

# La droite de twisteur absolue et la géométrie de $\overline{\mathrm{Spec} \mathbb{Z}}$

Alain Connes, Caterina Consani

## Résumé

Nous construisons la géométrie algébrique absolue de la compactification  $\overline{\mathrm{Spec} \mathbb{Z}}$  en amalgamant la courbe absolue affine  $(\mathrm{Spec} \mathbb{Z})_{\mathbb{F}_1}$  avec une composante archimédienne définie sur l'extension signée  $\mathbb{F}_{12}$  de  $\mathbb{F}_1$ . En adjoignant une unité imaginaire formelle à la droite projective absolue, nous obtenons un topos équivariant muni d'une symétrie d'inversion géométrique canonique, qui induit la structure réelle de twisteur sur ses points complexes. Cette géométrie archimédienne est incorporée dans une courbe absolue globale définie comme un objet interne du topos arithmétique impair, dual du monoïde multiplicatif des entiers positifs impairs, et gouvernée par la structure de Hopf intrinsèque des algèbres sphériques sur  $\mathbb{F}_{12}$ . La restriction de l'action du Frobenius absolu aux entiers impairs est imposée arithmétiquement par l'extension des scalaires à  $\mathbb{F}_{12}$ . Sur les points complexes, la dynamique résultante génère simultanément les opérations d'Adams et la conjugaison complexe sur les structures de Hodge réelles. Au niveau catégorique, le topos arithmétique impair provient de la catégorie péricyclique, dont les opérations  $\lambda$  fournissent une interprétation conceptuelle des facteurs locaux des fonctions L géométriques.

## 1. Introduction

Dans cet article, nous construisons la géométrie locale de la complétion de Zariski  $\overline{\mathrm{Spec} \mathbb{Z}}$  à la place archimédienne comme une droite de twisteur absolue. Nous montrons que cette géométrie est gouvernée par la structure de Hopf intrinsèque des algèbres sphériques sur  $\mathbb{F}_{12}$ . Nous introduisons ensuite une courbe absolue globale sur  $\mathbb{F}_{12}$  en amalgamant la structure absolue affine de  $\mathrm{Spec} \mathbb{Z}$  avec cette nouvelle composante archimédienne. La courbe résultante est munie de l'action canonique du Frobenius  $x \mapsto x^n$ ,  $n \in \mathbb{N}_{\mathrm{odd}}^\times$ , dont la restriction au monoïde multiplicatif des entiers impairs est intrinsèque à la structure sur  $\mathbb{F}_{12}$ .

La construction de l'avatar absolu de  $\mathrm{Spec} \mathbb{Z}$ , *i.e.* la courbe affine  $(\mathrm{Spec} \mathbb{Z})_{\mathbb{F}_1}$  définie dans [1], était guidée par la description du monoïde de Picard  $\mathrm{Pic}(\mathrm{Spec} \mathbb{Z})$  en termes de groupes abéliens sans torsion de rang un. Ce principe directeur est incarné dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathrm{Spec} \mathbb{Z} & \\
 \Theta \swarrow & & \searrow \theta \\
 \widehat{\mathbb{N}}_0^\times & \xrightarrow{\kappa} & \mathrm{Pic}(\mathrm{Spec} \mathbb{Z})
 \end{array} \tag{1}$$

L'application  $\kappa$  est le prolongement de la bijection canonique  $\mathrm{Pts}(\widehat{\mathbb{N}}^\times) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}(\mathrm{Spec} \mathbb{Z})$ , en envoyant le point base  $\{0\}$  du topos arithmétique  $\widehat{\mathbb{N}}_0^\times$  vers le point générique<sup>1</sup>  $\mathbb{Z}$  de  $\mathrm{Pic}(\mathrm{Spec} \mathbb{Z})$ . Ce prolongement fournit le point de départ pour la construction archimédienne considérée ci-dessous. Passer de la courbe affine  $(\mathrm{Spec} \mathbb{Z})_{\mathbb{F}_1}$  à sa complétion  $\overline{\mathrm{Spec} \mathbb{Z}}$  nécessite une extension du diagramme (1), à la fois au niveau du topos sous-jacent et de son faisceau structural.

1.  $\mathbb{Z}$  est l'image via  $\theta$  du point générique de  $\mathrm{Spec} \mathbb{Z}$ , et reflète la densité des idéles finis dans les adèles rationnels finis.

Du côté géométrique, le rôle de  $\text{Pic}(\text{Spec } \mathbb{Z})$  est naturellement tenu par le Jacobien  $\text{Jac}(\overline{\text{Spec } \mathbb{Z}})$ . Sous l'application étendue

$$\tilde{\theta} : \overline{\text{Spec } \mathbb{Z}} \longrightarrow \text{Jac}(\overline{\text{Spec } \mathbb{Z}}),$$

le point archimédien  $\infty \in \overline{\text{Spec } \mathbb{Z}}$  est envoyé sur le point

$$\tilde{\theta}(\infty) := (\mathbb{Z}, \|\cdot\| = 0) \in \text{Jac}(\overline{\text{Spec } \mathbb{Z}}).$$

Le groupe abélien de rang un  $\mathbb{Z}$  est ici muni de la semi-norme archimédienne triviale et ne possède *aucun choix distingué d'ordre*. C'est précisément cette absence d'ordre privilégié qui détermine la construction archimédienne développée dans cet article.

Au niveau adélique, le passage à la complétion introduit exactement un paramètre supplémentaire. Plus précisément,

$$\text{Jac}(\overline{\text{Spec } \mathbb{Z}}) = \text{Pic}(\text{Spec } \mathbb{Z}) \times \{\|\cdot\| = 0, \|\cdot\| \neq 0\}, \quad (2)$$

où le second facteur enregistre si la semi-norme archimédienne est triviale ou non triviale. Le contenu géométrique authentique n'apparaît qu'après avoir relevé cette description adélique au niveau du topos sous-jacent et de son faisceau structural.

Pour relever la décomposition produit (2) au niveau du topos sous-jacent, la distinction essentielle entre les points de  $\widehat{\mathbb{N}_0^\times}$  et ceux de  $\text{Pic}(\text{Spec } \mathbb{Z})$  doit être prise en compte. Alors qu'un point de  $\text{Pic}(\text{Spec } \mathbb{Z})$  est représenté par un groupe abélien sans torsion de rang un  $H$ , un point du topos arithmétique  $\widehat{\mathbb{N}_0^\times}$  consiste en un groupe  $(H, H_+)$  ordonné. Le choix d'un ordre est un constituant essentiel de la géométrie locale, puisqu'il détermine la fibre

$$\mathbb{F}_1[T^{H_+}]$$

du faisceau structural du site arithmétique  $(\widehat{\mathbb{N}_0^\times}, \mathbb{F}_1[T])$  (voir [1]). À la place archimédienne, l'absence d'un ordre distingué est résolue en passant à une géométrie équivariante, qui constitue la principale nouvelle construction de cet article.

