L'opérateur d'incertitude, l'état fondamental de Weil et les zéros de zêta : une étude numérique et la positivité conditionnelle de la forme quadratique de Weil

Ronnie Andrews, Alain Connes, Antonio La Gatta

11.11.2026

Résumé

En appliquant le principe variationnel de Dirichlet à la forme quadratique de Weil QW_λ restreinte à $L^2([\lambda^{-1},\lambda],d^*u)$ - qui ne fait intervenir que les premiers $p \leq \lambda^2$ du produit d'Euler - on obtient une approximation matricielle hermitienne canonique de dimension finie QW_λ^N dont l'état fondamental a une transformée de Mellin dont les zéros sont prouvés réels en toute généralité dès que la plus petite valeur propre est simple et paire sous $u \mapsto u^{-1}$. Alors que $\lambda^2 = 13$ dans un travail antérieur [3, 9] permettait déjà de retrouver les 50 premiers zéros de ζ, nous montrons ici qu'en augmentant λ jusqu'à $\lambda \sim 16$ ($\lambda^2 = 250$, c'est-à-dire en ne faisant intervenir que les 53 premiers nombres premiers $p < 250$), on obtient les mille premiers zéros de ζ, chacun avec plus de 500 décimales correctes, le premier avec 1341, et on peut aussi obtenir les 2469 premiers zéros de zêta jusqu'à la hauteur 3000, avec un comptage certifié montrant que la transformée finie n'a pas d'autre zéro, réel ou complexe, dans cet intervalle.
Pour expliquer ce phénomène et tester la stratégie esquissée dans [9], nous établissons un dictionnaire précis entre le spectre bas de QW_λ et le spectre de l'opérateur d'incertitude temps-fréquence $U_\lambda = 2 - P_\lambda - \widehat{P}_\lambda$ sur les fonctions paires, où P_λ est la projection sur les fonctions supportées dans $[-\lambda,\lambda]$ et $\widehat{P}_\lambda$ sa conjuguée de Fourier. Ce dernier est diagonalisé par les fonctions d'onde sphéroïdales prolates, avec des valeurs propres minuscules $\delta_n(\lambda) = 1 - |\chi_n(\lambda)|$ régies par l'asymptotique de Fuchs $\delta_n(\lambda) \sim c_n \lambda^{2n+1} e^{-4\pi\lambda^2}$, et ses deux secteurs (transformée de Fourier proche de ± 1) correspondent via l'application arithmétique $\mathcal{E}(f)(u) = u^{1/2}\sum_{n\geq 1} f(nu)$ aux deux secteurs de QW_λ sous $u \mapsto u^{-1}$. Alors que la borne supérieure $\epsilon_\lambda(j) \leq C_j \delta_{4j}(\lambda)(\log\lambda)^3$ est un théorème obtenu avec Kastoris [16, 11] après un lissage de Gevrey, nous testons la borne inférieure bien au-delà de la portée des calculs antérieurs (jusqu'à $\lambda^2 = 300$, où $\epsilon_\lambda(1) \sim 10^{-1618}$) et trouvons une coïncidence frappante entre les logarithmes des valeurs propres minuscules de QW_λ et l'échelle de Fuchs. En particulier, la plus petite valeur propre $\epsilon_\lambda(1)$ est confirmée être simple, isolée et paire, séparée des valeurs propres suivantes par des facteurs $\asymp \lambda^4$ (impaires) et $\asymp \lambda^8$ (paires). De plus, les vecteurs de Gram-Schmidt construits à partir des images $\mathcal{E}$ des fonctions prolates d'intégrale nulle reproduisent tous les vecteurs propres minuscules de QW_λ, et conditionner la forme par ceux-ci et par la fonctionnelle de pôle supprime entièrement le spectre minuscule, laissant une forme minorée par $\mu_\lambda \approx 2/\lambda$. L'image qui émerge est celle d'une somme directe : QW_λ se décompose en une partie de dimension finie, très proche du radical de la forme globale de Weil et régie par l'échelle de Fuchs de U_λ, et une partie strictement positive de dimension infinie provenant de l'espace de Sonin $\operatorname{Ker} P_\lambda \cap \operatorname{Ker} \widehat{P}_\lambda$, où U_λ prend sa valeur maximale 2. Sous l'hypothèse de l'échelle de Fuchs et la positivité de QW_λ, nous obtenons des estimations quantitatives pour la convergence de l'état fondamental de Weil vers une cible explicite dont la transformée de Mellin est $\frac{1}{4}\xi(s+\frac{1}{2})$, mettant en place l'approche de l'hypothèse de Riemann via le théorème de Hurwitz. Enfin, dans la section 8, nous utilisons la formule de trace semilocale sous sa forme différentielle quantifiée - en écrivant QW_λ comme la trace de l'action d'échelle contre l'opérateur d'incertitude à l'échelle 1 - pour obtenir une première justification analytique de l'image de somme directe : nous établissons le principe d'incertitude semilocal à partir de la non-nullité de l'espace de Sonin semilocal par le lemme de Coburn et prouvons, sous une hypothèse quantitative sur les projections de coupure semilocales

valable dans le cas archimédien, que QW_λ est minorée par une constante positive explicite sur le complément orthogonal d'un espace de dimension finie explicite construit à partir des modes quasi-auto-duaux. Combiné à la monotonie de ϵ_λ en λ et aux estimations uniformes de Kastoris, cela réduit la positivité de QW_λ à une estimation bilatérale sur le complément de Schur de la forme sur les quelques modes finis au bord de l'échelle de Fuchs et sur les deux directions de pôle.

1 Introduction

Soit QW la forme quadratique de Weil et, pour $\lambda > 1$, soit QW_λ sa restriction aux fonctions supportées dans $[\lambda^{-1}, \lambda]$, vue comme forme quadratique sur $L^2([\lambda^{-1}, \lambda], d^*u)$, $d^*u = du/u$. Par le critère de Weil, la positivité de QW_λ pour tout λ est équivalente à l'hypothèse de Riemann. Une caractéristique remarquable de QW_λ est que son évaluation sur la fenêtre $[\lambda^{-1}, \lambda]$ ne fait intervenir que l'ensemble fini des puissances de premiers $p^m \leq \lambda^2$, et donc n'utilise qu'un nombre fini de facteurs du produit d'Euler de ζ. Dans [3] et dans la "Lettre à Riemann" [9], une voie variationnelle vers les zéros de ζ a été proposée dans l'esprit du principe de Dirichlet de Riemann : on minimise QW_λ sur la sphère unité de $L^2([\lambda^{-1}, \lambda], d^*u)$ (ou de sa troncature de Galerkin canonique de dimension finie QW_λ^N aux premiers $2N+1$ modes de Fourier logarithmiques) et on prend la transformée de Mellin $\mathcal{M}\eta(s) = \int_{\lambda^{-1}}^{\lambda} \eta(u) u^s d^*u$ de l'état fondamental résultant η. Par un théorème général prouvé dans [8] (rappelé comme le théorème 13 ci-dessous), qui repose sur la structure de Galerkin de la matrice tronquée et ne nécessite aucune hypothèse non prouvée sur ζ, dès que la plus petite valeur propre $\epsilon_\lambda^N(1)$ de QW_λ^N est simple et que son vecteur propre η est pair sous l'inversion $\iota(u) = u^{-1}$, *tous* les zéros de la fonction entière $t \mapsto \mathcal{M}\eta(it)$ sont réels - c'est-à-dire que tous les zéros de $\mathcal{M}\eta(s)$ se trouvent exactement sur la ligne critique $\mathfrak{Re}\, s = 0$ (correspondant à $\mathfrak{Re}\, w = \frac{1}{2}$ pour $w = s + \frac{1}{2}$).

Dans [3, 9], en prenant $\lambda^2 = 13$ (ce qui ne fait intervenir que les six premiers $2, 3, 5, 7, 11, 13$) et $N = 120$, on reproduisait déjà les 50 premiers zéros de ζ, le premier à $2.4 \cdot 10^{-55}$ près. La première découverte majeure du présent article est l'échelle dramatique de ce phénomène lorsque λ augmente et que davantage de premiers sont inclus dans la fenêtre : pour $\lambda \sim 16$ ($\lambda^2 = 250$, c'est-à-dire en ne faisant intervenir que les 53 premiers $p < 250$, avec $N = 4000$), les zéros de la transformée de Mellin de l'état fondamental de QW_λ^N - tous prouvés réels a priori - reproduisent les *mille premiers zéros de ζ, chacun avec plus de cinq cents décimales correctes*, le premier zéro avec 1341 décimales correctes, et tous les 2469 zéros de hauteur au plus 3000 avec au moins douze chiffres corrects. De plus, l'erreur sur chaque zéro est proportionnelle à la plus petite valeur propre $\epsilon_\lambda^N(1) \approx 1.1 \cdot 10^{-1346}$ de la forme tronquée, et un comptage de signes certifié en arithmétique de boules montre que la transformée finie n'a pas d'autre zéro dans cet intervalle, réel ou complexe (Section 7, Figure 7.3, et Remarque 7.2).

Pour comprendre pourquoi le principe de Dirichlet sur une fenêtre de premiers finis capture les zéros de ζ avec une telle précision, et pour faire avancer la stratégie de convergence esquissée dans [9] après la Lettre à Riemann, nous étudions le spectre bas de QW_λ. Il a été observé dans [2, 3] que la plus petite valeur propre ϵ_λ est minuscule, de l'ordre de $e^{-4\pi\lambda^2}$, et que l'état fondamental de Weil est remarquablement proche de l'image sous l'application arithmétique

$$\mathcal{E}(f)(u) := u^{1/2} \sum_{n \geq 1} f(nu) \tag{1}$$

d'une combinaison à deux modes de fonctions d'onde sphéroïdales prolates sur $[-\lambda, \lambda]$. Ici, nous expliquons ce phénomène en établissant un dictionnaire précis entre QW_λ et un opérateur exactement soluble sur $L^2(\mathbb{R})_{\text{ev}}$ issu de l'analyse d'incertitude "temps-fréquence" de Slepian, Pollak et Landau [19], et nous combinons des expériences numériques de haute précision (jusqu'à $\lambda^2 = 300$, où $\epsilon_\lambda(1) \sim 10^{-1618}$ nécessite une arithmétique de milliers de chiffres) avec deux outils analytiques - la méthode des approximants de Gevrey développée avec Kastoris [16, 11] et la formule de trace semilocale [10, 4] - qui fournissent les premiers éléments de preuve de l'image spectrale émergente.

L'opérateur exactement soluble est l'opérateur d'incertitude temps-fréquence

$$U_\lambda := 2 - P_\lambda - \widehat{P}_\lambda, \qquad \widehat{P}_\lambda = \mathcal{F} P_\lambda \mathcal{F}, \tag{2}$$

où P_λ est la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{R})_{\text{ev}}$ sur les fonctions supportées dans $[-\lambda, \lambda]$ et $\mathcal{F}$ est la transformée de Fourier pour le caractère $e^{2\pi i x y}$ (de sorte que $\mathcal{F}^2 = 1$ sur $L^2(\mathbb{R})_{\text{ev}}$). Ainsi $\widehat{P}_\lambda$ est la projection sur les fonctions à bande limitée à $[-\lambda, \lambda]$, et $U_\lambda = (1 - P_\lambda) + (1 - \widehat{P}_\lambda)$ mesure l'échec d'une fonction à être simultanément à support temporel et fréquentiel borné. Par construction U_λ vaut 2 sur l'espace de Sonin de dimension infinie [2] des fonctions paires dans le noyau de P_λ et de $\widehat{P}_\lambda$. Par la théorie des deux projections, U_λ est diagonalisé par les fonctions d'onde sphéroïdales prolates $h_{n,\lambda}$: ses vecteurs propres sont $h_{n,\lambda} \pm \widehat{h}_{n,\lambda}$ avec valeurs propres $1 \mp |\chi_n(\lambda)|$, où $\chi_n(\lambda)$ est la valeur propre de la transformée de Fourier finie sur $h_{n,\lambda}$ (théorème 1). Les valeurs propres minuscules $\delta_n(\lambda) = 1 - |\chi_n(\lambda)|$, n pair, forment une échelle décrite par l'asymptotique de Fuchs [13],

$$\delta_n(\lambda) = \frac{2\sqrt{\pi}\, 8^n (2\pi)^{n+1/2}}{n!}\, \lambda^{2n+1} e^{-4\pi\lambda^2} \Big(1 + O(\lambda^{-2})\Big), \tag{3}$$

et elles se divisent en deux secteurs entrelacés : $n \equiv 0 \pmod 4$, où la transformée de Fourier est proche de l'identité sur $h_{n,\lambda}$, et $n \equiv 2 \pmod 4$, où elle est proche de moins l'identité.

Le dictionnaire entre QW_λ et U_λ repose sur deux faits. Premièrement, par sommation de Poisson, l'application $\mathcal{E}$ entrelace la transformée de Fourier avec l'inversion $\iota(u) = u^{-1}$: $\mathcal{E}(\widehat{f}) = \mathcal{E}(f) \circ \iota$ pour f paire avec $f(0) = \widehat{f}(0) = 0$. Ainsi une fonction dans $\operatorname{Range} P_\lambda$ a $\mathcal{E}(f)$ supportée dans $u \le \lambda$, une fonction dans $\operatorname{Range} \widehat{P}_\lambda$ a $\mathcal{E}(f)$ supportée dans $u \ge \lambda^{-1}$, et la fenêtre $[\lambda^{-1}, \lambda]$ est l'image de $\operatorname{Range} P_\lambda \cap \operatorname{Range} \widehat{P}_\lambda$, un espace qui est $\{0\}$ exactement par le principe d'incertitude, mais qui est approximativement engendré par les fonctions prolates avec $|\chi_n| \approx 1$. Les deux secteurs de U_λ deviennent les deux secteurs de QW_λ sous ι, avec lesquels QW_λ commute, tandis que la contrainte d'intégrale nulle $\widehat{f}(0) = \int f = 0$ requise pour que $\mathcal{E}(f)$ soit dans $L^2(d^*u)$ supprime le barreau le plus bas δ_0 (resp. δ_2) dans chaque secteur. Deuxièmement, $\mathcal{E}$ envoie les fonctions de Schwartz paires avec $f(0) = \widehat{f}(0) = 0$ dans le radical de la forme globale QW [2], de sorte que le seul obstacle à ce que $\mathcal{E}(f)$ soit un vecteur nul de QW_λ est sa masse hors de la fenêtre, qui est précisément la fuite fréquentielle mesurée par U_λ. Rendue quantitative via un lissage de Gevrey aux extrémités $\pm\lambda$ qui rend la construction légitime, cela fournit le premier élément rigoureux de preuve du dictionnaire - le théorème de borne supérieure obtenu avec Kastoris ([16], affiné dans [11]) :

$$\epsilon_\lambda \le C\, \delta_4(\lambda) (\log \lambda)^3, \tag{4}$$

et le même mécanisme donne des bornes supérieures uniformes $\epsilon_\lambda(j) \le C_j \delta_{4j}(\lambda)(\log\lambda)^3$ pour la j-ième valeur propre dans le secteur pair, et $\delta_{4j+2}(\lambda)$ dans le secteur impair (théorème 5).

Ce qui n'est pas encore un théorème est la direction de la borne inférieure : que rien du côté de Weil ne soit plus petit que ne le permet l'opérateur d'incertitude. Nous formulons cela comme l'hypothèse 6 (accord logarithmique avec l'échelle de Fuchs) et le testons numériquement dans la Section 4 sur une vaste plage ($5 \le \lambda^2 \le 300$). La deuxième découverte numérique majeure de l'article est la coïncidence remarquable des logarithmes des nombres minuscules des deux côtés :

1. Sur plus de 1600 ordres de grandeur, la plus petite valeur propre $\epsilon_\lambda(1)$ suit le barreau exact prolate $\delta_4(\lambda)$, le rapport $\epsilon_\lambda(1)/(\delta_4(\lambda)\log\lambda)$ restant borné entre 4.9 et 8.8 sans tendance à la hausse (fait 7 et Tableau 4.2).
2. L'écart logarithmique $\log\epsilon_\lambda(2) - \log\epsilon_\lambda(1)$ s'accorde avec l'écart de Fuchs $\log(\delta_8/\delta_4) = 8\log\lambda + 8.2425 + o(1)$ à un décalage presque constant de 0.5–0.8 près sur toute la plage $5 \le \lambda^2 \le 300$, et de même $\log\epsilon_\lambda^{\mathrm{odd}}(1) - \log\epsilon_\lambda(1)$ s'accorde avec $\log(\delta_6/\delta_4) = 4\log\lambda + 4.4342 + o(1)$ à 0.3–0.4 près.
3. Les valeurs propres paires et impaires s'entrelacent strictement, $\epsilon_\lambda(1) < \epsilon_\lambda^{\mathrm{odd}}(1) < \epsilon_\lambda(2) < \epsilon_\lambda^{\mathrm{odd}}(2) < \cdots$, pour chaque valeur propre minuscule, et les secteurs pairs et impairs contiennent respectivement $\lambda^2 - 1$ et $\lambda^2 - 2$ valeurs propres minuscules, une de moins que les classes correspondantes de U_λ (λ^2 et $\lambda^2 - 1$ barreaux, en accord avec le comptage de Slepian $4\lambda^2$ réparti en quatre classes), le barreau manquant étant celui supprimé par $\int f = 0$ (fait 8).

De manière cruciale, ces calculs montrent que la plus petite valeur propre $\epsilon_\lambda(1)$ de QW_λ est *simple, isolée et ι-paire*, séparée de $\epsilon_\lambda^{\mathrm{odd}}(1)$ par un facteur $\asymp \lambda^4$ et de $\epsilon_\lambda(2)$ par $\asymp \lambda^8$ - vérifiant ainsi la condition clé requise par le théorème 13 pour garantir que tous les zéros de la transformée de Mellin de l'état fondamental sont sur la ligne critique.

La Section 5 complète cette image spectrale du côté des vecteurs propres et révèle une décomposition structurelle fondamentale de QW_λ. L'orthogonalisation de Gram-Schmidt des images $\mathcal{E}$ des vecteurs prolates d'intégrale nulle reproduit *chaque* vecteur propre minuscule de QW_λ (avec $\sin\angle \le 2.6\cdot10^{-2}$ jusqu'au plongeon, et jusqu'à $1.9\cdot10^{-7}$ pour l'état fondamental à $\lambda^2 = 150$, fait 9). De plus, lorsque nous conditionnons QW_λ orthogonalement à ces $\lambda^2 - 1$ (pairs) et $\lambda^2 - 2$ (impairs) vecteurs prolates ainsi qu'à la fonctionnelle de pôle $\ell(f) = \int f(u)u^{1/2}d^*u$, *toutes les valeurs propres minuscules disparaissent* : la plus petite valeur propre restante μ_λ est de l'ordre de $2/\lambda$ (entre 0.78 à $\lambda^2 = 5$ et 0.19 à $\lambda^2 = 150$, fait 11). L'image qui émerge est donc celle d'une **somme directe** : sur la fenêtre $[\lambda^{-1}, \lambda]$, la forme quadratique de Weil est la somme de

- une *partie quasi-radicale de dimension finie* (de dimension $\approx 2\lambda^2$), très proche du radical de la forme globale de Weil et régie par l'échelle de Fuchs basse de l'opérateur d'incertitude U_λ ; et
- une *partie strictement positive de dimension infinie*, sur laquelle la forme est minorée par une constante positive et dont l'origine réside dans l'espace de Sonin $\operatorname{Ker} P_\lambda \cap \operatorname{Ker} \widehat{P}_\lambda$, où l'opérateur d'incertitude U_λ prend sa valeur maximale 2.

Sous l'hypothèse 6 et la positivité de QW_λ, nous prouvons dans la Section 6 que l'état fondamental η_λ est simple et ι-pair, qu'il se trouve à $O(\lambda^{-4}(\log\lambda)^{3/2})$ en L^2 du vecteur test explicite de Kastoris, et nous obtenons des bornes quantitatives pour sa distance à l'état prolate $\tau_\lambda = \mathcal{E}(h_\lambda)/\mathcal{E}(h_\lambda)(1)$ (au taux $O(\lambda^{-7/2}(\log\lambda)^{3/2})$, confirmé numériquement comme $\approx C\lambda^{-3.5}$ dans le Tableau 6.4) et à la cible de Hermite explicite $\tau(u) = \theta(u)/\theta(1)$,

$$\theta(u) = \sqrt{u}\sum_{n\ge1}\frac{\pi}{2}\,n^2u^2\Big(2\pi n^2u^2 - 3\Big)e^{-\pi n^2u^2}, \tag{5}$$

au taux $O(\lambda^{-2})$ dans la norme $\|g\|_1 = \int_1^\lambda |g(u)|u^{-1/2}du$ qui contrôle la transformée de Mellin uniformément sur la bande critique fermée $|\mathfrak{Re}\, s| \leq \frac{1}{2}$. Puisque la transformée de Mellin de θ est exactement $\frac{1}{4}\xi(s+\frac{1}{2})$ (théorème 3) et que les zéros de la transformée de Mellin de l'état fondamental sont tous réels (théorème 13), la convergence uniforme de l'état fondamental normalisé vers τ sur les compacts de la bande implique l'hypothèse de Riemann par le théorème de Hurwitz (proposition 14). Nous rendons explicite la structure logique de cette implication dans la Section 7 - en particulier le fait que la positivité de QW_λ supposée dans la Section 6 ne peut pas être utilisée dans une preuve inconditionnelle - avant de présenter les calculs de zéros de haute précision pour $\lambda^2 = 250$ et $\lambda^2 = 256$.

Enfin, la Section 8 fournit une première justification analytique de l'image de somme directe et transforme le dictionnaire en un outil pour prouver la positivité conditionnelle. La formule de trace semilocale de [10], sous la forme différentielle quantifiée de [4], Chapitre 2, écrit la forme de Weil d'une fonction test f supportée dans la fenêtre, avec termes de pôle nuls $\mathcal{M}f(\pm\frac{1}{2}) = 0$, comme une trace,

$$QW_\lambda(f,f) = \mathrm{Tr}\Big(\theta(f)(1-P-\widehat{P})\theta(f)^*\Big),$$

où $\theta(f)$ est l'action de convolution par l'échelle et $1-P-\widehat{P}$ est l'opérateur d'incertitude à l'échelle 1 sur l'espace des classes d'adèles semilocal, décalé de -1 (théorème 15). Trois étapes expliquent alors le conditionnement prolate de la Section 5 et conduisent à une borne inférieure rigoureuse :

1. Sur l'espace semilocal, l'opérateur $1-P-\widehat{P}$ vaut $+1$ sur l'espace de Sonin et agit sur chaque paire prolate par $\pm\kappa_n$, de sorte que sa partie négative est portée uniquement par les directions quasi-auto-duales, avec valeurs propres $-\kappa_n \uparrow 0$. L'absence de toute valeur propre -1 (c'est-à-dire de directions exactement auto-duales) est le *principe d'incertitude semilocal*, que nous prouvons dans le lemme 18 à partir de la dimension infinie de l'espace de Sonin semilocal [6, 7] en appliquant le lemme de Coburn sur les opérateurs de Toeplitz.
2. Parce que f est supportée dans $[\lambda^{-1}, \lambda]$, l'action d'échelle $\theta(f)$ transporte les projections de coupure à l'échelle σ en celles à l'échelle $\lambda\sigma$ (lemme 23). Par conséquent, la partie négative à l'échelle σ ne peut agir qu'à travers les produits scalaires $\langle\theta(f)e_n, e_m^\lambda\rangle = \langle f, e_m^\lambda * e_n^*\rangle$ de f avec les modes quasi-auto-duaux convolés e_m^λ à l'échelle $\lambda\sigma$ qui sont plus auto-duaux que e_n (proposition 24) ; l'orthogonalité à ces vecteurs explicites est précisément le conditionnement.
3. Décaler les coupures de l'échelle 1 à l'échelle $\sigma > 1$ extrait des projections une marge positive explicite $2\log\sigma\,\|f\|^2$ (lemme 16).

Le résultat est le théorème 26 : sous une hypothèse quantitative (H2′) sur la queue haute fréquence du développement en paires semilocal - qui est valable inconditionnellement dans le cas archimédien et se réduit à l'estimation de localisation (62) sur les espaces lissés - on a $QW_\lambda(f,f) \geq \frac{1}{2}\log\sigma\,\|f\|^2$ sur le complément orthogonal d'un sous-espace de dimension finie explicite construit à partir des modes quasi-auto-duaux (de codimension $O(\sigma^4\lambda^2)$ dans le cas archimédien). Enfin, puisque la plus petite valeur propre ϵ_λ est non croissante en λ, une borne inférieure minuscule $\epsilon_\lambda \geq -\eta(\lambda)$ avec $\eta(\lambda) \to 0$ suffit à impliquer $\epsilon_\lambda \geq 0$ pour tout λ (proposition 28). Combiné à des estimations bilatérales de Kastoris sur les barreaux profondément minuscules de l'espace de conditionnement, cela réduit l'hypothèse de Riemann à une estimation bilatérale sur le complément de Schur de QW_λ sur les quelques modes de transition finis au bord de l'échelle de Fuchs et sur les deux directions de pôle (proposition 29). Nous soulignons cependant que ce qui importe vraiment dans la Section 8 est la description de la méthode et l'interaction de ses ingrédients principaux - le décalage à deux

paramètres dans la formule de trace, le rôle de l'espace de Sonin, le transport d'échelle par $\theta(f)$, et la réduction par Schur-monotonie - plutôt que les énoncés techniques précis du théorème 26 et de la proposition 29, qui ne sont qu'un premier pas et pas encore aiguisés comparés au conditionnement numérique de la Section 5.

Travaux antérieurs. La nature minuscule des valeurs propres de QW_λ ainsi que l'approximation prolate des vecteurs propres ont été découvertes dans [2]. L'approximation des zéros de ζ par ceux de la transformée de Mellin de l'état fondamental a été découverte dans [3] (voir aussi [9]), avec $N = 120$ et $\lambda^2 \leq 14$. A. Groskin [14] a étendu ces calculs à $\lambda^2 = 100$, obtenant les dix premiers zéros avec 307 à 329 décimales correctes, et R.A. les a portés à $\lambda = 16$ et aux 200 premiers zéros, point de départ des calculs du §7.3. En lien avec une conjecture de D. Śliwiński [18], R.A. [1] a également étudié l'erreur sur tout le spectre fini le long de l'échelle $\lambda = N$, trouvant qu'elle croît tandis que les zéros bas deviennent plus précis, en accord avec la rupture de l'accord décrite au §7.3. La construction d'approximants prolates dans le radical de la forme quadratique de Weil, et la première borne supérieure pour la plus petite valeur propre en termes de l'estimation de Fuchs, sont dues à D. Kastoris [16] ; sa borne porte une puissance non spécifiée de λ devant $\delta_4(\lambda)$, et l'amélioration de [11], qui la remplace par $(\log\lambda)^3$ comme dans (30), est ce qui rend la borne utilisable ici, puisque les barreaux de l'échelle sont séparés par des puissances de λ. La constante C_* de (29) lui est également due.

Partout, λ est la demi-longueur de la fenêtre ; le paramètre $c = \lambda^2$ de [3] n'est jamais utilisé, et $\gamma := 2\pi\lambda^2$ est le paramètre prolate.

Remerciements. Les calculs d'A.L.G. tournent sur une grappe dont la puissance est équivalente à celle de cent GPU A100. Nous sommes redevables à Claude Shannon, à la fois pour avoir créé la théorie de l'information, qui a conduit aux travaux de Slepian et de ses collaborateurs sur lesquels repose cet article, et pour l'assistant IA portant son nom, que nous avons utilisé dans l'élaboration de cet article.

2 Les deux opérateurs

2.1 La forme quadratique de Weil sur la fenêtre

Pour des fonctions réelles g, h sur $\mathbb{R}_+^*$, posons $F(x) = \int_0^\infty g(u)h(ux)d^*u$. La forme quadratique de Weil est $QW(g,h) = \Psi(F)$ où, dans la normalisation de [3],

$$\Psi = W_{0,2} - W_{\mathbb{R}} - \sum_p W_p, \qquad W_{0,2}(F) = \int_0^\infty F(x)(x^{1/2} + x^{-1/2})\, d^*x, \tag{6}$$

$$W_p(F) = \log p \sum_{m\geq 1} p^{-m/2}\Big(F(p^m) + F(p^{-m})\Big), \tag{7}$$

$$W_{\mathbb{R}}(F) = (\log 4\pi + \gamma_E)F(1) + \int_1^\infty \Big(F(x) + F(x^{-1}) - 2x^{-1/2}F(1)\Big)\frac{x^{1/2}}{x - x^{-1}}\, d^*x. \tag{8}$$

QW_λ est la restriction de QW aux fonctions supportées dans $[\lambda^{-1},\lambda]$. Chaque terme de (6) est invariant sous $F\mapsto F\circ\iota$, $\iota(x)=x^{-1}$, et $g\mapsto g\circ\iota$ est unitaire sur $L^2(\mathbb{R}_+^*),d^*u)$ et préserve la fenêtre ; donc QW_λ commute avec ι et se scinde en $QW_\lambda^{\rm ev}\oplus QW_\lambda^{\rm odd}$ sur les espaces propres ±1 de ι. Dans la variable $t=\log u$, le terme archimédien est, à des opérateurs bornés près, le multiplicateur de Fourier $\log|\tau|$, de sorte que QW_λ est une forme minorée avec résolvante compacte, dont nous notons les valeurs propres $\epsilon_\lambda(1)\le\epsilon_\lambda(2)\le\cdots$ dans le secteur pair, $\epsilon_\lambda^{\rm odd}(1)\le\cdots$ dans l'impair, et $\epsilon_\lambda=\epsilon_\lambda(1)$ (les calculs numériques confirment que la plus petite valeur propre est paire). Numériquement, QW_λ est calculée dans la base des $2N+1$ modes de Fourier logarithmiques périodiques les plus bas sur $[\lambda^{-1},\lambda]$, voir l'Annexe D.

2.2 L'application arithmétique et le radical

Soit $\mathcal{S}_0^{\rm ev}=\{f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})^{ev} : f(0)=\widehat{f}(0)=0\}$ avec $\widehat{f}(y)=\int f(x)e^{2\pi ixy}dx$. Les faits de base sont [2] :

$$\mathcal{E}(\mathcal{S}_0^{\rm ev})\subset{\rm Rad}(QW),\qquad \mathcal{E}(\widehat{f})=\mathcal{E}(f)\circ\iota\quad(f\in\mathcal{S}_0^{\rm ev}),\tag{9}$$

le second étant la sommation de Poisson $\sum_{n\in\mathbb{Z}}f(nu)=u^{-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{f}(k/u)$ avec les termes $n=0$, $k=0$ supprimés. Si $f\in\mathcal{S}_0^{\rm ev}$ est supportée dans $[-\lambda,\lambda]$, alors $\mathcal{E}(f)(u)=0$ pour $u>\lambda$ et $\mathcal{E}(f)(u)=u^{1/2}f(u)$ pour $u>\lambda/2$; si $\widehat{f}$ est supportée dans $[-\lambda,\lambda]$, alors $\mathcal{E}(f)(u)=0$ pour $u<\lambda^{-1}$. Dans la variable de Mellin, avec $\mathcal{M}g(s)=\int_0^\infty g(u)u^s d^*u$,

$$\mathcal{M}\mathcal{E}(f)(s)=\zeta(s+\tfrac12)\int_0^\infty f(x)x^{s+1/2}\,d^*x,\tag{10}$$

de sorte que la bande critique de ζ correspond à $|\mathfrak{Re}\,s|\le\frac12$ et l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}_+^*,d^*u)$ à la ligne critique.

2.3 Fonctions d'onde sphéroïdales prolates

Soit $\gamma=2\pi\lambda^2$. La transformée de Fourier finie $F_\lambda=\mathbf{1}_{[-\lambda,\lambda]}\mathbb{F}\mathbf{1}_{[-\lambda,\lambda]}$ est un opérateur compact sur $L^2[-\lambda,\lambda]$, symétrique sur les fonctions paires. Avec $x=\lambda z$, $y=\lambda w$, on a $e^{2\pi ixy}=e^{i\gamma zw}$, et ses fonctions propres sont les fonctions angulaires sphéroïdales prolates de Meixner-Schäfke [17], $z\mapsto{\rm Ps}_n(z;\gamma^2)$, qui sont les fonctions ${\rm Ps}(n,0,\gamma,z)$ de Mathematica, normalisées par

$$\int_{-1}^1{\rm Ps}_n(z;\gamma^2)^2\,dz=\frac{2}{2n+1}\quad\text{pour tout }\gamma,\qquad {\rm Ps}_n(z;0)=P_n(z).\tag{11}$$

Pour n pair, nous définissons

$$h_{n,\lambda}(x)=\left(\frac{2n+1}{2}\right)^{1/2}\lambda^{-1/2}\,{\rm Ps}_n\!\left(\frac{x}{\lambda};\gamma^2\right)\quad(|x|\le\lambda),\qquad h_{n,\lambda}(x)=0\quad(|x|>\lambda),\tag{12}$$

de sorte que les $h_{n,\lambda}$ forment une base orthonormée de $L^2[-\lambda,\lambda]^{ev}$, avec $h_{n,\lambda}(0)>0$ pour $n\equiv0\pmod4$ et $h_{n,\lambda}(0)<0$ pour $n\equiv2\pmod4$ (le signe de $P_n(0)$). Nous écrivons

$$\widehat{h}_{n,\lambda}=\chi_n(\lambda)\,h_{n,\lambda}\quad\text{sur }[-\lambda,\lambda],\qquad \delta_n(\lambda):=1-|\chi_n(\lambda)|,\tag{13}$$

et notons que $\chi_n(\lambda)>0$ pour $n\equiv0\pmod4$ et $\chi_n(\lambda)<0$ pour $n\equiv2\pmod4$, puisque la limite de Hermite h_n de $h_{n,\lambda}$ a pour valeur propre de Fourier i^n. L'opérateur $F_\lambda^*F_\lambda$ est le noyau en sinus

cardinal $\sin(\gamma(z-\tau))/(\pi(z-\tau))$ sur $[-1,1]$, dont les valeurs propres sont $\lambda_n(\gamma)=\chi_n(\lambda)^2$; ce sont aussi les valeurs propres de $P_\lambda \widehat{P}_\lambda P_\lambda$ sur $\operatorname{Range} P_\lambda^{ev}$. Deux identités exactes seront utilisées partout :

$$\int_{|y|>\lambda} |\widehat{h}_{n,\lambda}(y)|^2 dy = 1-\chi_n(\lambda)^2, \qquad \int_{|y|>\lambda} \widehat{h}_{n,\lambda}\widehat{h}_{m,\lambda} = 0 \ \ (n\neq m), \tag{14}$$

$$\int_{\mathbb{R}} h_{n,\lambda} = \widehat{h}_{n,\lambda}(0) = \chi_n(\lambda) h_{n,\lambda}(0). \tag{15}$$

La première découle de Plancherel et de $\int_{|y|\le\lambda} \widehat{h}_{n,\lambda}\widehat{h}_{m,\lambda} = \chi_n\chi_m\langle h_{n,\lambda}, h_{m,\lambda}\rangle$: elle dit que $1-\chi_n^2$ est la masse L^2 de $\widehat{h}_{n,\lambda}$ hors de la bande, la *fuite*. Les valeurs numériques de χ_0, χ_4 sont données dans l'Annexe A ; par exemple à $\lambda^2=50$, $1-\chi_4(\lambda)\approx 1.36\cdot 10^{-259}$.

