

**Traductions de deux extraits du livre *Generators and relations for discrete groups*
de H. S. M. Coxeter et W. O. J. Moser**

pages 63 à 66.

6.2 Le groupe symétrique. Les premières présentations du groupe symétrique \mathfrak{S}_n ont été données par BURNSIDE (1897) et MOORE (1897). La présentation de BURNSIDE

$$R^n = R_1^2 = (RR_1)^{n-1} = [R^{-r+1}(RR_1)^{r-1}]^r = (R^{-j}R_1R^jR_1)^2 = E \quad \left(2 \leq r \leq n, 2 \leq j \leq \frac{n}{2}\right),$$

en fonction des générateurs

$$R = (1\ 2\ 3\dots n), \quad R_1 = (1\ 2),$$

a de nombreuses relations redondantes. En fonction des mêmes générateurs, MOORE a donné la présentation plus simple

$$(6.21) \quad R^n = R_1^2 = (RR_1)^{n-1} = (R_1R^{-1}R_1R)^3 = (R_1R^{-j}R_1R^j)^2 = E \quad (2 \leq j \leq n-2).$$

MOORE a aussi donné la présentation

$$(6.22) \quad \begin{cases} R_1^2 = R_2^2 = \dots = R_{n-1}^2 = E \\ (R_iR_{i+1})^3 = E \\ (R_iR_k)^2 = E \end{cases} \quad \begin{matrix} (1 \leq i \leq n-2), \\ (i \leq k-2), \end{matrix}$$

en fonction des générateurs

$$R_1 = (1\ 2), R_2 = (2\ 3), \dots, R_{n-1} = (n-1\ n)$$

(BURNSIDE 1911, p. 464 ; CARMICHAEL 1923, p. 238). Les deux ensembles de générateurs sont reliés par les équations

$$R_{i+1} = R^{-i}R_1R^i \quad (1 \leq i \leq n-2)$$

et

$$R = R_{n-1}R_{n-2}\dots R_2R_1.$$

Trivialement, 6.22 est équivalente aux trois ensembles de relations

$$(6.23) \quad R_1^2 = E,$$

éditions : Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH, 3ème édition, 1972.

$$(6.24) \quad R_i R_{i+1} R_i = R_{i+1} R_i R_{i+1} \quad (1 \leq i \leq n-2)$$

$$(6.25) \quad R_i R_k = R_k R_i \quad (i \leq k-2)$$

Puisque 6.24 et 6.25 définissent le groupe de tresses d'ARTIN¹ (cf. 6.11 et 6.12), qui est également défini par les relations

$$(6.26) \quad R^n = (R_1 R)^{n-1}, R_1 R^{-j} R_1 R^j = R^{-j} R_1 R^j R_1 \quad \left(2 \leq j \leq \frac{n}{2}\right)$$

(cf. 6.16), il en découle que \mathfrak{S}_n est défini par 6.23 et 6.26 (ARTIN 1926, p. 54 ; NIELSEN 1940) ou par

$$(6.27) \quad R^n = (R_1 R)^{n-1}, R_1^2 = (R_1 R^{-j} R_1 R^j)^2 = E \quad \left(2 \leq j \leq \frac{n}{2}\right)$$

(cf. 6.21). COXETER (1937, p. 317) a observé que, quand n est pair, on a la présentation alternative

$$(6.271) \quad R^n = (R_1 R)^{n-1}, R_1^2 = (R_1 R^{-1} R_1 R)^3 = (R_1 R^{-j} R_1 R^j)^2 = E \quad \left(2 \leq j \leq \frac{n}{2} - 1\right),$$

dans laquelle la relation $(R_1 R^{-1} R_1 R)^3 = E$ remplace $(R_1 R^{-n/2} R_1 R^{n/2}) = E$.