Le point archimédien  $\tilde{\theta}(\infty) \in \text{Jac}(\overline{\text{Spec } \mathbb{Z}})$  ne porte aucun choix distingué d'ordre ; passer au niveau du topos nécessite donc de résoudre ce groupe non ordonné en deux ordres possibles :  $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ , et  $\mathbb{Z}_{\leq 0}$ . Corrélativement, la structure locale du faisceau est décrite par deux cartes affines dont les algèbres sphériques coordonnées sont

$$\mathbb{F}_1[T^{\mathbb{Z}_{\geq 0}}] \quad \text{et} \quad \mathbb{F}_1[T^{\mathbb{Z}_{\leq 0}}].$$

Ces cartes sont recollées le long de leur intersection commune, correspondant aux plongements canoniques des deux monoïdes ordonnés dans le groupe sous-jacent  $\mathbb{Z}$ . Ainsi, l'absence d'un ordre distingué à la place archimédienne donne naturellement naissance à la droite projective absolue  $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_1}^1$  construite dans [10].

L'isomorphisme canonique des deux ordres détermine l'involution géométrique

$$\alpha : \mathbb{P}_{\mathbb{F}_1}^1 \longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{F}_1}^1, \quad (3)$$

qui échange les deux cartes affines en inversant l'ordre. Ceci conduit naturellement à la définition du *topos équivariant archimédien*

$$[\mathbb{P}_{\mathbb{F}_1}^1 / \langle \alpha \rangle].$$

L'espace topologique sous-jacent de  $[\mathbb{P}_{\mathbb{F}_1}^1 / \langle \alpha \rangle]$  est l'espace de Sierpiński  $\{\|\cdot\| = 0, \|\cdot\| \neq 0\}$ , constitué d'un point générique d'orbifold  $\eta_\infty$  et d'un point fermé  $\gamma$ .

La décomposition produit (2) du Jacobien a un contrepartie naturelle au niveau du topos sous-jacent. Il s'agit du *topos arithmétique étendu* :

$$\mathcal{S}_0 := \widehat{\mathbb{N}_0^\times} \times [\mathbb{P}_{\mathbb{F}_1}^1 / \langle \alpha \rangle],$$

où le facteur  $[\mathbb{P}_{\mathbb{F}_1}^1 / \langle \alpha \rangle]$  définit la géométrie locale de la place archimédienne.

Le diagramme commutatif (1) s'étend donc en :

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec } \mathbb{Z} & \xrightarrow{\quad} & \overline{\text{Spec } \mathbb{Z}} \\ \downarrow \Theta & & \downarrow \tilde{\Theta} \\ \widehat{\mathbb{N}_0^\times} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{S}_0 = \widehat{\mathbb{N}_0^\times} \times [\mathbb{P}_{\mathbb{F}_1}^1 / \langle \alpha \rangle] \\ \downarrow \kappa & & \downarrow \tilde{\kappa} = \kappa \times \pi \\ \text{Pic}(\text{Spec } \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\quad} & \text{Jac}(\overline{\text{Spec } \mathbb{Z}}) = \text{Pic}(\text{Spec } \mathbb{Z}) \times \{0, \|\cdot\| \neq 0\} \end{array}$$

(Curved arrows:  $\theta$  from  $\text{Spec } \mathbb{Z}$  to  $\text{Pic}(\text{Spec } \mathbb{Z})$ ,  $\tilde{\theta}$  from  $\overline{\text{Spec } \mathbb{Z}}$  to  $\text{Jac}(\overline{\text{Spec } \mathbb{Z}})$ )

où l'application étendue  $\tilde{\kappa} = \kappa \times \pi$  est le produit de  $\kappa$  avec la projection canonique

$$\pi : [\mathbb{P}_{\mathbb{F}_1}^1 / \langle \alpha \rangle] \longrightarrow \{\|\cdot\| = 0, \|\cdot\| \neq 0\}.$$

Les deux flèches horizontales parallèles dans la rangée du milieu du diagramme sont les sections canoniques du topos produit. L'application  $\tilde{\Theta}$  prolonge l'application  $\Theta$  originale en assignant à chaque nombre premier  $p \in \text{Spec } \mathbb{Z}$  le point :

$$\tilde{\Theta}(p) = (\Theta(p), \eta_\infty) \in \mathcal{S}_0,$$

où la seconde composante enregistre la semi-norme archimédienne non triviale.

La nouveauté véritable est l'image du point archimédien. L'application  $\tilde{\Theta}$  envoie  $\infty \in \overline{\text{Spec } \mathbb{Z}}$  sur le point

$$\tilde{\Theta}(\infty) = (\{0\}, \gamma) \in \mathcal{S}_0.$$

Ici, la première coordonnée est le point générique  $\{0\}$  de  $\widehat{\mathbb{N}_0^\times}$ , exprimant que la place archimédienne n'est localisée en aucun nombre premier fini. La seconde coordonnée est le point fermé  $\gamma$  de  $[\mathbb{P}_{\mathbb{F}_1}^1 / \langle \alpha \rangle]$ , qui enregistre l'annulation de la semi-norme archimédienne.

La construction géométrique décrite ci-dessus capture la structure topologique et combinatoire de la place archimédienne, et définit la droite projective attendue de la géométrie archimédienne d'une courbe de genre zéro (cf. [3, 5] et [12]).

L'étape suivante consiste à implémenter la symétrie  $\alpha$  dans (3) au niveau du faisceau structural du topos équivariant archimédien. Au lieu de la symétrie naïve du faisceau  $T \mapsto \frac{1}{T}$ , le choix conceptuel, guidé par la symétrie de Weyl, sélectionne l'application :

$$T \mapsto -\frac{1}{T}.$$

Ceci nécessite une extension des scalaires de  $\mathbb{F}_1$  à l'extension quadratique<sup>2</sup> :

$$\mathbb{F}_{1^2} := \mathbb{F}_1[\{0, 1, \epsilon : \epsilon^2 = 1\}]. \tag{4}$$

---

2.  $\mathbb{F}_1$  est l'algèbre sphérique du monoïde pointé  $\{0, 1\}$

L'extension de  $\mathbb{F}_1$  à  $\mathbb{F}_{1^2}$  est ce qui permet à la théorie absolue de retenir la donnée additive minimale—le signe canonique  $\epsilon$ —tout en restant « en dessous » de la structure additive complète des anneaux classiques. L'utilisation de  $\mathbb{F}_{1^2}$  a quelques précédents dans notre travail, où elle joue un rôle central dans le développement de la géométrie absolue (voir [9, 7]).

Dans cette construction, nous voyons  $\mathbb{F}_{1^2}$  comme la base absolue naturelle, ou algèbre sphérique, munie d'un élément signe central distingué  $\epsilon$ .

Tout anneau commutatif  $R$  possède une structure canonique de  $\mathbb{F}_{1^2}$ -algèbre, déterminée par l'application  $\epsilon \mapsto -1_R$ , qui donne un morphisme canonique de  $\mathbb{F}_1$ -algèbres

$$s : \mathbb{F}_{1^2} \rightarrow HR, \quad s(\epsilon) = -1_R \in HR(1_+)$$

qui retient précisément le signe canonique et l'involution additive  $x \mapsto -x$ .