2.4 L'opérateur d'incertitude

Théorème 1. *Soit $U_\lambda = 2 - P_\lambda - \widehat{P}_\lambda$ sur $L^2(\mathbb{R})^{ev}$. Pour tout n pair, l'espace bidimensionnel $V_n = \operatorname{span}\{h_{n,\lambda}, \widehat{h}_{n,\lambda}\}$ est invariant, et*

$$\begin{aligned} U_\lambda\Big(h_{n,\lambda} + \operatorname{sgn}(\chi_n)\widehat{h}_{n,\lambda}\Big) &= \delta_n(\lambda)\Big(h_{n,\lambda} + \operatorname{sgn}(\chi_n)\widehat{h}_{n,\lambda}\Big), \\ U_\lambda\Big(h_{n,\lambda} - \operatorname{sgn}(\chi_n)\widehat{h}_{n,\lambda}\Big) &= (2-\delta_n(\lambda))\Big(h_{n,\lambda} - \operatorname{sgn}(\chi_n)\widehat{h}_{n,\lambda}\Big). \end{aligned} \tag{16}$$

Le complément orthogonal de $\bigoplus_n V_n$ est l'espace de Sonin $\operatorname{Ker}P_\lambda \cap \operatorname{Ker}\widehat{P}_\lambda$, sur lequel $U_\lambda = 2$. Ainsi le spectre de U_λ en dessous de 1 consiste exactement en les valeurs propres simples $\delta_n(\lambda)$, n pair, avec pour vecteurs propres les vecteurs auto-duaux $h_{n,\lambda}+\widehat{h}_{n,\lambda}$ pour $n\equiv 0$ (mod 4) et les vecteurs anti-auto-duaux $h_{n,\lambda}-\widehat{h}_{n,\lambda}$ pour $n\equiv 2$ (mod 4).

Démonstration. $\operatorname{Range} P_\lambda \cap \operatorname{Range}\widehat{P}_\lambda = 0$ puisqu'une fonction à bande limitée est entière. $\operatorname{Range} P_\lambda \cap \operatorname{Ker}\widehat{P}_\lambda = 0$ puisque $\widehat{P}_\lambda f = 0$ signifie que $\widehat{f}$ s'annule sur $[-\lambda,\lambda]$, tandis que $\widehat{f}$ est entière pour f à support compact ; par symétrie $\operatorname{Ker}P_\lambda \cap \operatorname{Range}\widehat{P}_\lambda = 0$. Par le théorème de Halmos sur deux projections, $L^2(\mathbb{R})^{ev} = (\operatorname{Ker}P_\lambda \cap \operatorname{Ker}\widehat{P}_\lambda) \oplus \mathcal{H}_{\text{gen}}$ où sur $\mathcal{H}_{\text{gen}}$ la paire est en position générique, et $\mathcal{H}_{\text{gen}}$ est la somme orthogonale des espaces bidimensionnels engendrés par un vecteur propre e de $P\widehat{P}P$ dans $\operatorname{Range} P$ et le vecteur unitaire $f = \widehat{P}e/\|\widehat{P}e\|$, avec $\langle e,f\rangle = \cos\theta$, $\cos^2\theta$ la valeur propre. Ici $e = h_{n,\lambda}$, $\widehat{P}_\lambda h_{n,\lambda} = \mathbb{F}(\mathbf{1}_{[-\lambda,\lambda]}\widehat{h}_{n,\lambda}) = \chi_n \widehat{h}_{n,\lambda}$, donc $f = \operatorname{sgn}(\chi_n)\widehat{h}_{n,\lambda}$ et $\cos\theta = |\chi_n|$. Sur une telle paire $Pf = \cos\theta\, e$ et $\widehat{P}e = \cos\theta\, f$, d'où $(P+\widehat{P})(e\pm f) = (1\pm\cos\theta)(e\pm f)$, ce qui est (16). Sur l'espace de Sonin $\operatorname{Ker}P_\lambda \cap \operatorname{Ker}\widehat{P}_\lambda$ les deux projections s'annulent, donc $U_\lambda = 2$ y vaut 2. □

Remarque : le quotient de Rayleigh de U_λ sur une fonction $f\in\operatorname{Range}P_\lambda$ est sa fuite : $\langle U_\lambda f, f\rangle = \langle (1-\widehat{P}_\lambda)f, f\rangle = \int_{|y|>\lambda} |\widehat{f}|^2$. Les vecteurs $h_{n,\lambda}+\widehat{h}_{n,\lambda}$ ont pour norme $\sqrt{2+2\chi_n}\approx 2$ et ne sont pas à support temporel borné, mais leur restriction à $[-\lambda,\lambda]$ est $(1+\chi_n)h_{n,\lambda}$.

2.5 L'échelle de Fuchs

Pour n fixé et $\gamma\to\infty$, Fuchs [13] (voir aussi [19]) a prouvé

$$1-\lambda_n(\gamma) = A_n \gamma^{n+1/2} e^{-2\gamma}\Big(1+O(\gamma^{-1})\Big), \qquad A_n = \frac{4\sqrt{\pi}\,8^n}{n!}. \tag{17}$$

Puisque $1-\lambda_n = (1-|\chi_n|)(1+|\chi_n|) = 2\delta_n - \delta_n^2$, cela donne (3), et nous enregistrons les valeurs utilisées ci-dessous :

$$\delta_4 = \frac{2^{14}\sqrt{2}\,\pi^5}{3}\lambda^9 e^{-4\pi\lambda^2}, \quad \delta_6 = \frac{2^{21}\sqrt{2}\,\pi^7}{45}\lambda^{13} e^{-4\pi\lambda^2}, \quad \delta_8 = \frac{2^{26}\sqrt{2}\,\pi^9}{315}\lambda^{17} e^{-4\pi\lambda^2}, \tag{18}$$

$$\frac{\delta_{n+2}}{\delta_n} = \frac{256\pi^2\lambda^4}{(n+1)(n+2)}, \tag{19}$$

tout cela au facteur $1+O(\lambda^{-2})$ près. En échelle logarithmique, l'échelle est $-\log\delta_n(\lambda) = 4\pi\lambda^2 - (2n+1)\log\lambda - \ell_n$, avec $\ell_4 = \log(2^{29/2}\pi^5/3) = 14.6757$; les barreaux sont séparés par $\log(\delta_{n+2}/\delta_n) = 4\log\lambda + \log\frac{256\pi^2}{(n+1)(n+2)}$, de sorte que pour $n \equiv 0 \pmod 4$

$$\log\frac{\delta_{4j+2}}{\delta_{4j}} = 4\log\lambda + \log\frac{256\pi^2}{(4j+1)(4j+2)}, \quad \log\frac{\delta_{4j+4}}{\delta_{4j}} = 8\log\lambda + \log\frac{2^{16}\pi^4}{\prod_{k=1}^{4}(4j+k)}; \tag{20}$$

pour $j=1$ la seconde constante est $\log(4096\pi^4/105) = 8.2425$ et la première est $\log(128\pi^2/15) = 4.4342$. L'échelle est exacte au sens du théorème 1 ; la formule de Fuchs ne décrit que ses barreaux pour n fixé. Pour n croissant avec λ, avec $\sigma_n \in (0,1)$ le point de retournement de l'équation prolate (fixé au premier ordre par $2n+1 = \frac{2\gamma}{\pi}J(\sigma_n)$, $J(\sigma) = 2[E(\sigma) - (1-\sigma^2)K(\sigma)]$), on a $\log(1/\delta_n) = 2\gamma I(\sigma_n) + O(\log\gamma)$ avec $I(\sigma) = E(\sigma') - \sigma^2 K(\sigma')$, $\sigma' = \sqrt{1-\sigma^2}$, uniformément pour $\sigma_n \le \sigma_0 < 1$ [12] ; les barreaux restent exponentiellement petits jusqu'à $n \approx 2\gamma/\pi = 4\lambda^2$, le comptage de Slepian des valeurs propres du noyau en sinus cardinal proches de 1, de sorte que chacun des deux secteurs contient environ λ^2 valeurs propres minuscules (exactement λ^2 et $\lambda^2 - 1$ en dessous de 10^{-2} dans la plage calculée, fait 8). Le reste du spectre de U_λ consiste en les valeurs propres $2 - \delta_n(\lambda)$, s'accumulant vers 2 par en dessous, et en la valeur propre 2 elle-même, de multiplicité infinie sur l'espace de Sonin.

2.6 La contrainte d'intégrale nulle et la limite de Hermite

L'application $\mathcal{E}$ requiert $\widehat{f}(0) = \int f = 0$, sinon $\mathcal{E}(f)(u) \sim u^{-1/2}\int_0^\infty f$ quand $u \to 0$ n'est pas dans $L^2(d^*u)$; cette contrainte n'a pas de contrepartie du côté prolate et c'est ce qui supprime le barreau le plus bas δ_0 du spectre de Weil. Les vecteurs pertinents sont donc les combinaisons d'intégrale nulle de fonctions prolates d'un secteur donné. Dans le secteur pair, le premier est l'état à deux modes de [3],

$$h_\lambda = \left(\int_{\mathbb{R}} h_{0,\lambda}\right) h_{4,\lambda} - \left(\int_{\mathbb{R}} h_{4,\lambda}\right) h_{0,\lambda} = \chi_0 h_{0,\lambda}(0)\, h_{4,\lambda} - \chi_4 h_{4,\lambda}(0)\, h_{0,\lambda}, \tag{21}$$

par (15) ; il est bilinéaire en $(h_{0,\lambda}, h_{4,\lambda})$, de sorte qu'aucune convention de signe ou de normalisation pour les fonctions prolates n'entre dans le rapport $h_\lambda/h_\lambda(1)$. Sa forme normalisée est $a_\lambda h_{0,\lambda} + b_\lambda h_{4,\lambda}$ avec $a_\lambda^2 + b_\lambda^2 = 1$. Pour n fixé, Meixner-Schäfke ([17], Satz 9, p. 243 ; [3], lemme 7.2) donnent $\max_{|x|\le\lambda}|h_{n,\lambda} - h_n| \le C_n\lambda^{-2}$, h_n la fonction de Hermite normalisée, de sorte que $a_\lambda \to -3/\sqrt{33}$, $b_\lambda \to \sqrt{8/11}$ et $h_\lambda/\|h_\lambda\|$ converge vers le vecteur h de [3], lemme 7.1, qui est un multiple de

$$h(x) = \frac{\pi}{2}\, x^2(2\pi x^2 - 3)\, e^{-\pi x^2} : \tag{22}$$

en effet h est auto-dual, $\widehat{h}=h$, de sorte que $\int h=\widehat{h}(0)=h(0)$ et la contrainte d'intégrale nulle est l'absence de terme constant. Deux conséquences de (14), (15) :

$$h_\lambda(0)=a_\lambda\delta_0 h_{0,\lambda}(0)+b_\lambda\delta_4 h_{4,\lambda}(0)=O(\delta_4),\qquad \int_{y>\lambda}|\widehat{h}_\lambda|^2=a_\lambda^2\delta_0+b_\lambda^2\delta_4+O(\delta_4^2)=\frac{8}{11}\delta_4\Big(1+O(\lambda^{-2})\Big), \tag{23}$$

en utilisant $\delta_0/\delta_4=\frac{3}{2^9(2\pi)^4}\lambda^{-8}$. Ainsi la fuite unilatérale de l'état à deux modes d'intégrale nulle est $\frac{8}{11}\delta_4$, et son quotient de Rayleigh pour U_λ, qui est la fuite totale $\int_{|y|>\lambda}|\widehat{h}_\lambda|^2=2\int_{y>\lambda}|\widehat{h}_\lambda|^2$, est $\frac{16}{11}\delta_4$, contre $2\delta_4$ pour $h_{4,\lambda}$ seul et δ_4 pour le vecteur de paire auto-dual $h_{4,\lambda}+\widehat{h}_{4,\lambda}$ (le coefficient unilatéral $\frac{8}{11}$ est le terme $n=1$ de la constante C_* de (29) ci-dessous) : la compression de U_λ à l'hyperplan $\{\int f=0\}$ de chaque secteur est l'opérateur auquel la forme de Weil doit être comparée.

Plus généralement, soit $H_K(\lambda)=\{\sum_{k\le K}c_k h_{4k,\lambda}:\int h=0\}$, un espace de dimension K engendré par les états à deux modes $\xi(\lambda,k)$ construits sur $(h_{0,\lambda},h_{4k,\lambda})$, et H_K^{Herm} sa limite de Hermite. La transformée de Mellin de $\mathcal{E}$ sur H_K^{Herm} est calculable :

Proposition 2. *Pour $h\in H_K^{\mathrm{Herm}}$, $\mathcal{ME}(h)(s)=\xi(s+\frac12)\,q_h(s^2)$ avec q_h un polynôme de degré $\le K-1$, et $h\mapsto q_h$ est une bijection linéaire de H_K^{Herm} sur les polynômes de degré $<K$. Par conséquent*

$$\|\mathcal{E}(h)\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+^*,d^*u)}=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\Xi(t)^2\,|q_h(-t^2)|^2dt, \tag{24}$$

et $g_K^{\mathrm{Herm}}:=\inf\{\|\mathcal{E}(h)\|^2:h\in H_K^{\mathrm{Herm}},\|h\|_2=1\}>0$.

Démonstration. Avec $\Gamma_{\mathbb{R}}(w)=\pi^{-w/2}\Gamma(w/2)$ et $\int_0^\infty x^{2j}e^{-\pi x^2}x^{w-1}dx=\frac12\Gamma_{\mathbb{R}}(w+2j)=\frac12\pi^{-j}\Gamma_{\mathbb{R}}(w)\prod_{i<j}(\frac{w}{2}+i)$, la transformée de Mellin $\int_0^\infty h_n(x)x^{w-1}dx$ d'une fonction de Hermite est $\Gamma_{\mathbb{R}}(w)P_n(w)$ avec P_n un polynôme de degré $n/2$, donc par (10) $\mathcal{ME}(h)(s)=\Lambda(w)P_h(w)$, $w=s+\frac12$, $\Lambda=\Gamma_{\mathbb{R}}\zeta$, $\deg P_h\le 2K$. Puisque $\widehat{h}=h$ et que la transformée de Mellin de $\widehat{h}$ en w est $\frac{\Gamma_{\mathbb{R}}(1-w)}{\Gamma_{\mathbb{R}}(w)}$ fois celle de h en $1-w$, l'équation fonctionnelle de Λ force $P_h(w)=P_h(1-w)$; la contrainte $\int h=0$ est $P_h(1)=0$, donc aussi $P_h(0)=0$, et $P_h(w)=\frac12 w(w-1)Q_h(w)$ avec Q_h symétrique sous $w\mapsto 1-w$, c'est-à-dire un polynôme q_h en $(w-\frac12)^2=s^2$ de degré $\le K-1$. Alors $\mathcal{ME}(h)=\xi(w)Q_h(w)$ avec $\xi(w)=\frac12 w(w-1)\Lambda(w)$. L'application $h\mapsto q_h$ est injective puisque $\xi\not\equiv 0$, donc bijective par dimension ; (24) est Mellin-Plancherel avec $\xi(\frac12+it)=\Xi(t)$, et la positivité découle de $\Xi^2>0$ hors d'un ensemble discret et $q_h\neq 0$, par compacité de la sphère unité. □

Dans la base s^{2j}, la matrice de Gram (24) est la matrice de Hankel des moments pairs $\frac{1}{2\pi}\int\Xi(t)^2t^{2j}dt$. Pour $K=1$ on obtient la cible :

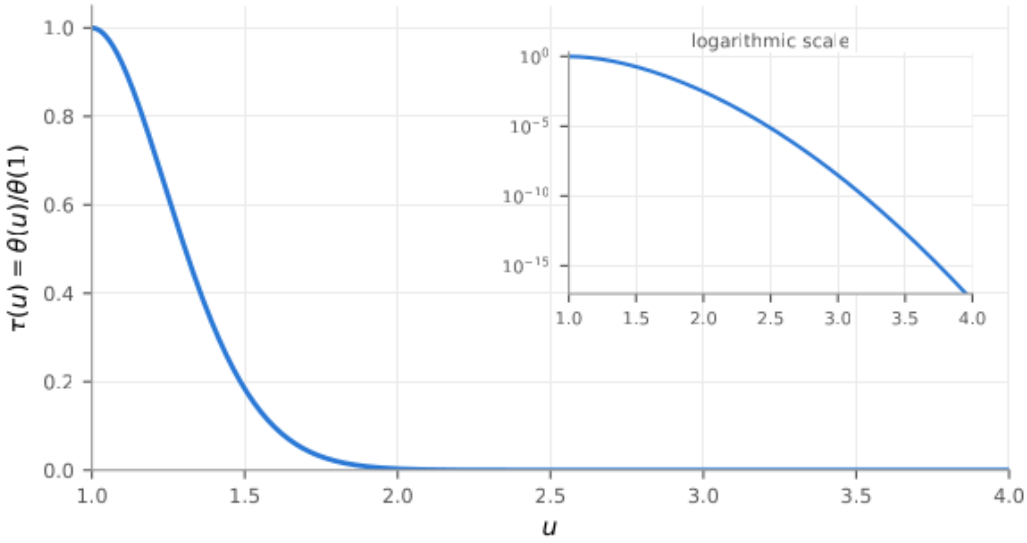
Théorème 3. *Soit $\theta=\mathcal{E}(h)$ avec h comme dans (22), c'est-à-dire θ est la fonction (5). Alors*

$$\mathcal{M}\theta(s)=\int_0^\infty\theta(u)u^s d^*u=\frac14\,\xi\left(s+\frac12\right)\qquad(s\in\mathbb{C}), \tag{25}$$

$\theta\circ\iota=\theta$ exactement, $\theta>0$ sur $(0,\infty)$ avec son maximum en $u=1$, et

$$\theta(1)=0.223348\ldots,\qquad\int_0^\infty\theta\,d^*u=\frac14\xi(\tfrac12)=0.124280\ldots,\qquad\|\theta\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+^*,d^*u)}=0.0199845\ldots$$

Démonstration. $\int_0^\infty h(x)x^{w-1}dx = \frac{\pi}{2}\left[2\pi\cdot\frac{1}{2}\pi^{-(w+4)/2}\Gamma(\frac{w}{2}+2) - 3\cdot\frac{1}{2}\pi^{-(w+2)/2}\Gamma(\frac{w}{2}+1)\right] = \frac{1}{4}\pi^{-w/2}\Gamma(\frac{w}{2})\frac{w}{2}\left[(w+2)-3\right] = \frac{1}{8}w(w-1)\Gamma_{\mathbb{R}}(w)$, et (10) donne $\frac{1}{8}w(w-1)\Gamma_{\mathbb{R}}(w)\zeta(w) = \frac{1}{4}\xi(w)$. La symétrie est (9) et $\widehat{h} = h$. Positivité : par (22), $h(x) > 0$ pour $x > (3/2\pi)^{1/2} = 0.691\ldots$; pour $u \geq 1$, chaque argument nu dans $\theta(u) = u^{1/2}\sum_{n\geq 1} h(nu)$ est ≥ 1, donc tous les termes sont positifs et $\theta(u) > 0$, et pour $u < 1$ on utilise $\theta(u) = \theta(1/u)$. Le maximum en $u = 1$, où $\theta'(1) = 0$ par la symétrie, et la décroissance de θ sur $[1,\infty)$ sont vérifiés numériquement (Figure 2.6). La valeur de $\int^* u$ est $\frac{1}{4}\xi(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{32}\pi^{-1/4}\Gamma(\frac{1}{4})\zeta(\frac{1}{2})$. □



La cible $\tau = \theta/\theta(1)$ sur $[1,4]$ ($\tau(u) = \tau(1/u)$), avec $\theta(1) = 0.2233484\ldots$; encart : la même sur une échelle logarithmique, montrant la décroissance gaussienne $\tau(u) \approx \theta(1)^{-1}u^{1/2}h(u)$ pour $u \gtrsim 2$.

3 Le dictionnaire

3.1 Secteurs et fenêtre

En combinant (9) avec le théorème 1 : si $f \in \mathcal{S}_0^{\mathrm{ev}}$ est supportée dans $[-\lambda,\lambda]$ et proche de l'autodualité, $\widehat{f} \approx f$, alors $\mathcal{E}(f)$ s'annule pour $u > \lambda$ et $\mathcal{E}(f) = \mathcal{E}(\widehat{f}) \circ \iota \approx \mathcal{E}(f) \circ \iota$ s'annule approximativement pour $u < \lambda^{-1}$: elle est approximativement supportée dans la fenêtre et approximativement ι-paire. Si au contraire $\widehat{f} \approx -f$, alors $\mathcal{E}(f)$ est approximativement ι-impaire. La correspondance est donc

$$\text{Fourier} \approx +1\ (n \equiv 0 \bmod 4) \iff \iota = +1, \qquad \text{Fourier} \approx -1\ (n \equiv 2 \bmod 4) \iff \iota = -1,$$

et les deux sont la même symétrie transportée par $\mathcal{E}$. L'énoncé précis est le défaut de Poisson : pour $f \in \mathcal{S}_0^{\mathrm{ev}}$ supportée dans $[-\lambda,\lambda]$,

$$\mathcal{E}(f)(u) - \mathcal{E}(f)(1/u) = \mathcal{E}(\widehat{f} - f)(1/u), \tag{26}$$

de sorte que l'écart à la ι-symétrie sur la fenêtre est mesuré par $\widehat{f} - f$, c'est-à-dire par δ_n dans la bande et par la fuite à l'extérieur.

3.2 Le vecteur test et les bornes supérieures

Une fonction supportée dans $[-\lambda,\lambda]$ n'est pas dans $\mathcal{S}_0^{\mathrm{ev}}$ (elle n'est pas lisse en $\pm\lambda$), et les fonctions prolates ne s'annulent pas en $\pm\lambda$: $h_{n,\lambda}(\lambda)^2 = 4\pi\lambda\delta_n(\lambda)(1+O(\lambda^{-2}))$, une valeur exponentiellement petite mais non nulle de dérivée logarithmique $-2\pi^2\lambda^3$ (le point singulier régulier de l'équation prolate). La construction de [16, 11] répare cela : h_λ est multipliée par une coupure de Gevrey paire de classe G^s, $s>1$, égale à 1 sauf sur une couche d'épaisseur λ^{-3} aux extrémités, et corrigée par deux bosses de Gevrey fixes de façon à restaurer $f(0) = \int f = 0$; le résultat $f_\lambda \in \mathcal{S}_0^{\mathrm{ev}}$ satisfait $\|f_\lambda - h_\lambda\|_2 \le C\lambda^{-1}\delta_4^{1/2}$, et $K_\lambda := \mathcal{E}(f_\lambda) \in \mathrm{Rad}(QW)$ exactement. Le vecteur test est

$$k_\lambda := \chi_\lambda K_\lambda, \qquad r_\lambda := (1-\chi_\lambda)K_\lambda, \tag{27}$$

avec χ_λ une coupure de Gevrey multiplicative s'annulant pour $u \le \lambda^{-1}$ et égale à 1 pour $u \ge \lambda^{-1}e^{\lambda^{-4}}$, de sorte que k_λ est lisse et supportée dans $[\lambda^{-1},\lambda]$. Le mécanisme est l'identité

$$QW_\lambda(k_\lambda,k_\lambda) = QW(r_\lambda,r_\lambda), \tag{28}$$

qui découle de $K_\lambda \in \mathrm{Rad}(QW)$ et de la symétrie de la forme : l'énergie du vecteur test est l'énergie de la queue inférieure, qui est le défaut de Poisson (26) lu sur $u<\lambda^{-1}$, c'est-à-dire la somme d'alias $u^{-1/2}\sum_{n\ge1}\widehat{f}_\lambda(n/u)$. Son terme $n=1$ a une norme L^2 égale à la fuite $\int_{y>\lambda}|\widehat{f}_\lambda|^2 \approx \frac{8}{11}\delta_4$, le quotient de Rayleigh de U_λ sur h_λ, et la queue complète a

$$\|r_\lambda\|^2_{L^2(d^*u)} = (C_* + o(1))\,\delta_4(\lambda), \qquad C_* = \frac{16}{11\pi}\sum_{n\ge1}\frac{\arcsin(1/n)}{n} = 1.03293\ldots \tag{29}$$

([11] ; les alias supérieurs contribuent 42% de la masse et les termes d'interférence sont d'ordre inférieur). Estimer les trois parties de la formule explicite sur r_λ par valeurs absolues donne :

Théorème 4 ([16, 11])**.** *Pour tout $s>1$ il existe C_s, $c_0>0$ tels que pour $\lambda \ge \lambda_0(s)$: $\|k_\lambda\| \ge c_0$, $\|k_\lambda - \mathbf{1}_{[\lambda^{-1},\lambda]}\mathcal{E}(h_\lambda)\| \le C_s\lambda^{-1}\delta_4^{1/2}\log\lambda$, et*

$$\frac{|QW_\lambda(k_\lambda,k_\lambda)|}{\|k_\lambda\|^2} \le C_s\,\delta_4(\lambda)(\log\lambda)^3. \tag{30}$$

En particulier $\epsilon_\lambda \le C_s\delta_4(\lambda)(\log\lambda)^3$. La même borne vaut pour le quotient de Rayleigh de la troncature de dimension finie de QW_λ aux premiers $N(\lambda) = O(\lambda^{4+2s}\log\lambda)$ modes de Fourier logarithmiques.

La construction est linéaire en le vecteur prolate, et toutes les estimations derrière (30) n'utilisent que la fuite, les valeurs aux extrémités et les asymptotiques uniformes de [12], qui valent uniformément pour $\sigma_n \le \sigma_0 < 1$. La méthode de [11] donne donc la version uniforme suivante ; elle n'est pas énoncée sous cette forme dans [11], et nous indiquons ci-dessous le seul point où l'argument doit être suivi pour plusieurs fonctions prolates à la fois.

Théorème 5 (d'après [11])**.** *Soit $E_\lambda : f \mapsto \chi_\lambda\mathcal{E}(f^{\mathrm{Gev}})$ la construction ci-dessus (réparation de Gevrey, $\mathcal{E}$, coupure), qui est linéaire. Pour $0<\sigma_0<1$ il existe $C = C(s,\sigma_0)$ tel que pour tout K avec $\sigma_{4K} \le \sigma_0$ et tout $f \in H_K(\lambda)$,*

$$|QW_\lambda(E_\lambda f, E_\lambda f)| \le C\,K\,(\log\lambda)^3\,\langle U_\lambda f, f\rangle \le C\,K\,\delta_{4K}(\lambda)(\log\lambda)^3\,\|f\|_2^2, \tag{31}$$

et pour K fixé, avec g_K^{Herm} comme dans la proposition 2, $\epsilon_\lambda(j) \le C_K\,\delta_{4j}(\lambda)(\log\lambda)^3$ pour $j \le K$ et $\lambda \ge \lambda_0(K)$. Les énoncés analogues valent dans le secteur impair avec $h_{4k+2,\lambda}$ et δ_{4j+2}.

En effet, dans [11] les estimations sont menées pour le vecteur à deux modes h_λ, mais chacune d'elles (valeurs aux extrémités, couche, queue de Fourier) s'exprime à travers la quantité unique $S(f) = \sum_k |c_k| \delta_{4k}^{1/2}$, et $S(f)^2 \le K \sum_k c_k^2 \delta_{4k} \le K \langle U_\lambda f, f\rangle$ puisque $\langle U_\lambda f, f\rangle = \sum_k c_k^2 (1 - \chi_{4k}^2)$ sur $H_K(\lambda)$, de sorte qu'elles s'appliquent mot pour mot sur $H_K(\lambda)$, avec la constante multipliée par K. **Remarque** : l'exposant 3 du logarithme devrait s'améliorer en 1 : le terme archimédien de la formule explicite contribue un vrai $\log\lambda$ (c'est le multiplicateur $\log|\tau|$ agissant sur une queue oscillant à log-fréquence λ^2), la somme sur les premiers contribue $\log(Y_\lambda/\lambda)$ avec $Y_\lambda \asymp \lambda^{3+2s}$ l'échelle de Gevrey, et le terme de pôle est $O(\lambda^{-4}\delta_4)$ une fois l'oscillation de $\widehat{f}_\lambda$ prise en compte [11].

3.3 L'hypothèse

Hypothèse 6 (accord logarithmique avec l'échelle de Fuchs)**.** *Il existe des constantes* $0 < c \le C$ *telles que, pour tout* $\lambda \ge \lambda_0$ *et* $1 \le j \le J$,

$$c\,\delta_{4j}(\lambda) \le \epsilon_\lambda(j) \le C\,\delta_{4j}(\lambda)\log\lambda, \qquad c\,\delta_{4j+2}(\lambda) \le \epsilon_\lambda^{\mathrm{odd}}(j) \le C\,\delta_{4j+2}(\lambda)\log\lambda. \tag{32}$$

Les moitiés supérieures sont le théorème 5 (avec l'exposant 3 actuellement) ; les moitiés inférieures sont le contenu de l'hypothèse, qui dit que rien dans le spectre de Weil n'est plus petit que ne le permet l'opérateur d'incertitude. C'est un énoncé sur les constantes, pas seulement sur les exposants : les estimations de la Section 6 utilisent l'écart $\epsilon_\lambda(2)/\epsilon_\lambda(1) \asymp \delta_8/\delta_4 \asymp \lambda^8$ contre des pertes polynomiales, et une hypothèse plus faible autorisant des facteurs $\lambda^{O(1)}$ dans (32) ne suffirait pas. Le test numérique décisif est donc la différence

$$\log\epsilon_\lambda(2) - \log\epsilon_\lambda(1) \quad \text{contre} \quad \log\frac{\delta_8}{\delta_4} = 8\log\lambda + 8.2425, \tag{33}$$

et de même $\log\epsilon_\lambda^{\mathrm{odd}}(1) - \log\epsilon_\lambda(1)$ contre $4\log\lambda + 4.4342$. Deux autres prédictions : l'entrelacement $\epsilon_\lambda(j) < \epsilon_\lambda^{\mathrm{odd}}(j) < \epsilon_\lambda(j+1)$, et le comptage d'environ λ^2 valeurs propres minuscules dans chaque secteur.

Remarque [pourquoi une borne inférieure est de nature différente] Une borne supérieure pour ϵ_λ est produite en exhibant un vecteur test ; une borne inférieure $\epsilon_\lambda \ge c\delta_4$ implique en particulier $QW_\lambda \ge 0$, ce qui pour tout λ est équivalent à l'hypothèse de Riemann. L'hypothèse 6 est donc strictement plus forte que la positivité de Weil sur la fenêtre, et elle est testée, non prouvée, dans cet article.

4 Preuves numériques pour le spectre

4.1 Méthode

La matrice de QW_λ est calculée dans la base orthonormée $b_j(u) = \xi_j(\log u)$, $|j| \le N$, de $E_N \subset L^2([\lambda^{-1}, \lambda], d^*u)$ décrite dans l'Annexe D ; le secteur pair est engendré par $b_0, \dots, b_N$ et le secteur impair par $b_{-1}, \dots, b_{-N}$. Tous les coefficients sont donnés sous forme close (valeurs de digamma et trigamma et séries en λ^{-4}), de sorte que la matrice peut être produite à tout N et toute précision ; à $\lambda^2 = 13$, $N = 120$, elle s'accorde avec un calcul indépendant à 3386 bits à $8 \cdot 10^{-109}$ près dans chaque coefficient. Les valeurs ci-dessous sont pour

$$\lambda^2 \in \{5, 9, 22, 24, 28, 32, 36, 40, 50\}, \qquad N = 960,$$

avec $N = 240$ et $N = 480$ comme vérifications de convergence (et N jusqu'à 1920 pour $\lambda^2 = 13$), ainsi que les valeurs plus grandes $\lambda^2 = 100$, calculées à $N = 1000$ (toutes les quantités) et $N = 2000$ (valeurs propres basses et conditionnement), avec $N = 500$ comme vérification, et $\lambda^2 = 150$, calculée à $N = 1500$ (toutes les quantités) et $N = 2500$ (valeurs propres basses, état fondamental et conditionnement), avec $N = 750$ comme vérification.

Précision. Puisque les valeurs propres minuscules couvrent des centaines d'ordres de grandeur, la condition pertinente n'est pas la taille de $\epsilon_\lambda(1)$ seule : une paire propre $\epsilon_\lambda(k)$ n'est obtenue avec précision par itération inverse que si la précision de travail 2^{-b} satisfait $2^{-b} \ll \epsilon_\lambda(1)^2/(\|QW_\lambda^N\|\,\epsilon_\lambda(k))$. Nous avons utilisé $b \approx 3.33\,(2|\log_{10}\epsilon_\lambda(1)| + 40)$ bits, de 300 bits à $\lambda^2 = 5$ à 1880 bits à $\lambda^2 = 50$ ($\epsilon_\lambda(1) \approx 10^{-258}$), 3700 bits à $\lambda^2 = 100$ ($\epsilon_\lambda(1) \approx 10^{-529}$) et 5500 bits à $\lambda^2 = 150$ ($\epsilon_\lambda(1) \approx 10^{-801}$). Lorsque seules les k paires propres les plus basses sont voulues, la condition fait intervenir la valeur propre $\epsilon_\lambda(k+6)$ atteinte par le bloc d'itération au lieu de 10^{-8}, et 2400 bits suffisent à $\lambda^2 = 100$, 3400 à $\lambda^2 = 150$; à $N = 1000$, elles reproduisent les valeurs à 3700 bits à 30 chiffres près.

Solveur propre. Toutes les paires propres en dessous de 10^{-8} sont calculées en arithmétique de boules (Arb) par itération de sous-espace inverse par blocs avec une étape de Rayleigh-Ritz sur la matrice elle-même ; les valeurs propres plus grandes, et les comptages du §4.4, proviennent du spectre complet en double précision. Les résidus relatifs $\|QW\,v - \epsilon v\|/\epsilon$ sont inférieurs à 10^{-20} sauf dans le secteur pair à $\lambda^2 = 40, 50$, où ils valent au plus 10^{-11} et $3\cdot10^{-4}$; puisque l'erreur du quotient de Rayleigh est bornée par $\|r\|^2/\mathrm{gap}$, chaque valeur propre rapportée est encore correcte à au moins quinze chiffres. À $\lambda^2 = 100$, l'inverse de la matrice de secteur a un nombre de conditionnement $\approx 10^{529}$ et les rayons de boules produits par Arb pour celui-ci n'ont pas de sens ; l'itération est alors menée sur les milieux, la précision étant contrôlée par la règle de précision et les résidus : l'itération converge vers un changement relatif de 10^{-34}–10^{-40} en quatre ou cinq étapes, les résidus relatifs évaluables en double précision sont inférieurs à 10^{-20}, et ceux des paires propres les plus basses à $N = 2000$ sont inférieurs à 10^{-63}. La version aux milieux reproduit les valeurs antérieures à 30 chiffres près (vérifié à $\lambda^2 = 13$ et 50). À $\lambda^2 = 150$, l'inverse explicite est remplacé par une résolution LU approchée à chaque étape, ce qui divise la mémoire par deux et donne les mêmes valeurs propres. Pour toutes les valeurs propres minuscules à $\lambda^2 = 150$, $N = 2500$, la précision requise (5500 bits) dépasse la mémoire disponible, et les valeurs propres sont calculées par lots $[a, b]$ d'indices consécutifs par itération inverse par blocs avec la matrice décalée $(QW_\lambda^N + \sigma_a)^{-1}$, $\sigma_a \approx \delta_{4a}(\lambda)$, les vecteurs propres des lots précédents étant projetés. Les valeurs propres sous le lot sont alors envoyées vers $\approx \sigma_a^{-1}$ au lieu d'être amplifiées, de sorte que chaque lot ne nécessite que $2^{-b} \ll \epsilon_\lambda(a)^2/(\|QW_\lambda^N\|\,\epsilon_\lambda(b+6))$; 3200 bits suffisent pour sept lots. À $\lambda^2 = 50$, $N = 960$, cela reproduit toutes les valeurs propres à $4\cdot10^{-15}$ près, et à $\lambda^2 = 150$, $N = 2500$, les deux plus basses à tous les chiffres calculés auparavant.