CARMICHAEL (1937, p. 169) préfère la présentation

$$(6.28) \quad S_i^2 = (S_i S_{i+1})^3 = (S_i S_{i+1} S_i S_j)^2 = E \quad (i, j = 1, 2, \dots, n-1 ; j \neq i, i+1)$$

en fonction des transpositions

$$S_i = (i \ n) \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

(avec $S_n = S_1$). En fonction de

$$V_1 = S_1 = (1 \ n), V_j = S_1 S_j = (1 \ j \ n) \quad (j = 2, 3, \dots, n-1),$$

une présentation encore plus simple est

$$(6.281) \quad V_1^2 = V_j^3 = (V_i V_j)^2 = E \quad (1 \leq i < j \leq n-1)$$

(COXETER 1934c, p. 218).

On obtient une interprétation géométrique de 6.22 en considérant \mathfrak{S}_n comme le groupe des permutations des n sommets d'un simplexe régulier $P_1 P_2 \dots P_n$ dans le $(n-1)$ -espace euclidien. Ces permutations sont juste les opérations symétriques du simplexe. En particulier, R_i est la réflexion dans l'hyperplan qui joint le point au milieu de $P_i P_{i+1}$ aux $n-2$ sommets restant. Les $\binom{n}{2}$ arêtes

¹Le groupe de tresses amène au groupe symétrique quand on remplace les chaînes μ_i par leur projections ν_i , en renonçant à faire la distinction entre σ_i et σ_i^{-1} . Par conséquent les R satisfont trivialement les mêmes relations que les σ et également 6.23 (qui implique $R_i^2 = E$ puisque, par 6.24, tous les R sont conjugués).

$P_i P_j$ amènent $\binom{n}{2}$ tels hyperplans, en décomposant la sphère circonscrite (ou n'importe quelle sphère concentrique) en $n!$ simplexes sphériques. Les R apparaissent comme des réflexions dans les hyperplans frontières d'un de ces simplexes : la région fondamentale (cf. Figs. 4.3a, 4.5h, m, r, t).

En fonction des n coordonnées cartésiennes, on peut prendre P_i à distance a de l'origine le long du $i^{\text{ième}}$ axe, de telle façon que $P_1 P_2 \dots P_n$ soit dans le $(n-1)$ -espace $\sum x_i = a$. Alors R_i en interchangeant x_i et x_{i+1} , est la réflexion dans $x_i = x_{i+1}$, et la région fondamentale est donnée par

$$(6.29) \quad x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n, \quad \sum x_i = a_i, \quad \sum x_i^2 = b \quad (b > a^2/n).$$

Les autres simplexes sphériques, étant des images de celui-ci, sont dérivés en permutant les x dans 6.29. Les trois parties de 6.22 expriment que les réflexions sont involutives, et que l'angle entre $x_i = x_{i+1}$ et $x_k = x_{k+1}$ est $\pi/3$ ou $\pi/2$ selon que $i = k - 1$ ou que $i \leq k - 2$ (COXETER 1963a, pp. 80, 188).

Le diagramme de Cayley est dérivé de cela en prenant un point convenable à l'intérieur de chaque simplexe sphérique (ROBINSON 1931). La façon la plus simple de faire cela est de prendre les points dont les coordonnées sont les permutations de $(0, 1, n - 1)$. Dans la région fondamentale 6.29 on a $(0, 1, \dots, n - 1)$ lui-même. Les arêtes du diagramme joignent ces $n!$ points par paires : chacun à ses $n - 1$ voisins, distants de $\sqrt{2}$. En fait, le diagramme est constitué des sommets et des arêtes d'un polytope uniforme Π_{n-1} , dont les faces planes sont des hexagones et des carrés représentant les seconde et troisième parties de 6.22.

De façon triviale, Π_0 est un point, Π_1 est un segment de droite, et Π_2 est un hexagone régulier, comme dans la figure Fig. 3.3d (avec les S -arêtes omises) ou la Fig. 6.2 (où la région fondamentale est un sixième du cercle). Π_3 est l'octaèdre tronqué, délimité par huit hexagones et six carrés (KEPLER 1619, p. 125, Fig. 23⁹ ; KELVIN 1894, p. 15 ; STEINHAUS 1950, . 154-157). Π_4 est un polytope à quatre dimensions dont les cellules sont constituées de dix octaèdres tronqués et vingt prismes hexagonaux (HINTON 1906 ; pp. 135, 225 ; COXETER 1962c, p. 154).