En travaillant sur  $\mathbb{F}_{1^2}$ , nous pouvons adjoindre une unité imaginaire formelle — un *générateur imaginaire*  $J$  — soumis à la relation signée :

$$J^2 = \epsilon.$$

Nous rappelons de [10] la définition de l'espace topologique sous-jacent de  $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_1}^1$ . Il est constitué de deux points fermés, notés  $+$  et  $-$ , et d'un unique point générique  $\eta$ . Les ouverts non triviaux sont  $\Omega_+ = \{+, \eta\}$ ,  $\Omega_- = \{-, \eta\}$ , et leur intersection est notée  $\Omega = \{\eta\}$ .

Le faisceau structural du topos équivariant archimédien est le faisceau  $\mathcal{O}$  d'algèbres sphériques sur  $\mathbb{F}_{1^2}$  dont les sections sur les ouverts  $\Omega_{\pm}$  sont définies en adjoignant des générateurs locaux  $J_+$  et  $J_-$  comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(\Omega_+) &:= \mathbb{F}_{1^2}[T, J_+] / (J_+^2 = \epsilon) \\ \mathcal{O}(\Omega_-) &:= \mathbb{F}_{1^2}[S, J_-] / (J_-^2 = \epsilon) \end{aligned}$$

Sur l'intersection commune  $\Omega = \{\eta\}$ , les applications de transition reflètent l'inversion de l'ordre et le torsion contravariante du générateur imaginaire :

$$S = T^{-1} \quad \text{et} \quad J_- = \epsilon J_+. \tag{5}$$

L'automorphisme  $\alpha$  dans (3) échange topologiquement les points fermés :  $\alpha(+) = -$ , et  $\alpha(-) = +$ . L'action induite de  $\alpha$  sur le faisceau  $\mathcal{O}$  est donnée (voir Définition 7) par les isomorphismes de  $\mathbb{F}_{1^2}$ -algèbres  $\alpha_{\pm}^* : \mathcal{O}(\Omega_{\mp}) \rightarrow \mathcal{O}(\Omega_{\pm})$  :

$$\begin{aligned} \alpha_+^*(S) &:= \epsilon T, & \alpha_+^*(J_-) &:= J_+ \\ \alpha_-^*(T) &:= \epsilon S, & \alpha_-^*(J_+) &:= J_- \end{aligned}$$

Cette définition est compatible avec l'application de transition contravariante sur  $\Omega$ , puisque appliquer  $\alpha^*$  à l'équation  $J_- = \epsilon J_+$  donne la forme équivalente  $J_+ = \epsilon J_-$ , car  $\epsilon^2 = 1$ .

La définition suivante introduit le principal objet géométrique du présent article.

**Définition 1.** *Nous définissons*

$$\mathcal{C}_{\infty} := ([\mathbb{P}_{\mathbb{F}_{1^2}}^1 / \langle \alpha \rangle], \mathcal{O})$$

*comme un topos équivariant sur  $\mathbb{F}_{1^2}$  avec un faisceau structural sélectionné.*

Le résultat suivant identifie les points complexes de ce topos avec ceux de la droite projective de twisteur  $\tilde{\mathbb{P}}^1$  (voir *e.g.* [13], [12]), y compris sa structure réelle canonique.

**Théorème 2** (Théorème ??). *Les énoncés suivants sont vrais*

1. *L'ensemble  $\mathcal{C}_\infty(\mathbb{C})$  est en bijection canonique avec la droite projective classique  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ .*
2. *L'action canonique de la conjugaison complexe sur  $\mathcal{C}_\infty(\mathbb{C})$  induit l'involution sans point fixe :*

$$z \mapsto -\frac{1}{\bar{z}}.$$

Ainsi, la droite de twisteur  $\tilde{\mathbb{P}}^1_{\mathbb{R}}$  est enracinée sur  $\mathbb{F}_{12}$  et provient canoniquement de l'action de la conjugaison complexe standard sur la ligne absolue géométriquement pliée.

La définition 9 introduit la courbe absolue globale :

$$\bar{\mathcal{C}} = (\overline{\text{Spec } \mathbb{Z}})_{\mathbb{F}_{12}}$$

en amalgamant la courbe absolue finie  $(\text{Spec } \mathbb{Z})_{\mathbb{F}_1}$  et la composante archimédienne  $\mathcal{C}_\infty$ . Ce collage est rendu possible par la symétrie d'orbifold à l'infini, qui réduit la fibre archimédienne générique à  $\mathbb{F}_{12}$ , correspondant à la fibre générique des nombres premiers finis.

Pour assurer la rigidité globale de cet espace, nous définissons la courbe absolue  $\bar{\mathcal{C}}$  comme un objet géométrique dynamique *interne* au topos arithmétique impair  $\widehat{\mathbb{N}}_{\text{odd}}^\times$ .

L'enrichissement par  $\mathbb{F}_{12}$ —en particulier la relation de twisteur  $J^2 = -1$ —force arithmétiquement les endomorphismes de Frobenius absolus  $\text{Fr}_n(x) = x^n$  à être restreints aux entiers impairs  $n$ .

En évaluant les sections globales comme des morphismes de l'objet terminal dans ce topos, la Proposition 11 montre que les sections globales sont tautologiquement les points fixes simultanés de l'action du Frobenius impair. Ceci réduit rigidelement les sections globales à l'algèbre de base  $\mathbb{F}_{12}$ , fournissant une réalisation purement algébrique absolue de la compacité de  $\overline{\text{Spec } \mathbb{Z}}$ .

La Proposition ?? énonce que le monoïde arithmétique impair induit un système dynamique ramifié hautement non trivial sur la droite de twisteur complexe  $\mathcal{C}_\infty(\mathbb{C})$ . L'action préserve la structure réelle quaternionique, agissant comme  $z \mapsto z^n$  pour  $n \equiv 1 \pmod{4}$ , et comme  $z \mapsto -1/\bar{z}^n$  pour  $n \equiv 3 \pmod{4}$ . Ce résultat est une instance géométrique du fait que la géométrie absolue de  $\overline{\text{Spec } \mathbb{Z}}$  encode intrinsèquement la ramification du nombre premier 2 dans l'arithmétique des entiers de Gauss, reliant de manière transparente l'algèbre absolue, la théorie des topos et la dynamique complexe.