Convergence en N. Les valeurs propres décroissent avec N (sous-espaces emboîtés). La troncature est la seule source d'erreur à la précision utilisée, et elle est visible :

λ^2	$-\log\epsilon_\lambda(1)$			$-\log\epsilon_\lambda^{\mathrm{odd}}(1)$		
	$N=240$	$N=480$	$N=960$	$N=240$	$N=480$	$N=960$
5	39.219	39.229	39.231	32.214	32.240	32.256
9	86.488	86.553	86.587	78.284	78.297	78.307
22	245.456	245.653	245.717	235.223	235.415	235.508
24	270.101	270.338	270.438	259.719	259.923	260.010
28	319.513	319.833	319.955	308.743	309.102	309.225
32	368.795	369.331	369.480	357.820	358.328	358.493
36	417.416	419.091	419.276	406.293	407.802	408.009
40	460.038	468.788	469.002	449.022	457.347	457.571
50	542.045	593.242	593.666	531.107	581.322	581.736
100*	1066.141	1218.065	1218.627	1053.997	1204.777	1205.361
150†	1562.160	1844.115	1845.018	1549.356	1829.997	1830.872

Convergence des plus petites valeurs propres paire et impaire dans la troncature N. *Pour $\lambda^2=100$ les trois colonnes sont $N=500,1000,2000$; †pour $\lambda^2=150$, $N=750,1500,2500$.

L'incrément de $N=480$ à $N=960$ croît de 0.002 ($\lambda^2=5$) à 0.42 ($\lambda^2=50$) et décroît d'un facteur 0.3–0.4 par doublement de N ; pour $\lambda^2\geq 40$, la valeur $N=240$ est loin d'être suffisante, et N doit dépasser environ $10\lambda^2$. Les valeurs propres à $N=960$ sont donc de légères surestimations ; en extrapolant géométriquement les incréments, $-\log\epsilon_\lambda(1)$ devrait encore augmenter d'environ 0.2–0.3 au-delà de $N=960$ à $\lambda^2=50$, et de moins pour λ plus petit. À $\lambda^2=100$, le même schéma apparaît à double échelle : le pas $N=500\to 1000$ élève $-\log\epsilon_\lambda(1)$ de 152, le pas $N=1000\to 2000$ de 0.56, et environ 0.3 devrait rester au-delà de $N=2000$. (À $\lambda^2=100$, $N=250$ donne encore $-\log\epsilon_\lambda(1)=767.7$, contre 1218.6 à $N=2000$: bien en dessous de $N\approx 10\lambda^2$, la valeur propre est loin d'être convergée, bien que l'état fondamental soit déjà proche du vecteur prolate, avec $\sin\angle = 5\cdot 10^{-3}$.) À $\lambda^2=150$, les pas $N=750\to 1500\to 2500$ élèvent $-\log\epsilon_\lambda(1)$ de 282 et 0.90. Pour $\lambda^2=100$, les tableaux ci-dessous utilisent $N=2000$ pour les plus petites valeurs propres et $N=1000$ pour les comptages, les rapports sur tout j, et les angles prolates ; pour $\lambda^2=150$, $N=2500$ et $N=1500$ respectivement.

4.2 Le secteur pair

En écrivant $D_j(\lambda)=-\log\delta_{4j}(\lambda)$ pour les barreaux exacts, calculés à partir des fonctions prolates comme dans l'Annexe A, et D_j^{Fu} pour la valeur asymptotique de Fuchs (3), on trouve (lignes marquées * : valeurs propres calculées par A.L.G. à $N=3200$, 4000, $4800=16\lambda^2$ pour $\lambda^2=200$, 250, 300, avec $\epsilon_\lambda^{\mathrm{odd}}(2)$ à $N=3000$ pour $\lambda^2=250$; les barreaux exacts sont les nôtres) :

1. Les barreaux exacts D_j et l'asymptotique de Fuchs diffèrent de $O(\lambda^{-2})$ en termes relatifs mais de 1.0 ($\lambda^2=5$), 0.09 ($\lambda^2=50$), 0.04 ($\lambda^2=100$), 0.03 ($\lambda^2=150$) et 0.02–0.015 ($\lambda^2=200$–300) en termes absolus pour D_2 ; la comparaison avec le spectre de Weil doit utiliser les D_j exacts.
2. La deuxième valeur propre dépasse $\delta_8(\lambda)$ d'un facteur compris entre 3.3 ($\lambda^2=5$) et 6.2 ($\lambda^2=50$), 6.9 à $\lambda^2=100$, 8.3 à $\lambda^2=150$, et 9.7, 10.1, 10.5 à $\lambda^2=200$, 250, 300 ; la plus

basse dépasse $\delta_4(\lambda)$ d'un facteur compris entre 7.1 et 11.2 pour $\lambda^2 \le 50$, 13.8 à $\lambda^2 = 100$, 15.2 à $\lambda^2 = 150$, et 18.1, 18.7, 19.0 à $\lambda^2 = 200$, 250, 300 (16.1 à $\lambda^2 = 250$, $N = 5000$). Tous ces facteurs décroissent encore avec N (fait 7).

3. Le test (33) : $\log(\epsilon_\lambda(2)/\epsilon_\lambda(1))$ est inférieur au $\log(\delta_8/\delta_4)$ exact de 0.53 à 0.83, sans tendance en λ entre $\lambda^2 = 5$ et $\lambda^2 = 300$ (0.70 à $\lambda^2 = 100$, 0.60 à $\lambda^2 = 150$, 0.62, 0.62, 0.59 à $\lambda^2 = 200$, 250, 300) ; contre la valeur de Fuchs $8\log\lambda + 8.2425$, le déficit est de 0.60–1.50, les valeurs les plus grandes venant de l'imprécision de l'asymptotique de Fuchs aux petits λ.

λ^2	D_1	$-\log\epsilon_\lambda(1)$	D_2	D_2^{Fu}	$-\log\epsilon_\lambda(2)$	$\log\frac{\epsilon_\lambda(2)}{\epsilon_\lambda(1)}$	$\log\frac{\delta_8}{\delta_4}$	$8\log\lambda + 8.2425$
5	41.185	39.231	27.235	26.233	26.052	13.179	13.950	14.680
9	88.680	86.587	72.023	71.503	70.762	15.824	16.657	17.031
22	247.933	245.717	227.472	227.268	225.832	19.885	20.461	20.607
24	272.669	270.438	251.848	251.661	250.230	20.208	20.822	20.955
28	322.233	319.955	300.776	300.616	299.088	20.866	21.458	21.571
32	371.892	369.480	349.886	349.747	348.110	21.370	22.007	22.105
36	421.623	419.276	399.134	399.011	397.314	21.962	22.489	22.577
40	471.411	469.002	448.492	448.381	446.766	22.236	22.919	22.998
50	596.064	593.666	572.236	572.148	570.413	23.254	23.828	23.891
100	1221.251	1218.627	1194.619	1194.575	1192.694	25.933	26.632	26.663
150	1847.741	1845.018	1819.476	1819.447	1817.359	27.660	28.264	28.285
200*	2474.762	2471.868	2445.342	2445.320	2443.068	28.800	29.420	29.436
250*	3102.075	3099.148	3071.759	3071.742	3069.451	29.697	30.316	30.328
300*	3729.573	3726.627	3698.525	3698.511	3696.170	30.457	31.047	31.058

Fait 7. *La moitié supérieure de l'hypothèse 6 vaut pour $j = 1$ avec la première puissance de $\log\lambda$ et une petite constante : pour tout λ du Tableau 4.2 ($5 \le \lambda^2 \le 300$),*

$$\epsilon_\lambda(1) \le 8.8\,\delta_4(\lambda)\log\lambda, \qquad \text{et} \qquad \epsilon_\lambda(1) \le 6.9\,\delta_4(\lambda)\log\lambda \quad (\lambda^2 \ge 22). \tag{34}$$

Puisque QW_λ^N est la compression de QW_λ à E_N, le principe du min-max donne $\epsilon_\lambda^N(1) \ge \epsilon_\lambda(1)$ pour la plus petite valeur propre $\epsilon_\lambda^N(1)$ de QW_λ^N, de sorte que chaque rapport calculé $\epsilon_\lambda^N(1)/\delta_4(\lambda)$ est une borne supérieure pour le vrai rapport, et (34) ne fait intervenir aucune extrapolation en N. Le Tableau 4.2 donne les rapports au plus grand N calculé.

1. *Le rapport $\epsilon_\lambda(1)/(\delta_4(\lambda)\log\lambda)$ reste entre 4.9 et 8.8, sans tendance à la hausse ; les valeurs aux grands λ sont les moins convergées en N et donc les plus surestimées.*
2. *Le rapport $\epsilon_\lambda(1)/(\delta_4(\lambda)(\log\lambda)^3)$ décroît de 13.5 à 0.8 : l'exposant 3 du théorème 5 est loin d'être optimal dans cette plage.*
3. *En comparant tous les λ au même rapport N/λ^2 (interpolation en $\log N$), un ajustement par moindres carrés $\epsilon_\lambda^N(1)/\delta_4(\lambda) \approx C(\log\lambda)^p$ donne $p = 0.73$, 0.54, 0.37 pour $N/\lambda^2 = 16$, 20, 24, l'exposant décroissant à mesure que l'effet de troncature diminue. Dans la plage calculée, le rapport croît donc plus lentement que $\log\lambda$, ce qui est cohérent avec le facteur $\log\lambda$ dans (32) comme borne supérieure plutôt que comme comportement réel.*

λ^2	N	$\frac{\epsilon_\lambda^N(1)}{\delta_4(\lambda)}$	$\frac{\epsilon_\lambda^N(1)}{\delta_4(\lambda)\log\lambda}$	$\frac{\epsilon_\lambda^N(1)}{\delta_4(\lambda)(\log\lambda)^3}$
5	960	7.06	8.77	13.55
9	960	8.11	7.38	6.12
13	1920	9.49	7.40	4.50
22	960	9.17	5.94	2.49
24	960	9.31	5.86	2.32
28	960	9.76	5.86	2.11
32	960	11.16	6.44	2.14
36	960	10.46	5.84	1.82
40	960	11.12	6.03	1.77
50	1920	9.66	4.94	1.29
100*	3000	12.27	5.33	1.01
150*	3000	13.83	5.52	0.88
200*	3200	18.07	6.82	0.97
250*	5000	16.08	5.82	0.76
300*	4800	19.02	6.67	0.82

La plus petite valeur propre contre le barreau $\delta_4(\lambda)$ (exact, comme dans (4.2)) au plus grand N calculé ; par le principe du min-max chaque entrée est une borne supérieure pour le rapport correspondant de QW_λ. À $\lambda^2 = 50$, la valeur $N = 1920$ est utilisée (le rapport est 11.00 à $N = 960$). *Valeurs propres calculées par A.L.G. ; les barreaux exacts δ_4 sont les nôtres. À $\lambda^2 = 100$ et 150, ses valeurs à $N = 1000, 2000$ et $N = 1500$ coïncident avec les nôtres, et le rapport décroît encore avec N (de 13.79 à $N = 2000$ et 15.22 à $N = 2500$) ; à $\lambda^2 = 200$, le rapport est 20.37 à $N = 2800$ et 18.07 à $N = 3200$, et à $\lambda^2 = 250$ il est 28.27, 18.68, 16.08 à $N = 3000$, 4000, 5000.

4.3 Le secteur impair et l'entrelacement

λ^2	$-\log\delta_6$	$-\log\epsilon_\lambda^{\mathrm{odd}}(1)$	$-\log\delta_{10}$	$-\log\epsilon_\lambda^{\mathrm{odd}}(2)$	$\log\frac{\epsilon_\lambda^{\mathrm{odd}}(1)}{\epsilon_\lambda(1)}$	$\log\frac{\delta_6}{\delta_4}$	$4\log\lambda + 4.4342$
5	33.833	32.256	21.261	20.175	6.975	7.353	7.653
9	80.008	78.307	64.578	63.392	8.280	8.672	8.829
22	237.379	235.508	218.063	216.573	10.208	10.554	10.616
24	261.936	260.010	242.255	240.787	10.428	10.733	10.790
28	311.183	309.225	290.860	289.284	10.729	11.050	11.099
32	360.569	358.493	339.693	338.116	10.987	11.323	11.366
36	410.060	408.009	388.697	387.040	11.267	11.563	11.601
40	459.633	457.571	437.837	436.230	11.431	11.778	11.812
50	583.833	581.736	561.124	559.476	11.930	12.231	12.258
100	1207.620	1205.361	1182.096	1180.315	13.266	13.631	13.645
150	1833.295	1830.872	1806.135	1804.191	14.146	14.446	14.455
200*	2459.739	2457.160	2431.422	2429.312	14.708	15.023	15.031
250*	3086.604	3083.988	3057.391	3054.833	15.160	15.471	15.477
300*	3713.736	3711.079	3683.790	–	15.548	15.837	15.842

Valeurs en fonction de λ^2.

La différence $\log(\epsilon_\lambda^{\mathrm{odd}}(1)/\epsilon_\lambda(1))$ est inférieure au $\log(\delta_6/\delta_4)$ exact de 0.29–0.39, à nouveau sans tendance (0.36 à $\lambda^2 = 100$, 0.30 à $\lambda^2 = 150$, 0.32, 0.31, 0.29 à $\lambda^2 = 200, 250, 300$). L'entrelacement

$$\epsilon_\lambda(1) < \epsilon_\lambda^{\mathrm{odd}}(1) < \epsilon_\lambda(2) < \epsilon_\lambda^{\mathrm{odd}}(2) < \cdots$$

vaut pour chaque valeur propre minuscule (valeurs propres en dessous de 10^{-2}) et chaque λ du tableau, c'est-à-dire pour 3 paires à $\lambda^2 = 5$ jusqu'à 47 paires à $\lambda^2 = 50$, 96 paires à $\lambda^2 = 100$ et 146 paires à $\lambda^2 = 150$; pour $\lambda^2 = 200, 250$, il est vérifié pour les deux premières paires, les seules calculées.

4.4 Comptage

Par le théorème 1, les valeurs propres de U_λ en dessous de 1 sont exactement les $\delta_n(\lambda)$, n pair, et nous les avons toutes calculées à partir des fonctions prolates. Le Tableau 4.4 compare, par secteur, le nombre de valeurs propres en dessous d'un seuil.

	$< 10^{-10}$		$< 10^{-5}$		$< 10^{-2}$	
λ^2	QW_λ ev/odd	U_λ 0/2 (4)	QW_λ ev/odd	U_λ 0/2 (4)	QW_λ ev/odd	U_λ 0/2 (4)
5	2/1	3/2	3/2	4/3	4/3	5/4
9	5/5	6/6	7/6	8/7	8/7	9/8
22	18/17	19/18	19/19	21/20	21/20	22/21
24	20/19	21/20	21/21	23/22	23/22	24/23
28	24/23	25/24	25/25	26/26	27/26	28/27
32	28/27	29/28	29/29	30/30	31/30	32/31
36	32/31	33/32	33/33	34/34	35/34	36/35
40	36/35	37/36	37/37	38/38	38/38	40/39
50	45/45	46/46	47/47	48/48	48/48	50/49
100	95/95	96/96	97/97	98/98	98/98	99/99
150	145/144	146/145	147/146	148/147	148/148	149/149

Nombre de valeurs propres en dessous d'un seuil : $QW_\lambda^{\mathrm{ev}}/QW_\lambda^{\mathrm{odd}}$ contre les barreaux δ_n avec $n \equiv 0/n \equiv 2 \pmod 4$.

Fait 8. *Pour tout λ du tableau :*

1. *U_λ a exactement λ^2 valeurs propres en dessous de 10^{-2} dans le secteur $n \equiv 0$ (mod 4) et $\lambda^2 - 1$ dans le secteur $n \equiv 2$ (mod 4), en accord avec le comptage de Slepian $2\gamma/\pi = 4\lambda^2$ réparti en quatre classes ; les exceptions sont $\lambda^2 = 100$ et 150, où le barreau $\delta_{4\lambda^2-4}$ (0.0116 à $\lambda^2 = 100$) se trouve juste au-dessus du seuil (il y a λ^2 valeurs propres en dessous de 0.1 dans chaque classe), ce qui montre que le comptage à seuil fixe n'a de sens qu'à un ou deux barreaux du plongeon près ;*
2. *en dessous de 10^{-10}, chaque secteur de QW_λ a exactement une valeur propre de moins que le secteur correspondant de U_λ ; la valeur propre manquante est le barreau δ_0 (resp. δ_2) supprimé par la contrainte d'intégrale nulle (§2.6) ;*

3. *aux seuils* 10^{-5}, 10^{-2} *la différence est occasionnellement* 2 *(par exemple le secteur pair à* $\lambda^2 = 40, 50$*), parce que chaque valeur propre de Weil se situe au-dessus de son barreau et que* $\epsilon_\lambda(\lambda^2 - 1) \approx 1\text{–}2 \cdot 10^{-2}$ *est sur le seuil ;*

4. *en appariant* $\epsilon_\lambda(j)$ *avec* δ_{4j} *et* $\epsilon_\lambda^{\mathrm{odd}}(j)$ *avec* δ_{4j+2}*, les rapports satisfont, pour tout* j *minuscule,*

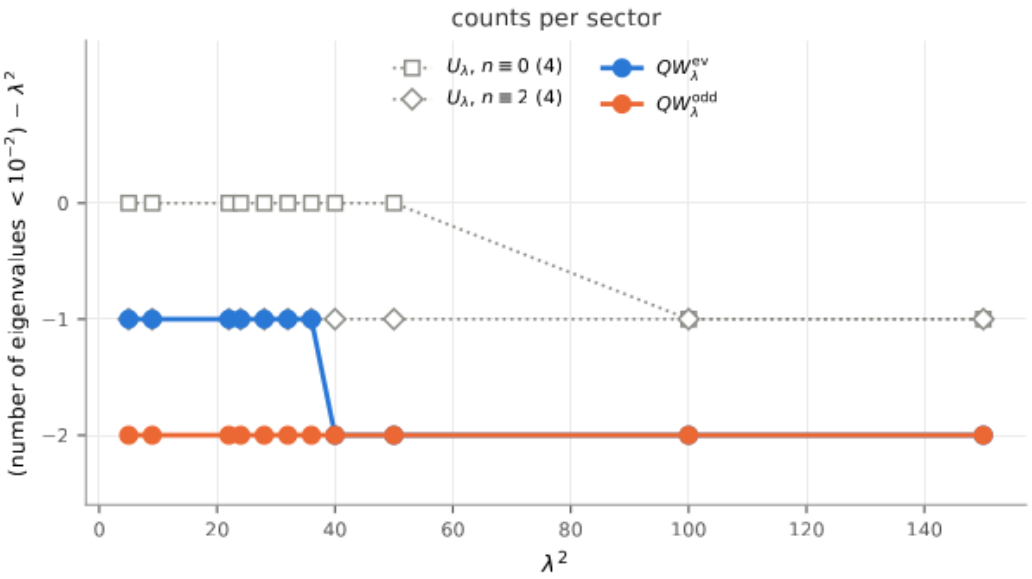
$$1.40 \le \frac{\epsilon_\lambda(j)}{\delta_{4j}(\lambda)} \le 11.2, \qquad 1.51 \le \frac{\epsilon_\lambda^{\mathrm{odd}}(j)}{\delta_{4j+2}(\lambda)} \le 8.2 \qquad (\lambda^2 \le 50), \tag{35}$$

le plus grand rapport se produisant à $j = 1$ *et le rapport décroissant régulièrement jusqu'à environ* 1.5 *au plongeon, comme essentiellement la même fonction de* j/λ^2 *pour tout* λ *(Figures 4.4 et 4.4 pour* $\lambda^2 = 100$, 150 *; les comptages sont dans la Figure 4.4). À* $\lambda^2 = 100$*, les extrémités inférieures sont* 1.36 *(secteur pair,* $N = 2000$ *;* 1.57 *à* $N = 1000$*) et* 1.58*, tandis que les rapports à* $j = 1$ *sont* 13.8 *et* 9.6 *à* $N = 2000$ *; la convergence extrapolée en* N *(Tableau 4.1) les ramènerait à environ* 10 *et* 7*, dans (35). À* $\lambda^2 = 150$*, les rapports pairs à* $N = 2500$ *se situent entre* 1.23 *(*$j = 145$*) et* 15.2 *(*$j = 1$*), et dans le secteur impair le rapport à* $j = 1$ *est* 11.3 *(*$N = 2500$*) et l'extrémité inférieure* 1.48 *(*$N = 1500$*) ; à* $N = 1500$*, les rapports pour* $j \lesssim 10$ *sont encore gonflés par la troncature (jusqu'à* 37.6 *à* $j = 1$*). Les extrémités inférieures décroissent lentement avec* λ *et avec* N *(*1.40*,* 1.36*,* 1.23 *à* $\lambda^2 = 50, 100, 150$*), de sorte que la borne inférieure de (35) est spécifique à* $\lambda^2 \le 50$*.*

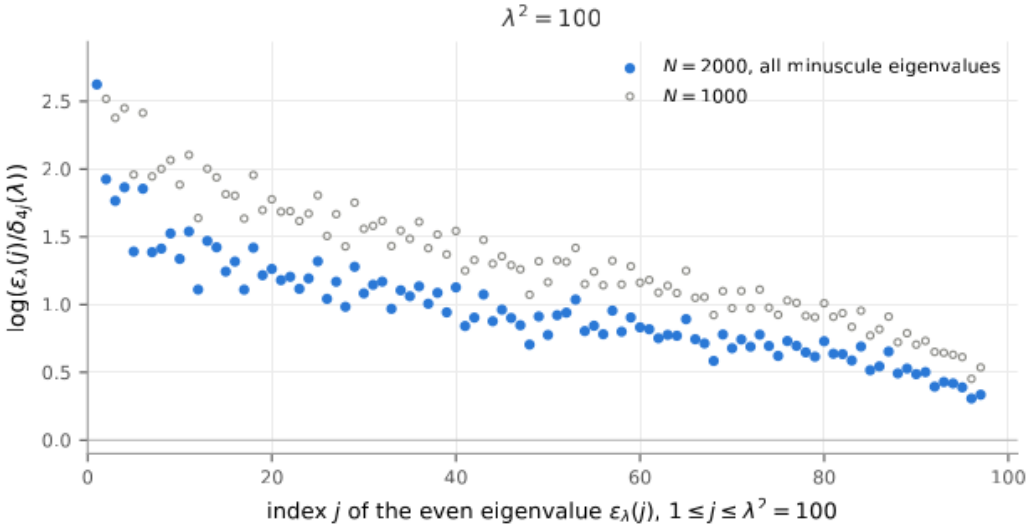
Ainsi chaque secteur de QW_λ contient environ $\lambda^2 - 1$ valeurs propres minuscules, une de moins que le secteur correspondant de U_λ, et (35) est l'accord logarithmique de l'hypothèse 6 avec des constantes explicites dans toute la plage $1 \le j \le \lambda^2 - 1$ (sous réserve de la convergence en N du Tableau 4.1, qui ne peut que diminuer les rapports).

λ^2	# pair	$j = 1$	plage	# impair	$j = 1$	plage
5	4	7.06	1.77–7.06	3	4.84	2.92–4.84
9	8	8.11	1.71–8.11	7	5.48	1.94–5.48
22	19	9.17	1.65–9.17	19	6.49	1.82–6.49
24	21	9.31	1.77–9.31	21	6.86	1.67–6.86
28	25	9.76	1.64–9.76	25	7.09	1.63–7.09
32	29	11.16	1.56–11.16	29	7.97	1.63–7.97
36	33	10.46	1.61–10.46	33	7.77	1.68–7.77
40	37	11.12	1.71–11.12	37	7.86	1.51–7.86
50	47	11.00	1.40–11.00	47	8.14	1.51–8.14
100	97	13.79	1.36–13.79	96	9.58	1.58–9.58
150	147	15.22	1.23–15.22	146	11.27	1.48–17.64

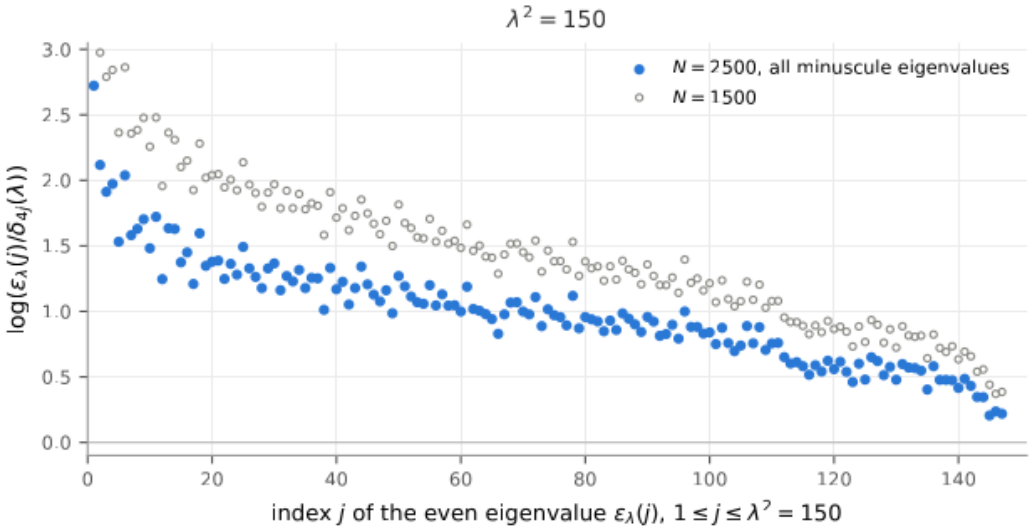
Les rapports $\epsilon_\lambda(j)/\delta_{4j}(\lambda)$ et $\epsilon_\lambda^{\mathrm{odd}}(j)/\delta_{4j+2}(\lambda)$ sur les valeurs propres minuscules. Pour $\lambda^2 = 100$ les rapports pairs sont pris à $N = 2000$ et les impairs à $N = 1000$ ($j = 1$ à $N = 2000$) ; pour $\lambda^2 = 150$ les rapports pairs à $N = 2500$, et les impairs à $N = 1500$ ($j = 1, 2$ à $N = 2500$), où les rapports pour j petit sont encore gonflés par la troncature (l'extrémité supérieure 17.6 se produit à $j \approx 6$).



Nombre de valeurs propres en dessous de 10^{-2} moins λ^2, pour U_λ (barreaux δ_n, $n \equiv 0$ et $n \equiv 2 \bmod 4$) et pour QW_λ^{ev}, $QW_\lambda^{\mathrm{odd}}$.



$\lambda^2 = 100$: $\log\left(\epsilon_\lambda(j)/\delta_{4j}(\lambda)\right)$ contre l'indice j de la valeur propre paire, $1 \le j \le \lambda^2$, où $\epsilon_\lambda(j)$ est la j-ième valeur propre de QW_λ^{ev} et $\delta_{4j}(\lambda) = 1 - |\chi_{4j}(\lambda)|$ le barreau exact de U_λ (et non la valeur asymptotique de Fuchs, qui n'est valable que pour j fixé). Points pleins : toutes les 97 valeurs propres paires minuscules à $N = 2000 = 20\lambda^2$; points creux : les mêmes à $N = 1000 = 10\lambda^2$. La troncature abaisse la courbe d'environ 0.5 entre les deux, un peu moins près du plongeon.



La même chose que la Figure 4.4 pour $\lambda^2 = 150$, $1 \le j \le 150$. Points pleins : toutes les 147 valeurs propres paires minuscules à $N = 2500 \approx 17\lambda^2$, calculées par l'itération inverse décalée par lots du §4.1 ; points creux : $N = 1500 = 10\lambda^2$. Entre $N = 1750$ et $N = 2500$, la courbe descend encore de 0.36 à $j = 1$ et 0.13 à $j = 140$.

5 Élimination des valeurs propres minuscules par conditionnement prolate

Le dictionnaire prédit non seulement les valeurs propres minuscules mais aussi leurs vecteurs propres : les images sous $\mathcal{E}$ des combinaisons prolates d'intégrale nulle. Nous construisons ces vecteurs explicitement, les comparons avec les vecteurs propres de QW_λ, et montrons que le complément orthogonal de leur enveloppe, joint à l'annulation du terme de pôle, ne porte aucune valeur propre minuscule.

5.1 Les vecteurs prolates

Pour $k \ge 1$, soit

$$f_k^{\mathrm{ev}} = I_0\, h_{4k,\lambda} - I_{4k}\, h_{0,\lambda}, \qquad f_k^{\mathrm{odd}} = I_2\, h_{4k+2,\lambda} - I_{4k+2}\, h_{2,\lambda}, \tag{36}$$

où $I_n := \int_{\mathbb{R}} h_{n,\lambda}(x)\,dx$, de sorte que $\int f = 0$ et $f_1^{\mathrm{ev}} = h_\lambda$ est l'état à deux modes (21). La fonction $\mathcal{E}(f)(u) = u^{1/2} \sum_{1 \le n < \lambda^2} f(nu)$ est restreinte à la fenêtre et projetée sur E_N, les composantes $\langle \mathcal{E}(f), b_j \rangle$ étant calculées avec le produit scalaire de $L^2([\lambda^{-1}, \lambda], d^*u)$; seuls les entiers $n < \lambda^2$ contribuent, et l'intégrale est découpée aux points $u = \lambda/n$ où un terme quitte le support (Annexe D). Par §3, $\mathcal{E}(f_k^{\mathrm{ev}})$ est approximativement ι-paire et $\mathcal{E}(f_k^{\mathrm{odd}})$ approximativement ι-impaire ; numériquement la partie de mauvaise parité a une taille relative de 10^{-14} pour k petit et ne croît que près du plongeon. En projetant sur le secteur respectif et en appliquant Gram-Schmidt dans l'ordre $k = 1, 2, \ldots$, on obtient des vecteurs orthonormés

$$\mathfrak{p}_k^{\mathrm{ev}} \in E_N^{\mathrm{ev}}, \qquad \mathfrak{p}_k^{\mathrm{odd}} \in E_N^{\mathrm{odd}}$$

(Gram-Schmidt dans E_N dans l'ordre entrelacé $f_1^{\rm ev}, f_1^{\rm odd}, f_2^{\rm ev}, \dots$ donne les mêmes vecteurs à 10^{-15} près, sauf près du plongeon). Ce sont les candidats naturels pour les vecteurs propres $\eta_\lambda(k)$, $\eta_\lambda^{\rm odd}(k)$ de $\epsilon_\lambda(k)$, $\epsilon_\lambda^{\rm odd}(k)$, comme dans [2], §3.

Fait 9. $\mathfrak{p}_k^{\rm ev}$ *est proche de* $\pm\eta_\lambda(k)$ *et* $\mathfrak{p}_k^{\rm odd}$ *de* $\pm\eta_\lambda^{\rm odd}(k)$ *pour chaque valeur propre minuscule, avec* $\sin\angle \le 2.6\cdot 10^{-2}$ *pour* $\lambda^2 \le 50$ *(*$4.2\cdot 10^{-2}$ *à* $\lambda^2 = 100$, $6.3\cdot 10^{-2}$ *à* $\lambda^2 = 150$*), les plus grands angles se produisant au plongeon, et beaucoup plus petits pour* k *petit :*

λ^2	$\mathfrak{p}_1^{\rm ev}$	$\mathfrak{p}_2^{\rm ev}$	$\mathfrak{p}_3^{\rm ev}$	$\mathfrak{p}_1^{\rm odd}$	$\mathfrak{p}_2^{\rm odd}$	$\mathfrak{p}_3^{\rm odd}$	max sur les minuscules
5	3.4e-04	9.5e-04	2.3e-03	7.1e-04	1.6e-03	8.3e-03	1.7e-02
9	1.1e-04	3.0e-04	3.4e-04	2.5e-04	3.4e-04	8.1e-04	2.6e-02
22	2.0e-05	3.9e-05	6.8e-05	2.6e-05	4.8e-05	1.1e-04	1.4e-02
24	1.6e-05	3.6e-05	8.0e-05	2.5e-05	4.8e-05	1.2e-04	1.6e-02
28	1.2e-05	2.3e-05	5.0e-05	1.8e-05	3.1e-05	6.8e-05	1.8e-02
32	8.1e-06	2.0e-05	4.4e-05	1.3e-05	2.8e-05	6.6e-05	1.7e-02
36	7.8e-06	1.6e-05	3.2e-05	1.0e-05	2.1e-05	5.3e-05	1.8e-02
40	6.8e-06	1.5e-05	2.9e-05	1.1e-05	2.1e-05	3.9e-05	2.2e-02
50	5.4e-06	1.2e-05	2.2e-05	8.2e-06	1.6e-05	3.0e-05	2.6e-02
100	1.2e-06	2.8e-06	4.8e-06	2.0e-06	3.6e-06	6.9e-06	4.2e-02
150	1.9e-07	4.7e-07	8.7e-07	3.3e-07	6.4e-07	1.3e-06	6.3e-02

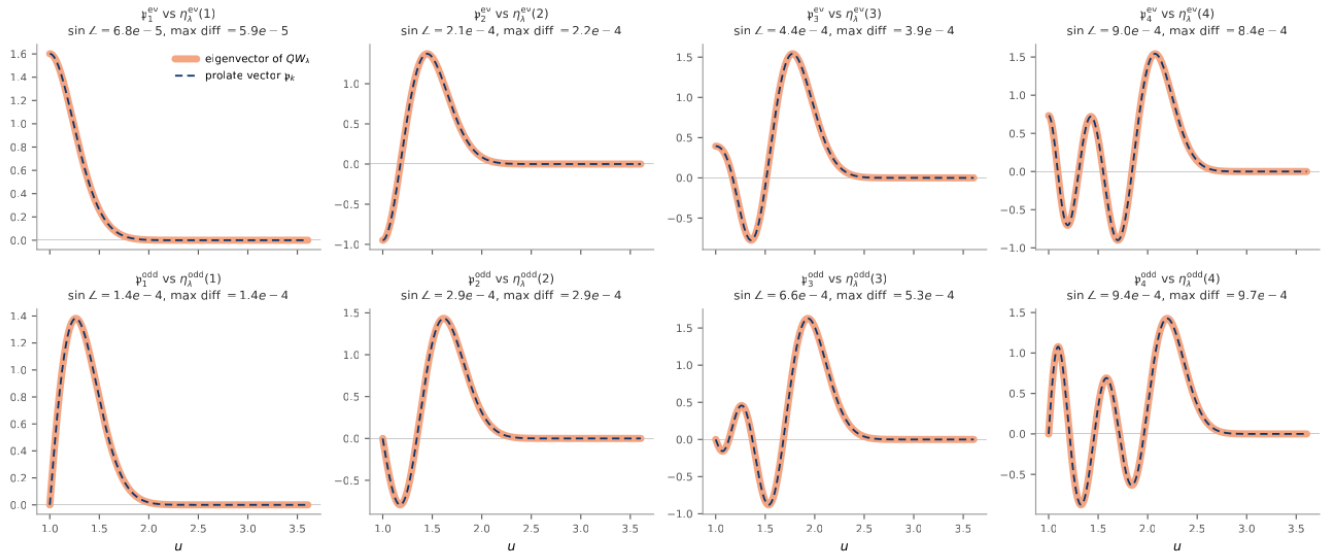
$\sin\angle(\mathfrak{p}_k, \eta_\lambda(k))$ à $N = 960$ ($N = 1000$ pour $\lambda^2 = 100$, $N = 1500$ pour $\lambda^2 = 150$),
trois premiers vecteurs de chaque secteur
et maximum sur toutes les valeurs propres en dessous de 10^{-2}.

L'angle du premier vecteur décroît avec λ, de $3.4\cdot 10^{-4}$ à $\lambda^2 = 5$ à $5.4\cdot 10^{-6}$ à $\lambda^2 = 50$, $1.2\cdot 10^{-6}$ à $\lambda^2 = 100$ ($1.3\cdot 10^{-6}$ à $N = 2000$) et $1.9\cdot 10^{-7}$ à $\lambda^2 = 150$ ($6.4\cdot 10^{-7}$ à $N = 2500$). Une partie est de la troncature : à $\lambda^2 = 13$,

N	$\mathfrak{p}_1^{\rm ev}$	$\mathfrak{p}_2^{\rm ev}$	$\mathfrak{p}_3^{\rm ev}$	$\mathfrak{p}_4^{\rm ev}$	$\mathfrak{p}_1^{\rm odd}$	$\mathfrak{p}_2^{\rm odd}$	$\mathfrak{p}_3^{\rm odd}$	$\mathfrak{p}_4^{\rm odd}$
120	6.8e-05	2.1e-04	4.4e-04	9.0e-04	1.4e-04	2.9e-04	6.6e-04	9.4e-04
240	4.9e-05	1.6e-04	3.3e-04	6.7e-04	9.5e-05	2.2e-04	5.3e-04	7.3e-04
480	3.5e-05	1.3e-04	2.8e-04	6.1e-04	7.6e-05	1.8e-04	4.0e-04	5.6e-04
960	2.9e-05	1.2e-04	2.4e-04	5.1e-04	6.8e-05	1.7e-04	3.9e-04	5.4e-04
1920	2.3e-05	1.0e-04	2.2e-04	4.8e-04	6.7e-05	1.6e-04	3.8e-04	5.2e-04

$\sin\angle(\mathfrak{p}_k, \eta_\lambda(k))$ à $\lambda^2 = 13$ en fonction de N.