Par conséquent, toute région fondamentale convexe pour un groupe de translation 3-dimensionnel est un parallélohédon. En utilisant les mêmes termes dans les espaces de dimensions supérieures, VORONOI a donné une démonstration remarquablement simple du fait qu'un parallélohédon n -dimensionnel a au plus $2(2^n - 1)$ hyperplans frontières (VORONOI 1907, p. 107 ; 1908, p. 204 ; BAMBAH et DAVENPORT 1952, p. 225). Cette limite supérieure est atteinte par le polytope Π_n (SCHOUTE 1912), dont les cellules $(n-1)$ -dimensionnelles consistent en $\binom{n+1}{i}$ prismes généralisés $\Pi_{n-i} \times \Pi_{i-1}$ (COXETER 1963a, p. 124) pour chaque valeur de i de 1 à n .

Selon FEDOROV (1885, pp. 286-298), un *parallélohédon* est un polyèdre qui peut être reproduit et translaté pour remplir la totalité de l'espace euclidien (ou affine)

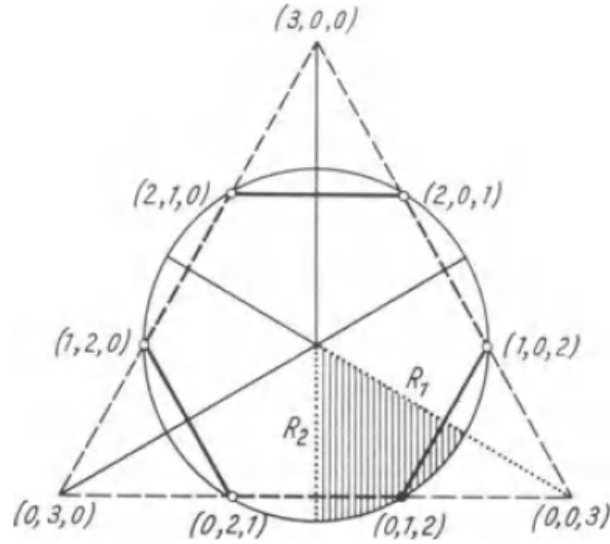


Fig. 6.2

En étendant la notation de § 4.3, on peut exprimer 6.22 sous la forme

$$\mathfrak{S}_n \simeq [3^{n-2}],$$

signifiant $[3, 3, \dots, 3]$ (TODD 1931, p. 225 ; COXETER 1963a, p. 199). On discutera des autres groupes engendrés par les réflexions au chapitre 9.

page 35 à 38

4.3 Groupes engendrés par des réflexions. Les groupes engendrés par des réflexions méritent une considération particulière pour deux raisons : il y a une théorie générale qui les englobe tous, et ils contiennent les groupes de points restants comme sous-groupes.

Le groupe engendré par des réflexions dans un nombre quelconque de plans est également engendré par des réflexions dans toutes leurs transformations : une configuration de plans qui est symétrique par réflexion selon chacun. Si le groupe est fini, les plans contiennent tous le point (ou les points) invariant et déterminent une configuration correspondante de grands cercles sur une sphère. Ces grands cercles décomposent la sphère en un nombre fini de régions (notamment des hémisphères, des lunes, ou des triangles sphériques) dont les angles sont des sous-multiples de π (COXETER 1963a, pp. 76-77). Toutes ces régions sont congruentes (avec une possible inversion du sens), puisque chacune se réfléchit dans ses voisines.

L'instance la plus simple est le groupe $[1]$, d'ordre 2, engendré par la réflexion par rapport à un unique plan qui coupe la sphère en deux hémisphères. Quand un groupe est engendré par deux réflexions, on peut prendre pour angle entre les plans réfléchis π/q ($q \geq 2$). Les plans et leurs transformés rencontrent la sphère en un pinceau de q méridiens qui la décomposent en $2q$ lunes.