Le système dynamique induit par le topos arithmétique impair sur la droite de twisteur archimédienne suggère une connexion profonde avec la théorie de Hodge réelle. Dans la construction de twisteur de Simpson [13], une structure de Hodge réelle est encodée par un fibré vectoriel  $\mathbb{C}^\times$ -équivariant sur  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ , où les fibres en 0 et  $\infty$  encodent respectivement la filtration de Hodge et la filtration conjuguée. Évaluer le tiré en arrière d'un tel fibré de twisteur le long de l'action du Frobenius impair  $\text{Fr}_n$  donne une interprétation cohomologique frappante. Pour  $n \equiv 1 \pmod{4}$ , l'application  $z \mapsto z^n$  fixe les pôles, et le tiré en arrière réalise géométriquement l'opération d'Adams  $\psi^n$ , mettant à l'échelle les poids de Hodge. Pour  $n \equiv 3 \pmod{4}$ , l'application  $z \mapsto -1/\bar{z}^n$  applique l'opération d'Adams mais échange simultanément les pôles  $0 \leftrightarrow \infty$ . Dans le langage des fibrés de twisteur, ceci correspond exactement au passage à la filtration conjuguée. Ainsi, la géométrie absolue du topos arithmétique impair génère dynamiquement à la fois la structure d'anneau  $\lambda$  (opérations d'Adams) et la conjugaison complexe des structures de Hodge réelles.

Enfin, il convient de noter que l'émergence du topos arithmétique impair dans cette construction a un antécédent catégorique naturel : il est déjà implicite dans la catégorie péri-cyclique  $\Pi$  de [4]. Via les opérations  $\lambda$  associées, cette structure sous-tend également l'interprétation cyclique-cohomologique des facteurs locaux des fonctions L géométriques (voir [8] et [11]).

## 2. Algèbres sphériques et structures de Hopf intrinsèques sur $\mathbb{F}_{1^2}$

En géométrie algébrique classique sur un corps ou, plus généralement, sur un anneau, un espace ne porte pas de structure de monoïde ou de groupe naturelle à moins que celle-ci ne soit explicitement spécifiée, comme dans le cas des groupes algébriques. La géométrie absolue sur  $\mathbb{F}_1$  et  $\mathbb{F}_{1^2}$ , en revanche, présente une remarquable rigidité : les espaces provenant d'algèbres monoïdales sphériques héritent naturellement de structures de Hopf canoniques. C'est cette caractéristique intrinsèque qui sous-tend les systèmes dynamiques et les fibrés équivariants sur la courbe absolue.

### 2.1. Le produit de Lydakis-Day et les algèbres sphériques

Les objets fondamentaux de la géométrie absolue sont les monoïdes commutatifs  $M$  munis d'un élément absorbant zéro  $0$  et d'une identité  $1$ . Nous appelons *algèbre sphérique* l'algèbre absolue associée  $\mathbb{F}_1[M]$  (et son enrichissement signé  $\mathbb{F}_{1^2}[M]$ ).

Dans la catégorie des  $\mathbb{F}_1$ -algèbres, le produit tensoriel correct est le produit de convolution de Lydakis-Day. Pour les algèbres sphériques associées aux monoïdes pointés  $M$  et  $N$ , ce produit tensoriel catégorique se réduit au produit smash des monoïdes sous-jacents :

$$\mathbb{F}_1[M] \otimes_{\mathbb{F}_1} \mathbb{F}_1[N] \cong \mathbb{F}_1[M \wedge N],$$

où le produit smash  $M \wedge N := (M \times N) / (M \times \{0\} \cup \{0\} \times N)$  identifie canoniquement les zéros absorbants.

Lors du passage à la base enrichie  $\mathbb{F}_{1^2} := \mathbb{F}_1[\{0, 1, \epsilon : \epsilon^2 = 1\}]$ , le produit tensoriel  $\otimes_{\mathbb{F}_{1^2}}$  est gouverné de manière similaire par le produit smash, mais avec les relations  $\mathbb{F}_{1^2}$ -linéaires supplémentaires qui permettent au signe canonique  $\epsilon = -1$  de commuter avec le symbole du produit tensoriel :

$$\epsilon \otimes 1 = 1 \otimes \epsilon = \epsilon.$$

### 2.2. Le coproduit et le monoïde canonique des points

Pour un espace défini par des algèbres sphériques sur  $\mathbb{F}_1$ , l'ensemble de ses points rationnels sur une  $\mathbb{F}_1$ -algèbre cible  $A$  est  $\text{Hom}_{\mathbb{F}_1}(\mathbb{F}_1[M], A)$ . Puisque  $A$  est un monoïde multiplicatif, ces points peuvent être multipliés point par point.

Sur la base enrichie  $\mathbb{F}_{1^2}$ , une subtilité fondamentale apparaît. Un point rationnel sur une  $\mathbb{F}_{1^2}$ -algèbre  $A$  est un homomorphisme  $\phi \in \text{Hom}_{\mathbb{F}_{1^2}}(\mathbb{F}_{1^2}[M], A)$ , qui, par définition, doit préserver le signe canonique :  $\phi(\epsilon) = -1_A$ . Si l'on prend le produit point par point naïf de deux tels points, le signe est détruit :

$$(\phi_1 \cdot \phi_2)(\epsilon) = \phi_1(\epsilon) \cdot \phi_2(\epsilon) = (-1_A)(-1_A) = 1_A \neq -1_A.$$

Ceci indique que le produit point par point naïf sort de la catégorie des  $\mathbb{F}_{1^2}$ -algèbres. La résolution rigoureuse repose sur le produit tensoriel de Lydakis-Day et le coproduit intrinsèque de l'algèbre sphérique.

**Définition 3.** *Pour une  $\mathbb{F}_{1^2}$ -algèbre sphérique  $\mathbb{F}_{1^2}[M]$ , l'application diagonale  $m \mapsto m \wedge m$  sur le monoïde spatial définit un coproduit  $\mathbb{F}_{1^2}$ -linéaire :*

$$\Delta : \mathbb{F}_{1^2}[M] \longrightarrow \mathbb{F}_{1^2}[M] \otimes_{\mathbb{F}_{1^2}} \mathbb{F}_{1^2}[M], \quad \Delta(m) = m \otimes m \quad \text{pour tout } m \in M.$$

Nous utilisons ce coproduit pour définir la multiplication correcte des points rationnels.

**Proposition 4.** *Soit  $\mathbb{F}_{1^2}[M]$  une algèbre sphérique et  $A$  une  $\mathbb{F}_{1^2}$ -algèbre. L'ensemble des points  $X(A) = \text{Hom}_{\mathbb{F}_{1^2}}(\mathbb{F}_{1^2}[M], A)$  forme canoniquement un monoïde sous le produit de convolution :*

$$\phi_1 * \phi_2 := (\phi_1 \otimes \phi_2) \circ \Delta. \quad (6)$$

*Si les éléments non nuls de  $M$  forment un groupe,  $X(A)$  forme canoniquement un groupe.*

*Démonstration.* Nous devons vérifier que  $\phi_1 * \phi_2$  est un homomorphisme valide de  $\mathbb{F}_{1^2}$ -algèbres, ce qui se réduit à vérifier qu'il préserve le signe canonique  $\epsilon$ . Parce que  $\Delta$  est  $\mathbb{F}_{1^2}$ -linéaire, il absorbe le signe via les relations du produit smash :  $\Delta(\epsilon) = \epsilon \otimes 1$ . L'évaluation du produit de convolution donne :

$$(\phi_1 * \phi_2)(\epsilon) = (\phi_1 \otimes \phi_2)(\epsilon \otimes 1) = \phi_1(\epsilon)\phi_2(1) = (-1_A) \cdot 1_A = -1_A.$$