Tous les angles décroissent avec N ; dans le secteur impair ils plafonnent près de $N \approx 1000$ à une valeur qui est la distance véritable, à ce λ, entre le vecteur prolate et le vecteur propre, tandis que $\mathfrak{p}_1^{\rm ev}$ s'améliore encore d'un facteur 0.8 par doublement. Les angles sont les mêmes en double précision et avec 60 chiffres. La Figure 5.1 montre l'accord dans le style de [2], Figures 26-37.



$\lambda^2 = 13$, $N = 120$: les vecteurs prolates $\mathfrak{p}_k^{\mathrm{ev}}$, $\mathfrak{p}_k^{\mathrm{odd}}$ (ligne pointillée sombre) et les vecteurs propres $\eta_\lambda(k)$, $\eta_\lambda^{\mathrm{odd}}(k)$ de QW_λ (large bande claire), $k = 1, \dots, 4$, sur $u \in [1, \lambda]$, tous deux normalisés dans $L^2(d^*u)$. Chaque paire apparaît comme un seul graphe parce que les deux fonctions coïncident à l'épaisseur de la ligne près : l'angle entre elles est $\sin\angle \le 10^{-3}$, et la différence ponctuelle maximale, relative à $\max|\eta_\lambda(k)|$ et donnée au-dessus de chaque panneau, est comprise entre $6 \cdot 10^{-5}$ et 10^{-3}. Les fonctions sur $[\lambda^{-1}, 1]$ suivent par $\eta \circ \iota = \pm\eta$.

5.2 Le terme de pôle

Soit $\ell(g) = \int_{\lambda^{-1}}^{\lambda} g(u)\, u^{1/2} d^*u = \mathcal{M}g(\frac{1}{2})$, de sorte que $\ell(g \circ \iota) = \mathcal{M}g(-\frac{1}{2})$.

Lemme 10. *Pour g réelle supportée dans la fenêtre, $W_{0,2}(F) = 2\,\mathcal{M}g(\frac{1}{2})\,\mathcal{M}g(-\frac{1}{2})$ avec F comme dans (6). Par conséquent la partie de pôle de QW_λ est la forme de rang un $+2\,\ell(g)^2$ sur les fonctions ι-paires et $-2\,\ell(g)^2$ sur les fonctions ι-impaires.*

Démonstration. $W_{0,2}(F) = \int_0^\infty\!\int_0^\infty g(u)g(ux)(x^{1/2} + x^{-1/2}) d^*u\, d^*x$, et la substitution $v = ux$ donne $\int g(u)u^{-1/2}d^*u \int g(v)v^{1/2}d^*v + \int g(u)u^{1/2}d^*u \int g(v)v^{-1/2}d^*v = 2\mathcal{M}g(\frac{1}{2})\mathcal{M}g(-\frac{1}{2})$. Pour $g \circ \iota = \pm g$ on a $\mathcal{M}g(-\frac{1}{2}) = \pm\mathcal{M}g(\frac{1}{2})$. □

Dans la base b_j (Annexe D), avec $\omega_j = 2\pi j/L$, $L = 2\log\lambda$,

$$\ell(b_0) = \frac{4\sinh(L/4)}{\sqrt{L}}, \qquad \ell(b_j) = \sqrt{\frac{2}{L}}\,\frac{\sinh(L/4)}{\frac{1}{4} + \omega_j^2}, \qquad \ell(b_{-j}) = \sqrt{\frac{2}{L}}\,\frac{2\omega_j \sinh(L/4)}{\frac{1}{4} + \omega_j^2} \qquad (j \ge 1), \tag{37}$$

et la restriction de la partie de pôle de la matrice à E_N^{ev}, resp. E_N^{odd}, est $+2\,\ell\ell^T$, resp. $-2\,\ell\ell^T$ (vérifié contre [3], (4.2), à 10^{-52} près). Puisque ι échange $\mathcal{M}g(\frac{1}{2})$ et $\mathcal{M}g(-\frac{1}{2})$, la seule condition $\ell(g) = 0$ tue les deux valeurs de pôle dans chaque secteur.

5.3 Conditionnement prolate

Dans chaque secteur, nous restreignons QW_λ au complément orthogonal des vecteurs prolates et de la forme de pôle :

$$\mu_\lambda^{\mathrm{ev}} = \min\left\{ \frac{QW_\lambda(g,g)}{\|g\|^2} \;:\; g \in E_N^{\mathrm{ev}},\ g \perp \mathfrak{p}_1^{\mathrm{ev}}, \dots, \mathfrak{p}_{\lambda^2-1}^{\mathrm{ev}},\ \ell(g) = 0 \right\}, \tag{38}$$

et $\mu_\lambda^{\mathrm{odd}}$ de même avec $\mathfrak{p}_1^{\mathrm{odd}}, \dots, \mathfrak{p}_{\lambda^2-2}^{\mathrm{odd}}$. Les nombres de conditions prolates, λ^2-1 et λ^2-2, sont les nombres de valeurs propres minuscules trouvées au §4.4 ; la condition de pôle remplace le barreau supprimé par la contrainte d'intégrale nulle. Par Courant-Fischer, avec k conditions μ est au plus la $(k+1)$-ième valeur propre du secteur, c'est-à-dire $\mu_\lambda^{\mathrm{ev}} \le \epsilon_\lambda(\lambda^2+1)$ et $\mu_\lambda^{\mathrm{odd}} \le \epsilon_\lambda^{\mathrm{odd}}(\lambda^2)$.

	secteur pair				secteur impair			
λ^2	prolates	$\mu_\lambda^{\mathrm{ev}}$	exact + ℓ	$\epsilon_\lambda(\lambda^2+1)$	prolates	$\mu_\lambda^{\mathrm{odd}}$	exact + ℓ	$\epsilon_\lambda^{\mathrm{odd}}(\lambda^2)$
5	0.606	**0.782**	0.784	0.853	0.080	**0.731**	0.731	0.767
9	0.520	**0.658**	0.658	0.663	0.087	**0.633**	0.634	0.651
13	0.428	**0.492**	0.487	0.582	0.086	**0.471**	0.471	0.477
22	0.375	**0.437**	0.442	0.485	0.092	**0.438**	0.440	0.450
24	0.340	**0.399**	0.401	0.435	0.096	**0.383**	0.384	0.396
28	0.319	**0.379**	0.381	0.444	0.098	**0.361**	0.362	0.384
32	0.321	**0.404**	0.404	0.407	0.092	**0.395**	0.396	0.403
36	0.320	**0.388**	0.388	0.390	0.099	**0.377**	0.381	0.389
40	0.317	**0.335**	0.335	0.366	0.102	**0.332**	0.332	0.334
50	0.262	**0.270**	0.271	0.310	0.104	**0.270**	0.270	0.273
100	0.194	**0.195**	0.195	0.234	0.093	**0.194**	0.195	0.195
150	0.184	**0.199**	0.199	0.199	0.093	**0.194**	0.194	0.198

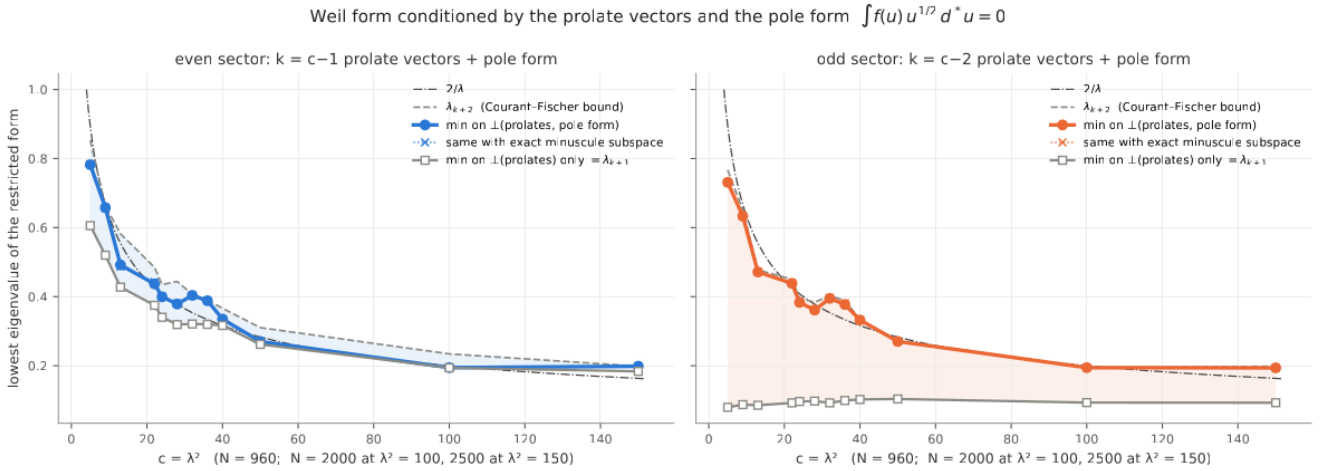
Plus petite valeur propre de QW_λ ($N = 960$; $N = 2000$ pour $\lambda^2 = 100$, $N = 2500$ pour $\lambda^2 = 150$) sur le complément orthogonal de : les vecteurs prolates seuls ; les vecteurs prolates et ℓ (μ_λ) ; les vecteurs propres minuscules exacts et ℓ ; dernière colonne, la borne de Courant-Fischer.

Fait 11. *Pour tout λ avec $5 \le \lambda^2 \le 50$, et pour $\lambda^2 = 100$ et 150 :*

1. *Aucune valeur propre minuscule ne survit au conditionnement : $0.27 \le \mu_\lambda^{\mathrm{ev}}, \mu_\lambda^{\mathrm{odd}} \le 0.78$ pour $\lambda^2 \le 50$, $\mu_\lambda^{\mathrm{ev}} = \mu_\lambda^{\mathrm{odd}} = 0.1945$ à $\lambda^2 = 100$, et $0.199/0.194$ à $\lambda^2 = 150$. En fait $1.6 \le \lambda\,\mu_\lambda \le 2.5$ partout, avec $\lambda\mu_\lambda = 1.91$ à $\lambda^2 = 50$, 1.945 à $\lambda^2 = 100$ et $2.43/2.37$ à $\lambda^2 = 150$: le minimum conditionné est de l'ordre de $2/\lambda$, avec des fluctuations de $\pm 20\%$ qui suivent le bord du spectre non minuscule.*
2. *Dans le secteur pair, les $\lambda^2 - 1$ vecteurs prolates seuls donnent déjà la première valeur propre non minuscule $\epsilon_\lambda(\lambda^2)$ (à 4 chiffres près) : ils engendrent l'espace propre minuscule. La condition de pôle élève encore le minimum, de 29% à $\lambda^2 = 5$, 3% à $\lambda^2 = 50$, 0.3% à $\lambda^2 = 100$ et 8% à $\lambda^2 = 150$.*
3. *Dans le secteur impair, les $\lambda^2 - 2$ vecteurs prolates laissent une valeur propre de transition $\epsilon_\lambda^{\mathrm{odd}}(\lambda^2 - 1) \approx 0.08$–$0.10$, le partenaire du barreau de plongeon $\delta_{4\lambda^2-2}$; la condition de pôle le supprime, multipliant le minimum par un facteur entre 2.1 ($\lambda^2 = 100, 150$) et 9 ($\lambda^2 = 5$) et le ramenant à 0.2–6% de la borne de Courant-Fischer.*
4. *Remplacer les vecteurs prolates par les vecteurs propres minuscules exacts change μ_λ d'au plus 1.3%.*
5. *Pour $\lambda^2 \ge 22$, les deux secteurs donnent presque la même valeur ($0.437/0.438$ à $\lambda^2 = 22$, $0.270/0.270$ à $\lambda^2 = 50$, $0.1945/0.1945$ à $\lambda^2 = 100$, $0.199/0.194$ à $\lambda^2 = 150$), qui décroît comme $2/\lambda$ avec le bord du spectre non minuscule.*

Les valeurs changent d'au plus 0.5% *entre* $N = 480$ *et* $N = 960$*, et de* 1% *entre* $N = 120$ *et* $N = 960$ *à* $\lambda^2 = 13$ *; à* $\lambda^2 = 100$ *elles changent de* 0.7% *entre* $N = 500$ *et* $N = 1000$ *et de moins de* 0.05% *entre* $N = 1000$ *et* $N = 2000$ *; à* $\lambda^2 = 150$ *de* 3% *(pair) et* 1% *(impair) entre* $N = 1500$ *et* $N = 2500$*.*

En d'autres termes, une fois factorisés les images $\mathcal{E}$ des fonctions prolates avec $|\chi_n| \approx 1$ et le terme de pôle, QW_λ est minorée sur ce qui reste par environ $2/\lambda$, le bord du spectre non minuscule (0.27 à $\lambda^2 = 50$, 0.19 à $\lambda^2 = 100$, 0.19–0.20 à $\lambda^2 = 150$) : la partie minuscule du spectre de Weil est entièrement rendue compte par le côté prolate du dictionnaire, avec une condition prolate par barreau de U_λ sauf le barreau supprimé par $\int f = 0$, qui est remplacé par la condition de pôle.



$\mu_\lambda^{\mathrm{ev}}$, $\mu_\lambda^{\mathrm{odd}}$ (épais), les mêmes avec l'espace propre minuscule exact (pointillé), le minimum avec les vecteurs prolates seuls (carrés), la borne de Courant-Fischer (tirets) et la courbe $2/\lambda$ (tiret-point), contre λ^2 ; $N = 960$, $N = 2000$ à $\lambda^2 = 100$ et $N = 2500$ à $\lambda^2 = 150$.

6 L'état fondamental

Dans cette section, $QW_\lambda \geq 0$ est supposé (positivité de Weil sur la fenêtre), de sorte que $\epsilon_\lambda \geq 0$, avec la partie d'écart de l'hypothèse 6. Nous écrivons $\delta = \delta_4(\lambda)$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $\| \cdot \|$ pour $L^2([\lambda^{-1}, \lambda], d^*u)$, et nous normalisons $\|k_\lambda\| = 1$.

6.1 Simplicité, parité et projection sur l'état fondamental

Soit η_λ un état fondamental, ξ_λ la projection orthogonale de k_λ sur l'espace propre fondamental et $\omega_\lambda = k_\lambda - \xi_\lambda$ sa projection sur le sous-espace spectral des valeurs propres restantes, de sorte que $\|\xi_\lambda\|^2 + \|\omega_\lambda\|^2 = 1$ et $QW_\lambda(\xi_\lambda, \omega_\lambda) = 0$.

Lemme 12. *Supposons* $QW_\lambda \geq 0$ *et que, les valeurs propres étant comptées avec multiplicité, toute valeur propre de* QW_λ *autre que la plus basse* ϵ_λ *soit* $\geq g_\lambda > 0$ *(de sorte que* ϵ_λ *est simple dès que* $g_\lambda > \epsilon_\lambda$*). Alors*

$$\|\omega_\lambda\|^2 \leq \frac{C\,\delta_4(\lambda)(\log \lambda)^3}{g_\lambda}, \qquad \left\| k_\lambda - \frac{\eta_\lambda}{\|\eta_\lambda\|} \right\| \leq \|\omega_\lambda\|(1 + \|\omega_\lambda\|^2)^{1/2}, \tag{39}$$

le signe de η_λ *étant choisi de sorte que* $\langle k_\lambda, \eta_\lambda \rangle > 0$*. Si de plus* $\|\omega_\lambda\| < 1/2$*, la valeur propre fondamentale est simple et l'état fondamental est* ι*-pair.*

Démonstration. Par orthogonalité $QW_\lambda(k_\lambda, k_\lambda) = \epsilon_\lambda \|\xi_\lambda\|^2 + QW_\lambda(\omega_\lambda, \omega_\lambda) \geq g_\lambda \|\omega_\lambda\|^2$, en utilisant $\epsilon_\lambda \geq 0$; puis (30). Ensuite $1 - \|\xi_\lambda\| = \|\omega_\lambda\|^2/(1 + \|\xi_\lambda\|) \leq \|\omega_\lambda\|^2$ et $\|k_\lambda - \eta_\lambda/\|\eta_\lambda\|\|^2 = \|\omega_\lambda\|^2 + (1 - \|\xi_\lambda\|)^2$ quand l'espace propre fondamental est une droite. Simplicité : l'hypothèse d'écart telle qu'énoncée rend l'espace propre fondamental de dimension un. Parité : QW_λ commute avec ι, donc la droite fondamentale est ι-invariante et $\iota\eta_\lambda = \pm\eta_\lambda$; par le défaut de Poisson (26) et les estimations de [11], $\|k_\lambda - k_\lambda \circ \iota\| \leq C\lambda^{1/2}\delta^{1/2} \log\lambda$, donc la partie ι-impaire de k_λ a une norme $o(1)$, tandis que $\langle k_\lambda, \eta_\lambda\rangle/\|\eta_\lambda\| = \|\xi_\lambda\| > \sqrt{3}/2$; le signe $-$ est impossible. □

La positivité $\epsilon_\lambda \geq 0$ est utilisée : sans elle on n'obtient que $g_\lambda\|\omega_\lambda\|^2 \leq C\delta(\log\lambda)^3 + |\epsilon_\lambda|$, et la construction ne donne aucune borne inférieure sur ϵ_λ. Deux versions de l'écart sont pertinentes, avec les rapports (20) :

- *écart complet* $g_\lambda = c\,\delta_6(\lambda)$, c'est-à-dire la moitié inférieure de (32) pour $\epsilon_\lambda^{\mathrm{odd}}(1)$ et $\epsilon_\lambda(2)$: $\delta_4/\delta_6 = \frac{15}{128\pi^2\lambda^4}$ et $\|\omega_\lambda\| \leq C\lambda^{-2}(\log\lambda)^{3/2}$;
- *écart pair* $g_\lambda = c\,\delta_8(\lambda)$ pour la deuxième valeur propre paire seulement : puisque la composante ι-impaire de k_λ est $O(\lambda^{1/2}\delta^{1/2}\log\lambda)$ et que $QW_\lambda(k_\lambda, k_\lambda)$ domine chacune de ses deux contributions sectorielles (toutes deux ≥ 0), l'argument peut être mené dans le secteur pair, $\delta_4/\delta_8 = \frac{105}{4096\pi^4\lambda^8}$ et $\|\omega_\lambda\| \leq C\lambda^{-4}(\log\lambda)^{3/2}$.

La version emboîtée s'applique mot pour mot aux enveloppes $H_j(\lambda)$: sous (32), le j-ième vecteur propre se trouve à $O(\lambda^{-4}(\log\lambda)^{3/2})$ de $\mathrm{span}\{E_\lambda\xi(\lambda,k)\}_{k\leq j}$, et l'orthogonalisation de Gram-Schmidt des $E_\lambda\xi(\lambda,k)$ dans l'ordre $k = 1, 2, \ldots$ approxime les vecteurs propres successifs avec cette précision (Davis-Kahan). Cela est confirmé numériquement pour chaque valeur propre minuscule, pas seulement les premières : voir le fait 9 et le Tableau 5.1 dans la Section 5.

6.2 De L^2 à la norme $\|\cdot\|_1$

Soit $\rho(u) = u^{1/2}$ pour $1 \leq u \leq \lambda$, $\rho(u) = \rho(1/u) = u^{-1/2}$ pour $\lambda^{-1} \leq u \leq 1$. Alors $\|\rho\|^2 = 2(\lambda - 1)$ et $\rho\, d^*u = u^{-1/2}du$ sur $[1, \lambda]$, donc pour g sur la fenêtre

$$\|g\|_1 := \int_1^\lambda |g(u)|u^{-1/2}du \leq \langle |g|, \rho\rangle \leq \sqrt{2(\lambda-1)}\,\|g\|, \qquad \|g\|_1 \leq \sqrt{\lambda - 1}\,\|g\mathbf{1}_{[1,\lambda]}\|. \tag{40}$$

Le couplage avec ρ est le couplage avec le vecteur de pôle $u^{\pm 1/2}$ de la formule explicite, ce qui explique pourquoi c'est la norme L^1 naturelle ; ce qu'elle contrôle est expliqué au §7.1. Appliqué au lemme 12,

$$\left\| k_\lambda - \frac{\eta_\lambda}{\|\eta_\lambda\|} \right\|_1 \leq \sqrt{\lambda - 1}\,\|\omega_\lambda\|(1 + o(1)) \leq \begin{cases} C\lambda^{-3/2}(\log\lambda)^{3/2} & \text{(écart complet)}, \\ C\lambda^{-7/2}(\log\lambda)^{3/2} & \text{(écart pair)}. \end{cases} \tag{41}$$

Cauchy-Schwarz jette la structure de ω_λ ; puisque ρ est loin d'être un vecteur propre, rien de meilleur n'est disponible sans information sur la mesure spectrale de ρ, mais le facteur $\sqrt{\lambda}$ n'est payé qu'une fois.

6.3 Normalisation

Les estimations ci-dessus concernent des vecteurs normalisés en L^2, alors que dans les calculs l'état fondamental et les fonctions de comparaison sont normalisés en $u = 1$. L'évaluation ponctuelle

n'est pas bornée sur $L^2(d^*u)$, donc la borne L^2 sur ω_λ ne dit rien sur $\omega_\lambda(1)$, et les estimations se transfèrent à une normalisation par une fonctionnelle linéaire bornée. La cible du théorème 3 fournit la naturelle : avec $\tau = \theta/\theta(1)$, définissons la fonctionnelle de moyenne positive

$$P(g) := \frac{\langle g, \theta\rangle}{\langle \tau, \theta\rangle} = \frac{\theta(1)}{\|\theta\|^2}\,\langle g, \theta\rangle, \qquad P(\tau) = 1, \tag{42}$$

la moyenne de g/τ pour le poids $\theta^2 d^*u$, une fenêtre de largeur logarithmique ≈ 0.2 autour de $u = 1$ (99.2% de la masse de $\theta^2 d^*u$ est dans $[\frac{2}{3}, \frac{3}{2}]$, tout sauf 10^{-6} dans $[\frac{1}{2}, 2]$) ; normaliser par $P(g) = 1$ revient à choisir le multiple de g le plus proche en L^2 de τ. Posons $\tilde{k}_\lambda = k_\lambda/P(k_\lambda)$, $\tilde{\eta}_\lambda = \eta_\lambda/P(\eta_\lambda)$. Puisque $k_\lambda \to \theta/\|\theta\|$ en L^2 de la fenêtre (théorème 4 et la limite de Hermite, au taux $O(\lambda^{-2})$), $a := P(k_\lambda) = \theta(1)/\|\theta\| + O(\lambda^{-2}) = 1.580 + O(\lambda^{-2})$, $b := P(\eta_\lambda/\|\eta_\lambda\|)$ satisfait $|a - b| \le \frac{\theta(1)}{\|\theta\|}\|k_\lambda - \eta_\lambda/\|\eta_\lambda\|\|$, et

$$\begin{aligned} \|\tilde{k}_\lambda - \tilde{\eta}_\lambda\| &\le \frac{\|\omega_\lambda\|}{a}\left(1 + \frac{\theta(1)}{\|\theta\|\,b}\right)(1 + o(1)) = (1.27 + o(1))\|\omega_\lambda\|, \\ \|\tilde{k}_\lambda - \tilde{\eta}_\lambda\|_1 &\le (1.27 + o(1))\sqrt{\lambda - 1}\,\|\omega_\lambda\|. \end{aligned} \tag{43}$$

Les exposants de (41) sont donc préservés pour la normalisation $P(\cdot) = 1$, et pour toute fonctionnelle bornée fixe non dégénérée sur θ.

Pour la normalisation stricte $\eta_\lambda(1) = 1$, il faut en outre $|\omega_\lambda(1)|$, c'est-à-dire un module de continuité de l'état fondamental en $u = 1$. Près de $u = 1$, le vecteur test est aussi régulier que h ($u\partial_u \mathcal{E}(f_\lambda) = \frac{1}{2}\mathcal{E}(f_\lambda) + u^{1/2}\sum_n nu\, f'_\lambda(nu)$, une somme rapidement convergente avec $O(1)$ termes), donc il est lipschitzien en $t = \log u$ sur $[\frac{1}{2}, 2]$ de constante $O(1)$. Si l'état fondamental est lipschitzien là de constante L_λ, en moyennant contre une bosse de largeur logarithmique r on obtient $|\omega_\lambda(1)| \le r^{-1/2}\|\omega_\lambda\| + (C + L_\lambda)r$, d'où

$$|\omega_\lambda(1)| \le C\|\omega_\lambda\|^{2/3}(1 + L_\lambda)^{1/3}, \qquad \left\|\frac{k_\lambda}{k_\lambda(1)} - \frac{\eta_\lambda}{\eta_\lambda(1)}\right\|_1 \le C\lambda^{-13/6}(\log\lambda)(1 + L_\lambda)^{1/3} \tag{44}$$

sous l'écart pair ($k_\lambda(1) \to \theta(1)/\|\theta\| \neq 0$). Puisque l'équation aux valeurs propres ne fournit que la régularité de Sobolev logarithmique, une borne sur L_λ est à présent une observation numérique. Dans les calculs, nous rapportons les deux normalisations et le rapport diagnostique $P(\eta_\lambda)/\eta_\lambda(1)$, qui vaut 1 pour τ lui-même.

6.4 Les trois distances

Soit $\theta_\lambda = \mathcal{E}(h_\lambda)$ avec h_λ comme dans (21), $\tau_\lambda = \theta_\lambda/\theta_\lambda(1)$ (ou sa version P-normalisée $\tilde{\tau}_\lambda$), et $\tau = \theta/\theta(1)$ la cible. La comparaison de l'état fondamental avec la cible se scinde en trois morceaux de tailles très différentes :

1. *état fondamental contre vecteur test* : $\|\tilde{\eta}_\lambda - \tilde{k}_\lambda\|_1 \le C\lambda^{-7/2}(\log\lambda)^{3/2}$ (écart pair ; $\lambda^{-3/2}$ pour l'écart complet), conditionnel à $\epsilon_\lambda \ge 0$ et à l'écart ;
2. *vecteur test contre* θ_λ : $\|\tilde{k}_\lambda - \tilde{\tau}_\lambda\|_1 \le C\lambda^{-1/2}\delta^{1/2}\log\lambda$ par le théorème 4 : la réparation de Gevrey et la coupure inférieure sont invisibles à l'échelle de la cible ;

3. θ_λ *contre* θ (prolate contre Hermite) : $h_\lambda - h$ est λ^{-2} fois une fonction de type Hermite (par exemple $h_{0,\lambda} = h_0 - \frac{\sqrt{6}}{32\pi}\lambda^{-2}h_4 + O(\lambda^{-4})$ uniformément sur $[-\lambda, \lambda]$), donc $|\theta_\lambda(u) - \theta(u)| \le C\lambda^{-2}u^{-1/2}$ pour $u \ge 1$ jusqu'à la queue de θ, et directement dans la norme L^1, sans perte de Schwarz,
$$\|\tilde\tau_\lambda - \tau\|_1 \le C\lambda^{-2}\log\lambda, \qquad \|\tau_\lambda - \tau\|_1 \le C\lambda^{-2}\log\lambda.$$

Par conséquent la distance à la cible $\|\eta_\lambda - \tau\|_1$ est dominée par le troisième morceau : elle devrait décroître comme $\lambda^{-2}\log\lambda$, une propriété de la limite de Hermite des fonctions prolates et non de la forme de Weil. L'information portée par le théorème 4 et l'écart n'est visible que si l'on compare l'état fondamental à τ_λ (ou à $\mathcal{E}$ du développement de Meixner-Schäfke au second ordre de h_λ) plutôt qu'à τ, et avec la normalisation $P(\cdot) = 1$. *Valeurs numériques.* Le Tableau 6.4 donne les quantités de l'Annexe C pour $5 \le \lambda^2 \le 250$, avec η_λ l'état fondamental de QW_λ^N normalisé par $\eta_\lambda(1) = 1$, $g_\lambda = \eta_\lambda - \tau_\lambda$, et des tildes pour la normalisation $P(\cdot) = 1$; θ_λ est évalué par la somme directe pour $u \ge 1$ et par l'expression duale (75) pour $u < 1$, et les intégrales par la règle des trapèzes en $t = \log u$ avec $2 \cdot 10^4$ et $4 \cdot 10^4$ intervalles sur $[0, \log\lambda]$, qui s'accordent à tous les chiffres montrés. À $\lambda^2 = 13$, $N = 120$, les valeurs coïncident avec un calcul indépendant de R.A. à dix chiffres près.

λ^2	N	$\|g_\lambda\|_1$	$\|\tilde\eta_\lambda - \tilde\tau_\lambda\|_1$	$\|\tau_\lambda - \tau\|_1$	$\|\tilde\tau_\lambda - \tau\|_1$	$P(\eta_\lambda)$	$1 - \rho_\lambda^2$	$\max\|\mathcal{M}g_\lambda\|$
5	960	$1.35 \cdot 10^{-4}$	$1.28 \cdot 10^{-4}$	$2.68 \cdot 10^{-2}$	$2.46 \cdot 10^{-2}$	0.96129	$1.18 \cdot 10^{-7}$	$2.30 \cdot 10^{-4}$
9	960	$4.63 \cdot 10^{-5}$	$4.26 \cdot 10^{-5}$	$1.44 \cdot 10^{-2}$	$1.30 \cdot 10^{-2}$	0.97976	$1.22 \cdot 10^{-8}$	$7.89 \cdot 10^{-5}$
13	1920	$1.00 \cdot 10^{-5}$	$9.09 \cdot 10^{-6}$	$9.86 \cdot 10^{-3}$	$8.85 \cdot 10^{-3}$	0.98632	$5.45 \cdot 10^{-10}$	$1.70 \cdot 10^{-5}$
22	960	$8.92 \cdot 10^{-6}$	$8.02 \cdot 10^{-6}$	$5.76 \cdot 10^{-3}$	$5.15 \cdot 10^{-3}$	0.99207	$4.17 \cdot 10^{-10}$	$1.51 \cdot 10^{-5}$
24	960	$7.04 \cdot 10^{-6}$	$6.33 \cdot 10^{-6}$	$5.27 \cdot 10^{-3}$	$4.71 \cdot 10^{-3}$	0.99275	$2.59 \cdot 10^{-10}$	$1.20 \cdot 10^{-5}$
28	960	$5.36 \cdot 10^{-6}$	$4.81 \cdot 10^{-6}$	$4.51 \cdot 10^{-3}$	$4.02 \cdot 10^{-3}$	0.99381	$1.49 \cdot 10^{-10}$	$9.10 \cdot 10^{-6}$
32	960	$3.58 \cdot 10^{-6}$	$3.21 \cdot 10^{-6}$	$3.94 \cdot 10^{-3}$	$3.51 \cdot 10^{-3}$	0.99460	$6.62 \cdot 10^{-11}$	$6.08 \cdot 10^{-6}$
36	960	$3.46 \cdot 10^{-6}$	$3.10 \cdot 10^{-6}$	$3.50 \cdot 10^{-3}$	$3.12 \cdot 10^{-3}$	0.99521	$6.16 \cdot 10^{-11}$	$5.88 \cdot 10^{-6}$
40	960	$3.00 \cdot 10^{-6}$	$2.68 \cdot 10^{-6}$	$3.14 \cdot 10^{-3}$	$2.80 \cdot 10^{-3}$	0.99569	$4.61 \cdot 10^{-11}$	$5.09 \cdot 10^{-6}$
50	1920	$2.01 \cdot 10^{-6}$	$1.79 \cdot 10^{-6}$	$2.51 \cdot 10^{-3}$	$2.24 \cdot 10^{-3}$	0.99657	$2.05 \cdot 10^{-11}$	$3.40 \cdot 10^{-6}$
100	2000	$5.78 \cdot 10^{-7}$	$5.14 \cdot 10^{-7}$	$1.25 \cdot 10^{-3}$	$1.11 \cdot 10^{-3}$	0.99829	$1.68 \cdot 10^{-12}$	$9.79 \cdot 10^{-7}$
150	2500	$2.87 \cdot 10^{-7}$	$2.56 \cdot 10^{-7}$	$8.33 \cdot 10^{-4}$	$7.41 \cdot 10^{-4}$	0.99887	$4.14 \cdot 10^{-13}$	$4.87 \cdot 10^{-7}$
250*	5000	$9.76 \cdot 10^{-8}$	$8.68 \cdot 10^{-8}$	$5.00 \cdot 10^{-4}$	$4.44 \cdot 10^{-4}$	0.99932	$4.80 \cdot 10^{-14}$	$1.65 \cdot 10^{-7}$

Les trois distances dans la norme $\|\cdot\|_1$, avec $\eta_\lambda(1) = \tau_\lambda(1) = 1$ (tildes : $P(\cdot) = 1$) ; $P(\eta_\lambda)$ est le rapport $P(\eta_\lambda)/\eta_\lambda(1)$, ρ_λ le recouvrement de θ_λ et η_λ, et $\max|\mathcal{M}g_\lambda|$ le maximum sur $\mathfrak{Re}\, s = \pm\frac12$, $|\mathfrak{Im}\, s| \le 100$. *État fondamental calculé par A.L.G. ; les distances sont calculées avec le même programme que les autres lignes.

1. *Le troisième morceau est exactement d'ordre* λ^{-2}. $\lambda^2\|\tau_\lambda - \tau\|_1$ décroît de 0.134 ($\lambda^2 = 5$) à 0.1251 ($\lambda^2 = 100$), 0.1250 ($\lambda^2 = 150$) et 0.1249 ($\lambda^2 = 250$), et est ajusté par $0.1247 + 0.044\lambda^{-2}$ pour $\lambda^2 \ge 22$; de même $\lambda^2\|\tilde\tau_\lambda - \tau\|_1 \to 0.111$. Le logarithme dans la borne $C\lambda^{-2}\log\lambda$ n'est donc pas présent. Ce morceau domine la distance à la cible : $\|\eta_\lambda - \tau\|_1$ s'accorde avec $\|\tau_\lambda - \tau\|_1$ à trois chiffres près pour tout λ.
2. *État fondamental contre* τ_λ. $\|g_\lambda\|_1$ est deux à trois ordres de grandeur plus petit, de $1.3 \cdot 10^{-4}$ à $9.8 \cdot 10^{-8}$, et un ajustement par moindres carrés sur les treize valeurs donne $\|g_\lambda\|_1 \approx C\lambda^{-3.5}$ (exposant -3.54, et -3.50 sans $\lambda^2 = 250$), c'est-à-dire l'exposant de l'estimation d'écart

pair (41), sans logarithme visible. Ces valeurs dépendent encore de la troncature : à $\lambda^2 = 13$, $\|g_\lambda\|_1 = 2.94,\ 2.12,\ 1.50,\ 1.23,\ 1.00\cdot 10^{-5}$ pour $N = 120, \dots, 1920$; à $\lambda^2 = 50$, $2.64,\ 2.41,\ 2.01\cdot 10^{-6}$ pour $N = 480, 960, 1920$; à $\lambda^2 = 100$, 5.38 et $5.78\cdot 10^{-7}$ pour $N = 1000, 2000$; à $\lambda^2 = 150$, 0.87 et $2.87\cdot 10^{-7}$ pour $N = 1500, 2500$, la valeur à $N = 2500$ étant celle de l'ajustement en $\lambda^{-3.5}$; à $\lambda^2 = 250$, 0.78, 1.02 et $0.98\cdot 10^{-7}$ pour $N = 3000$, 4000, 5000 (A.L.G.), les deux dernières à 4% l'une de l'autre et 15% en dessous de l'ajustement sur $\lambda^2 \le 150$. L'ordre de grandeur et l'exposant sont stables, les valeurs individuelles seulement à 10–20% ; les distances calculées à $N \le 5\lambda^2$ (par exemple $3.3\cdot 10^{-4}$ à $\lambda^2 = 100$, $N = 500$) mesurent la troncature, pas g_λ.