Le diagramme de Cayley est un $2q$ -gone avec un sommet dans chaque lune. Par conséquent, on a le groupe

$$[q] \simeq \mathfrak{D}_q,$$

d'ordre $2q$, ayant pour définition abstraite

$$(4.31) \quad R_1^2 = R_2^2 = (R_1 R_2)^q = E.$$

D'autres tels groupes sont engendrés par des réflexions R_1, R_2, R_3 par rapport aux trois côtés d'un triangle sphérique d'angles $\pi/p_{23}, \pi/p_{31}, \pi/p_{12}$, disons. Les réflexions satisfont clairement

$$R_1^2 = R_2^2 = R_3^2 = E$$

et les trois relations de la forme $(R_i R_j)^{p_{ij}} = E$. Les remarques suivantes montrent que toute relation satisfaite par les R est une conséquence algébrique de celles-ci.

En appelant le triangle initial "région E ", on observe que tout élément S du groupe le transforme en une "région S " congruente. En particulier les générateurs transforment la région E en ses régions voisines R_i ; l'élément S transforme E et ses voisins R_i en S et ses voisins $R_i S$. Par conséquent, on passe par le $i^{\text{ième}}$ côté de la région S à la région $R_i S$. Toute expression de S comme mot

$$\dots R_k R_j R_i$$

correspond à un chemin d'une position à l'intérieur de la région E à une position à l'intérieur de la région S , en passant à travers le $i^{\text{ième}}$ côté de E , puis à travers le $j^{\text{ième}}$ côté de R_i , puis à travers le $k^{\text{ième}}$ côté de $R_j R_i$, et etc. (en lisant de droite à gauche²). Deux chemins différents de E à S peuvent être combinés pour former un chemin fermé de E vers $S^{-1}S = E$, correspondant à un mot qui est égal à E . Puisque la sphère est simplement-connexe, un tel chemin fermé peut être décomposé en circuits élémentaires de deux sortes : l'un allant de S à une région voisine $R_i S$ et revenant à $R_i^2 S = S$, et l'autre passant autour d'un sommet en lequel se rencontrent $2p_{ij}$ régions, de S à $(R_i R_j)^{p_{ij}} S = S$. Un rétrécissement graduel du chemin correspond à la réduction du mot jusqu'à E en utilisant les relations $R_i^2 = E$ et $(R_i R_j)^{p_{ij}} = E$. Il découle de cela que les relations suffisent pour une définition abstraite, et que le triangle est une *région fondamentale* : il existe un seul tel triangle pour tout élément du groupe ; et tout point de la sphère, étant à l'intérieur ou bien sur la frontière d'une telle région S , est dérivable d'un point correspondant de la région E par la transformation S .

Les triangles couvrant la sphère peuvent être regardés comme les faces d'une carte (§ 3.2). En nommant les points à l'intérieur de ces faces, plutôt que les faces elles-mêmes, on obtient la carte duale, dont les arêtes traversent les côtés des triangles. Les remarques ci-dessus servent à identifier cette carte duale avec le diagramme de Cayley (§ 3.3), qui, en accord avec cela, a, en chaque sommet, un $2p_{23}$ -gone, un $2p_{31}$ -gone, et un $2p_{12}$ -gone, représentant les relations

$$(R_2 R_3)^{p_{23}} = (R_3 R_1)^{p_{31}} = (R_1 R_2)^{p_{12}} = E.$$

²Selon les mots d'une lettre de A. SPEISER (Décembre 1954) : "Wenn man ein Produkt von Substitutionen geometrisch deutet, muß man sie "raumfest" deuten, falls man von links nach rechts liest. Liest man aber von rechts nach links, so muß man sie, "körperfest" deuten". Trad. DeepL "Si l'on interprète géométriquement un produit de substitutions, on les interprète "fixes dans l'espace" si l'on lit de gauche à droite. Mais si l'on lit de droite à gauche, on les interprète de manière "körteste"." ?...