Sur les éléments spatiaux  $m \in M$ , le produit de convolution donne la multiplication attendue :

$$(\phi_1 * \phi_2)(m) = (\phi_1 \otimes \phi_2)(m \otimes m) = \phi_1(m)\phi_2(m).$$

Ainsi, le produit tensoriel de Lydakis-Day « protège » nativement l'anneau de base, donc l'espace des points rationnels hérite d'une structure de monoïde canonique.  $\square$

### 3. La droite dépliée et le générateur imaginaire

Pour décrire la géométrie locale à la place archimédienne, nous commençons par la construction schématique de la droite projective  $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_1}^1$  sur la base absolue [10]. Motivés par l'extension de l'action de l'involution géométrique  $\alpha$  (voir (3)) au niveau du faisceau (comme expliqué dans l'introduction), nous étendons d'abord les scalaires de  $\mathbb{F}_1$  à la base absolue quadratique  $\mathbb{F}_{1^2}$  comme définie dans (4). L'espace topologique sous-jacent  $X$  de  $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_{1^2}}^1$  est constitué de deux points fermés, notés  $+$  et  $-$ , ainsi que d'un unique point générique  $\eta$ . Les ouverts non triviaux sont

$$\Omega_+ = \{+, \eta\}, \quad \Omega_- = \{-, \eta\}, \quad \Omega_+ \cap \Omega_- = \Omega = \{\eta\}. \quad (7)$$

Le faisceau structural est donné sur ces ouverts affines comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_X(\Omega_+) &= \mathbb{F}_{1^2}[T^{\mathbb{Z}_{\geq 0}}], \\ \mathcal{O}_X(\Omega_-) &= \mathbb{F}_{1^2}[T^{\mathbb{Z}_{\leq 0}}], \\ \mathcal{O}_X(\Omega) &= \mathbb{F}_{1^2}[T^{\mathbb{Z}}]. \end{aligned}$$

Ces descriptions locales sont entièrement cohérentes avec la structure locale du site arithmétique  $(\widehat{\mathbb{N}}_0^\times, \mathbb{F}_1[T])$  sur  $\mathbb{F}_1$ , où la fibre attachée à un groupe abélien de rang un *ordonné*  $(H, H_+)$  est l'algèbre sphérique  $\mathbb{F}_1[T^{H_+}]$ . La nouveauté dans le cas archimédien est qu'aucun de ces deux ordres n'est intrinsèquement privilégié. Cette observation est le point de départ de la construction équivariante développée dans cette section.

Les deux ouverts affines  $\Omega_+$  et  $\Omega_-$  correspondent aux deux ordres possibles du groupe abélien de rang un  $\mathbb{Z}$ , tandis que leur intersection générique  $\Omega = \{\eta\}$  correspond au groupe non ordonné  $\mathbb{Z}$  lui-même. Les morphismes de restriction sont induits par les inclusions canoniques

$$\rho_+ : \mathbb{F}_{12}[T^{\mathbb{Z}_{\geq 0}}] \hookrightarrow \mathbb{F}_{12}[T^{\mathbb{Z}}] \quad \text{et} \quad \rho_- : \mathbb{F}_{12}[T^{\mathbb{Z}_{\leq 0}}] \hookrightarrow \mathbb{F}_{12}[T^{\mathbb{Z}}].$$

Ainsi, la droite projective  $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_{12}}^1$  fournit l'objet géométrique canonique obtenu en recollant les deux modèles ordonnés de  $\mathbb{Z}$  le long de leur localisation générique commune.

L'extension des scalaires de  $\mathbb{F}_1$  à  $\mathbb{F}_{12}$  préserve la géométrie attendue après évaluation sur un corps, comme le montre l'énoncé suivant.

**Proposition 5.** *Soit  $K$  un corps. L'ensemble des points de la droite projective absolue  $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_{12}}^1$  à valeurs dans  $K$  est canoniquement identifié à la droite projective classique  $\mathbb{P}^1(K)$ .*

*Démonstration.* Un  $K$ -point de  $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_{12}}^1$  est donné par un élément de la colimite des ensembles

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X(U), HK)$$

lorsque  $U$  parcourt les ouverts affines. La droite projective  $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_{12}}^1$  est recouverte par les trois ouverts affines (7).

Par la propriété universelle de l' $\mathbb{F}_{12}$ -algèbre libre  $\mathbb{F}_{12}[T^{\mathbb{Z}_{\geq 0}}]$ , tout homomorphisme d' $\mathbb{F}_{12}$ -algèbres est déterminé de manière unique par l'image de  $T$ , qui peut être choisie arbitrairement dans  $K$ . Il existe donc une identification canonique

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X(\Omega_+), HK) \cong K.$$

De même,  $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X(\Omega_-), HK) \cong K$ , et  $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X(\Omega), HK) \cong K^\times$ . Sous ces identifications, les applications de restriction  $\rho_\pm$  agissent comme suit

$$\rho_+^* : K^\times \rightarrow K, \quad \rho_+^*(x) = x, \quad \rho_-^*(x) : K^\times \rightarrow K, \quad \rho_-^*(x) = x^{-1}.$$

Par conséquent, l'ensemble  $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_{12}}^1(K)$  est obtenu en recollant deux copies de  $K$  le long de  $K^\times$  en utilisant les inclusions ci-dessus, ce qui donne précisément l'ensemble  $\mathbb{P}^1(K)$  de la droite projective classique.  $\square$

L'étape cruciale est maintenant l'*adjonction* d'un *générateur de Bombelli*, à savoir un élément imaginaire formel  $J$  satisfaisant

$$J^2 = \epsilon.$$

En conséquence, le faisceau structural de  $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_{12}}^1$  est enrichi en adjoignant des générateurs locaux  $J_+$  et  $J_-$  aux algèbres des deux cartes affines, ainsi qu'un générateur générique  $J$  sur leur intersection. Il est défini comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(\Omega_+) &= \mathbb{F}_{12}[T^{\mathbb{Z}_{\geq 0}}, J_+] / (J_+^2 = \epsilon), \\ \mathcal{O}(\Omega_-) &= \mathbb{F}_{12}[T^{\mathbb{Z}_{\leq 0}}, J_-] / (J_-^2 = \epsilon), \\ \mathcal{O}(\Omega) &= \mathbb{F}_{12}[T^{\mathbb{Z}}, J] / (J^2 = \epsilon). \end{aligned} \tag{8}$$

Le collage des sections est déterminé par les morphismes de restriction  $\rho_{\pm}$  vers l'intersection générique  $\Omega$ . La coordonnée  $T$  se restreint canoniquement, tandis que les générateurs de Bombelli satisfont les règles de restriction tordues

$$J_+ \longmapsto J, \quad J_- \longmapsto \epsilon J. \quad (9)$$

Le facteur  $\epsilon$ , initialement introduit comme responsable de l'inversion de signe, assure également, dans la formule ci-dessus, que les deux choix de  $\sqrt{-1}$  sont tous deux disponibles.