3. *Forme de la déviation.* g_λ est proportionnel à la cible suivante $\theta_1(b,\cdot)$ du §6.5 à un résidu relatif $L^2(d^*u)$ de $0.53\lambda^{-2}$ près (12% à $\lambda^2 = 5$, 1.1% à $\lambda^2 = 50$, 0.53% à $\lambda^2 = 100$, 0.35% à $\lambda^2 = 150$), et ce résidu est indépendant de N à trois chiffres près même là où l'amplitude ne l'est pas : l'état fondamental dévie de τ_λ dans la direction du deuxième vecteur propre, comme le prédit l'argument de Davis-Kahan.
4. *Normalisation.* $1 - P(\eta_\lambda)/\eta_\lambda(1) \approx 0.17\lambda^{-2}$ ($0.19\lambda^{-2}$ à $\lambda^2 = 5$), et $P(\tau_\lambda)/\tau_\lambda(1)$ est le même à 10^{-6} près : la différence entre les deux normalisations est une propriété de τ_λ, pas de l'état fondamental. En conséquence $\|\tilde\eta_\lambda - \tilde\tau_\lambda\|_1/\|g_\lambda\|_1$ est compris entre 0.89 et 0.95. Les rapports $1/\|\eta_\lambda\|$ et $\theta_\lambda(1)/\|\theta_\lambda\|$ s'accordent à $3\cdot 10^{-4}$ à $\lambda^2 = 5$, $2\cdot 10^{-5}$ à $\lambda^2 = 22$ et 10^{-6} à $\lambda^2 = 100$, et tous deux valent $\theta(1)/\|\theta\| + 0.27\lambda^{-2}$, avec $\theta(1)/\|\theta\| = 1.5799$.
5. *Transformée de Mellin et taille ponctuelle.* $\max_{\Re e\, s=\pm 1/2} |\mathcal{M}g_\lambda(s)| = 1.70\|g_\lambda\|_1$ pour tout λ, en dessous de la borne $2\|g_\lambda\|_1$ de (45) ; $\sup|g_\lambda| = (2.3\text{–}2.6)\|g_\lambda\|_1$, atteint près de $u = 1.41$; la contribution de $[\lambda/2, \lambda]$ à $\|g_\lambda\|_1$ est de 5% à $\lambda^2 = 13$ et inférieure à 10^{-9} de celle-ci pour $\lambda^2 \ge 22$. Le défaut de symétrie $\sup|\tau_\lambda - \tau_\lambda \circ \iota|$ est au niveau de l'arrondi en double précision ($\le 6\cdot 10^{-15}$), et $\eta_\lambda \circ \iota = \eta_\lambda$ exactement, le secteur pair étant utilisé.
6. *Recouvrements.* $1 - \rho_\lambda^2$ est le carré de l'angle entre η_λ et le vecteur prolate $\mathfrak{p}_1^{\mathrm{ev}}$ du Tableau 5.1, de $1.2\cdot 10^{-7}$ à $4\cdot 10^{-13}$ ($\lambda^2 = 150$) et $5\cdot 10^{-14}$ ($\lambda^2 = 250$).

6.5 La cible suivante

Pour le deuxième vecteur propre pair, la limite de Hermite se trouve dans la partie d'intégrale nulle de $\mathrm{span}\{h_0, h_4, h_8\}$, donc $\mathcal{E}$ d'une fonction de la forme $u^2 e^{-\pi u^2} \times$(polynôme de degré 6 en u^2), et par la proposition 2 sa transformée de Mellin est $\xi(s + \frac{1}{2})$ fois un polynôme de degré un en s^2. Un représentant commode, normalisé de façon à s'annuler au point de normalisation $u = 1$ de l'état fondamental, est $\theta_1(b,u) = \sqrt{u}\sum_{n\ge 1} d(b, nu)$ avec

$$d(b,u) = e^{-\pi u^2}u^2\,\big(\tfrac{1}{4}\sqrt{\tfrac{3}{2}}\big(32\pi^3u^6 - 224\pi^2u^4 + 350\pi u^2 - 105\big)\,b \\ + 16\pi^3u^6 - 112\pi^2u^4 + 210\pi u^2 - 105$$

et b déterminé par $\theta_1(b,1) = 0$, $b = -0.752437675253944081955 19\ldots$ À une échelle près, $d(b,\cdot)$ est la seule combinaison linéaire des fonctions de Hermite h_{4j}, $j = 0, 1, 2$, qui s'annule en 0 et est telle que $\theta_1(b,1) = 0$: les deux fonctions multipliant b et 1 dans $d(b,u)$ sont invariantes sous la transformée de Fourier et s'annulent en 0 (donc d'intégrale nulle), et elles engendrent les combinaisons de h_0, h_4, h_8 s'annulant en 0.

7 Transformées de Mellin et les zéros de ζ

7.1 Ce que la norme $\|\cdot\|_1$ contrôle

Pour g supportée dans $[\lambda^{-1},\lambda]$, $\mathcal{M}g(s)=\int g(u)u^s d^*u$ est entière, et pour $\sigma=\mathfrak{Re}\, s\in[-\frac12,\frac12]$

$$|\mathcal{M}g(s)|\le\int_1^\lambda |g|u^{1/2}d^*u+\int_{\lambda^{-1}}^1 |g|u^{-1/2}d^*u=\|g\|_1+\|g\circ\iota\|_1, \tag{45}$$

la seconde intégrale devenant $\|g\circ\iota\|_1$ sous $u\mapsto 1/u$. Ainsi la distance L^1 du §6.2 contrôle les transformées de Mellin uniformément sur la bande fermée $|\mathfrak{Re}\, s|\le\frac12$, qui est la bande critique de $\zeta(s+\frac12)$ par (10). Par Phragmén-Lindelöf le supremum sur la bande est atteint sur les deux lignes $\mathfrak{Re}\, s=\pm\frac12$, c'est-à-dire le plus grand des deux suprema des transformées de Fourier en t de $g(e^t)e^{\pm t/2}$, calculables par deux FFT ; le calculer à côté du membre de droite de (45) montre le jeu de la borne L^1. Pour g ι-paire les deux termes coïncident.

7.2 Zéros de la transformée de Mellin de l'état fondamental

Théorème 13 ([8, théorème 5.6])**.** *Soit $N\ge1$ et supposons que la plus petite valeur propre $\epsilon_\lambda^N(1)$ de QW_λ^N soit simple, de vecteur propre $\eta=\sum_{|j|\le N}\xi_j V_j$ pair ($\xi_{-j}=\xi_j$). Alors tous les zéros de la fonction entière $t\mapsto\mathcal{M}\eta(it)$ sont réels : ce sont les points $t=2\pi j/L$, $|j|>N$, et les $2N$ points $t=2\pi s/L$, s racine du polynôme*

$$P(s)=\sum_{|k|\le N}\xi_k\prod_{|j|\le N,\,j\ne k}(j-s), \tag{46}$$

dont toutes les racines sont réelles.

En effet $Q=QW_\lambda^N-\epsilon_\lambda^N(1)$ est une matrice symétrique réelle de la forme considérée dans [8] : par l'Annexe D (voir aussi [3, proposition 4.3]) ses coefficients hors diagonale sont $(b_n-b_m)/(n-m)$ avec $b_{-n}=-b_n$, et sa diagonale est paire en n ; elle est positive, de noyau $\mathbb{C}\eta$, paire sous $V_j\mapsto V_{-j}$. Le théorème 5.6 de [8] s'applique alors, après remise à l'échelle de l'intervalle $[0,1]$ de [8] à la fenêtre $[-\frac{L}{2},\frac{L}{2}]$ en $x=\log u$, où $\mathcal{M}\eta(it)=\int\eta(e^x)e^{itx}dx$. L'hypothèse est vérifiée à N fini : la plus petite valeur propre paire est séparée de la suivante paire et de la plus petite impaire par des facteurs comparables à δ_8/δ_4 et δ_6/δ_4 (Tableaux (4.2), (4.3)). Si de plus la plus petite valeur propre de QW_λ est simple et isolée, les états fondamentaux de QW_λ^N convergent en L^2 vers celui de QW_λ quand $N\to\infty$, leurs transformées de Mellin convergent uniformément sur les compacts, et par le théorème de Hurwitz les zéros de $\mathcal{M}\eta_\lambda$ sont réels également.

Remarque [comptage des zéros] Puisque P est pair, de degré $2N$, avec $P(0)\ne0$, ses racines vont par paires $\pm s$ et la fonction $t\mapsto\mathcal{M}\eta(it)$ a *au plus* N zéros dans $t>0$, comptés avec multiplicité, à l'exception des points $2\pi j/L$, $j>N$, avec égalité si et seulement si toutes les racines de P sont réelles. Cette borne n'utilise pas la positivité : elle n'utilise que le degré de P, de sorte qu'elle vaut aussi pour la fonction finie définie par des coefficients approchés (exportés). Par conséquent, si le signe de $\mathcal{M}\eta(it)$ est certifié en des points $0<t_0<t_1<\cdots$ (au-delà de $2\pi N/L$, le signe de $\mathcal{M}\eta(it)/\sin(tL/2)$, qui ne s'annule pas aux points $2\pi j/L$) et que N changements de signe sont trouvés, chaque intervalle de changement de signe contient exactement un zéro, qui est simple, le nombre de zéros réels positifs est exactement N, et il n'y a pas d'autre zéro, réel ou complexe :

la liste des zéros est complète, sans utiliser le théorème 13 et sans aucune borne sur les dérivées. Le coefficient dominant de P est $\sum_k \xi_k = \langle \eta | \sum_k V_k \rangle$, qui est très petit pour l'état fondamental (de l'ordre de $\epsilon_\lambda^N(1)^{1/2}$ dans nos calculs), et de même les moments suivants ; en conséquence, une partie des N zéros se trouve bien au-delà de $2\pi N/L$ (§7.3).

Par le théorème 3, $\mathcal{M}\tau(s) = \xi(s + \frac{1}{2})/(4\theta(1))$, dont les zéros dans la variable s sont les $\rho - \frac{1}{2}$, ρ les zéros non triviaux de ζ. Le théorème de Hurwitz sur les zéros des limites uniformes de fonctions holomorphes donne :

Proposition 14. *Soit $\lambda_j \to \infty$ et soit $\tilde{\eta}_{\lambda_j}$ les états fondamentaux normalisés par $P(\tilde{\eta}_{\lambda_j}) = 1$. Si*

$$\|\tilde{\eta}_{\lambda_j} - \tau\|_1 + \|(\tilde{\eta}_{\lambda_j} - \tau) \circ \iota\|_1 \longrightarrow 0,$$

alors $\mathcal{M}\tilde{\eta}_{\lambda_j} \to \xi(\cdot + \frac{1}{2})/(4\theta(1))$ uniformément sur la bande fermée $|\mathfrak{Re}\, s| \leq \frac{1}{2}$, tout zéro de $\xi(s + \frac{1}{2})$ dans la bande ouverte est limite de zéros de $\mathcal{M}\tilde{\eta}_{\lambda_j}$, et si ceux-ci sont réels (théorème 13) alors tous les zéros de ζ dans la bande critique ouverte sont sur la ligne critique.

Démonstration. La convergence uniforme est (45) appliqué à $g = \tilde{\eta}_{\lambda_j} - \tau \mathbf{1}_{[\lambda_j^{-1}, \lambda_j]}$ (la queue de τ hors de la fenêtre est négligeable dans les deux normes). Le théorème de Hurwitz s'applique sur tout disque à l'intérieur de la bande ouverte puisque la limite n'est pas identiquement nulle ; une limite de points réels est réelle. □

Remarque [sur la logique] La convergence requise dans la proposition 14 est ce que la Section 6 estime, mais sous l'hypothèse $QW_\lambda \geq 0$ pour les λ considérés, qui pour tout λ est équivalente à la conclusion. Les résultats conditionnels ne donnent donc pas une preuve ; ce qu'ils montrent est que l'image est auto-cohérente - la positivité et l'échelle de Fuchs forcent l'état fondamental sur la cible, dont la transformée de Mellin est ξ - et que la distance à contrôler décroît comme $\lambda^{-2} \log \lambda$, entièrement à cause de la convergence prolate-vers-Hermite. Un traitement inconditionnel devrait remplacer la positivité par de l'information sur la mesure spectrale de QW_λ, ce qui est exactement la direction de la borne inférieure de l'hypothèse 6.

7.3 Calculs

Le phénomène a été découvert dans [3, §6], où les zéros de $\mathcal{M}\eta$ apparaissent comme le spectre d'une perturbation de rang un auto-adjointe de l'opérateur d'échelle : avec $N = 120$, les 50 premiers zéros de ζ sont reproduits pour $\lambda^2 = 12$, 13, 14, le premier à $3.4 \cdot 10^{-50}$, $2.4 \cdot 10^{-55}$ et $1.1 \cdot 10^{-60}$ près respectivement, et le cinquantième à environ 10^{-3} près pour $\lambda^2 = 13$. À $\lambda = 16$ ($\lambda^2 = 256$), il a alors été observé par R.A., avec une précision bien plus grande ; il a été reproduit par A.L.G. avec un calcul indépendant de l'état fondamental à $N = 1500$ (secteur pair de dimension 1501, 3400 chiffres décimaux, ordre de quadrature 18816), pour lequel $\epsilon_\lambda^N(1) = 6.142 \cdot 10^{-1195}$, c'est-à-dire $-\log_{10} \epsilon_\lambda^N(1) = 1194.21$. Les zéros t_j de $t \mapsto \mathcal{M}\eta(it)$ près des 200 premières ordonnées γ_j des zéros de ζ ont été isolés comme décrit ci-dessous, et nous les avons recalculés indépendamment à partir des coefficients exportés, avec des résultats identiques. Avec $D_j = -\log_{10} |t_j - \gamma_j|$:

j	γ_j	D_j ($\lambda^2 = 256,\ N = 1500$)
1	14.13472514	1190.12
2	21.02203964	1186.54
10	49.77383248	1168.90
50	143.11184581	1108.98
100	236.52422967	1047.95
150	318.85310426	994.49
200	396.38185422	944.15

Toutes les différences $t_j - \gamma_j$ sont positives, et D_j décroît de 1190 à 944, comparable aux valeurs (environ 1150 à 950) du calcul original de R.A., dont la troncature n'est pas enregistrée. Notons que $-\log_{10}\epsilon_\lambda^N(1) - D_1 = 4.090$, et 4.086 à $\lambda^2 = 250$ ci-dessous, de sorte que $|t_1 - \gamma_1| \approx 1.2 \cdot 10^4\,\epsilon_\lambda^N(1)$ dans les deux cas, bien que $N = 1500 \approx 6\lambda^2$ soit loin du régime convergé du §4 : la précision des zéros est régie par la valeur propre de la forme tronquée, pas par sa distance à la limite. Au-delà des 200 premiers zéros, D_j décroît jusqu'à 570 à $t = 1000$ et 254 à $t = 1500$, puis chute brusquement à 0 entre $t = 1680$ et $t = 1730$ (Figure 7.3) : à cette troncature l'accord se termine à la plus haute log-fréquence $2\pi N/L = 1699.6$ de la base, alors qu'à $\lambda^2 = 250$ avec $N = 3000$ et 4000 ($2\pi N/L = 3414$ et 4553) il se termine plus tôt, près de $t \approx 3100$, indépendamment de N.

Un calcul indépendant d'A.L.G. à $\lambda^2 = 250$ confirme le phénomène, avec les troncatures $N = 3000$ et $N = 4000$ du §4 (secteurs pairs de dimension 3001 et 4001, états fondamentaux calculés avec 2900 chiffres décimaux). Dans la variable $s = it$, t réel, et pour η dans le secteur pair de coefficients v_j dans la base b_j, la transformée est la somme finie

$$\mathcal{M}\eta(it) = 2\sin\left(\tfrac{tL}{2}\right)\left(\frac{v_0}{\sqrt{L}\,t} + \sqrt{\tfrac{2}{L}}\,t\sum_{j=1}^{N}\frac{v_j}{t^2 - a_j^2}\right), \qquad a_j = \frac{2\pi j}{L}, \quad L = \log\lambda^2, \tag{47}$$

dont les zéros autres que ceux de $\sin(tL/2)$ ont été localisés près des 200 premières ordonnées γ_j des zéros de ζ par la méthode de Newton suivie d'une inclusion par Newton-intervalle, à 1500 puis à 1800 chiffres décimaux, avec des résultats identiques. Les 200 racines t_j sont toutes simples et isolées, et satisfont $t_j > \gamma_j$. Avec $D_j = -\log_{10}|t_j - \gamma_j|$:

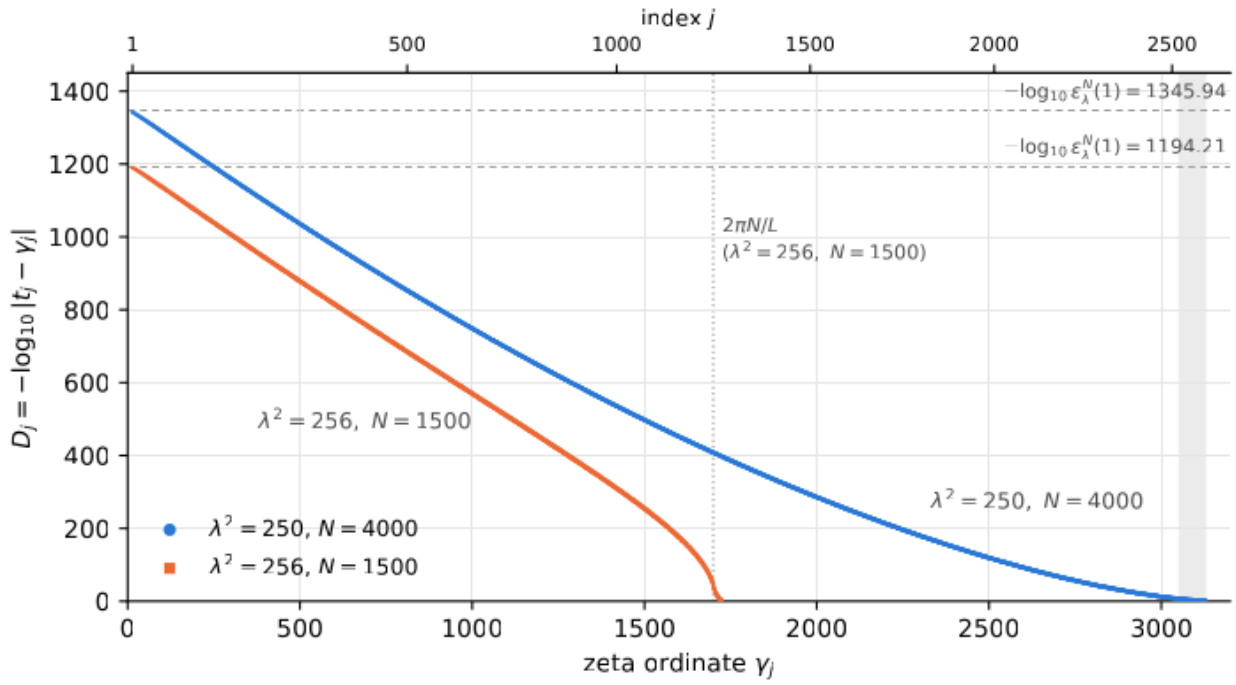
j	γ_j	D_j ($N = 3000$)	D_j ($N = 4000$)
1	14.13472514	1341.68	1341.86
2	21.02203964	1338.10	1338.28
10	49.77383248	1320.51	1320.69
50	143.11184581	1260.99	1261.17
100	236.52422967	1200.76	1200.94
150	318.85310426	1148.34	1148.52
200	396.38185422	1099.30	1099.48

Nous avons vérifié ces valeurs indépendamment, en évaluant directement (47) avec les coefficients exportés de l'état fondamental $N = 4000$: les différences $t_1 - \gamma_1 = 1.38999579112714 \cdot 10^{-1342}$ et $t_{200} - \gamma_{200} = 3.31178230707278 \cdot 10^{-1100}$ sont reproduites à tous les chiffres montrés, et l'ordonnée de

référence γ_1 s'accorde avec une évaluation indépendante à 1400 chiffres près. La précision est régie par la plus petite valeur propre : entre $N = 3000$ et $N = 4000$, $-\log_{10}\epsilon_\lambda(1)$ augmente de 0.1799, et chaque D_j, $1 \le j \le 200$, augmente du même montant, entre 0.1799 et 0.1804, et de nouveau de $N = 4000$ à $N = 5000$ (A.L.G.) : 0.06520 pour $-\log_{10}\epsilon_\lambda(1)$, entre 0.06508 et 0.06520 pour les D_j ($D_1 = 1341.92$, $D_{200} = 1099.55$ à $N = 5000$) ; ainsi $|t_j - \gamma_j|$ est proportionnel à $\epsilon_\lambda(1)$, uniformément en j, et $|t_1 - \gamma_1| \approx 1.2 \cdot 10^4\,\epsilon_\lambda(1)$ (à $N = 4000$, $-\log_{10}\epsilon_\lambda(1) = 1345.94$ et $-\log_{10}\delta_4(\lambda) = 1347.21$).

Au-delà des 200 premiers zéros, nous avons localisé tous les changements de signe de $t \mapsto \mathcal{M}\eta(it)$ sur l'axe réel (pas de grille 0.01 jusqu'à $t = 2200$ et 0.02 jusqu'à $t = 3500$, le signe en chaque point de la grille étant certifié en arithmétique de boules avec jusqu'à 7000 bits, puisque $|\mathcal{M}\eta(it)|$ décroît comme $|\Xi(t)|$). Pour $N = 4000$, les zéros de $\mathcal{M}\eta$ dans $(0, 3000]$ sont exactement les 2469 zéros de ζ dans cet intervalle, un pour un, chacun à 10^{-12} près (la résolution de la bissection), avec $D_j = 749.07$ à $t = 999.79$ ($j = 649$), 535.23 à $t = 1419.42$ ($j = 1000$), 213.96 à $t = 2197.26$ ($j = 1700$) et environ 12 à $t = 3000$. Il n'y a pas d'autre zéro dans cet intervalle, réel ou complexe, par le comptage certifié décrit ci-dessous. L'accord se dégrade ensuite à environ 6 chiffres à $t = 3050$ et disparaît près de $t = 3110$; au-delà, les zéros de $\mathcal{M}\eta$ ne sont plus proches de ceux de ζ (195 contre 197 dans $[3000, 3200]$), et leur densité, environ 0.94 par unité de longueur, est plus petite que celle des zéros de ζ et proche de $L/2\pi \approx 0.88$. La même rupture se produit à $t \approx 3000$–3100 pour $N = 3000$, de sorte qu'elle est régie par λ et non par la troncature. La Figure 7.3 montre D_j pour tous les zéros jusqu'à la rupture.

La liste des zéros est complète. A.L.G. a certifié, pour $\lambda^2 = 250$, $N = 3000$, 4000, 5000, et pour $\lambda^2 = 256$, $N = 1500$, exactement N intervalles disjoints sur lesquels $\mathcal{M}\eta(it)$ (au-delà de $2\pi N/L$: $\mathcal{M}\eta(it)/\sin(tL/2)$) change de signe, les signes aux extrémités étant certifiés en arithmétique de boules, avec les coefficients décimaux exportés pris comme exacts. Nous avons confirmé ces quatre certificats indépendamment, en évaluant les signes à toutes les extrémités avec notre propre programme, et pour $\lambda^2 = 250$, $N = 4000$, un balayage indépendant du nôtre (pas de grille 0.01 jusqu'à $t = 6000$, puis géométrique jusqu'à $t = 10^7$) trouve les mêmes 4000 intervalles. Par la Remarque 7.2, chaque intervalle contient exactement un zéro, qui est simple, et la transformée finie n'a pas d'autre zéro, réel ou complexe. De ces zéros, 2866, 3907, 4928 se trouvent en dessous de $2\pi N/L$ pour $N = 3000$, 4000, 5000 ($\lambda^2 = 250$), et 1245 pour $N = 1500$ ($\lambda^2 = 256$) ; ainsi, pour $N = 4000$, $\mathcal{M}\eta$ a 3907 zéros jusqu'à $2\pi N/L = 4551.8$, contre 4048 pour ζ. Les 134, 93, 72 et 255 zéros restants se trouvent au-delà de $2\pi N/L$, à des distances croissantes, le dernier à $t \approx 8.22 \cdot 10^5$ pour $\lambda^2 = 250$ (pour les trois valeurs de N) et $t \approx 5.53 \cdot 10^5$ pour $\lambda^2 = 256$. Cela reflète la petitesse de tous les moments $\sum_j v_j a_j^{2m}$ dans (47) : pour $\lambda^2 = 250$, $N = 4000$, $\sum_k \xi_k = -5.4 \cdot 10^{-672}$, $\sqrt{2}\sum_j v_j a_j^2 = 4.4 \cdot 10^{-660}$, $\sqrt{2}\sum_j v_j a_j^4 = -5.8 \cdot 10^{-649}$. Au-delà de la rupture, $|\mathcal{M}\eta(it)|$ reste près de 10^{-675}, de l'ordre de $\epsilon_\lambda(1)^{1/2}$, au lieu de suivre $|\Xi(t)|$.



Le nombre de chiffres d'accord $D_j = -\log_{10}|t_j - \gamma_j|$ entre les zéros t_j de $t \mapsto \mathcal{M}\eta(it)$ et les ordonnées γ_j des zéros de ζ, tracé contre γ_j (axe inférieur) et j (axe supérieur), un point par zéro (les points fusionnent en courbes) : $\lambda^2 = 250$, $N = 4000$, $j = 1, \dots, 2596$, et $\lambda^2 = 256$, $N = 1500$, $j = 1, \dots, 1268$ (états fondamentaux calculés par A.L.G.). Tirets : les niveaux $-\log_{10}\epsilon_\lambda^N(1)$. Pointillé : $2\pi N/L$ pour $\lambda^2 = 256$, $N = 1500$, où cette courbe se termine ; grisé : $t \approx 3050$–3130, où l'accord disparaît pour $\lambda^2 = 250$. Chaque t_j est obtenu par la méthode de Newton à partir de γ_j avec les coefficients exportés de l'état fondamental, à une précision dépassant D_j d'au moins 150 chiffres ; pour $j \le 200$ les valeurs s'accordent avec les encadrements par intervalles d'A.L.G. à $5 \cdot 10^{-9}$ près.

Deux échelles régissent la précision. En λ, la distance entre l'état fondamental et τ_λ est contrôlée par $\delta_4(\lambda)$, c'est-à-dire par $4\pi\lambda^2$ nats, soit $\log_{10}(1/\delta_4(16)) \approx 1390$ chiffres décimaux ; c'est l'ordre de grandeur observé, la perte étant due à la normalisation et à la correction prolate-vers-Hermite, qui affecte cependant $\mathcal{M}\tau_\lambda$ et $\mathcal{M}\tau$ d'un facteur proche de un près des zéros. Le long de la ligne, l'erreur sur un zéro à la hauteur t est l'erreur sur $\mathcal{M}(\tilde{\eta}_\lambda - \tau)(it)$ divisée par $|\partial_s \mathcal{M}\tau(it)| \asymp |\Xi'(t)|$, et $\Xi(t)$ décroît comme $e^{-\pi t/4} t^{7/4}$: on s'attend à une perte d'environ $\frac{\pi}{4 \ln 10}\, t \approx 0.34$ chiffre par unité de t, soit environ 130 chiffres entre le premier zéro ($t = 14.13$) et le 200e ($t = 396.4$), à comparer à la perte observée d'environ 200. À $\lambda^2 = 250$, la perte supplémentaire est confirmée et est systématique : la perte $D_1 - D_j$ est 21.2, 80.7, 140.9, 242.4 pour $j = 10, 50, 100, 200$, tandis que $\log_{10}|\Xi'(\gamma_1)/\Xi'(\gamma_j)|$, calculé à partir des valeurs exactes de Ξ' aux zéros, est 11.0, 41.6, 73.0, 127.4 ; sur les 200 zéros un ajustement par moindres carrés donne $D_1 - D_j \approx 1.90 \log_{10}|\Xi'(\gamma_1)/\Xi'(\gamma_j)|$, avec des résidus de 0.6 chiffre. Empiriquement, $|t_j - \gamma_j|$ se comporte comme $\epsilon_\lambda(1)\,|\Xi'(\gamma_j)|^{-1.9}$, c'est-à-dire proche du carré du facteur $|\Xi'(\gamma_j)|^{-1}$ prédit par l'argument au premier ordre ci-dessus.

8 Vers la positivité conditionnelle : la formule de trace et le conditionnement prolate

Les calculs de la Section 5 montrent que, une fois factorisés les images $\mathcal{E}$ des fonctions prolates avec $|\chi_n| \approx 1$ et la forme de pôle, rien de minuscule ne subsiste dans le spectre de QW_λ. L'image

heuristique qui émerge est celle d'une somme directe : la forme de Weil sur la fenêtre est la somme d'une partie de dimension finie, très proche du radical de la forme quadratique de Weil globale et bien décrite par la partie basse de l'opérateur d'incertitude U_λ, avec son échelle de Fuchs de valeurs propres, et d'une partie de dimension infinie, sur laquelle la forme est minorée par une constante positive et dont l'origine réside dans l'espace de Sonin, où l'opérateur d'incertitude prend sa valeur maximale 2. Dans cette section, nous expliquons pourquoi on doit s'y attendre, et nous prouvons un énoncé plus faible de même forme (théorème 26) : sous une hypothèse quantitative sur les projections de coupure semilocales, qui est valable dans le cas archimédien, sur le complément orthogonal d'un espace de dimension finie explicite de vecteurs construits à partir des modes quasi-auto-duaux, la forme de Weil est minorée par une constante positive explicite. Chemin faisant, nous prouvons le principe d'incertitude semilocal (lemme 18) : aucune fonction non nulle K_S-invariante sur l'espace des classes d'adèles semilocal n'est supportée dans $\{|x| \leq t\}$ en même temps que sa transformée de Fourier ; cela découle de la non-nullité de l'espace de Sonin semilocal par le lemme de Coburn. Nous expliquons aussi comment cela réduit la positivité de QW_λ à un bloc de dimension finie (§8.6), et nous comparons avec les nombres du §5 et avec le cas archimédien traité dans [5] (§8.7).

Notre objectif principal dans cette section, outre le résultat technique mentionné ci-dessus, est d'expliquer comment utiliser la formule de trace semilocale pour prouver la positivité conditionnelle. Les idées principales sont les suivantes.

1. Les conditions de pôle sont multiplicatives. Le terme de pôle de la formule explicite pour $h = f * f^*$ est $W_{0,2}(h) = 2\mathcal{M}f(\frac{1}{2})\mathcal{M}f(-\frac{1}{2})$ (lemme 10), de sorte que conditionner f par les deux fonctionnelles de pôle, ce que font les calculs, annule le terme de pôle de h (une seule condition sur la somme $\mathcal{M}f(\frac{1}{2}) + \mathcal{M}f(-\frac{1}{2})$ ne suffirait pas, puisque le terme de pôle de h est le produit des deux fonctionnelles de f, et non leur somme ; dans chaque ι-secteur les deux fonctionnelles coïncident au signe près et une condition suffit), et la forme de Weil de f devient la somme des termes locaux de la formule explicite seule, à laquelle s'applique la formule de trace.
2. La formule de trace semilocale de [10], sous la forme différentielle quantifiée de [4], Chapitre 2 ([5] pour le place archimédienne), écrit cette somme de termes locaux, pour des fonctions test supportées dans la fenêtre $[\lambda^{-1}, \lambda]$ et S contenant les premiers $p \leq \lambda^2$, comme la trace de l'action d'échelle contre l'opérateur d'incertitude à l'échelle 1 : $QW_\lambda(f, f) = \mathrm{Tr}\Big(\theta(f)(1 - P - \widehat{P})\theta(f)^*\Big)$. La condition de support est essentielle ici, à deux titres : elle fait $\mathcal{E}_S = \mathcal{E}$ sur la fenêtre, et c'est elle qui identifie la trace à la forme de Weil, alors que la forme quadratique $f \mapsto \mathrm{Tr}(\theta(f)(1 - P - \widehat{P})\theta(f)^*)$ prise en elle-même, avec $S = \{\infty\}$, n'est pas positive sur des intervalles plus grands, comme montré dans [5]. Déplacer les coupures de l'échelle 1 à une échelle $\sigma > 1$ produit le terme additif explicite $2\log\sigma\|f\|^2$ (lemme 16), qui est la marge, et l'opérateur $1 - P_\sigma - \widehat{P}_\sigma$ vaut $+1$ sur l'espace de Sonin à l'échelle σ, une pièce positive qu'il n'est pas besoin de contrôler, et $\pm\kappa_n(\sigma)$ sur les paires prolates, dont la partie négative est ce que le conditionnement doit supprimer.
3. La convolution par f multiplie l'échelle par λ : puisque f est supportée dans $[\lambda^{-1}, \lambda]$, l'opérateur $\theta(f)$ envoie $\mathrm{Range}\, P_t$ dans $\mathrm{Range}\, P_{\lambda t}$ et $\mathrm{Range}\, \widehat{P}_t$ dans $\mathrm{Range}\, \widehat{P}_{\lambda t}$ (lemme 23). C'est la seconde utilisation clé de la condition de support : la fonction test agit sur la paire à l'échelle σ comme l'opérateur de convolution $\theta(f)$ et la transporte dans la paire à l'échelle $\lambda\sigma$, de sorte que la partie négative ne peut agir qu'à travers les composantes $\langle\theta(f)e_n, e_m^\lambda\rangle$ de $\theta(f)e_n$ le long des directions e_m^λ, $m \in M$, à l'échelle $\lambda\sigma$, qui sont plus auto-duales que e_n (proposition

24). Le point clé est que ces composantes sont des produits scalaires de f en tant que *vecteur* : $\langle\theta(f)e_n, e_m^\lambda\rangle = \langle f, e_m^\lambda * e_n^*\rangle$ par la propriété fondamentale (48) du produit scalaire sur $L^2(\mathbb{R}_+^*, d^*u)$, de sorte que les annuler est un conditionnement de f par les vecteurs explicites $e_m^\lambda * e_n^*$.

4. Les vecteurs e_m^λ sont les images $\mathcal{E}$ des fonctions prolates. Par [7], proposition 4.1, $\eta_S(h_{m,t}) \in$ Range P_t^S et $\eta_S(\widehat{h}_{m,t}) \in$ Range $\widehat{P}_t^S$, avec $\mathbb{F}_S\eta_S = \eta_S\mathbb{F}_\infty$ parce que $\mathbf{1}_{R_S}$ est sa propre transformée de Fourier ; donc $\eta_S(h_{m,t})$, qui sur la fenêtre est $\mathcal{E}(h_{m,t})$, est un vecteur propre approché de $P_t + \widehat{P}_t - 1$ avec valeur propre proche de 1 pour les modes quasi-auto-duaux, et l'enveloppe V_M des vecteurs propres de paires exactes e_m^λ est, à l'identification des directions quasi-auto-duales de la paire semilocale discutée au §8.8 près, l'enveloppe des images $\mathcal{E}$ des fonctions prolates à l'échelle $\lambda\sigma$, c'est-à-dire les vecteurs utilisés pour le conditionnement dans la Section 5, vus à travers les filtres de convolution e_n^*, $n \le n_0$.