Puisque la région fondamentale est un triangle sphérique, la somme de ses angles doit excéder π ; donc

$$\frac{1}{p_{23}} + \frac{1}{p_{31}} + \frac{1}{p_{12}} > 1$$

Puisque $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$, le plus petit des p doit être 2, et les autres, disons p et q , satisfont

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}, \quad \text{ou} \quad (p-2)(q-2) < 4.$$

On obtient par conséquent les cas $[2, q], [3, 3], [3, 4], [3, 5]$ du groupe

$$[p, q] \quad \text{ou} \quad [q, p],$$

définis par

$$(4.32) \quad R_1^2 = R_2^2 = R_3^2 = (R_1 R_2)^p = (R_2 R_3)^q = (R_3 R_1)^2 = E,$$

dont la région fondamentale est un triangle d'angles $\pi/p, \pi/q, \pi/2$. Ce groupe est le groupe complet de symétrie de n'importe lequel des deux polyèdres réguliers réciproques $\{p, q\}, \{q, p\}$ (COXETER 1963a, p. 83). Le diagramme de Cayley contient les sommets et les arêtes (non dirigées) du polyèdre semi-régulier

$$t \left\{ \begin{array}{c} p \\ q \end{array} \right\}$$

(COXETER 1940a, p. 394) qui a, en chaque sommet, un $2p$ -gone, un $2q$ -gone, et un carré. (Le cas $[3, 5]$ est illustré sur la figure Fig. 4.3, qui ressemble à un dessin de R. FRICKE, voir PASCAL 1927, p. 945. Les symboles classiques de tous ces groupes sont donnés dans la Table 2.)

Puisque l'aire de la région fondamentale est mesurée par son excès angulaire, l'ordre de $[p, q]$ est égal au nombre de tels triangles qui sera nécessaire pour couvrir la totalité de la sphère, notamment

$$\frac{4}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{2} = \frac{8pq}{4 - (p-2)(q-2)}$$

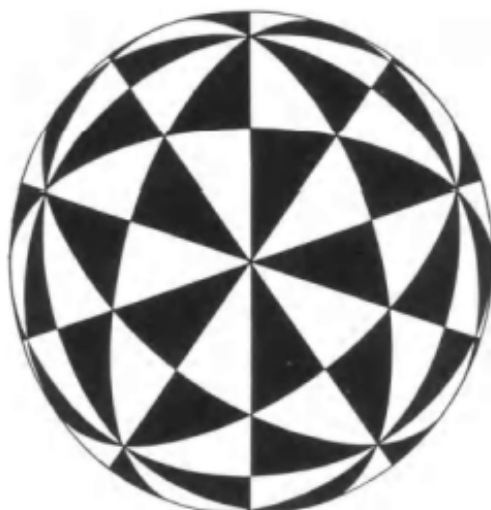


Fig. 4.3. The group $[3, 5] \simeq \mathbb{C}_2 \times \mathfrak{A}_5$

(COXETER 1963a, p. 82).

4.4. Sous-groupes du groupe de réflexion.

Les trois rotations

$$R = R_1R_2, S = R_2R_3, T = R_3R_1,$$

ou n'importe quelles deux d'entre elles, engendrent un sous-groupe "polyédral" $[p, q]^+$ ou $[q, p]^+$ d'ordre $4pq\{4 - (p - 2)(q - 2)\}^{-1}$, défini par

$$(4.41) \quad R^p = S^q = T^2 = RST = E$$

ou

$$(4.42) \quad R^p = S^q = (RS)^2 = E$$

ou

$$(4.43) \quad S^q = T^2 = (ST)^p = E$$

(voir COXETER 1940a, où $[p, q]^+$ était appelé $[p, q]'$).

