes.

Lemme. Soit $z = x + iy, z' = x' + iy', \tau_1, \tau_2$ deux complexes.

Alors

$$(4.4.17) \quad z' = \tau_1 \bar{z} + \tau_2 z$$

est une transformation affine du plan (x, y) . Elle est non singulière si et seulement si $|\tau_1| \neq |\tau_2|$.

PREUVE. Écrivons $\tau_1 = \xi_1 + i\eta_1, \tau_2 = \xi_2 + i\eta_2$, où les ξ et les η sont réels. Alors la transformation (4.4.17) peut s'écrire

$$(4.4.18) \quad \begin{aligned} x' &= (\xi_1 + \xi_2)x + (\eta_1 - \eta_2)y \\ y' &= (\eta_1 + \eta_2)x + (\xi_2 - \xi_1)y. \end{aligned}$$

Ceci est une transformation affine du plan x, y . Le déterminant Δ de la transformation est

$$\Delta = \xi_2^2 - \xi_1^2 - \eta_1^2 + \eta_2^2 = |\tau_2|^2 - |\tau_1|^2$$

de telle façon que $\Delta \neq 0$ si et seulement si $|\tau_1| \neq |\tau_2|$.

Théorème 4.4.1. Si $|\widehat{z}_2| \neq |\widehat{z}_n|$, les n -gones Y_r sont non nuls, et de moment d'inertie constant. Ce sont les images affines de polygone régulier unité à n côtés, par conséquent, ils sont convexes.

PREUVE. On a

$$\begin{aligned} Y_r &= e^{ir\theta} B_2 Z + e^{-ir\theta} B_n Z \\ &= e^{ir\theta} \frac{1}{n} p_Z(w)(1, \bar{w}, \bar{w}^2, \dots, \bar{w}^{n-1})^T + e^{-ir\theta} \frac{1}{n} p_Z(\bar{w})(1, w, w^2, \dots, w^{n-1})^T. \end{aligned}$$

Par conséquent, si on écrit $\tau_1 = (1/n)e^{ir\theta} p_Z(w), \tau_2 = (1/n)e^{-ir\theta} p_Z(\bar{w})$, les sommets dans Y_r sont les images de $(1, w, w^2, \dots, w^{n-1})$ sous $z' = \tau_1 \bar{z} + \tau_2 z$. Puisque $p_Z(w) = \widehat{z}_n$ et $p_Z(\bar{w}) = \widehat{z}_2$, il en découle que $|\tau_1| \neq |\tau_2|$. Ceci est une transformation affine non singulière et toutes les transformations de ce type envoient les figures convexes sur des figures convexes.

Pour une analyse plus poussée, on fait la supposition que θ est un multiple rationnel de 2π . Dans ce cas, on peut identifier les limites de la sous-séquence des figures normalisées $C^r Z/|\lambda_2|^r$, $r = 0, 1, 2, \dots$

Plutôt que de travailler généralement, on supposera que

$$(4.4.19) \quad s = t = 1/2.$$

Cela amène immédiatement à

$$(4.4.20) \quad |\lambda_2| = \cos \frac{\pi}{n}, \quad \theta = \frac{\pi}{n}$$

de telle façon que (4.4.9) devient

$$(4.4.21) \quad \frac{C^r Z}{(\cos \pi/n)^r} = e^{\pi ir/n} B_2 Z + e^{-\pi ir/n} B_n Z + \varepsilon(r).$$

Posons maintenant

$$(4.4.22) \quad r = 2jn + b, \quad 0 \leq b \leq 2n - 1, \quad j = 0, 1, \dots$$

Alors (4.4.21) devient

$$(4.4.23) \quad \frac{C^{2jn+b} Z}{(\cos \pi/n)^{2jn+b}} = e^{\pi ib/n} B_2 Z + e^{-\pi ib/n} B_n Z + \varepsilon(2jn + b).$$