8.1 Le cadre semilocal

Soit S un ensemble fini de places de $\mathbb{Q}$ contenant ∞ et tous les premiers $p \le \lambda^2$, $\mathbb{A}_S = \prod_{v\in S}\mathbb{Q}_v$, $\Gamma = \{\pm p_1^{n_1}\cdots p_k^{n_k}\}$ les S-unités, $X_S = \mathbb{A}_S/\Gamma$, $C_S = \mathrm{GL}_1(\mathbb{A}_S)/\Gamma$ et K_S le noyau du module $C_S \to \mathbb{R}_+^*$. Nous utilisons le cadre de [4], Chapitre 2, §7 : l'espace de Hilbert $L^2(X_S)$ est le complété de l'espace de Bruhat-Schwartz de $\mathbb{A}_S$ pour le produit scalaire $\langle E(f_1), E(f_2)\rangle$ ([4], définition 2.31), $E(f)(x) = |x|^{1/2}\sum_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma x)$ (proposition 2.30), et E s'étend en une unitaire $w : L^2(X_S) \to L^2(C_S)$ qui entrelace l'action d'échelle ϑ_a avec $|\lambda|^{1/2}$ fois la représentation régulière de C_S ((2.257) là-bas). La partie K_S-invariante de $L^2(X_S)$ est identifiée à $L^2(\mathbb{R}_+^*, d^*u)$, et dans cette image :

- l'action d'échelle de C_S devient la représentation régulière, $(\theta(v)g)(u) = g(v^{-1}u)$, de sorte que pour $f \in L^1(\mathbb{R}_+^*, d^*u)$ l'opérateur $\theta(f) = \int f(v)\theta(v)d^*u[v]$ est la convolution $\theta(f)g = f * g$, $(f*g)(u) = \int f(v)g(u/v)d^*u[v]$, avec $\theta(f)^* = \theta(f^*)$, $f^*(u) = \overline{f(u^{-1})}$. Dans la variable de Mellin, $\mathcal{M}g(s) = \int g(u)u^s d^*u$ comme dans (10), $\theta(f)$ est le multiplicateur par $\mathcal{M}f$ sur la ligne $\mathfrak{Re}\, s = 0$, $\|g\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int |\mathcal{M}g(it)|^2 dt$, et

$$\langle g, h\rangle = \int g\,\bar{h}\,d^*u = (g * h^*)(1), \qquad (g*h)^* = g^* * h^*; \tag{48}$$

- pour $t > 0$, P_t est la multiplication par $\mathbf{1}_{(0,t]}$ (fonctions supportées dans $\{|x|_S \le t\}$), et $\widehat{P}_t = \mathbb{F}_S P_t \mathbb{F}_S^{-1}$, où $\mathbb{F}_S$ est la transformée de Fourier de X_S induite par les transformées de Fourier locales pour le caractère de base $\alpha = \prod_v \alpha_v$ ([4], lemme 2.33, et (2.264)-(2.265)) ; $P_1 = P$, $\widehat{P}_1 = \widehat{P}$;

— sous w, la transformée de Fourier est l'inversion composée avec un multiplicateur unitaire : $\mathbb{F}_S = w^{-1}\circ I\circ U\circ w$ avec I l'inversion $u \mapsto u^{-1}$ et U le multiplicateur de Mellin par $u = \prod_{v\in S} u_v\circ\pi_v$, le produit des rapports de facteurs locaux ([4], lemme 2.34, (2.258)-(2.260)) ; nous écrivons $\mathbb{F}_S = I\circ U$ sur $L^2(\mathbb{R}_+^*, d^*u)$. Puisque $\mathbb{F}_S^2 = 1$ sur les fonctions K_S-invariantes ($-1 \in \Gamma$), $IUIU = 1$, c'est-à-dire

$$IUI = U^*, \qquad IP_tI = 1 - P_{1/t}, \qquad \widehat{P}_t = IUP_tU^*I. \tag{49}$$

Pour $S = \{\infty\}$ c'est le cadre archimédien de [5] : $L^2(\mathbb{R})^{ev}$, P_t la projection sur les fonctions supportées dans $[-t,t]$, $\widehat{P}_t$ sur les fonctions à bande limitée, U le multiplicateur par $u_\infty(s) = \Gamma_{\mathbb{R}}(\frac{1}{2}-s)/\Gamma_{\mathbb{R}}(\frac{1}{2}+s)$ (avec la convention de Mellin (10), la transformée de Fourier d'une fonction

paire f satisfait $\int_0^\infty \widehat{f}(y)y^{-s-1/2}dy = u_\infty(s)\int_0^\infty f(x)x^{s-1/2}dx$, ce qui est (49) avec $g = x^{1/2}f$; sur la ligne $u_\infty(it) = e^{-2i\theta(t)}$, avec θ la fonction angulaire de Riemann-Siegel, est le conjugué complexe de la fonction (160) de [5], parce que la dualité (21) là-bas est v^{-is} tandis que (10) utilise u^s), et le théorème 1 décrit complètement la paire $(P_t, \widehat{P}_t)$.

L'application $\mathcal{E}$ semilocale est $\mathcal{E}_S(f)(u) = u^{1/2}\sum_{n\in\Gamma_+\cap\mathbb{Z}} f(nu)$, la somme sur les S-entiers positifs ; c'est $w\circ\eta_S$ avec $\eta_S(f)$ la classe de $\mathbf{1}_{R_S}\otimes f$, R_S l'anneau compact maximal de $\prod_{p\in S}\mathbb{Q}_p$ ([7], (44)-(46)). Pour f supportée dans $[-\lambda,\lambda]$ et $u \geq \lambda^{-1}$, seuls $n \leq \lambda/u \leq \lambda^2$ contribuent à $\mathcal{E}(f)(u)$, et de tels n sont des S-entiers : donc $\mathcal{E}_S(f) = \mathcal{E}(f)$ sur la fenêtre $[\lambda^{-1},\lambda]$, et tout ce qui est dans la Section 5 peut être lu dans $L^2(X_S)^{K_S}$.

8.2 La formule de trace et sa forme à deux paramètres

Nous utilisons la formule explicite sous la forme (6) : pour $h = f * f^*$ avec f réelle, $QW_\lambda(f,f) = W_{0,2}(h) - \sum_{v\in S} W_v(h)$, les places $p \notin S$ ne contribuant pas puisque h est supportée dans $[\lambda^{-2},\lambda^2]$ et $p > \lambda^2$. La formule de trace semilocale identifie la somme des termes locaux avec une trace. Nous l'énonçons sous la forme où nous l'utilisons.

Théorème 15 ([10] ; [4], L=lemme 2.35 et théorème 2.36)**.** *Soit f une fonction réelle C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ supportée dans $[\lambda^{-1},\lambda]$ et $h = f*f^*$. L'opérateur $\theta(h)(1-P-\widehat{P})$ sur $L^2(X_S)^{K_S}$ est à trace et*

$$\sum_{v\in S} W_v(h) = -\mathrm{Tr}\Big(\theta(h)(1-P-\widehat{P})\Big) = -\tfrac{1}{2}\mathrm{Tr}\Big(\theta(h)\,u^*[H,u]\Big), \qquad H = 2P-1. \tag{50}$$

Par conséquent, si $\mathcal{M}f(\pm\frac{1}{2}) = 0$, alors $W_{0,2}(h) = 0$ (lemme 10) et

$$QW_\lambda(f,f) = \mathrm{Tr}\Big(\theta(f)(1-P-\widehat{P})\theta(f)^*\Big). \tag{51}$$

Sous la forme de [4], le lemme 2.35 écrit l'opérateur de coupure $R_\Lambda = \widehat{P}_\Lambda P_\Lambda$ conjugué par l'action d'échelle comme $\widehat{h}\Big(\frac{1}{2}u^{-1}\,\eth u\,\Pi_{[-\infty,\log\Lambda/2\pi]} + \Pi_{[0,\log\Lambda/2\pi]}\Big)\widehat{h}$, avec la différentielle quantifiée $\eth u = [H_{\mathrm{CM}}, u]$ de la fonction u de (49) et $H_{\mathrm{CM}} = 2\mathbb{F}_C\mathbf{1}_{\{|u|\geq 1\}}\mathbb{F}_C^{-1} - 1$; puisque $H_{\mathrm{CM}} = -H$ dans notre notation, $\frac{1}{2}u^{-1}\eth u = -\frac{1}{2}u^*[H,u] = P+\widehat{P}-1$ par (49) (en effet $\frac{1}{2}u^*[H,u] = U^*PU - P = (1-\widehat{P})-P$), et la preuve du théorème 2.36 là-bas montre que $\widehat{h}\,\frac{1}{2}u^{-1}\eth u$ est à trace pour tout h de Schwartz, parce que $\eth f$ est d'ordre infini pour f de Schwartz et que toutes les dérivées de u sont à croissance tempérée (u_p est lisse et périodique, $u_\infty^{(n)}(s) = O(\log^n|s|)$). L'identification de $\mathrm{Tr}(\widehat{h}\,\frac{1}{2}u^{-1}\eth u)$ avec $\sum_{v\in S} W_v(h)$, c'est-à-dire avec les valeurs principales de (2.271) là-bas, est [4], §8. La formule de trace de [4] est énoncée sur l'espace complet $L^2(X_S)$, pour $h \in \mathcal{S}(C_S)$; pour h une fonction du module, $\theta(h) = \theta(h)P_{K_S}$ avec $P_{K_S} = \int_{K_S}\theta(k)dk$ la projection sur la partie K_S-invariante, de sorte que la trace se réduit à $L^2(X_S)^{K_S}$, et les termes locaux $\int'_{\mathbb{Q}_v^*} h(|u|^{-1})|1-u|^{-1}d^*u[u]$ sont les $W_v(h)$ de Weil dans la normalisation de (7)-(8).

L'opérateur $1-P-\widehat{P}$ est l'opérateur d'incertitude U_1 de (2) à l'échelle 1, décalé de -1 ; il est borné, et la trace existe parce que $\theta(h)$ est un multiplicateur de Mellin à symbole à décroissance rapide. Le lemme suivant déplace les coupures.

Lemme 16 (forme à deux paramètres)**.** *Sous les hypothèses du théorème 15, pour tous $t, w > 0$ l'opérateur $\theta(h)(1 - P_t - \widehat{P}_w)$ est à trace et*

$$\mathrm{Tr}\Big(\theta(h)(1 - P_t - \widehat{P}_w)\Big) = \mathrm{Tr}\Big(\theta(h)(1 - P - \widehat{P})\Big) - \log(tw)\, h(1). \tag{52}$$

En particulier, si $\mathcal{M}f(\pm\frac{1}{2}) = 0$, alors pour tout $\sigma > 0$

$$QW_\lambda(f, f) = 2\log\sigma\, \|f\|^2 + \mathrm{Tr}\Big(\theta(f)(1 - P_\sigma - \widehat{P}_\sigma)\theta(f)^*\Big). \tag{53}$$

Démonstration. Pour $t \geq 1$, $P_t - P_1$ est la multiplication par $\mathbf{1}_{(1,t]}$, et $\theta(h)(P_t - P_1)$ a pour noyau $h(u/v)\mathbf{1}_{(1,t]}(v)$ par rapport à $d^*u[v]$: il est Hilbert-Schmidt avec $\|\cdot\|_{HS}^2 = \log t\, \|h\|_2^2$, et à trace : puisque f est supportée dans $[\lambda^{-1}, \lambda]$, $\theta(f^*)\mathbf{1}_{(1,t]} = \mathbf{1}_{(\lambda^{-1},\lambda t]}\theta(f^*)\mathbf{1}_{(1,t]}$, de sorte que $\theta(h)\mathbf{1}_{(1,t]} = \Big(\theta(f)\mathbf{1}_{(\lambda^{-1},\lambda t]}\Big)\Big(\theta(f^*)\mathbf{1}_{(1,t]}\Big)$ est un produit de deux opérateurs de Hilbert-Schmidt ; sa trace est l'intégrale de la diagonale, $\int_{(1,t]} h(1)d^*u = h(1)\log t$. Pour $t < 1$ le même calcul donne $-h(1)\log(1/t)$. Ensuite, $\widehat{P}_w - \widehat{P}_1 = \mathbb{F}_S(P_w - P_1)\mathbb{F}_S^{-1}$ et $\mathbb{F}_S^{-1}\theta(h)\mathbb{F}_S = U^*I\theta(h)IU = U^*\theta(\tilde{h})U = \theta(\tilde{h})$, $\tilde{h}(u) = h(u^{-1})$, puisque U commute avec les convolutions et $I\theta(h)I = \theta(\tilde{h})$. Donc $\mathrm{Tr}(\theta(h)(\widehat{P}_w - \widehat{P}_1)) = \mathrm{Tr}(\theta(\tilde{h})(P_w - P_1)) = \tilde{h}(1)\log w = h(1)\log w$, et (52) suit en écrivant $1 - P_t - \widehat{P}_w = (1 - P - \widehat{P}) - (P_t - P) - (\widehat{P}_w - \widehat{P})$. Pour (53) prendre $t = w = \sigma$ et utiliser $h(1) = (f * f^*)(1) = \|f\|^2$ par (48). □

Agrandir les coupures retire de la masse diagonale positive aux deux projections ; le prix est payé explicitement par le terme $2\log\sigma\|f\|^2$, qui est le terme additif que nous utiliserons comme marge.

L'énoncé à trace du théorème 15 peut être rendu quantitatif, et c'est ce qui contrôle les queues ci-dessous. Nous utilisons le calcul quantifié dans la variable de Mellin : sur $L^2(i\mathbb{R}) \simeq L^2(\mathbb{R}_+^*, d^*u)$, P est la projection de Hardy sur H^2_+, $H = 2P - 1$, et $\bar{d}\varphi := [H, M_\varphi]$ pour une fonction bornée φ sur la ligne ; $\theta(h)$ est la multiplication par $\widehat{h} := |\mathcal{M}f|^2$ et U la multiplication par u. La transformation de Cayley $s \mapsto z = (s - i)/(s + i)$ transporte unitairement $L^2(i\mathbb{R})$ sur $L^2(S^1)$, $H^2_\pm$ sur les espaces de Hardy du disque et de son complément, H sur la transformée de Hilbert du cercle ($Hz^n = \mathrm{sgn}(n)z^n$) et le point à l'infini sur $z = 1$; une fonction sur la ligne s'étend continûment à $P^1(\mathbb{R})$, c'est-à-dire au cercle, si et seulement si elle a des limites égales en $\pm\infty$, et l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est transporté dans $C^\infty(S^1)$ (toutes les dérivées d'une fonction de Schwartz s'annulent à l'infini, ce qui est la régularité en $z = 1$).

Lemme 17 (valeurs singulières de l'opérateur de la formule de trace)**.** *(i) Pour $\varphi \in C^\infty(S^1)$ de coefficients de Fourier φ_n,*

$$\|\bar{d}\varphi\|_1 \leq 2\sum_n |n|\,|\varphi_n|, \qquad s_k(\bar{d}\varphi) \leq 2\sum_{|n|>k/2} |\varphi_n| \qquad (k \geq 1). \tag{54}$$

(ii) Soit f réelle, C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ supportée dans $[\lambda^{-1}, \lambda]$, $h = f * f^*$. Alors

$$T := \theta(h)(1 - P - \widehat{P}) = \tfrac{1}{2}\,\widehat{h}\,u^{-1}\bar{d}u = \tfrac{1}{2}\left[\bar{d}(\widehat{h}) - \bar{d}(\widehat{h}u^{-1})\,u\right], \tag{55}$$

et $s_k(T) \leq C_N k^{-N}$ pour tout N, avec C_N borné par une norme C^{N+2} sur $P^1(\mathbb{R})$ de $\widehat{h}$ et $\widehat{h}u^{-1}$, donc par des semi-normes de Schwartz de $|\mathcal{M}f|^2$. Si de plus f est de classe Gevrey G^s sur $\mathbb{R}_+^*$, alors $s_k(T) \leq Ce^{-ck^{1/(1+s)}}$.

Démonstration. (i) $\bar d(z^n)z^k = (\mathrm{sgn}(k+n)-\mathrm{sgn}(k))z^{k+n}$, donc $\bar d(z^n)$ est de rang $|n|$ et toutes ses valeurs singulières non nulles valent 2 (pour $n>0$ c'est deux fois une isométrie de $\mathrm{span}\{z^k\}_{-n\le k<0}$ sur $\mathrm{span}\{z^k\}_{0\le k<n}$). La première borne suit. Pour la seconde, $\bar d\varphi = 2(PM_\varphi P^\perp - P^\perp M_\varphi P)$ est, sur $H = PH\oplus P^\perp H$, deux fois une matrice diagonale par blocs hors diagonale, donc ses valeurs singulières sont deux fois la réunion de celles des deux blocs. Dans les bases $(z^j)_{j\ge0}$ de PH et $(z^{-l-1})_{l\ge0}$ de $P^\perp H$, le bloc $PM_\varphi P^\perp$ est la matrice de Hankel $(\varphi_{j+l+1})_{j,l\ge0}$; sa partie avec $j+l+1\le k$ est de rang $\le k$, et le reste a une norme $\le \sum_{n>k}|\varphi_n|$ (chaque antidiagonale est une matrice de permutation partielle, de norme 1), donc $s_{k+1}(PM_\varphi P^\perp)\le\sum_{n>k}|\varphi_n|$ par l'inégalité de Weyl ; l'autre bloc est la matrice de Hankel de $(\varphi_{-n})_{n>0}$, et l'assertion suit. (ii) $1-P-\widehat P = \frac12 u^*[H,u] = \frac12 u^{-1}\bar d u$ par (49), et Leibniz, $\bar d(ab) = (\bar da)b + a(\bar db)$ avec $a=\widehat h u^{-1}$, $b=u$, donne (55). Puisque f est lisse à support compact dans $\mathbb{R}_+^*$, $\mathcal{M}f$ est une fonction de Schwartz sur la ligne et de même $\widehat h = |\mathcal{M}f|^2$; $\widehat h u^{-1}$ est aussi de Schwartz parce que les dérivées de u sont à croissance tempérée (u_p est lisse et $2\pi i/\log p$-périodique, et $u_\infty^{(n)}(is) = O(\log^n|s|)$, [4], preuve du théorème 2.36). Les deux sont donc C^∞ sur le cercle, leurs coefficients de Fourier sont $O(|n|^{-N})$ avec des constantes données par des normes $C^N(S^1)$, et (i) donne $s_k(T)\le C_N k^{-N}$, le facteur u dans (55) étant unitaire. Si $f\in G^s$, le lemme de décroissance de Fourier pour les fonctions de Gevrey donne $|\mathcal{M}f(is)|\le Ce^{-c|s|^{1/s}}$ et de même pour les dérivées, donc $\widehat h$ et $\widehat h u^{-1}$ sont de Gevrey d'ordre $1+s$ en $z=1$ (la fonction $e^{-c|s|^{1/s}}$ est de classe G^{1+s} en $s=\infty$) et réelles analytiques ailleurs ; leurs coefficients de Fourier décroissent comme $e^{-c|n|^{1/(1+s)}}$, et de même les valeurs singulières. □

Remarque [seuil de régularité] Les fonctions de l'espace de Fourier logarithmique E_N utilisées dans les Sections 4-5 ne s'annulent pas aux extrémités de la fenêtre (les modes pairs y prennent des valeurs égales non nulles), donc $\mathcal{M}f(is) = O(1/|s|)$, $\widehat h$ n'est que C^1 en $z=1$, et $s_k(T)$ décroît comme $1/k$: pour elles la formule de trace est au bord de la convergence absolue, en cohérence avec $\int|\mathcal{M}f|^2\log|s|\,ds<\infty$ pour $|\mathcal{M}f|^2\sim s^{-2}$. Remplacer E_N par $\vartheta_w E_N$, où ϑ_w est une coupure de Gevrey en $t=\log u$ égale à 1 sauf à log-distance w des extrémités (la coupure de la construction de Kastoris, maintenant appliquée à la fenêtre), donne des fonctions test de classe G^s pour lesquelles la décroissance étirée exponentielle vaut, avec $|\mathcal{M}\tilde f(is)|\le Ce^{-c_s(w|s|)^{1/s}}$; voir le §8.7 et l'Annexe D pour l'effet sur les calculs.

8.3 L'opérateur d'incertitude à l'échelle σ

Fixons $t>0$ et considérons la paire $(P_t,\widehat P_t)$ sur $\mathcal{H}=L^2(X_S)^{K_S}$. Par (49), $\widehat P_t = U^*(1-P_{1/t})U$, de sorte que

$$P_t\widehat P_t P_t = \big((1-P_{1/t})UP_t\big)^*\big((1-P_{1/t})UP_t\big), \tag{56}$$

et les angles de la paire sont les valeurs singulières de l'opérateur de type Hankel $(1-P_{1/t})UP_t$. Nous montrons d'abord que la paire n'a pas de direction exactement auto-duale. Dans le cas archimédien c'est le principe d'incertitude (une fonction à bande limitée est entière) ; pour un seul corps non archimédien il échoue ($\mathbf{1}_{Z_p}$ est sa propre transformée de Fourier), et l'énoncé semilocal dépend donc de la place archimédienne. Il est commode d'utiliser l'image de Mellin : avec $\mathcal{M}g(z)=\int g(u)u^z d^*u$ comme dans (10), le théorème de Paley-Wiener identifie les transformées de Mellin des fonctions L^2 supportées dans $(0,1]$, resp. $[1,\infty)$, aux espaces de Hardy H^2_+, resp. H^2_-, des demi-plans $\mathfrak{Re}\,z>0$, resp. $\mathfrak{Re}\,z<0$ (valeurs au bord sur la ligne $\mathfrak{Re}\,z=0$) ; $\overline{H^2_\pm}=H^2_\mp$ comme espaces de fonctions au bord, et une fonction non nulle de $H^2_\pm$ ne s'annule pas sur un ensemble de mesure positive de la

ligne. Pour $\varphi \in L^\infty(i\mathbb{R})$ unimodulaire, nous notons $T_\varphi^{(\pm)}$ les opérateurs de Toeplitz $P_\pm\varphi$ sur $H^2_\pm$, dont les noyaux sont $\mathrm{Ker}T_\varphi^{(\pm)} = \{F \in H^2_\pm : \varphi F \in H^2_\mp\}$.

Lemme 18 (principe d'incertitude semilocal)**.** *Pour tout $t > 0$,* $\mathrm{Range}\, P_t \cap \mathrm{Range}\, \widehat{P}_t = \{0\}$.

Démonstration. Posons $\varphi_t(z) = t^{2z}u(z)$, unimodulaire sur la ligne, avec $\overline{\varphi_t(it)} = \varphi_t(-it)$ par (49). Puisque $\mathbb{F}_S = I \circ U$ et $\mathbb{F}_S^{-1} = \mathbb{F}_S$, une fonction g est dans $\mathrm{Range}\, P_t \cap \mathrm{Range}\, \widehat{P}_t$ si et seulement si g et $\mathbb{F}_S g$ sont supportées dans $(0,t]$. En écrivant $\mathcal{M}g = t^z F$ avec $F \in H^2_+$, la seconde condition se lit $\mathcal{M}(\mathbb{F}_S g)(z) = u(-z)\mathcal{M}g(-z) = u(-z)t^{-z}F(-z) \in t^z H^2_+$, c'est-à-dire après $z \mapsto -z$, $\varphi_t F \in H^2_-$: ainsi

$$\mathcal{M}\Big(\mathrm{Range}\, P_t \cap \mathrm{Range}\, \widehat{P}_t\Big) = t^z\, \mathrm{Ker}T_{\varphi_t}^{(+)}.$$

Le même calcul avec $(0,t]$ remplacé par $[t,\infty)$ donne $\mathcal{M}(\mathrm{Son}_t) = t^z \mathrm{Ker}T_{\varphi_t}^{(-)}$ pour l'espace de Sonin $\mathrm{Son}_t = \mathrm{Ker}P_t \cap \mathrm{Ker}\widehat{P}_t$, et la réflexion $F \mapsto F(-\cdot)$, qui échange H^2_+ et H^2_-, envoie $\mathrm{Ker}T_{\overline{\varphi_t}}^{(+)}$ sur $\mathrm{Ker}T_{\varphi_t}^{(-)}$, parce que $\overline{\varphi_t}(it)F(it) \in H^2_-$ devient $\varphi_t(it)F(-it) \in H^2_+$. Le lemme de Coburn énonce maintenant que pour un symbole unimodulaire φ au moins l'un de $\mathrm{Ker}T_\varphi^{(+)}$ et $\mathrm{Ker}T_{\bar\varphi}^{(+)}$ est $\{0\}$: si $f \in \mathrm{Ker}T_\varphi^{(+)}$ et $g \in \mathrm{Ker}T_{\bar\varphi}^{(+)}$, alors $h = \varphi f \bar g$ est dans L^1 de la ligne, $h = (\varphi f)\bar g$ avec $\varphi f \in H^2_-$ et $\bar g \in \overline{H^2_+} = H^2_-$ a une transformée de Fourier (dans la variable $\log u$) supportée dans $[0,\infty)$, tandis que $h = f\,\overline{(\bar\varphi g)}$ avec $f \in H^2_+$ et $\overline{\bar\varphi g} \in \overline{H^2_-} = H^2_+$ a une transformée de Fourier supportée dans $(-\infty, 0]$; la transformée de Fourier continue de h est donc supportée en 0, donc $h = 0$ p.p., donc $f\bar g = 0$ p.p. et l'une de f, g s'annule. Donc soit $\mathrm{Range}\, P_t \cap \mathrm{Range}\, \widehat{P}_t = \{0\}$, soit $\mathrm{Son}_t = \{0\}$. L'espace de Sonin semilocal est de dimension infinie pour tout t : il contient l'image de l'espace de Sonin archimédien à l'échelle t sous l'isomorphisme hilbertien θ_S de [7], théorème 2 (voir aussi [6], théorème 5.3 et proposition 5.5, pour le noyau $\mathrm{Ker}u_{22}$, qui est $\mathcal{M}(\mathrm{Son}_t)$ dans la notation présente). Cela prouve le lemme. □

Ainsi la valeur propre -1 de $1 - P_t - \widehat{P}_t$ est absente précisément parce que la valeur propre $+1$ est de multiplicité infinie : c'est l'asymétrie d'indice de la paire, et c'est là que la place archimédienne entre en jeu. Pour un seul $\mathbb{Q}_p$ le module est discret, le point $|x| = 1$ est de mesure positive, $IP_tI \neq 1 - P_{1/t}$, les deux espaces ne sont pas des noyaux de Toeplitz, et les deux peuvent être non nuls.

La seconde propriété de la paire est sa compacité, qui dans le cas semilocal est la propriété quasi-intérieure du symbole.

Lemme 19 (compacité de la paire)**.** *Pour tout $t > 0$ l'opérateur $P_t\widehat{P}_tP_t$ est compact ; ses valeurs propres sont $\kappa_n(t)^2$ avec $\kappa_n(t) \in (0,1)$, $\kappa_n(t) \downarrow 0$, et les $\kappa_n(t)$ sont les valeurs singulières de l'opérateur de type Hankel $(1-P_{1/t})UP_t$ de (56). Dans le cas archimédien $\kappa_n(t) = |\chi_n(t)|$, dont la décroissance au-delà du comptage de Slepian $4t^2$ est super-exponentielle, de sorte que $\sum_n \kappa_n(t) < \infty$. Dans le cas semilocal $\kappa_n(t) = O(n^{-1/2})$ et pas mieux, de sorte que $\sum_n \kappa_n(t) = \infty$ et même $\sum_n \kappa_n(t)^2 = \infty$.*

Démonstration. Le cas archimédien est le théorème 1. Dans le cas semilocal, le symbole u de (56) est le produit des rapports de facteurs locaux sur S, qui est quasi-intérieur, c'est-à-dire que $(1-P)UP$ est compact, par [6], théorème 4.1 ; pour t général on écrit $P_t = P + \mathbf{1}_{(1,t]}$ et $1 - P_{1/t} = (1-P) + \mathbf{1}_{(1/t,1]}$ (pour $t > 1$, et symétriquement pour $t < 1$), et les termes supplémentaires, qui font intervenir un intervalle logarithmique borné d'un côté au moins, sont compacts : $U = U_\infty U_{\mathrm{fin}}$ avec U_{fin} une convolution par une mesure finie en $\log u$ (une limite en norme de sommes finies de translations),

de sorte que ces termes sont des limites en norme de compressions de la transformée de Fourier archimédienne entre régions bornées, qui sont Hilbert-Schmidt. Les valeurs propres de $P_t\widehat{P}_tP_t$ sont strictement inférieures à 1 par le lemme 18. Les rapports non archimédiens individuels ne sont pas quasi-intérieurs ([6], théorème 3.6), le produit n'est que continu, pas lisse, au point à l'infini de la ligne critique ([6], proposition 4.5), et la partie hors diagonale $(1-P)UP$ est un infiniment petit d'ordre $\frac{1}{2}$ ([6], théorème 4.4 (i) pour un premier ; pour plusieurs premiers l'entrée hors diagonale du produit des matrices associées est une somme de produits dans lesquels au moins un facteur est une telle partie hors diagonale et les autres sont bornés, comme dans la preuve du théorème 4.1 là-bas), ce qui est la borne supérieure énoncée ; que l'ordre $\frac{1}{2}$ soit atteint découle de la forme explicite de la partie hors diagonale dans [6], théorème 4.4 (ii). □

La paire semilocale possède au moins les directions quasi-auto-duales archimédiennes, puisque $\eta_S(h_{n,t}) \in \operatorname{Range} P_t$ et $\eta_S(\widehat{h}_{n,t}) \in \operatorname{Range} \widehat{P}_t$ ([7], proposition 4.1).

La propriété à trace nécessaire pour le terme de Sonin découle de la formule de trace elle-même.

Lemme 20. *Pour $h = f * f^*$ comme dans le théorème 15, l'opérateur $\theta(h)P_{\mathrm{Son}_t}$, $\mathrm{Son}_t = \mathrm{Ker}P_t \cap \mathrm{Ker}\widehat{P}_t$, est à trace, et $\theta(h)P_{\mathrm{Son}_t} = \lim_k \theta(h)(1-P_t-\widehat{P}_t)^{2k}$ en norme de trace.*

Démonstration. Par le lemme 16 (avec $w = t$, et le même argument pour $P_t - P_1$) l'opérateur $T = \theta(h)(1-P_t-\widehat{P}_t)$ est à trace. Posons $A = 1-P_t-\widehat{P}_t$; A^2 est une contraction positive, égale à 1 sur Son_t, à 0 sur les deux pièces mixtes de (57), et à $\kappa_n(t)^2 < 1$ sur $V_n(t)$, et par le lemme 18 il n'y a pas d'autre pièce. Donc $A^{2k-1} \to P_{\mathrm{Son}_t}$ fortement quand $k \to \infty$ (l'espace de Sonin est l'espace propre de A pour la valeur propre 1, la valeur propre -1 étant exclue par le lemme 18), et $\theta(h)A^{2k} = TA^{2k-1}$. Pour T à trace et une suite $B_k \to B$ fortement d'opérateurs auto-adjoints uniformément bornés, $TB_k \to TB$ en norme de trace (approximer T par des opérateurs de rang fini) ; la limite est $\theta(h)P_{\mathrm{Son}_t}$. □

Par le lemme 18, la théorie de Halmos des deux sous-espaces [15] donne la décomposition orthogonale

$$\mathcal{H} = \underbrace{(\mathrm{Ker}P_t \cap \mathrm{Ker}\widehat{P}_t)}_{\mathrm{Son}_t} \oplus (\operatorname{Range} P_t \cap \mathrm{Ker}\widehat{P}_t) \oplus (\mathrm{Ker}P_t \cap \operatorname{Range} \widehat{P}_t) \oplus \bigoplus_n V_n(t), \tag{57}$$

où Son_t est l'espace de Sonin à l'échelle t et $V_n(t) = \operatorname{span}\{e_n, f_n\}$, avec e_n une base orthonormée propre de $P_t\widehat{P}_tP_t$ sur $\operatorname{Range} P_t$ (modulo $\mathrm{Ker}\widehat{P}_t$), $f_n = \widehat{P}_te_n/\|\widehat{P}_te_n\| \in \operatorname{Range}\widehat{P}_t$, et $\langle e_n, f_n\rangle = \kappa_n$. Sur chaque pièce l'opérateur $1-P_t-\widehat{P}_t$ est explicite : il vaut $+1$ sur Son_t, 0 sur les deux pièces mixtes, et sur $V_n(t)$, puisque $P_tf_n = \kappa_ne_n$ et $\widehat{P}_te_n = \kappa_nf_n$,

$$(1-P_t-\widehat{P}_t)\big|_{V_n} = \frac{\kappa_n}{1-\kappa_n^2}\left[\kappa_n\Big(|e_n\rangle\langle e_n| + |f_n\rangle\langle f_n|\Big) - \Big(|e_n\rangle\langle f_n| + |f_n\rangle\langle e_n|\Big)\right], \tag{58}$$

avec valeurs propres $-\kappa_n$ sur $a_n \propto e_n + f_n$ et $+\kappa_n$ sur $b_n \propto e_n - f_n$. (La formule découle de $|e\rangle\langle e| + |f\rangle\langle f| - \mathbf{1}_{V_n}$ et de l'inverse de Gram $\mathbf{1}_{V_n} = (|e\rangle\langle e| + |f\rangle\langle f| - \kappa|e\rangle\langle f| - \kappa|f\rangle\langle e|)/(1-\kappa^2)$.) Ainsi

$$1-P_t-\widehat{P}_t = P_{\mathrm{Son}_t} + K_t, \qquad K_t = \sum_n \kappa_n\Big(|b_n\rangle\langle b_n| - |a_n\rangle\langle a_n|\Big), \tag{59}$$

la partie de Sonin étant positive et la partie de paire K_t étant un opérateur compact (lemme 19) sans signe défini, dont la partie négative $K_t^- = \sum_n \kappa_n|a_n\rangle\langle a_n| = (P_t+\widehat{P}_t-1)_+$ vit sur les directions

quasi-auto-duales a_n. Dans le cas semilocal ni K_t ni $K_t^{\pm}$ n'est à trace ; par le lemme 20 et le théorème 15, $\theta(h)K_t = \theta(h)(1-P_t-\widehat{P}_t) - \theta(h)P_{\mathrm{Son}_t}$ l'est, et de même $\theta(h)K_t\Pi$ pour toute projection spectrale Π de K_t. La queue du développement en paires doit donc être contrôlée contre l'action d'échelle, et non comme opérateur. La partie qualitative de ce contrôle est à nouveau une conséquence du théorème 15 (lemme 21 ci-dessous) ; la partie quantitative est l'hypothèse suivante, dans laquelle $N_t^{(n_0)} := \sum_{n>n_0} \kappa_n(t)|a_n\rangle\langle a_n|$ est la partie négative de $1-P_t-\widehat{P}_t$ au-delà des n_0 premières paires et

$$\Lambda(f) := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{M}f(is)|^2 \log(2+|s|)\, ds \tag{60}$$

est la forme de Sobolev logarithmique.

Lemme 21. *Pour $h = f * f^*$ comme dans le théorème 15 l'opérateur $\theta(h)N_t^{(n_0)}$ est à trace, $\|\theta(h)N_t^{(n_0)}\|_1 \le \|\theta(h)(1-P_t-\widehat{P}_t)\|_1$, et $\mathrm{Tr}(\theta(f)N_t^{(n_0)}\theta(f)^*) = \sum_{n>n_0}\kappa_n(t)\|\theta(f)a_n\|^2 \to 0$ quand $n_0 \to \infty$.*

Démonstration. Soit $A = 1-P_t-\widehat{P}_t$ et E_{n_0} la projection spectrale de A sur ses valeurs propres $-\kappa_n(t)$, $n > n_0$, c'est-à-dire la projection sur $\mathrm{span}\{a_n\}_{n>n_0}$ par (57)-(58) et le lemme 18. Alors $N_t^{(n_0)} = -AE_{n_0}$, donc $\theta(h)N_t^{(n_0)} = -\theta(h)A\,E_{n_0}$ est à trace avec la borne énoncée, et $\mathrm{Tr}(\theta(h)AE_{n_0}) \to 0$ parce que $E_{n_0} \to 0$ fortement et $\theta(h)A$ est à trace. □

(H2′) Pour f réelle, lisse, supportée dans $[\lambda^{-1},\lambda]$,

$$\mathrm{Tr}\Big(\theta(f)N_t^{(n_0)}\theta(f)^*\Big) = \sum_{n>n_0}\kappa_n(t)\|\theta(f)a_n\|^2 \;\le\; \varepsilon_t(n_0)\,\Lambda(f), \qquad \varepsilon_t(n_0)\to 0 \quad (n_0\to\infty),$$

uniformément en f.