Le concept de région fondamentale reste valide ; mais puisque les générateurs ne laissent pas ses côtés invariants, la forme de la région n'est plus déterminée de manière unique. Puisque $[p, q]^+$ est d'indice 2 dans $[p, q]$, l'aire de sa région fondamentale est le double de celle du triangle considéré ci-dessus. Il est naturel de choisir une forme telle que le réseau des régions congruentes et le diagramme de Cayley forment des cartes duales (BURNSIDE 1911, pp. 406, 423). Dans le cas de 4.43, on combine deux triangles adjacents de façon à former un triangle plus grand avec deux angles π/p et un angle $2\pi/q$, et le diagramme de Cayley est $t\{p, q\}$ (qui a, en chaque sommet, deux $2p$ -gones et un q -gone). Dans le cas de 4.42 avec $q > 2$, on combine à nouveau deux des triangles rectangle, mais maintenant, on choisit une paire de triangles qui partagent leur hypoténuse, de façon à obtenir un quadrilatère en forme de cerf-volant, et le diagramme de Cayley est $r \left\{ \begin{matrix} p \\ q \end{matrix} \right\}$ (qui a, en chaque sommet, deux carrés non adjacents séparés par un p -gone et un q -gone). Dans le cas de 4.41, on combine un triangle avec des portions de ses trois voisins (disons un triangle blanc avec des portions de ses trois triangles adjacents noirs) pour former un pentagone (ou, si $p = 2$, un quadrilatère), et le diagramme de Cayley est $s \left\{ \begin{matrix} p \\ q \end{matrix} \right\}$ (Voir BURNSIDE 1911, frontispiece, pour le cas $[3, 4]^+$. Malheureusement, la direction de ses flèches n'est pas en accord avec le texte des pages 424, 427. L'opération $S_1S_2S_3$ devrait nous amener à parcourir une S_3 -arête, puis une S_2 -arête, puis une S_1 -arête.)

Presque tous ces diagrammes de Cayley ont été fournis par MASCHKE (1896, pp. 156-194, Figs. 2-10, 16-18 ; cf. R. P. BAKER 1931, pp. 645-646 ; COXETER, LONGUET-HIGGINS et MILLER 1954, pp. 403, 439, Figs. 15 -25, 27, 29-32).

Quand $p = 3$ et $q = 4$ ou 5 , l'élément $(R_1R_2R_3)^{2q-5}$ de $[p, q]$ est l'inversion centrale Z (COXETER 1963a, p. 91). Il en découle que $[p, q]$ est alors le produit direct du groupe $\{Z\}$ d'ordre 2 et du sous-groupe de rotation $[p, q]^+$.

Quand q est pair, $[p, q]$ a un autre sous-groupe d'indice 2, disons

$$[p^+, q] \quad \text{ou} \quad [q, p^+],$$

engendré par la rotation $R = R_1R_2$, et la réflexion R_3 . On déduit aisément de 4.32 la définition abstraite

$$(4.44) \quad R^p = R_3^2 = (R^{-1}R_3RR_3)^{q/2} = E$$

(COXETER 1940a, p. 387). Il est plus naturel de prendre comme région fondamentale un triangle avec deux angles π/q et un angle $2\pi/p$ (ou, si $p = 2$, une lune), et le diagramme de Cayley est $t\{q, p\}$ (ou, si $p = 2$, $\{2q\}$). Cela ressemble au diagramme pour $[p, q]^+$ sous la forme

$$R^p = T^2 = (RT)^q = E,$$

qui diffère seulement par la manière dont sont dirigées les différentes R -arêtes. Quand $q = 2$, on a $[p^+, 2]$ ou $[2, p^+]$, le produit direct des \mathfrak{G}_p engendrés par R et de \mathfrak{G}_2 engendré par R_3 .

Les groupes de cette sorte les plus intéressants sont $[3^+, 4]$, le produit direct de \mathfrak{G}_2 engendré par l'inversion centrale $(RR_3)^3$ et $[3, 3]^+$ engendré par R et R_3RR_3 . C'est le groupe de symétrie du dodécaèdre avec un cube inscrit, ou d'un octaèdre avec un icosaèdre inscrit (COXETER 1940a, p. 396), ou *pyritoèdre* cristallographique.

Quand $p = 2$, les relations 4.44 se réduisent à

$$R^2 = R_3^2 = (RR_3)^q = E \quad (q \text{ pair}).$$

Dans ce groupe diédral $[2^+, q]$, les inversions rotationnelles RR_3 engendrent un sous-groupe cyclique d'ordre q . En utilisant la convention selon laquelle chaque exposant $^+$ diminue l'ordre de moitié, on dénote ce sous-groupe par

$$[2^+, q^+] \quad (q \text{ pair})$$

(voir la Table 2 de la page 135). C'est, bien sûr, un sous-groupe d'ordre 4 dans $[2, q]$, et il est engendré par $R_1R_2R_3$. On note pour comparaison que, quand q est impair, cet élément de $[2, q]$ engendre $[2, q^+]$ (d'indice 2).