Nous notons

$$\mathcal{X} := (\mathbb{P}_{\mathbb{F}_{12}}^1, \mathcal{O}) \quad (10)$$

la droite projective sur  $\mathbb{F}_{12}$  munie du faisceau structural enrichi construit ci-dessus.

L'évaluation de  $\mathcal{X}$  sur un corps  $K$  est entièrement gouvernée par la résolubilité de l'équation

$$x^2 = -1$$

sur  $K$ .

**Proposition 6.** *Soit  $K$  un corps. L'ensemble des points de  $\mathcal{X}$  à valeurs dans  $K$  reflète l'arithmétique de l'équation  $x^2 = -1$  sur le corps  $K$  :*

1. *Si  $K$  ne contient pas de racine carrée de  $-1$  (par exemple  $K = \mathbb{R}$ ), alors*

$$\mathcal{X}(K) = \emptyset.$$

2. *Si  $\text{char}(K) \neq 2$  et  $K$  contient les deux racines carrées  $\pm i_K$  de  $-1$  (par exemple  $K = \mathbb{C}$ ), alors*

$$\mathcal{X}(K) \cong \mathbb{P}^1(K) \sqcup \mathbb{P}^1(K).$$

3. *Si  $\text{char}(K) = 2$ , alors*

$$\mathcal{X}(K) \cong \mathbb{P}^1(K).$$

*Démonstration.* Puisque  $\mathcal{X}$  est obtenu en recollant les cartes affines  $\Omega_+$  et  $\Omega_-$  le long de l'ouvert générique  $\Omega$ , son ensemble de  $K$ -points est obtenu en recollant les ensembles affines correspondants de  $K$ -points. Tout homomorphisme d' $\mathbb{F}_{12}$ -algèbres

$$\phi : \mathcal{O}(U) \longrightarrow HK$$

satisfait  $\phi(\epsilon) = -1_K$ . Par conséquent, la relation de définition  $J^2 = \epsilon$  est évaluée dans  $K$  comme  $j^2 = -1_K$ . Un  $K$ -point de la carte affine  $\Omega_+$  est donc déterminé par un couple :

$$(t, j_+) \in K \times K$$

satisfaisant  $j_+^2 = -1_K$ . De même, un point de  $\Omega_-$  est déterminé par un couple

$$(s, j_-) \in K \times K$$

avec  $j_-^2 = -1_K$ .

Si  $K$  ne contient pas de racine carrée de  $-1$ , alors aucune des deux cartes affines ne possède de  $K$ -points. Par conséquent

$$\Omega_+(K) = \emptyset = \Omega_-(K),$$

et donc  $\mathcal{X}(K) = \emptyset$ .

Supposons maintenant que  $\text{char}(K) \neq 2$  et que  $-1 \in (K^\times)^2$ . Alors  $K$  contient exactement deux racines carrées de  $-1$ , notées  $\pm i_K$ . En conséquence,

$$\Omega_+(K) = K \times \{i_K, -i_K\},$$

$$\Omega_-(K) = K \times \{i_K, -i_K\},$$

et

$$\Omega(K) = K^\times \times \{i_K, -i_K\}.$$

Les applications de restriction (9) identifient les deux cartes affines via

$$T \longmapsto T^{-1}, \quad J_+ \longmapsto J, \quad J_- \longmapsto \epsilon J. \quad (11)$$

Puisque  $\phi(\epsilon) = -1_K$ , la dernière relation devient  $j_- = -j_+$ . Par conséquent, le collage identifie

$$(t, j) \sim (t^{-1}, -j),$$

Ainsi, l'ensemble des  $K$ -points se décompose canoniquement en deux copies disjointes de  $\mathbb{P}^1(K)$ .

$$\mathcal{X}(K) \cong \mathbb{P}^1(K) \sqcup \mathbb{P}^1(K),$$

où la première copie est obtenue en recollant  $K \times \{i_K\}_+$  avec  $K \times \{-i_K\}_-$ , et la seconde en recollant  $K \times \{-i_K\}_+$  avec  $K \times \{i_K\}_-$ .

Enfin, si  $\text{char}(K) = 2$ , alors :  $-1_K = 1_K$ , et l'équation  $j^2 = -1_K$  a la solution unique :  $j = 1$ . La torsion par  $\epsilon$  devient donc triviale, et les deux cartes affines se recollent de la manière habituelle via

$$t \longleftrightarrow t^{-1},$$

redonnant une seule copie de la droite projective :  $X(K) \cong \mathbb{P}^1(K)$ .

Ainsi, la droite projective double sur les corps contenant  $\sqrt{-1}$ , et l'absence de points réels, apparaissent comme des conséquences directes de la relation signée  $J^2 = \epsilon$ .  $\square$

## 4. La symétrie géométrique et le topos équivariant

La droite projective absolue  $\mathcal{X} = (\mathbb{P}_{\mathbb{F}_{12}}^1, \mathcal{O})$  introduite dans (10) porte une symétrie involutive canonique, reflétant l'absence d'un ordre distingué du groupe abélien de rang un  $\mathbb{Z}$ . Cette symétrie échange les deux cartes affines  $\Omega_\pm$  et *implémente simultanément* l'inversion signée sous-jacente à la géométrie archimédienne.

**Définition 7.** Soit  $\alpha : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$  l'automorphisme involutif défini sur l'espace topologique sous-jacent par l'échange des deux points fermés,

$$\alpha(+) = -, \quad \alpha(-) = +,$$

tout en fixant le point générique  $\alpha(\eta) = \eta$ .

Sur l'ouvert affine générique  $\Omega$ , l'automorphisme induit du faisceau structural

$$\alpha^* : \mathcal{O}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{O}(\Omega)$$

est déterminé par

$$\alpha^*(T) = \epsilon T^{-1}, \quad \alpha^*(J) = J^{-1} = \epsilon J.$$

La première formule réalise l'inversion signée de la coordonnée spatiale, tandis que la seconde échange les deux branches déterminées par la relation  $J^2 = \epsilon$ . (Notons que  $J(\epsilon J) = \epsilon J^2 = \epsilon^2 = 1$ , donc  $J^{-1} = \epsilon J$ .)

L'automorphisme générique s'étend de manière unique en isomorphismes des cartes affines

$$\alpha_{\pm}^* : \mathcal{O}(\Omega_{\mp}) \longrightarrow \mathcal{O}(\Omega_{\pm}),$$

compatibles avec les applications de restriction (9). Explicitement,

$$\alpha_+^*(T^{-1}) = \epsilon T, \quad \alpha_+^*(J_-) = J_+,$$

et

$$\alpha_-^*(T) = \epsilon T^{-1}, \quad \alpha_-^*(J_+) = J_-.$$

La compatibilité des actions locales et génériques découle immédiatement des définitions. En effet, restreindre  $\alpha_+^*(J_-)$  à l'ouvert générique  $\Omega$  donne  $J$ , tandis que

$$\alpha^*(\rho_-(J_-)) = \alpha^*(\epsilon J) = \epsilon(\epsilon J) = J.$$

Les relations de compatibilité restantes se vérifient de la même manière. L'action de  $\alpha$  sur le générateur imaginaire,

$$\alpha^*(J) = J^{-1} = \epsilon J, \tag{12}$$

est uniquement déterminée par la géométrie.