Dans le cas archimédien (H2′) vaut sous la forme plus forte

$$\mathrm{Tr}(\theta(f)N_t^{(n_0)}\theta(f)^*) \le \sum_{n>n_0}\kappa_n(t)\|\mathcal{M}a_n\|_\infty^2\,\|f\|^2$$

, parce que $\theta(f)$ est le multiplicateur par $\mathcal{M}f$ et $\|\theta(f)a\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int|\mathcal{M}f|^2|\mathcal{M}a|^2$; puisque $\|\mathcal{M}a_n\|_\infty \le \|a_n\|_{L^1(d^*u)}$ croît au plus polynomialement en n tandis que $\kappa_n(t)$ décroît super-exponentiellement, le membre de droite est super-exponentiellement petit en n_0. Dans le cas semilocal l'irrégularité du symbole responsable de la lente décroissance des angles siège au point à l'infini de la ligne critique, de sorte que les vecteurs de paire d'indice élevé ont leur contenu de Mellin à haute fréquence, où le poids $|\mathcal{M}f|^2$ d'une fonction du domaine de forme de QW_λ est petit ; (H2′) en est la forme quantitative, et le poids $\log(2+|s|)$ dans (60) est le symbole du terme archimédien de la forme de Weil, ce qui rend $\Lambda(f)$ contrôlable par $QW_\lambda(f,f)$ lui-même (lemme 25). Le mécanisme attendu est visible sur l'opérateur de Hankel (56) : en écrivant $U = U_\infty U_{\mathrm{fin}}$ avec $U_{\mathrm{fin}} = \prod_p U_p$ et $U_p = \sum_k c_k^{(p)} T_{k\log p}$ (T les translations en $\log u$, $c_k^{(p)} = O(p^{-|k|/2})$, d'après le développement de Laurent de u_p en p^{is}), le terme k de $(1-P)U_\infty U_p P$ est un opérateur de type prolate entre une demi-droite et l'intervalle logarithmique $(0, k\log p]$ décalé par $T_{k\log p}$, avec environ p^k valeurs singulières d'ordre un, pondérées par $p^{-k/2}$, et avec des vecteurs singuliers portant des fréquences de Mellin $|s| \lesssim p^k$: cela reproduit l'ordre $\frac{1}{2}$ de [6], théorème 4.4 (p^k valeurs singulières de taille $p^{-k/2}$ donnent $\kappa_n \asymp n^{-1/2}$), donc $\sum\kappa_n = \sum\kappa_n^2 = \infty$, et prédit une densité de la partie négative à la fréquence de Mellin s de l'ordre de $\sum_{p\in S}|s|^{-1/2}$, donc (H2′) sous la forme forte avec $\|f\|^2$ et $\varepsilon_t(n_0)$ de l'ordre de $|S|\,\kappa_{n_0}(t)$. Pour la

paire semilocale, (H2′) est ouvert : le lemme 22 et la Remarque 8.3 ci-dessous le réduisent, pour les fonctions test de Gevrey, à l'énoncé de localisation (62), et il reste à établir cet énoncé à partir de la structure $u = u_\infty \prod_p u_p$; un taux polynomial donnerait des dimensions de conditionnement polynomiales dans le théorème 26.

La partie négative de $1 - P_t - \widehat{P}_t$ est localisée au point à l'infini de la ligne critique au sens suivant, qui est la moitié prouvée de ce que (H2′) requiert. Soit $\Gamma = (1-P_{1/t})UP_t$ l'opérateur de type Hankel de (56), dont les valeurs singulières sont les $\kappa_n(t)$, de vecteurs singuliers à droite e_n et à gauche g_n ($\Gamma e_n = \kappa_n g_n$, $f_n = U^* g_n$, $a_n \propto e_n + f_n$).

Lemme 22 (lissage loin de l'infini)**.** *Soit $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $0 \le \chi \le 1$, avec $\chi = 1$ sur $[-R, R]$ et support dans $[-2R, 2R]$, et M_χ l'opérateur de multiplication correspondant dans la variable de Mellin. Alors ΓM_χ, $M_\chi \Gamma$ et $M_\chi(1 - P_t - \widehat{P}_t)$ sont à trace avec valeurs singulières $s_k \le C_N (R^c/k)^N$ pour tout N (c absolu, C_N indépendant de R), et*

$$\sum_{n>n_0} \kappa_n(t)\, \|\chi^{1/2} a_n\|^2 = \mathrm{Tr}\Big(M_\chi N_t^{(n_0)}\Big) \le \|M_\chi(1 - P_t - \widehat{P}_t)\|_1 \le C R^A \tag{61}$$

pour tout $n_0 \ge 0$, avec A absolu. De façon équivalente, la densité de Mellin $\rho_N(s) = \sum_n \kappa_n(t) |\mathcal{M} a_n(is)|^2$ de la partie négative a une masse locale polynomialement bornée, $\int_{|s|\le R} \rho_N \le 2\pi C R^A$, bien que $\int_{\mathbb{R}} \rho_N = 2\pi \sum \kappa_n = \infty$.

Démonstration. Puisque U et M_χ sont tous deux des multiplications dans la variable de Mellin, $\Gamma M_\chi = (1 - P_{1/t}) M_{u\chi} P_t + (1 - P_{1/t}) U [P_t, M_\chi]$, et $[P_t, M_\chi] = \theta(t)[P, M_\chi]\theta(t)^* = \frac{1}{2}\theta(t)\, \bar{d}\chi\, \theta(t)^*$, puisque $P_t = \theta(t) P \theta(t)^*$ et $\theta(t)$, un multiplicateur de Mellin, commute avec M_χ. Le premier terme est un opérateur de type Hankel de symbole $u\chi$, qui est C^∞ sur le cercle parce que χ s'annule près du seul point où u n'est pas lisse ; le second est lissant par le lemme 17(i). Sous la transformation de Cayley $dz/ds \asymp s^{-2}$, les normes $C^N(S^1)$ des fonctions supportées dans $|s| \le 2R$, telles que $u\chi$ et χ, sont $O(R^{2N})$ fois leurs normes C^N en s, c'est-à-dire $O(R^{2N} \log^N R)$ ici, ce qui donne la décroissance énoncée avec des constantes polynomiales en R ; de même pour $M_\chi \Gamma$ (adjoint et $u \to \bar{u}$). Ensuite, puisque $\widehat{P}_t = U^*(1 - P_{1/t})U$,

$$1 - P_t - \widehat{P}_t = U^*\Big(P_{1/t} U - U P_t\Big) = U^*\Big(P_{1/t} U (1 - P_t) - (1 - P_{1/t}) U P_t\Big) = U^*\Big(\Gamma'^* - \Gamma\Big)$$

$$\Gamma' = (1 - P_t) U^* P_{1/t},$$

de sorte que $M_\chi(1 - P_t - \widehat{P}_t) = U^*\Big((\Gamma' M_\chi)^* - M_\chi \Gamma\Big)$, et $\Gamma' M_\chi$ est du même type que ΓM_χ avec u remplacé par $\bar{u}$ et t par $1/t$. Enfin $\kappa_n \langle M_\chi a_n, a_n\rangle = -\langle M_\chi A a_n, a_n\rangle$ avec $A = 1 - P_t - \widehat{P}_t$, puisque $A a_n = -\kappa_n a_n$, donc $\sum_{n>n_0} \kappa_n \|\chi^{1/2} a_n\|^2 = -\sum_{n>n_0} \langle (M_\chi A) a_n, a_n\rangle \le \|M_\chi A\|_1$, la somme des entrées diagonales d'un opérateur à trace sur une famille orthonormée étant bornée par sa norme de trace. □

Remarque [ce qui reste de (H2′)] Découpons $\mathrm{Tr}(\theta(f) N_t^{(n_0)} \theta(f)^*) = \frac{1}{2\pi} \int |\mathcal{M} f(is)|^2 \rho_N^{(n_0)}(s)\, ds$ en $|s| = R$ et dyadiquement au-delà. Par (61) la partie $|s| > R$ est au plus $\sum_{j\ge 0} \sup_{2^j R \le |s| < 2^{j+1} R} |\mathcal{M} f|^2 \cdot C(2^{j+1}R)^A$: pour les fonctions test de Gevrey ($|\mathcal{M} f|^2 \le C e^{-2c(w|s|)^{1/s}}$) c'est $O(e^{-c'(wR)^{1/s}}) \|f\|_{G^s}^2$, négligeable dès que $R \gg w^{-1} (\log \lambda)^s$, tandis que pour les fonctions de E_N ($|\mathcal{M} f|^2 \sim s^{-2}$) cela ne converge que si $A < 2$, de sorte que pour les fonctions test non lisses la borne plus fine de densité $\rho_N(s) = o(\log |s|)$ serait nécessaire. La partie $|s| \le R$ est au plus $\sup |\mathcal{M} f|^2 \cdot \mathrm{Tr}(M_{\chi_R} N_t^{(n_0)})$, et

$\sup|\mathcal{M}f|^2 \le \|f\|^2_{L^1(d^*u)} \le 2\log\lambda\|f\|^2$. Les deux bornes ne sont pas de même nature : la seconde est uniforme relativement à $\Lambda(f)$, la première est relative à la norme de Gevrey $\|f\|_{G^s}$, qui n'est pas contrôlée par $\Lambda(f)$ sur le domaine de forme. Sur un espace de dimension finie fixé de fonctions test de Gevrey, tel que les espaces de Galerkin lissés $\vartheta_w E_N$ du §8.7, les deux normes sont équivalentes, $\|f\|_{G^s} \le C(N,w)\|f\|$, et (H2′) se réduit, avec des constantes dépendant de (N,w), à l'énoncé unique

$$\mathrm{Tr}\Big(M_{\chi_R} N_t^{(n_0)}\Big) = \sum_{n>n_0} \kappa_n(t)\|\chi_R^{1/2} a_n\|^2 \;\le\; \varepsilon_2(n_0,R) \xrightarrow[n_0\to\infty]{} 0 \quad \text{polynomialement en } R, \tag{62}$$

c'est-à-dire que les directions de petit angle de la paire ont un petit contenu de Mellin à fréquence bornée : la seconde moitié de la localisation, dont le lemme 22 est la première moitié (il donne (62) avec une borne indépendante de n_0, et $\mathrm{Tr}(M_{\chi_R}N_t^{(n_0)}) \to 0$ pour chaque R fixé par le lemme 21, sans taux). Sur le domaine de forme lui-même (H2′) ne peut pas être réduit à (62) en lissant les fonctions test : pour les fonctions modulées $f_\omega = u^{i\omega} g$ on a $\Lambda(f_\omega) \approx \log\omega\,\|g\|^2$ et $\mathrm{Tr}(\theta(f_\omega)N_t^{(n_0)}\theta(f_\omega)^*) \approx \rho_N^{(n_0)}(\omega)\|g\|^2$, de sorte que (H2′) relativement à Λ est équivalent à la borne uniforme de densité $\rho_N^{(n_0)}(s) \le \varepsilon_t(n_0)\log(2+|s|)$ jointe à (62) ; la borne de densité est l'estimation de forme relative pondérée qu'il faut établir en général, et (62) est ce que testent les calculs sur les fonctions test de $\vartheta_w E_N$. Pour la même raison la fonction de comptage des angles au-dessus du seuil $\kappa_{n_0}(\sigma)$, qui se déplace avec λ, doit être contrôlée en même temps que (62) ; dans le cas archimédien elle est donnée par les asymptotiques de Slepian. Dans le cas archimédien (62) vaut avec ε_2 super-exponentiellement petit en n_0 : les a_n au-delà du comptage de Slepian sont des fonctions prolates d'indice élevé, dont le contenu de Mellin en dessous de la fréquence R est négligeable dès que $n \gg Rt$. Dans le cas semilocal le mécanisme attendu est celui décrit ci-dessus (les échelles p-adiques à fréquence $\approx p^k$ avec angles $\approx p^{-k/2}$), et (62) est l'énoncé précis à établir à partir de la structure $u = u_\infty \prod_p u_p$.

8.4 Transport par l'action d'échelle

Lemme 23. *Soit f supportée dans $[\lambda^{-1},\lambda]$. Alors pour tout $t>0$*

$$\theta(f)\,\mathrm{Range}\,P_t \subset \mathrm{Range}\,P_{\lambda t}, \qquad \theta(f)\,\mathrm{Range}\,\widehat{P}_t \subset \mathrm{Range}\,\widehat{P}_{\lambda t}.$$

Démonstration. $\theta(v)$ envoie les fonctions supportées dans $\{|x|\le t\}$ sur les fonctions supportées dans $\{|x|\le vt\}$, et $\theta(f)$ est une superposition de $\theta(v)$ avec $\lambda^{-1}\le v\le\lambda$. Pour la seconde inclusion, $\mathbb{F}_S\theta(v)\mathbb{F}_S^{-1} = \theta(v^{-1})$, donc $\theta(f)\mathbb{F}_S = \mathbb{F}_S\theta(\tilde f)$ avec $\tilde f(v) = f(v^{-1})$ supportée dans le même intervalle. □

Appliquons ceci avec $t=\sigma$, et écrivons $p_n = \theta(f)e_n$, $q_n = \theta(f)f_n$ pour les vecteurs de paire de $(P_\sigma,\widehat{P}_\sigma)$. Développons dans les vecteurs de paire de $(P_{\lambda\sigma},\widehat{P}_{\lambda\sigma})$, notés e_m^λ, f_m^λ, d'angles $\kappa_m^\lambda = \kappa_m(\lambda\sigma)$: $p_n = \sum_m \alpha_{nm}e_m^\lambda + p_n'$ avec $p_n' \in \mathrm{Range}\,P_{\lambda\sigma}\cap\mathrm{Ker}\widehat{P}_{\lambda\sigma}$, et $q_n = \sum_m \beta_{nm}f_m^\lambda + q_n'$ avec $q_n' \in \mathrm{Ker}P_{\lambda\sigma}\cap \mathrm{Range}\,\widehat{P}_{\lambda\sigma}$; les parties primées sont orthogonales à tout le reste, et $\langle e_m^\lambda, f_{m'}^\lambda\rangle = \delta_{mm'}\kappa_m^\lambda$. Par (48), les coefficients sont des produits scalaires de f avec des vecteurs de paire convolés :

$$\alpha_{nm} = \langle\theta(f)e_n, e_m^\lambda\rangle = \langle f,\, e_m^\lambda * e_n^*\rangle, \qquad \beta_{nm} = \langle f,\, f_m^\lambda * f_n^*\rangle. \tag{63}$$

Proposition 24 (développement en paires)**.** *Soit f comme dans le lemme 23 avec $\mathcal{M}f(\pm\frac12)=0$, et soit $n_0\ge 0$. Alors*

$$QW_\lambda(f,f) = 2\log\sigma\|f\|^2 + \|P_{\mathrm{Son}_\sigma}\theta(f)^*\|^2_{HS} + \sum_{n\le n_0} B_n(f) + R_{n_0}(f), \qquad R_{n_0}(f) = \mathrm{Tr}\Big(\theta(f)K_\sigma\Pi_{>n_0}\theta(f)^*\Big), \tag{64}$$

où $\Pi_{>n_0}$ *est la projection sur* $\bigoplus_{n>n_0} V_n(\sigma)$ *et, avec* $\kappa_n = \kappa_n(\sigma)$, $w_n = \kappa_n/(1-\kappa_n^2)$,

$$\begin{aligned} B_n(f) &= w_n\Big[\kappa_n\Big(\|p_n\|^2 + \|q_n\|^2\Big) - 2\mathrm{Re}\langle p_n, q_n\rangle\Big] \\ &= w_n\left[\kappa_n\Big(\|p_n'\|^2 + \|q_n'\|^2\Big) + \sum_m \Big(\kappa_n\Big(|\alpha_{nm}|^2 + |\beta_{nm}|^2\Big) - 2\kappa_m^\lambda \mathrm{Re}(\alpha_{nm}\overline{\beta_{nm}})\Big)\right]. \end{aligned} \tag{65}$$

Chaque terme avec $\kappa_m^\lambda \le \kappa_n$ *est non négatif, et en général*

$$B_n(f) \;\ge\; \sum_m w_n\Big(\kappa_n - \kappa_m^\lambda\Big)\Big(|\alpha_{nm}|^2 + |\beta_{nm}|^2\Big) \;\ge\; -\frac{\kappa_n}{1+\kappa_n} \sum_{m:\ \kappa_m^\lambda > \kappa_n} \Big(|\alpha_{nm}|^2 + |\beta_{nm}|^2\Big). \tag{66}$$

Si de plus (H2′) vaut à l'échelle σ, *alors* $R_{n_0}(f) \ge -\varepsilon_\sigma(n_0)\Lambda(f)$.

Démonstration. (64) est (53) et (59) : par le lemme 20 les opérateurs $\theta(h)P_{\mathrm{Son}_\sigma}$, $\theta(h)K_\sigma\Pi_{\le n_0}$ (de rang fini) et $\theta(h)K_\sigma\Pi_{>n_0}$ sont à trace, avec

$$\mathrm{Tr}(\theta(f)P_{\mathrm{Son}_\sigma}\theta(f)^*) = \|P_{\mathrm{Son}_\sigma}\theta(f)^*\|_{HS}^2, \qquad \mathrm{Tr}(\theta(f)K_\sigma\Pi_{\le n_0}\theta(f)^*) = \sum_{n\le n_0} \kappa_n\Big(\|\theta(f)b_n\|^2 - \|\theta(f)a_n\|^2\Big),$$

qui est $\sum_{n\le n_0} B_n(f)$ par (58). La seconde forme de B_n est le développement de p_n, q_n, en utilisant $\langle e_m^\lambda, f_{m'}^\lambda\rangle = \delta_{mm'}\kappa_m^\lambda$ et l'orthogonalité des parties primées ; $2|\mathrm{Re}(\alpha\bar\beta)| \le |\alpha|^2+|\beta|^2$ et $w_n(\kappa_m^\lambda - \kappa_n) \le w_n(1-\kappa_n) = \kappa_n/(1+\kappa_n)$ donnent (66). Enfin $K_\sigma\Pi_{>n_0} \ge -N_\sigma^{(n_0)}$ comme opérateurs, et les deux côtés sont à trace contre $\theta(h)$ par les lemmes 20 et 21, donc $R_{n_0}(f) \ge -\mathrm{Tr}(\theta(f)N_\sigma^{(n_0)}\theta(f)^*) \ge -\varepsilon_\sigma(n_0)\Lambda(f)$. □

Le contenu de (66) est le suivant. La partie négative de l'opérateur d'incertitude à l'échelle σ est portée par ses directions quasi-auto-duales ; transportée par $\theta(f)$, elle ne peut agir qu'à travers les composantes de $\theta(f)e_n$, $\theta(f)f_n$ le long des directions à l'échelle $\lambda\sigma$ qui sont *plus auto-duales* que la direction d'échelle σ n, c'est-à-dire le long de m avec $\kappa_m(\lambda\sigma) > \kappa_n(\sigma)$. Pour $\sigma = 1$ et $n = 0$ ce sont les modes avec $\delta_m(\lambda) < \delta_0(1) \approx 3\cdot 10^{-5}$, essentiellement tous les modes minuscules de la Section 5 ; le préfacteur $w_0 \approx 1/(2\delta_0(1))$ est grand, mais $w_n(\kappa_m^\lambda - \kappa_n) \le \frac12$ toujours. C'est le mécanisme derrière le fait 11, et il dicte le conditionnement.

8.5 Positivité avec marge sur un sous-espace explicite

Nous notons d'abord que la forme de Sobolev logarithmique est dominée par la forme de Weil sur la fenêtre.

Lemme 25. *Il existe une constante absolue* C_0 *telle que pour toute* f *réelle supportée dans* $[\lambda^{-1}, \lambda]$ *dans le domaine de forme de* QW_λ,

$$\Lambda(f) \le QW_\lambda(f,f) + C_0\,\lambda\,\|f\|^2. \tag{67}$$

Démonstration. Écrivons $h = f * f^*$ et $C(s) = \int R(t)R(t+s)dt$, $R(t) = f(e^t)$, de sorte que $C(0) = \|f\|^2$ et $h(e^s) = C(s)$. Le terme archimédien (8) est $W_{\mathbb{R}}(h) = (\log 4\pi + \gamma_E)\|f\|^2 + \int_0^\infty \Big(C(s)e^{s/2} - C(0)\Big)\frac{ds}{\sinh s}$, et $C(0) - C(s) = \frac12\|U(s)R - R\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int |\mathcal{M}f(i\tau)|^2\, 2\sin^2(\tau s/2)\, d\tau$ pour le groupe de translations $U(s)$; d'où

$$-W_{\mathbb{R}}(h) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{M}f(i\tau)|^2 m(\tau)\, d\tau - c_0\|f\|^2, \qquad m(\tau) = \int_0^\infty \frac{2\sin^2(\tau s/2)\, e^{s/2}}{\sinh s} ds \ge 0,$$

avec $c_0 = \log 4\pi + \gamma_E + \int_0^\infty \frac{e^{s/2}-1}{\sinh s} ds$. Le multiplicateur satisfait $m(\tau) = \log|\tau| + O(1)$ quand $|\tau| \to \infty$ et est continu, donc $m(\tau) \geq \log(2+|\tau|) - C_1$, et $\Lambda(f) \leq -W_{\mathbb{R}}(h) + (c_0 + C_1)\|f\|^2$. Ensuite, $QW_\lambda(f,f) = W_{0,2}(h) - W_{\mathbb{R}}(h) - \sum_{p \leq \lambda^2} W_p(h)$, avec $|W_{0,2}(h)| = 2|\mathcal{M}f(\frac{1}{2})\mathcal{M}f(-\frac{1}{2})| \leq 2(\lambda - \lambda^{-1})\|f\|^2$ par le lemme 10 et Cauchy-Schwarz, et $|\sum_p W_p(h)| \leq 2\|f\|^2 \sum_{p^m \leq \lambda^2} (\log p) p^{-m/2} \leq C_2 \lambda \|f\|^2$ par (7), $|C(s)| \leq C(0)$ et la borne de Chebyshev. D'où $-W_{\mathbb{R}}(h) \leq QW_\lambda(f,f) + (2 + C_2)\lambda\|f\|^2$. □

Théorème 26 (positivité conditionnelle sur l'espace conditionné)**.** *Soit $\sigma > 1$ et supposons (H2′) à l'échelle σ. Choisissons n_0 avec $\varepsilon_\sigma(n_0) \leq \min(1, \log\sigma/(C_0\lambda))$, soit $M = \{m : \kappa_m(\lambda\sigma) > \kappa_{n_0}(\sigma)\}$ (un ensemble fini par le lemme 19), $V_M = \operatorname{span}\{e_m^\lambda\}_{m\in M}$, $\widehat{V}_M = \operatorname{span}\{f_m^\lambda\}_{m\in M}$, et*

$$W_\lambda(\sigma, n_0) := \Big\{ f \in C^\infty,\ \operatorname{supp} f \subset [\lambda^{-1}, \lambda],\ \mathcal{M}f(\pm\tfrac{1}{2}) = 0,\ \theta(f)e_n \perp V_M,\ \theta(f)f_n \perp \widehat{V}_M\ (n \leq n_0) \Big\},$$

un espace de codimension au plus $2 + 2(n_0+1)|M|$ dans l'espace des fonctions test supportées dans la fenêtre. Alors

$$QW_\lambda(f,f) \ \geq\ \frac{\log\sigma}{1+\varepsilon_\sigma(n_0)}\,\|f\|^2 \ \geq\ \frac{\log\sigma}{2}\,\|f\|^2 \qquad (f \in W_\lambda(\sigma, n_0)). \tag{68}$$

Démonstration. Pour $n \leq n_0$ et $f \in W_\lambda(\sigma, n_0)$, $\alpha_{nm} = \beta_{nm} = 0$ pour $m \in M$, tandis que pour $m \notin M$ on a $\kappa_m^\lambda \leq \kappa_{n_0}(\sigma) \leq \kappa_n(\sigma)$; par (66) les blocs $B_n(f)$, $n \leq n_0$, sont non négatifs. La proposition 24, la positivité du terme de Sonin et le lemme 25 donnent

$$QW_\lambda(f,f) \geq 2\log\sigma\|f\|^2 - \varepsilon_\sigma(n_0)\Lambda(f) \geq 2\log\sigma\|f\|^2 - \varepsilon_\sigma(n_0)\Big(QW_\lambda(f,f) + C_0\lambda\|f\|^2\Big),$$

et le choix de n_0 donne $(1+\varepsilon_\sigma(n_0))QW_\lambda(f,f) \geq \log\sigma\|f\|^2$. Le comptage de codimension : deux conditions de pôle, et pour chaque $n \leq n_0$ les conditions $\langle f, e_m^\lambda * e_n^*\rangle = \langle f, f_m^\lambda * f_n^*\rangle = 0$, $m \in M$, par (63). □

Remarque (a) Tout dans la preuve est élémentaire une fois accordés le théorème 15 et (H2′) : le décalage à deux paramètres, la décomposition de Halmos à deux échelles, les inclusions de support, l'inégalité $2|\mathrm{Re}(\alpha\bar\beta)| \leq |\alpha|^2 + |\beta|^2$, et l'absorption de la queue par la partie archimédienne de la forme. Aucune information sur les zéros de ζ n'entre en jeu, et le terme de Sonin n'est utilisé que par sa positivité.

(b) Les tailles. Dans le cas archimédien $\kappa_n(\sigma) = |\chi_n(\sigma)|$ décroît super-exponentiellement au-delà de $n \approx 4\sigma^2$ et la forme forte de (H2′) vaut, de sorte que $n_0 = 4\sigma^2 + O(\log\lambda)$ suffit ; en fait aucune absorption n'y est nécessaire, et la preuve donne directement $QW_\lambda \geq \log\sigma\|f\|^2$ avec $n_0 = 4\sigma^2 + O(1)$ et $\kappa_{n_0}(\sigma)$ remplacé par n'importe quel seuil fixe κ_*. Là $|M| = 2\lambda^2\sigma^2(1+o(1))$ modes pairs, les deux ι-parités ensemble : avec σ fixé ($\sigma = 2$, marge $\log 2$) la codimension est $O(\sigma^4\lambda^2)$, avec $\sigma = \lambda^{\varepsilon/2}$ la marge est $\frac{\varepsilon}{2}\log\lambda$ à codimension $O(\lambda^{2+2\varepsilon})$. Dans le cas semilocal les tailles sont régies par le taux dans (H2′) et par la fonction de comptage des angles à l'échelle $\lambda\sigma$, toutes deux polynomiales en λ sous une décroissance polynomiale des angles.

(c) Les vecteurs de conditionnement. Par (63) l'espace $W_\lambda(\sigma, n_0)$ est l'orthogonal des fonctions $e_m^\lambda * e_n^*$ et $f_m^\lambda * f_n^*$ restreintes à la fenêtre : les vecteurs quasi-auto-duaux à l'échelle $\lambda\sigma$ lissés par les premiers vecteurs de paire à l'échelle σ. Dans la variable de Mellin, $\mathcal{M}(e_m^\lambda * e_n^*) = \mathcal{M}e_m^\lambda \cdot \overline{\mathcal{M}e_n}$, une multiplication par une fonction lisse fixe ; le conditionnement du §5.3 par les vecteurs $\mathfrak{p}_k$ eux-mêmes

est le cas $e_n \to \delta_1$, $\sigma \to 1$, et c'est exactement ce que teste le fait 11.

(d) La condition de pôle. En remplaçant $\mathcal{M}f(\pm\frac{1}{2}) = 0$ par le terme de pôle lui-même, le lemme 10 ajoute $W_{0,2}(h) = 2\mathcal{M}f(\frac{1}{2})\mathcal{M}f(-\frac{1}{2})$, c'est-à-dire $\pm 2\ell(f)^2$ dans les deux secteurs, au membre de droite de (51) ; la condition est nécessaire pour l'identité, pas pour le mécanisme. Son rôle dans le fait 11 (supprimer la valeur propre de transition du secteur impair) a un pendant ici : dans l'image semilocale un vecteur de paire à l'échelle t $\eta_S(h_{n,t})$ avec $\int h_{n,t} \neq 0$ est dominé, sur $[t/\lambda^2, t]$ où $\mathcal{E}_S = \mathcal{E}$ est une somme de Riemann, par sa queue $u^{-1/2}\int h_{n,t}$, c'est-à-dire par la direction de pôle $u^{\pm 1/2}$; les vecteurs prolates d'intégrale nulle et ℓ engendrent ensemble le même espace que les directions quasi-auto-duales.

(e) Les conditions définissant $W_\lambda(\sigma, n_0)$ sont continues pour la norme L^2, puisque $|\langle\theta(f)e_n, e_m^\lambda\rangle| \leq \|f\|_{L^1(d^*u)} \leq (2\log\lambda)^{1/2}\|f\|$; donc (68) s'étend à la fermeture de $W_\lambda(\sigma, n_0)$ dans le domaine de forme de QW_λ, en particulier aux vecteurs propres de la forme restreinte à l'orthogonal des vecteurs de conditionnement.

8.6 La réduction de Schur et l'argument de monotonie

Le théorème 26 minore QW_λ en dehors d'un espace explicite $V = W_\lambda(\sigma, n_0)^\perp$ de dimension finie ($O(\lambda^2)$ dans le cas archimédien), engendré par la direction de pôle et par les vecteurs de paire convolés. La positivité de QW_λ sur toute la fenêtre est alors un énoncé sur un bloc de dimension finie.

Lemme 27 (complément de Schur)**.** *Soit Q une forme symétrique réelle sur $\mathcal{H}_\lambda = L^2([\lambda^{-1}, \lambda], d^*u)$ (minorée, de domaine de forme contenant V), $\mathcal{H}_\lambda = V \oplus W$ une décomposition orthogonale avec $\dim V < \infty$, et écrivons $Q(v+w) = A(v) + 2\mathrm{Re}\, B(v,w) + D(w)$, avec $B(v,w) = \langle B^*v, w\rangle$, B^*v dans le dual du domaine de forme de D. Si $D \geq d\|w\|^2$ sur W avec $d > 0$, alors*

$$\epsilon_\lambda = \inf \frac{Q(\psi)}{\|\psi\|^2} \;\geq\; \min\Big(0, \lambda_{\min}(\mathfrak{S})\Big), \qquad \mathfrak{S}(v) := A(v) - \|D^{-1/2}B^*v\|^2,$$

et $Q \geq 0$ si et seulement si $\mathfrak{S} \geq 0$ sur V.

Démonstration. En complétant le carré, $Q(v+w) = \mathfrak{S}(v) + D(w + D^{-1}B^*v)$, où D désigne l'opérateur positif associé à la forme sur W ; le second terme est ≥ 0. Si $\lambda_{\min}(\mathfrak{S}) \geq 0$ alors $Q \geq 0$. Sinon $Q(v+w) \geq \lambda_{\min}(\mathfrak{S})\|v\|^2 \geq \lambda_{\min}(\mathfrak{S})\|v+w\|^2$ puisque $\lambda_{\min}(\mathfrak{S}) < 0$ et $\|v\| \leq \|v+w\|$. Pour la dernière assertion, $Q(v - D^{-1}B^*v) = \mathfrak{S}(v)$. □

Proposition 28 (monotonie)**.** *ϵ_λ est non croissante en λ. Si $\epsilon_\lambda \geq -\eta(\lambda)$ pour tout grand λ avec $\eta(\lambda) \to 0$, alors $\epsilon_\lambda \geq 0$ pour tout λ, c'est-à-dire $QW_\lambda \geq 0$ pour toutes les fenêtres, ce qui est équivalent à l'hypothèse de Riemann.*

Démonstration. Pour $\lambda' > \lambda$ la forme $QW_{\lambda'}$ se restreint à QW_λ sur la fenêtre plus petite, donc $\epsilon_{\lambda'} \leq \epsilon_\lambda$. Étant donné la borne inférieure, $\epsilon_\lambda \geq \epsilon_{\lambda'} \geq -\eta(\lambda')$ pour tout $\lambda' > \lambda$, et $\eta(\lambda') \to 0$. L'équivalence avec l'hypothèse de Riemann est le critère de Weil sous la forme de [5], (4). □

La stratégie suggérée par les théorèmes 5 et 26 est donc la suivante. Fixons $A > 0$ et posons $\tau = \lambda^{-A}$. Décomposons $V = V_{\mathrm{low}} \oplus V_{\mathrm{tr}} \oplus \mathbb{C}\rho$, où V_{low} est engendré par les vecteurs de conditionnement

attachés aux modes m avec $\delta_m(\lambda\sigma) \le \tau$ (profondément dans l'échelle, $\delta_m(\lambda\sigma) = 1 - \kappa_m(\lambda\sigma)$ étant les barreaux exacts du lemme 19, comme partout dans cette section ; l'asymptotique de Fuchs à n fixé ne joue aucun rôle ici), V_{tr} par ceux avec $\delta_m(\lambda\sigma) \in (\tau, 1 - \kappa_{n_0}(\sigma))$ (les modes au-dessus du seuil du théorème 26 qui ne sont pas profonds), et ρ représentant les deux directions de pôle $\rho_{\mathrm{ev}} = u^{1/2} + u^{-1/2}$, $\rho_{\mathrm{odd}} = u^{1/2} - u^{-1/2}$ restreintes à la fenêtre, qui engendrent l'orthogonal des conditions de pôle. Dans le cas archimédien V_{tr} est attaché à la bande de transition de l'échelle à l'échelle $\lambda\sigma$: par les asymptotiques de Slepian les valeurs propres y décroissent d'un facteur fixe $e^{-\pi^2/2\log(8\pi\lambda^2\sigma^2)}$ par indice, donc les modes avec $\delta_m(\lambda\sigma) \in (\lambda^{-A}, 1)$ sont au nombre de $O(A\log\lambda)$ par paire d'échelle σ, et $\dim V_{\mathrm{tr}} = O(A\sigma^2\log\lambda)$. Deux faits sur V_{low} sont disponibles en principe, et tous deux sont *bilatéraux*, c'est-à-dire ne nécessitent aucune connaissance du signe de QW_λ ; le second est énoncé sous sa forme unilatérale, qui est ce dont le complément de Schur a besoin, puisqu'il couple V_{low} à V_{tr} et aux directions de pôle à la fois directement et par l'élimination de W :

(R1) $\mathrm{Rad}(QW)$ est un idéal de convolution : pour $K \in \mathrm{Rad}(QW)$ et toute fonction test ϕ, $\theta(\phi)K \in \mathrm{Rad}(QW)$. En effet $QW(g,h) = \Psi(g^* * h)$ (la fonction F de (6)), donc $QW(\theta(\phi)K, h) = \Psi(K^* * \phi^* * h) = QW(K, \phi^* * h) = 0$. Par conséquent les vecteurs convolés $e_m^\lambda * e_n^*$ de (63), une fois e_m^λ remplacé par l'élément radical réparé par Gevrey du §3, sont eux-mêmes dans le radical aux mêmes queues près que dans (28).

(R2) Les estimations du théorème 5 sont des estimations de valeurs absolues, et un vecteur quasi-radical suffit : pour $k \in V_{\mathrm{low}}$, $k = K - r$ avec $K \in \mathrm{Rad}(QW)$ et $\|r\| \le C\tau^{1/2}(\log\lambda)^C\|k\|$, de sorte que pour tout v du domaine de forme

$$|QW_\lambda(k,v)| = |QW(r,v)| \le C\tau^{1/2}(\log\lambda)^C\|k\|\left(QW_\lambda(v,v) + C_0\lambda\|v\|^2\right)^{1/2},$$

le dernier facteur étant la norme de forme de v (lemme 25, et la structure $QW = \log|D|+\text{borné}$) ; pour $k, k' \in V_{\mathrm{low}}$ cela donne $|QW_\lambda(k,k')| \le C\tau(\log\lambda)^C\|k\|\|k'\|$, et sur W la norme de forme est dominée par D par le théorème 26.