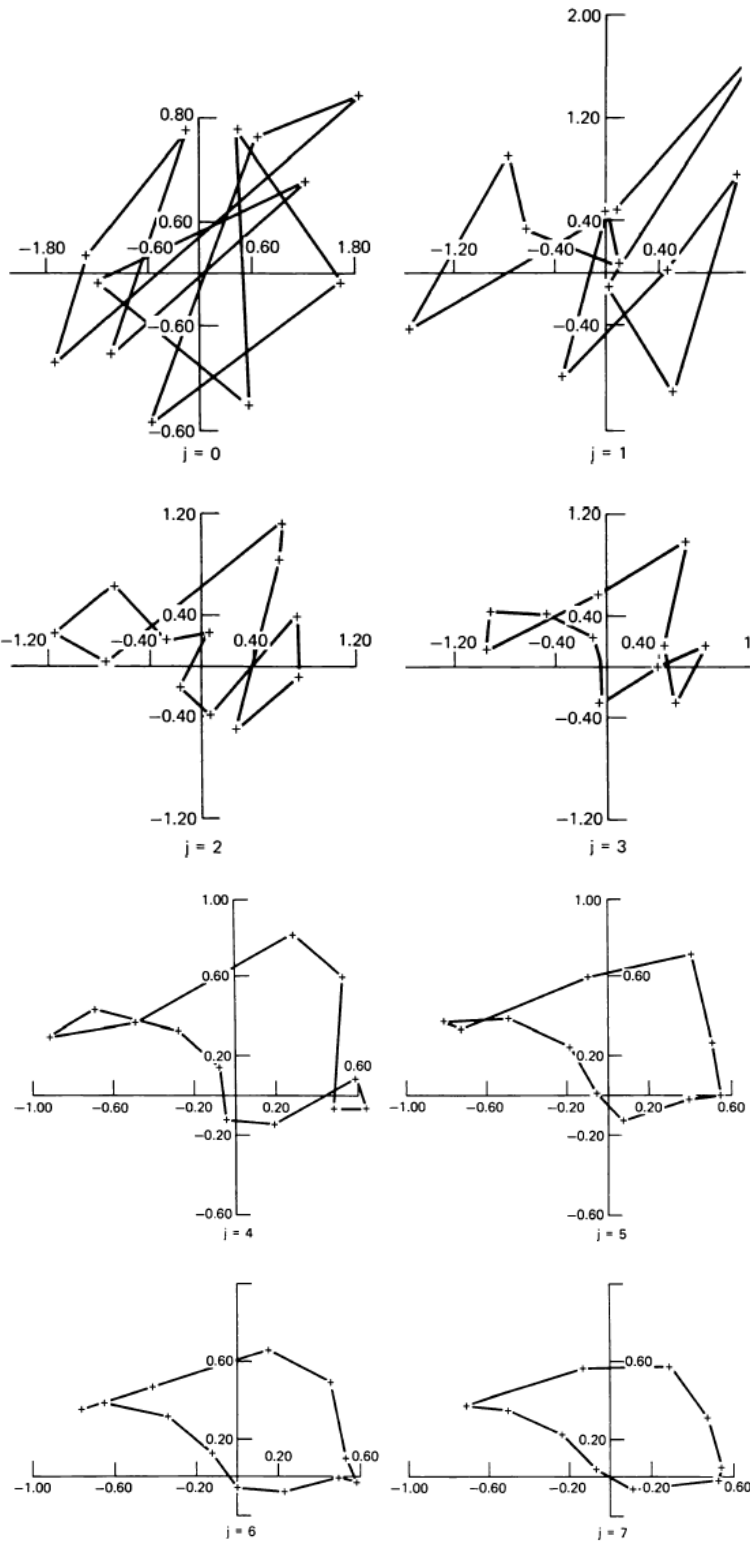
En écrivant

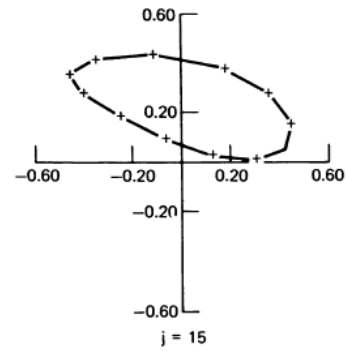
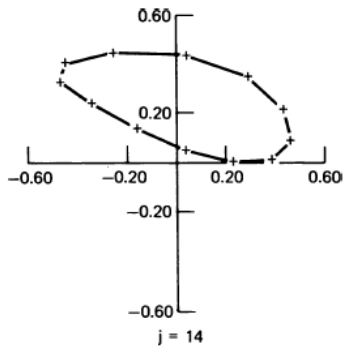
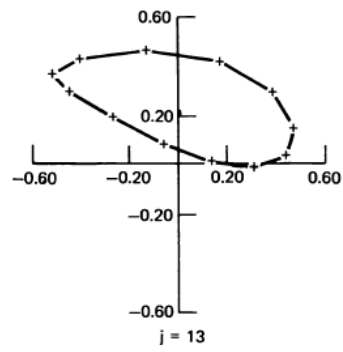
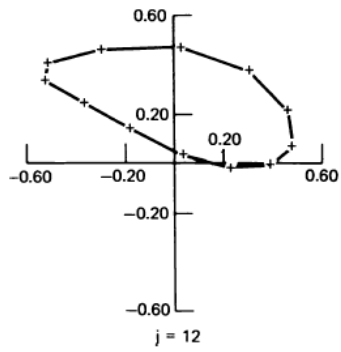
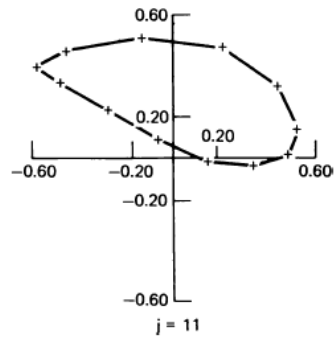
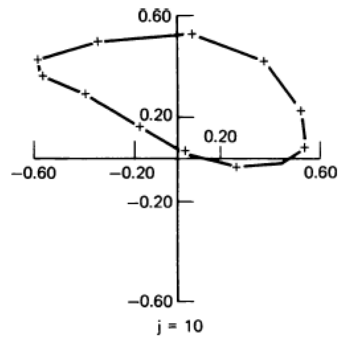
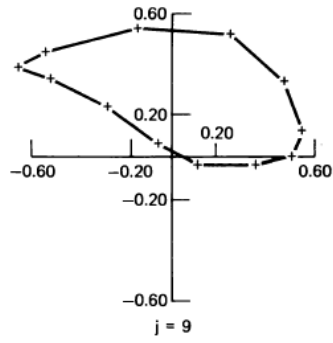
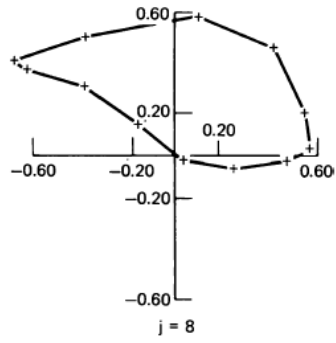
$$(4.4.24) \quad \begin{aligned} U_b &= e^{\pi ib/n} B_2 Z + e^{-\pi ib/n} B_n Z \\ &= F^* \text{diag}(0, e^{\pi ib/n}, 0, 0, \dots, 0, e^{-\pi ib/n}) F Z, \end{aligned}$$

on a maintenant

$$(4.4.25) \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{C^{2jn+b} Z}{(\cos \pi/n)^{2jn+b}} = U_b, \quad b = 0, 1, 2, \dots, 2n - 1,$$

de telle façon que les n -gones normalisés approchent les n -gones de limite $2n$, chacun des polygones étant est une transformation affine d'un n -gone régulier. Voir la figure 4.4.2.





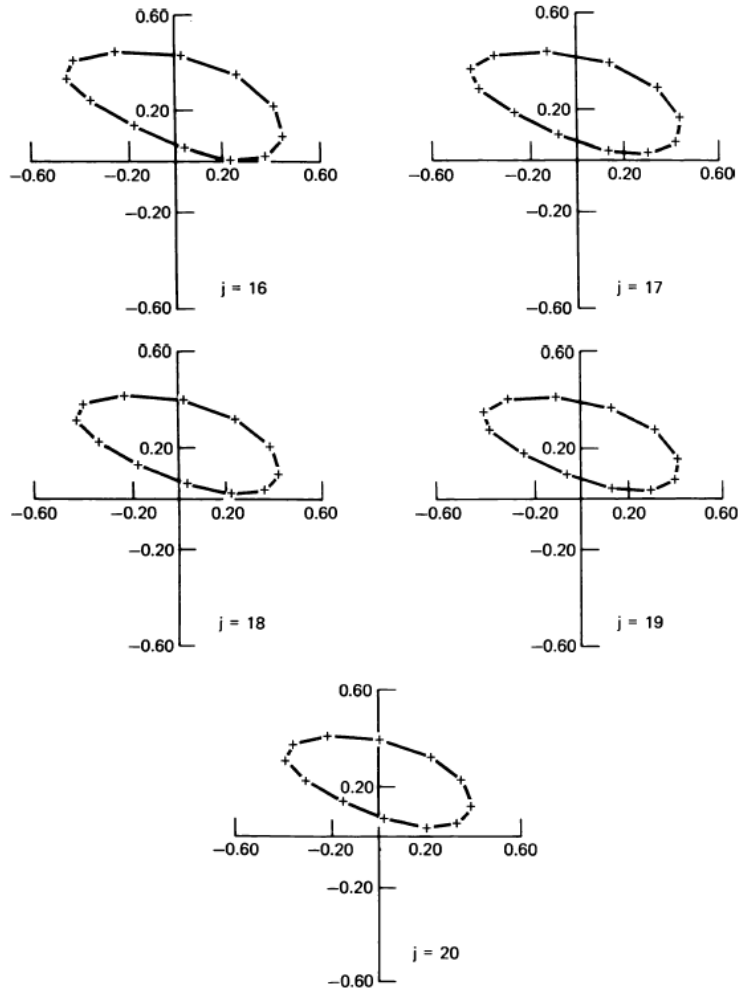


FIG. 4.4.2