Ceci conduit naturellement au principal objet géométrique à la place archimédienne, à savoir *le topos équivariant* muni du faisceau structural :

$$\mathcal{C}_{\infty} := [\mathcal{X}/\langle \alpha \rangle]. \tag{13}$$

Si  $K$  est un corps comme dans la Proposition 6, cas 2., alors  $\mathcal{X}(K) \cong \mathbb{P}^1(K) \sqcup \mathbb{P}^1(K)$  et l'involution  $\alpha$  échange les deux copies de  $\mathbb{P}^1(K)$ . En effet, si un  $K$ -point  $\phi$  appartient à la première copie, alors les égalités

$$(\alpha \cdot \phi)(J_-) = \phi(\alpha_+^*(J_-)) = \phi(J_+),$$

montrent que  $\alpha \cdot \phi$  appartient à la seconde copie, et inversement. En passant au quotient, on identifie donc canoniquement les deux copies :

$$\mathcal{C}_{\infty}(K) = [\mathcal{X}(K)/\langle \alpha \rangle] \cong \mathbb{P}^1(K).$$

Arithmétiquement, (12) garantit que la partie  $\alpha$ -invariante de la fibre générique est précisément la base  $\mathbb{F}_{12}$ , empêchant la structure archimédienne supplémentaire d'apparaître aux nombres premiers finis.

L'espace topologique sous-jacent de  $\mathcal{C}_{\infty}$  est constitué de deux points. L'involution  $\alpha$  agit librement sur les deux points fermés  $\{+, -\}$ , les identifiant en un seul point fermé  $\gamma$ . Le point générique  $\eta$  est fixé, mais acquiert un groupe d'isotropie  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , devenant ainsi un point d'orbifold. Géométriquement, le quotient plie la droite projective absolue en identifiant les deux ordres de  $\mathbb{Z}$ .

## 5. Conjugaison complexe et structure réelle de twisteur

Pour déterminer la structure réelle du topos équivariant  $\mathcal{C}_\infty$  (voir (13)) à la place archimédienne, nous analysons d'abord l'action naturelle du groupe de Galois  $\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}) = \{1, c\}$  sur les points complexes de  $\mathcal{X}$  (voir (10)). Tout automorphisme du corps de base agit sur l'ensemble des points à valeurs dans le corps par post-composition.

Soit  $c : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  la conjugaison complexe. Si  $\phi \in \mathcal{X}(\mathbb{C})$ , son point conjugué est défini par

$$c \cdot \phi := c \circ \phi.$$

Rappelons la décomposition canonique

$$\mathcal{X}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{P}^1(\mathbb{C})_1 \sqcup \mathbb{P}^1(\mathbb{C})_2, \quad (14)$$

où  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})_1$  est obtenu en recollant

$$\mathbb{C} \times \{i\}_+ \quad \text{avec} \quad \mathbb{C} \times \{-i\}_-,$$

tandis que  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})_2$  est obtenu en recollant

$$\mathbb{C} \times \{-i\}_+ \quad \text{avec} \quad \mathbb{C} \times \{i\}_-.$$

Soit  $\phi \in \mathbb{C} \times \{i\}_+ \subset \Omega_+(\mathbb{C})$ , de sorte que

$$\phi(T) = z, \quad \phi(J_+) = i.$$

Alors

$$\begin{aligned} (c \cdot \phi)(T) &= \bar{z}, \\ (c \cdot \phi)(J_+) &= -i. \end{aligned} \quad (15)$$

Par conséquent

$$c \cdot \phi \in \mathbb{C} \times \{-i\}_+ \subset \Omega_+(\mathbb{C}),$$

et appartient donc à la seconde copie  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})_2$ . Plus généralement, la conjugaison complexe agit par

$$z \times \{\pm i\}_\pm \mapsto \bar{z} \times \{-\pm i\}_\pm,$$

échangeant ainsi les deux copies de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  apparaissant dans (14). En passant au quotient

$$\mathcal{C}_\infty(\mathbb{C}) = [\mathcal{X}(\mathbb{C})/\langle \alpha \rangle],$$

les deux copies sont identifiées par l'involution géométrique  $\alpha$ , tandis que la conjugaison complexe descend en une involution anti-holomorphe de la droite projective résultante. L'involution géométrique  $\alpha$  et l'involution arithmétique  $c$  agissent indépendamment sur  $\mathcal{X}(\mathbb{C})$  et commutent. Par conséquent, l'action de Galois descend au quotient  $\mathcal{C}_\infty(\mathbb{C})$ , dotant ce dernier de sa structure réelle canonique.

**Théorème 8.** *L'action canonique de la conjugaison complexe  $c \in \text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$  sur les points à valeurs dans  $\mathbb{C}$  du topos équivariant  $\mathcal{C}_\infty$  induit la structure réelle de twisteur. Plus précisément, sur la droite projective complexe résultante, la structure réelle induite est l'involution anti-holomorphe sans point fixe :*

$$z \mapsto -\frac{1}{\bar{z}}.$$

*Démonstration.* Puisque  $\alpha$  échange les deux copies de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  dans la décomposition (14), l'orbite de l'action des symétries sur les points complexes de l'espace déplié  $\mathcal{X}(\mathbb{C})$  est paramétrée par leur intersection avec la première copie  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})_1$ . La conjugaison complexe remplace  $z \times \{\pm i\}_\pm$  par  $\bar{z} \times \{-\pm i\}_\pm$ . La première copie  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})_1$  est obtenue en recollant  $\mathbb{C} \times \{i\}_+$  avec  $\mathbb{C} \times \{-i\}_-$ , en utilisant l'application canonique

$$\mathbb{C}^\times \rightarrow (\mathbb{C} \times \{i\}_+) \times (\mathbb{C} \times \{-i\}_-), \quad z \mapsto ((z, i), (z^{-1}, -i)).$$

correspondant aux applications de restriction (11). Nous pouvons donc paramétrer les points de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})_1$  par la bijection<sup>3</sup>

$$P : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})_1, \quad z \mapsto z \times \{i\}_+, \quad \infty \mapsto 0 \times \{-i\}_-.$$

Pour  $z \in \mathbb{C}^\times$ , le point  $P(z)$  correspond à l'homomorphisme

$$\phi : \mathcal{O}(\Omega) \rightarrow H\mathbb{C}, \quad \phi(T) = z, \quad \phi(J) = i.$$

Pour  $z \in \mathbb{C}^\times$ , l'orbite du point  $P(z)$  sous la symétrie géométrique  $\alpha$  est (en utilisant la Définition 7) la classe d'équivalence :

$$[P] = \{P, \alpha(P)\} = \{(z, i), (-z^{-1}, -i)\}.$$

L'application de la conjugaison complexe standard  $c$  à cette orbite donne la classe d'équivalence conjuguée :

$$c([P]) = \{(\bar{z}, -i), c(-z^{-1}, -i)\} = \{(\bar{z}, -i), (-\bar{z}^{-1}, i)\}.$$

Pour déterminer l'action induite sur l'espace quotient (que nous pouvons paramétrer par l'application  $P$ ), nous sélectionnons le représentant de l'orbite conjuguée qui se trouve sur  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})_1$ . Ce représentant est exactement  $(-\bar{z}^{-1}, i)$ .