(R2) découlerait d'une extension des estimations de [11] uniforme en l'indice jusqu'au seuil τ, jointe à la borne inférieure de Gram de la proposition 2 au-delà du régime de Hermite ; nous laissons cela ouvert. En accordant (R1), (R2), écrivons $\mathfrak{S}$ en blocs sur $V_{\mathrm{low}} \oplus V'$, $V' = V_{\mathrm{tr}} \oplus \mathbb{C}\rho_{\mathrm{ev}} \oplus \mathbb{C}\rho_{\mathrm{odd}}$, dans une base orthonormée de V_{low} (c'est là qu'entre la borne inférieure de Gram sur les vecteurs de conditionnement). La réduction repose alors sur trois bornes :

$$\mathfrak{S}|_{V_{\mathrm{low}}} \ge -\alpha(\lambda), \qquad \mathfrak{S}|_{V'} \ge -\eta(\lambda), \qquad \|\mathfrak{S}_{V_{\mathrm{low}},V'}\| \le \beta(\lambda), \tag{69}$$

qui donnent $\lambda_{\min}(\mathfrak{S}) \ge -\max(\alpha,\eta) - \beta$ par l'inégalité de Weyl, donc $\epsilon_\lambda \ge -\max(\alpha,\eta) - \beta$ par le lemme 27 avec $d = \frac{1}{2}\log\sigma$. Par (R2) les première et troisième bornes valent avec $\alpha, \beta = O(\tau^{1/2}\lambda^{C'})$, la puissance de λ venant des normes de forme des vecteurs de V', de la constante de Gram, et de l'élimination de W (les entrées de $\mathfrak{S}$ sont $QW_\lambda(k,v) - \langle D^{-1/2}B^*k, D^{-1/2}B^*v\rangle$, les deux termes étant contrôlés par l'estimation unilatérale) ; elles sont $o(1)$ dès que $A > 2C'$. Les directions de pôle ne sont pas contrôlées par la formule explicite : pour ρ_{ev} le terme de pôle $2\mathcal{M}\rho(\frac{1}{2})\mathcal{M}\rho(-\frac{1}{2}) = 2(\lambda - \lambda^{-1} + 2\log\lambda)^2$ est annulé, à l'ordre λ^2, par les termes premiers, puisque $h = \rho * \rho^*$ est explicite, $h(x) = 2\lambda x^{-1/2} - 2x^{1/2}/\lambda + (x^{1/2} + x^{-1/2})(2\log\lambda - \log x)$ pour $x \le \lambda^2$, et $\sum_p W_p(h) = 2\sum_{p\le\lambda^2}\log p\,(2\log\lambda - \log p) + O(\lambda\log\lambda) = 2\lambda^2 + O(\lambda\log\lambda)$ par les estimations de Chebyshev (numériquement, terme de pôle et termes premiers valent 235 et 163 à $\lambda^2 = 50$, 905 et 753 à $\lambda^2 = 250$) ; la valeur nette $QW_\lambda(\rho,\rho)$ est la somme sur les zéros, d'ordre λ contre $\|\rho\|^2 \approx 2\lambda$,

et de même pour ρ_{odd}. Les deux directions de pôle sont donc des directions ordinaires de quotient de Rayleigh $O(1)$, et elles appartiennent au bloc V' dont le signe doit être établi ; dans la plage calculée leur complément de Schur conditionné est positif, puisque le minimum de la forme sur l'orthogonal des vecteurs prolates seuls, sans les conditions de pôle, est $\lambda_{k+1} \approx 0.1$ dans les deux secteurs (Figure 5.3). D'où :

Proposition 29. *Supposons (H2′), (R1), (R2), et soit $\tau = \lambda^{-A}$ avec A assez grand pour que $\alpha(\lambda), \beta(\lambda) \to 0$ dans (69). Si pour tout grand λ le complément de Schur $\mathfrak{S}|_{V'}$ de QW_λ sur le bloc de transition et de pôle $V' = V_{\text{tr}} \oplus \mathbb{C}\rho_{\text{ev}} \oplus \mathbb{C}\rho_{\text{odd}}$ satisfait $\lambda_{\min}(\mathfrak{S}|_{V'}) \geq -\eta(\lambda)$ avec $\eta(\lambda) \to 0$, alors $\epsilon_\lambda \geq 0$ pour tout λ, et l'hypothèse de Riemann est vraie.*

Le bloc V' est là où le dictionnaire cesse d'être minuscule : ses vecteurs sont les images $\mathcal{E}$ des modes prolates au bord du comptage de Slepian, avec des énergies de l'ordre de $\delta_m \in (\tau, 1 - \kappa_{n_0}(\sigma))$, pour lesquelles l'estimation bilatérale (R2) ne donne que $|\mathfrak{S}|_{V_{\text{tr}}}| \leq C(1 - \kappa_{n_0}(\sigma))(\log\lambda)^C$, avec les deux directions de pôle. On ne peut pas le rétrécir en prenant n_0 petit : la queue du développement en paires force n_0 à être grand via (H2′), donc le seuil $\kappa_{n_0}(\sigma)$ à être petit, et dans le cas archimédien les modes avec $\kappa_n(\sigma)$ juste en dessous d'un seuil proche de 1 entreraient de toute façon dans la queue avec des poids $w_n \approx 1/(1 - \kappa_n)$ et détruiraient la marge. Ainsi la stratégie comprime le contenu arithmétique de la positivité de Weil en le signe de la forme de Weil sur un bloc explicite de dimension $O(A\sigma^2 \log\lambda)+2$ attaché aux modes dont les valeurs propres quittent le régime exponentiel de l'échelle et aux directions de pôle - un énoncé beaucoup plus localisé que la positivité sur la fenêtre, et pour lequel les données de la Figure 4.4 (les rapports $\epsilon_\lambda(j)/\delta_{4j}$ pour $j/\lambda^2 \to 1$) sont l'évidence numérique pertinente.

8.7 Comparaison avec les calculs et avec le cas archimédien

Le conditionnement de la Section 5. Le fait 11 conditionne par $\lambda^2 - 1$ (pairs) et $\lambda^2 - 2$ (impairs) vecteurs prolates et par ℓ, et trouve un minimum $\mu_\lambda \approx 2/\lambda$, le bord du spectre non minuscule. Le théorème 26 conditionne par un espace plus grand (chacun des n_0+1 vecteurs de paire à l'échelle σ contribue une copie de l'ensemble quasi-auto-dual à l'échelle $\lambda\sigma$, pour α et β) et obtient une marge plus grande, $\frac{1}{2}\log\sigma$, ce qui n'est pas en contradiction : les conditions supplémentaires suppriment les valeurs propres entre $2/\lambda$ et $\frac{1}{2}\log\sigma$. La redondance est un facteur constant d'ordre σ^4, et les calculs disent quel devrait être l'énoncé optimal : l'enveloppe des vecteurs lissés $e^\lambda_m * e^*_n$, $n \leq n_0$, est, sur la fenêtre, essentiellement l'enveloppe des vecteurs prolates à l'échelle λ $\mathfrak{p}_k$ et de ℓ. Un test direct consiste à calculer, pour les plus bas vecteurs propres de la forme conditionnée, les composantes α_{nm}, β_{nm} de (63) pour $n = 0, 2, 4$ et $m \in M$, et les trois termes de (64) avec $\sigma = 1$: pour un vecteur propre minuscule les termes de Sonin et de paire positifs doivent annuler les termes de paire négatifs à tous les chiffres près, et pour $f \in W_\lambda$ la marge doit apparaître dans le terme de Sonin.

Fonctions test lissées par Gevrey. La Remarque 8.2 suggère de refaire les calculs de conditionnement sur $\vartheta_w E_N$ au lieu de E_N. Pour la partie minuscule cela ne change rien à précision exponentielle : un vecteur propre minuscule est l'image $\mathcal{E}$ d'un vecteur prolate, qui près de $u = \lambda$ se réduit à $u^{1/2}h_\lambda(u)$ et est de taille $e^{-4\pi\lambda^2+4\pi\sqrt{2t}}$, $t = \lambda^3(\lambda - |x|)$, c'est-à-dire exponentiellement petit dans une couche de largeur logarithmique relative fixe aux deux extrémités, de sorte que la coupure ne touche qu'une région où ces vecteurs (et les $\mathfrak{p}_k$) sont déjà négligeables - le mécanisme de Kastoris une fois de plus. Pour la partie non minuscule c'est un véritable changement d'espace variationnel :

le domaine de forme de QW_λ autorise des sauts aux extrémités, les vecteurs propres de la forme conditionnée n'ont pas besoin de s'y annuler, et le minimum $\mu_\lambda(w)$ sur l'espace lissé est une borne supérieure convergeant vers le vrai minimum conditionné seulement quand $w \to 0$ en même temps que $N \to \infty$; résoudre une coupure de largeur logarithmique w requiert des fréquences d'ordre $1/w$, c'est-à-dire $N \gtrsim \log\lambda/w$ à des logarithmes près, ce qui pour $w = \lambda^{-3}$ est comparable au $N = 960$ actuel à $\lambda^2 = 50$. Le calcul utile est alors : $\mu_\lambda(w)$ pour deux largeurs avec le μ_λ non lissé, pour voir quelle part de la loi $\mu_\lambda \approx 2/\lambda$ se trouve aux extrémités de la fenêtre ; et, sur les vecteurs propres lissés, les trois pièces de (64) avec $\sigma = 1$ et les composantes (63), qui sont alors données par des sommes rapidement convergentes.

Le cas archimédien. Pour $S = \{\infty\}$ et $\lambda = \sqrt{2}$ (fonctions test supportées dans $[2^{-1/2}, 2^{1/2}]$, où aucun premier n'entre), (51) est le théorème 4 de [5], la partie de paire K_1 étant la fonctionnelle E de cet article avec les poids $\lambda(n)/(1-\lambda(n)^2) = w_n$, et les conditions de pôle y sont implémentées par l'opérateur $Q = -(\rho\partial_\rho)^2 + \frac{1}{4}$. La Section 6 de [5] établit numériquement que l'opérateur compact associé a exactement une valeur propre au-dessus de 1, identifie le vecteur propre correspondant par la théorie de Toeplitz, et conditionne par lui. Dans le langage présent : à $\lambda^2 = 2$, avec $\gamma = 4\pi$, les modes $n = 0, 4$ (secteur pair) et $n = 2, 6$ (secteur impair) sont quasi-auto-duaux, et les contraintes d'intégrale nulle et de pôle laissent $\lambda^2 - 1 = 1$ et $\lambda^2 - 2 = 0$ conditions, c'est-à-dire un vecteur, l'image $\mathcal{E}$ de l'état à deux modes $h_{\sqrt{2}}$ restreint à la fenêtre ; l'apparition de la valeur propre au-dessus de 1 exactement quand l'intervalle atteint la longueur $\log 2$ est le premier barreau $\delta_4(\lambda)$ entrant dans la plage minuscule ; et la propriété de "bébé hypothèse de Riemann" du vecteur propre de Toeplitz (toutes les racines de son polynôme sur le cercle unité) est la forme discrète du théorème 13 et du théorème 3. Ce que le théorème 26 ajoute est la description *a priori* du vecteur de conditionnement et du comptage, à tout λ ; ce qu'il ne remplace pas est le pas "la valeur propre suivante est en dessous de 1" ($\lambda_2 \approx 0.688$ dans [5]), qui est la marge sur l'espace conditionné, obtenue ici à partir de la formule de trace décalée au prix d'un espace de conditionnement plus grand. Dans ce cas archimédien toutes les hypothèses du théorème 26 sont connues, et la formule de trace est [5], (15), ou [4], théorème 2.36 avec $S = \{\infty\}$.

Échelles. Puisque $\mathcal{M}f$ est de type exponentiel $\log\lambda$, les fonctions test ne résolvent la variable de Mellin qu'à l'échelle $\pi/\log\lambda$, tandis que les zéros de ζ à la hauteur t sont espacés de $2\pi/\log(t/2\pi)$; les deux coïncident à $t = 2\pi\lambda^2 = \gamma$. En dessous de γ les zéros sous-échantillonnent les transformées de Mellin des fonctions supportées dans la fenêtre d'exactement λ^2 modes par secteur (le déficit $TL/\pi - N(T)$, $L = \log\lambda$, est maximal à $T = \gamma$ où il vaut λ^2), ce qui est le comptage du fait 8 et le plongeon de l'échelle à $n \approx 4\lambda^2$; au-dessus de γ ils sur-échantillonnent. Le conditionnement supprime les modes sous-échantillonnés, et la marge $\mu_\lambda \approx 2/\lambda$ du fait 11 est ce que le sur-échantillonnage laisse au bord. Pour $\lambda^2 < 14.13/2\pi \approx 2.25$ l'ordonnée du premier zéro dépasse γ et aucun sous-échantillonnage ne se produit : c'est le régime de [5], et le premier cas semilocal $S = \{\infty, 2\}$, $2 < \lambda^2 < 2.25$, y est encore.

8.8 Questions restantes

1. L'énoncé de localisation (62) pour les paires semilocales, avec son taux et sa dépendance en S (les angles eux-mêmes ne sont pas sommables, [6] ; les énoncés qualitatifs sont les lemmes 20, 21 et 22) ; joint à la Remarque 8.3 il donne (H2′) sur les espaces lissés de dimension

finie, tandis que sur le domaine de forme la borne uniforme de densité de cette remarque est nécessaire aussi ; et l'identification des directions quasi-auto-duales semilocales avec les η_S des combinaisons prolates auto-duales, qui est la réciproque de [7], proposition 4.1.

2. Les estimations uniformes bilatérales (R2) jusqu'à un seuil τ, et la borne inférieure de Gram au-delà du régime de Hermite (la plage $k \asymp \lambda^2$, où $h_{n,\lambda}(\lambda)^2 = 2\pi^2\lambda\delta_n/K(\sigma_n)$ remplace $4\pi\lambda\delta_n$).
3. Le bloc de transition et de pôle : le signe du complément de Schur de QW_λ sur les $O(\log\lambda)$ modes au bord de l'échelle et sur les deux directions de pôle, proposition 29 ; un audit numérique des trois bornes (69) à une coupure modeste, avec le conditionnement de Gram, le bloc de pôle et les termes mixtes séparés et avec des bornes d'erreur rigoureuses, montrerait laquelle mérite le plus d'attention analytique.
4. Affiner le conditionnement du théorème 26 aux λ^2-1, λ^2-2 vecteurs du fait 11, et comprendre la loi $\mu_\lambda \approx 2/\lambda$.
5. La précision des zéros (Section 7) : une cible plus fine et une meilleure normalisation devraient la pousser à l'échelle $\delta_4^{1/2}$ ou δ_4 ; une preuve d'une borne de Lipschitz pour l'état fondamental en $u = 1$ permettrait la normalisation ponctuelle dans (44).

A Calcul des fonctions prolates

Plutôt que de s'appuyer sur une routine de bibliothèque, calculer ϕ_0, ϕ_4 (et ϕ_{4k}, ϕ_{4k+2}) à partir du développement en polynômes de Legendre (méthode de Bouwkamp ; voir Osipov-Rokhlin-Xiao, *Prolate spheroidal wave functions of order zero*, 2013). L'équation angulaire

$$\frac{d}{dz}\left((1-z^2)\frac{dS}{dz}\right) + (\mu - \gamma^2 z^2)\, S = 0 \tag{70}$$

développée en polynômes de Legendre orthonormés $\bar{P}_k = \sqrt{\frac{2k+1}{2}}\, P_k$, k pair, devient le problème propre $A\, d = \mu\, d$ pour la matrice tridiagonale symétrique réelle

$$A_{k,k} = k(k+1) + \gamma^2\, \frac{2k^2+2k-1}{(2k-1)(2k+3)}, \qquad A_{k,k+2} = A_{k+2,k} = \gamma^2\, \frac{(k+1)(k+2)}{(2k+3)\sqrt{(2k+1)(2k+5)}}, \tag{71}$$

$k = 0, 2, 4, \ldots, K$. Ses valeurs propres par ordre croissant sont $\mu_0 < \mu_2 < \mu_4 < \cdots$, et les vecteurs propres $d^{(n)}$ donnent

$$\phi_n(z) = \sum_{k \text{ pair}} d_k^{(n)}\, \bar{P}_k(z) = \pm\sqrt{\tfrac{2n+1}{2}}\, \mathrm{Ps}_n(z;\gamma^2), \qquad \sum_k (d_k^{(n)})^2 = 1. \tag{72}$$

Points pratiques :

1. Les coefficients décroissent super-exponentiellement dès que $k > \gamma$ (approximativement $d_{k+2}/d_k \approx -\gamma^2/4k^2$) ; $K \approx 2\gamma + 60$ est ample, à confirmer en doublant K.
2. Puisque $\int_{-1}^{1} \bar{P}_k = \sqrt{2}\,\delta_{k0}$, les intégrales de (21) sont exactes, sans quadrature :

$$h_\lambda(x) = \sqrt{2}\left[d_0^{(0)}\, \phi_4(x/\lambda) - d_0^{(4)}\, \phi_0(x/\lambda)\right], \qquad |x| \le \lambda, \tag{73}$$

au facteur scalaire près par lequel (21) est insensible.

3. Évaluer $\bar{P}_k(z)$ par la récurrence à trois termes (stable sur $[-1,1]$) directement à chaque argument nu/λ que les sommes requièrent ; pas d'interpolation.
4. Le solveur propre symétrique est stable rétrospectivement et les μ_n sont séparés par des écarts d'ordre γ, donc la double précision (par exemple `eigh_tridiagonal` dans SciPy, ou `Eigensystem` sur une `SparseArray`) donne ϕ_n à environ 10^{-14} en norme sup ; la même matrice dans `mpmath` (`eigsy`) donne une précision arbitraire sans effort supplémentaire.
5. Un contrôle ponctuel contre $\mathrm{Ps}(n,0,\gamma,z)$ de Mathematica (avec `WorkingPrecision -> 30` ; fiable mais lent pour $\gamma \gtrsim 50$) est une comparaison des rapports $\phi_n(z)/\phi_n(0)$.
6. Éviter `pro_ang1` de SciPy (code Zhang-Jin), qui perd de la précision ou échoue pour grand γ, et ne pas remplacer les intégrales exactes du point 2 par une quadrature numérique.

Les valeurs propres de Fourier finies sont sans normalisation et viennent gratuitement :

$$\chi_n = \lambda\,\frac{\int_{-1}^{1}\phi_n}{\phi_n(0)} = \lambda\sqrt{2}\,\frac{d_0^{(n)}}{\phi_n(0)}, \qquad \bar{P}_k(0) = \sqrt{\tfrac{2k+1}{2}}\,(-1)^{k/2}\frac{(k-1)!!}{k!!}\ \ (k \text{ pair}), \tag{74}$$

de façon équivalente $\chi_{4k} = 2\lambda S^{(1)}_{4k,0}(\gamma,1)$ en termes de la fonction radiale de première espèce. Valeurs échantillons : pour $\lambda^2 = 5$,

$$\chi_0 = 0.99999999999999999999999998989\ldots,$$
$$\chi_4 = 0.99999999999999999870161199128\ldots;$$

pour $\lambda^2 = 9$, $1-\chi_0 \approx 2.0\cdot 10^{-48}$, $1-\chi_4 \approx 3.1\cdot 10^{-39}$; pour $\lambda^2 = 50$, $1-\chi_4 \approx 1.36\cdot 10^{-259}$. La formule de Fuchs sous la forme $-\log\delta_4(\lambda) = 4\pi\lambda^2 - 9\log\lambda - \ell_4$, $\ell_4 = 14.67567$, reproduit ces valeurs à la précision relative attendue $O(\lambda^{-2})$.

B Calcul de θ_λ et τ_λ

Utiliser la variable $t = \log u$ et une grille symétrique $t_j = j\delta$, $j = -J,\ldots,J$, $J\delta = \log\lambda$, de sorte que $u_0 = 1$ est un nœud et $d^*u = dt$; la même grille doit porter η_λ.

- Pour $u \geq 1$, utiliser la définition : $\theta_\lambda(u) = \sqrt{u}\sum_{1\leq n\leq \lambda/u} h_\lambda(nu)$, au plus $\lfloor\lambda\rfloor$ termes, sans annulation. En particulier $\theta_\lambda(1) = \sum_{1\leq n\leq\lambda} h_\lambda(n)$, et pour $u > \lambda/2$ seul $n=1$ survit : $\theta_\lambda(u) = \sqrt{u}\,h_\lambda(u)$.
- Pour $u < 1$ la somme directe a jusqu'à λ^2 termes avec de fortes annulations près de $u = \lambda^{-1}$ (son terme dominant est proportionnel à $\int h_\lambda = 0$). Utiliser plutôt l'expression duale de Poisson : pour f paire avec $\widehat{f}(0) = 0$ on a $\mathcal{E}(f)(u) = u^{-1/2}\sum_{n\geq 1}\widehat{f}(n/u) - \frac{1}{2}u^{1/2}f(0)$, et sur $[-\lambda,\lambda]$ $\widehat{h}_\lambda = \sqrt{2}[d_0^{(0)}\chi_4\phi_4(\cdot/\lambda) - d_0^{(4)}\chi_0\phi_0(\cdot/\lambda)]$, de sorte que, à une queue contrôlée par $1-\chi_4^2$ près,
$$\theta_\lambda(u) \approx u^{-1/2}\sum_{1\leq n\leq\lambda u}\widehat{h}_\lambda(n/u) - \tfrac{1}{2}\,u^{1/2}h_\lambda(0), \qquad \lambda^{-1}\leq u\leq 1, \tag{75}$$
avec $h_\lambda(0) = \sqrt{2}d_0^{(0)}\phi_4(0)(1-\chi_4/\chi_0)$ exponentiellement petit. (75) exhibe la quasi-symétrie $\theta_\lambda \approx \theta_\lambda\circ\iota$.
- Ensuite $\tau_\lambda = \theta_\lambda/\theta_\lambda(1)$ et $g_\lambda = \eta_\lambda - \tau_\lambda$ sur la grille ; pour la P-normalisation calculer $\langle\cdot,\theta\rangle$ par la règle des trapèzes en t, la cible θ étant évaluée à partir de (5) (pour $u<1$ utiliser $\theta(u) = \theta(1/u)$).

C Quantités à rapporter et validation

Pour chaque λ :

1. $\|g_\lambda\|_1$ et $\|g_\lambda \circ \iota\|_1$, calculés comme $\int_0^{\log\lambda} |g_\lambda(e^{\pm t})| e^{t/2} dt$ par la règle des trapèzes en t, et leur somme (45) ; séparément la contribution de $u \in [\lambda/2, \lambda]$, où $\theta_\lambda = \sqrt{u}\, h_\lambda(u)$ est une queue prolate négligeable, de sorte que cette contribution est essentiellement $\int_{\lambda/2}^{\lambda} |\eta_\lambda| u^{-1/2} du$ et requiert que η_λ soit précis en termes absolus près de $u = \lambda$. Convergence sous raffinement de la grille.
2. Les mêmes pour $\tilde\eta_\lambda - \tilde\tau_\lambda$ et $\tilde\tau_\lambda - \tau$ (P-normalisés), et le rapport $P(\eta_\lambda)/\eta_\lambda(1)$.
3. $\max_{\Re\mathfrak{e}\, s = \pm 1/2} |\mathcal{M} g_\lambda(s)|$ par FFT de $g_\lambda(e^t) e^{\pm t/2}$, à comparer au point 1.
4. $\sup|g_\lambda|$, et les défauts de symétrie $\sup|\tau_\lambda - \tau_\lambda \circ \iota|$, $\sup|\eta_\lambda - \eta_\lambda \circ \iota|$.
5. Les quantités spectrales sans échelle ρ_λ et R_λ de la Section 6, avec les deux plus petites valeurs propres paires.
6. $\theta_\lambda(1)$, $\|\theta_\lambda\|$, $\|\eta_\lambda\|$ (avec $\eta_\lambda(1) = 1$) : les rapports $\theta_\lambda(1)/\|\theta_\lambda\|$ et $1/\|\eta_\lambda\|$ doivent s'accorder quand les formes s'accordent, et tous deux tendent vers $\theta(1)/\|\theta\| = 1.580$.

Échelle de validation, avant toute comparaison avec η_λ : (i) ϕ_n inchangé à la précision de travail sous $K \to 2K$; (ii) $\gamma \to 0$ reproduit P_n ; (iii) accord de $\phi_n(z)/\phi_n(0)$ avec $\mathrm{Ps}(n, 0, \gamma, z)/\mathrm{Ps}(n, 0, \gamma, 0)$ en quelques z ; (iv) (74) contre des valeurs indépendantes de χ_n ; (v) en $u = 1$ et quelques $u < 1$, accord de la somme directe avec l'expression duale (75) à la précision attendue $O(1 - \chi_4^2)$ - ce seul test exerce simultanément ϕ_n, χ_n, la contrainte $\int h_\lambda = 0$ et le code de sommation.

D La matrice de QW_λ

Soit $L = 2\log\lambda = \log\lambda^2$, $U_n(x) = L^{-1/2} e^{2\pi i n x/L}$ sur $[0, L]$ et $V_n(u) = U_n(\log(\lambda u))$, la base orthonormée de $L^2([\lambda^{-1}, \lambda], d^*u)$ de [3], §3. Sa forme réelle est

$$b_0 = V_0, \qquad b_j = \tfrac{1}{\sqrt2}(V_j + V_{-j}), \qquad b_{-j} = \tfrac{i}{\sqrt2}(V_j - V_{-j}) \quad (j \geq 1),$$

c'est-à-dire $b_j(u) = \xi_j(\log u)$ avec

$$\xi_0 = L^{-1/2}, \qquad \xi_{\pm j}(t) = (-1)^j \sqrt{2/L} \times \begin{cases} \cos(2\pi j t/L) \\ -\sin(2\pi j t/L) \end{cases} \qquad (j \geq 1);$$

on a $b_j \circ \iota = b_j$ et $b_{-j} \circ \iota = -b_{-j}$ pour $j \geq 0$, et nous posons $E_N = \mathrm{span}\{b_j : |j| \leq N\}$.

Par [3], (3.13)-(3.18) et lemme 2.3, $T_{nm} = QW_\lambda(V_n, V_m) = \Psi^\sharp(\omega_{nm} \circ \log)$ avec, pour $y \in [0, L]$,

$$\omega_{nm}(y) = \frac{s_m(y) - s_n(y)}{\pi(n-m)} \ (n \neq m), \qquad \omega_{nn}(y) = 2\left(1 - \frac{y}{L}\right)\cos\frac{2\pi n y}{L}, \qquad s_k(y) = \sin\frac{2\pi k y}{L},$$

et $\Psi^\sharp = W_{0,2}^\sharp - W_{\mathbb{R}}^\sharp - \sum_p W_p^\sharp$ agissant sur les fonctions de $y \in [0, \infty)$ (s'annulant pour $y > L$) par

$$W_{0,2}^\sharp[\omega] = \int_0^L \omega(y)\, 2\cosh\tfrac{y}{2}\, dy, \quad W_p^\sharp[\omega] = \sum_{m \geq 1,\ p^m \leq \lambda^2} \frac{\log p}{p^{m/2}}\, \omega(m \log p),$$

$$W^\sharp_{\mathbb{R}}[\omega] = \tfrac12(\log 4\pi + \gamma_E)\,\omega(0) + \int_0^\infty \frac{e^{y/2}\omega(y) - \omega(0)}{2\sinh y}\,dy.$$

Donc $T_{nm} = (G(m) - G(n))/(\pi(n-m))$ pour $n \neq m$, avec $G(k) = \Psi^\sharp[s_k]$, et seulement $2N+2$ quantités unidimensionnelles sont nécessaires. Avec $\omega = 2\pi k/L$, $\beta_r = 2r + \frac12$ et $e^{y/2}/(2\sinh y) = \sum_{r\geq 0} e^{-\beta_r y}$:

$$W^\sharp_{0,2}[s_k] = \mathfrak{Im}\left(\frac{e^{L/2}-1}{\frac12 + i\omega} + \frac{e^{-L/2}-1}{-\frac12 + i\omega}\right), \qquad W^\sharp_{\mathbb{R}}[s_k] = \tfrac12 \mathfrak{Im}\;\psi\Big(\tfrac14 + \tfrac{i\omega}{2}\Big) - \sum_{r\geq 0} \frac{\omega\,\lambda^{-2\beta_r}}{\beta_r^2 + \omega^2},$$

ψ la fonction digamma, la série convergeant comme λ^{-4r}. Pour la diagonale, avec $J(\sigma) = \int_0^L (1 - y/L)e^{\sigma y}dy$ (élémentaire, en utilisant $e^{i\omega L} = 1$),

$$W^\sharp_{0,2}[\omega_{nn}] = 2\mathfrak{Re}\,\Big(J(\tfrac12 + i\omega) + J(-\tfrac12 + i\omega)\Big),$$

$$W^\sharp_{\mathbb{R}}[\omega_{nn}] = \log 4\pi + \gamma_E + 2K - \log\frac{\lambda^2+1}{\lambda^2-1} + 2\Delta(n),$$

$$\Delta(n) = \tfrac12 \mathfrak{Re}\,\Big(\psi(\tfrac14) - \psi(\tfrac14 - \tfrac{i\omega}{2})\Big) - \frac{1}{4L}\mathfrak{Re}\;\psi'\Big(\tfrac14 - \tfrac{i\omega}{2}\Big) + \sum_{r\geq 0}\lambda^{-2\beta_r}\left(\frac{\mathfrak{Re}\,(\beta_r - i\omega)^{-2}}{L} + \frac{1}{\beta_r}\right),$$

$K = \int_0^L (e^{y/2}-1)/(2\sinh y)\,dy$, et $W^\sharp_p[\omega_{nn}] = \sum \frac{\log p}{p^{m/2}}\,2\Big(1 - \frac{m\log p}{L}\Big)\cos(\omega\, m\log p)$. Les matrices de secteur sont

$$QW^{\mathrm{ev}}_{00} = T_{00}, \quad QW^{\mathrm{ev}}_{0j} = \sqrt{2}\,T_{0j}, \quad QW^{\mathrm{ev}}_{ij} = T_{ij} + T_{i,-j}, \qquad QW^{\mathrm{odd}}_{ij} = T_{ij} - T_{i,-j} \qquad (i,j \geq 1).$$

À $\lambda^2 = 13$, $N = 120$ celles-ci reproduisent un calcul indépendant à 3386 bits à $8\cdot 10^{-109}$ près dans chaque coefficient, et la restriction de la partie $W_{0,2}$ à chaque secteur est $\pm 2\,\ell\ell^T$ avec ℓ comme dans (37).

Les composantes de $\mathcal{E}(f)$. Pour f supportée dans $[-\lambda,\lambda]$ et $t = \log u \in [-L/2, L/2]$, $\langle \mathcal{E}(f), b_j\rangle = \int_{-L/2}^{L/2} e^{t/2} \sum_{n<\lambda^2,\ ne^t\leq\lambda} f(ne^t)\,\xi_j(t)\,dt$. L'intégrande est analytique sur chaque intervalle entre points consécutifs $\log(\lambda/n)$, et nous utilisons Gauss-Legendre sur chacun d'eux, avec un nombre de nœuds proportionnel à la phase $2\pi N\Delta t/L + \gamma\, n\,\Delta(e^t)/\lambda$; les fonctions prolates sont évaluées à partir de leur développement en Legendre (Annexe A) en chaque point ne^t/λ. Doubler le nombre de nœuds change les vecteurs de moins de $2\cdot 10^{-14}$, et des composantes individuelles s'accordent avec une quadrature adaptative à $4\cdot 10^{-16}$.

Base lissée. Pour les diagnostics de formule de trace de la Section 8 la base E_N est remplacée par $\vartheta_w E_N$, $\vartheta_w(u) = \vartheta\Big((L/2 - |\log u| - w)/w\Big)$ dans la notation $t = \log u \in [-L/2, L/2]$, avec ϑ une coupure de Gevrey de classe G^s ($\vartheta = 0$ sur $(-\infty, 0]$, $\vartheta = 1$ sur $[1,\infty)$), de sorte que $\vartheta_w = 1$ sauf à log-distance $2w$ des extrémités. La matrice de QW_λ sur $\vartheta_w E_N$ s'obtient à partir des coefficients de Fourier de ϑ_w sur $[-L/2, L/2]$ (un calcul unidimensionnel fixe, $O(N\log N)$ coefficients nécessaires) par une congruence de la matrice sur $E_{N'}$, $N' \gtrsim N + \log\lambda/w$; la matrice de Gram de $\vartheta_w E_N$ n'est plus l'identité et le problème aux valeurs propres devient généralisé. Quantités à rapporter : $\mu_\lambda(w)$ pour $w = \lambda^{-3}$ et $w = \lambda^{-1}$ contre le μ_λ non lissé ; les angles $\sin\angle(\mathfrak{p}_k, \eta_\lambda(k))$ recalculés sur l'espace lissé, qui devraient être inchangés à précision exponentielle ; et la décroissance de $|\mathcal{M}\tilde f(is)|$ pour les vecteurs propres lissés, qui devrait suivre $e^{-c(w|s|)^{1/s}}$.

Références

[1] R. Andrews, Jr., *Convergence claims for the CCM construction : an empirical reassessment*, version 2.1, Zenodo (2026).

[2] A. Connes, C. Consani, *Spectral triples and ζ-cycles*, Enseign. Math. (2023), arXiv :2106.01715.

[3] A. Connes, C. Consani, H. Moscovici, *Zeta spectral triples*, arXiv :2511.22755.

[4] A. Connes, M. Marcolli, *Noncommutative geometry, quantum fields and motives*, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications 55, 2008 ; Chapter 2.

[5] A. Connes, C. Consani, *Weil positivity and trace formula, the archimedean place*, Selecta Math. (N.S.) 27 (2021), no. 4, Paper No. 77.

[6] A. Connes, C. Consani, *Quasi-inner functions and local factors*, J. Number Theory 226 (2021), 139-167.

[7] A. Connes, C. Consani, H. Moscovici, *Zeta zeros and prolate wave operators*, arXiv :2310.18423.

[8] A. Connes, W. D. van Suijlekom, *Quadratic forms, real zeros and echoes of the spectral action*, arXiv :2511.23257.

[9] A. Connes, *The Riemann Hypothesis : past, present and a letter through time*, J. Open Math. Problems 2 (2026), no. 1, 1-52, doi :10.56994/JOMP.002.001.001.

[10] A. Connes, *Trace formula in noncommutative geometry and the zeros of the Riemann zeta function*, Selecta Math. (N.S.) 5 (1999), 29-106.

[11] A. Connes, D. Kastoris, *On the eigenvalues of the Weil quadratic form*, submitted.

[12] T. M. Dunster, *Asymptotics of prolate spheroidal wave functions*, J. Classical Anal. 11 (2017), arXiv :1601.00699.

[13] W. H. J. Fuchs, *On the eigenvalues of an integral equation arising in the theory of band-limited signals*, J. Math. Anal. Appl. 9 (1964), 317-330.

[14] A. Groskin, *High-precision approximation of Riemann zeros via the truncated Weil form*, arXiv :2605.20224.

[15] P. R. Halmos, *Two subspaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 144 (1969), 381-389.

[16] D. Kastoris, *Quantitative prolate approximants in the radical of the Weil quadratic form*, 10.5281/zenodo.22864295.

[17] J. Meixner, F. W. Schäfke, *Mathieusche Funktionen und Sphäroidfunktionen*, Springer, 1954.

[18] D. Śliwiński, *Spectral analysis of the $D_{\log}^{(\lambda,N)}$ operators*, arXiv :2601.12133.

[19] D. Slepian, *Some asymptotic expansions for prolate spheroidal wave functions*, J. Math. and Phys. 44 (1965), 99-140.

Ronnie Andrews, Jr.
ORCID 0009-0003-9724-3104
585 Hopewell Downs Dr.
Milton, GA 30004
United States of America

Alain Connes
Collège de France
3 Rue d'Ulm
75005 Paris
France

Antonio La Gatta
Dipartimento per la Trasform. Digitale
Presidenza del Consiglio dei Ministri
Roma
Italy