Ainsi, l'action induite sur la coordonnée spatiale est  $z \mapsto -1/\bar{z}$ , et elle échange les points 0 et  $\infty$  (comme on peut le voir par *continuité*).  $\square$

Ceci démontre que la structure réelle de twisteur est la conséquence automatique et fonctorielle de la conjugaison complexe standard agissant sur la droite projective absolue géométriquement pliée. L'absence de points réels à l'infini est garantie par la torsion spatiale par le signe  $\epsilon$  inhérente à la symétrie de Weyl  $\alpha$ .

## 6. Frobenius et équivariance de twisteur

La structure de Hopf intrinsèque des  $\mathbb{F}_{12}$ -algèbres sphériques établie dans la Section 2. est le mécanisme qui génère la géométrie de la droite de twisteur archimédienne.

Considérons d'abord l'endomorphisme de Frobenius absolu  $\text{Fr}_n(x) = x^n$  agissant sur une algèbre sphérique. Sous le produit de convolution intrinsèque (6), la puissance  $n$ -ième de Frobenius d'un point rationnel  $\phi \in \text{Hom}_{\mathbb{F}_{12}}(\mathbb{F}_{12}[M], A)$  est :

$$\phi^n(m) = \phi(m^n) = \phi(\text{Fr}_n(m)).$$

---

3. Cette bijection étend *par continuité* à  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  le paramétrage des points appartenant à l'ouvert dense de Zariski  $\Omega(\mathbb{C})$ .

Ainsi,  $\text{Fr}_n$  est l'application canonique de puissance  $n$ -ième dans le monoïde intrinsèque des points. Ceci montre pourquoi le Frobenius se manifeste dynamiquement comme  $z \mapsto z^n$  sur la coordonnée spatiale de la droite de twisteur, et aussi pourquoi il *implémente géométriquement les opérations d'Adams*  $\psi^n$ .

Deuxièmement, cette structure de Hopf fournit l'origine algébrique absolue pour la théorie de Hodge non abélienne. L'ouvert générique  $\Omega$  de la courbe absolue ((8)) a pour noyau spatial  $\mathbb{F}_{12}[T^{\mathbb{Z}}]$ . Parce que les éléments non nuls de  $M = \mathbb{Z}$  forment un groupe, ses points complexes  $\Omega(\mathbb{C})$  forment canoniquement le groupe multiplicatif  $\mathbb{C}^\times$ . Ce groupe agit sur toute la droite de twisteur en mettant à l'échelle la coordonnée spatiale via le mécanisme du coproduit.

Dans la construction de twisteur de Simpson [13], une structure de Hodge réelle est encodée comme un fibré vectoriel  $\mathbb{C}^\times$ -équivariant sur  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ , où la structure réelle  $\sigma(z) = -1/\bar{z}$  doit satisfaire l'équivariance tordue :

$$\sigma(\lambda z) = \frac{-1}{\bar{\lambda}z} = \bar{\lambda}^{-1}\sigma(z) \quad \text{pour } \lambda \in \mathbb{C}^\times.$$

Dans notre cadre absolu, l'action requise de  $\mathbb{C}^\times$  n'est pas imposée de l'extérieur ; il s'agit plutôt de l'action canonique de la fibre absolue générique  $\Omega(\mathbb{C})$  agissant via le coproduit de  $\mathbb{F}_{12}$  comme dans § 2.2.. La compatibilité avec la symétrie géométrique  $\alpha^*(T) = \epsilon T^{-1}$  redonne parfaitement cette équivariance tordue.

Par conséquent, la géométrie absolue de  $\mathbb{F}_{12}$  génère dynamiquement l'architecture entière des structures de Hodge réelles : le coproduit intrinsèque de Lydakis-Day donne l' $\mathbb{C}^\times$ -équivariance, la symétrie géométrique  $\alpha$  donne la filtration conjuguée, et enfin le Frobenius impair  $\text{Fr}_n$  implémente les opérations d'Adams.

## 7. La courbe absolue globale et l'amalgame

Avec la composante archimédienne  $\mathcal{C}_\infty$  rigoureusement définie, nous pouvons maintenant passer à la construction de la courbe absolue globale  $\bar{\mathcal{C}} = (\overline{\text{Spec } \mathbb{Z}})_{\mathbb{F}_{12}}$  en amalgamant les composantes finie et archimédienne.

Soit  $\mathcal{C}_{\text{fin}} := (\text{Spec } \mathbb{Z})_{\mathbb{F}_{12}}$  la courbe absolue finie, après extension des scalaires de  $\mathbb{F}_1$  à  $\mathbb{F}_{12}$ . Topologiquement, elle consiste en un ensemble dénombrable de points fermés (les nombres premiers finis  $\mathcal{P}$ ) et un seul point générique  $\eta_{\text{fin}}$ . La fibre du faisceau structural au point générique est exactement la base  $\mathbb{F}_{12}$ .

D'autre part, la composante archimédienne  $\mathcal{C}_\infty$  consiste topologiquement en un seul point fermé  $\infty$  (les points pliés  $\{+, -\}$ ) et un point générique d'orbifold  $\eta_\infty$ . Crucialement, la fibre  $\alpha$ -invariante en  $\eta_\infty$  se réduit strictement à  $\mathbb{F}_{12}$ .

Parce que les fibres aux points génériques des deux espaces sont canoniquement isomorphes à  $\mathbb{F}_{12}$ , nous pouvons définir la courbe globale comme leur amalgame topologique et de faisceau.

**Définition 9.** *La courbe absolue globale*

$$\bar{\mathcal{C}} := (\overline{\text{Spec } \mathbb{Z}})_{\mathbb{F}_{12}}$$

*est le pushout (amalgame) de  $\mathcal{C}_{\text{fin}}$  et  $\mathcal{C}_\infty$  le long de leurs points génériques.*

— *L'espace topologique sous-jacent  $|\bar{\mathcal{C}}|$  est la colimite identifiant  $\eta_{\text{fin}}$  avec  $\eta_\infty$  :*

$$|\bar{\mathcal{C}}| = |\mathcal{C}_{\text{fin}}| \coprod_{\eta_{\text{fin}} \sim \eta_\infty} |\mathcal{C}_\infty|.$$

Il consiste en les points fermés  $\mathcal{P} \cup \{\infty\}$  et un seul point générique unifié  $\eta_{\text{global}}$ .

- Le faisceau structural  $\mathcal{O}_{\bar{\mathcal{C}}}$  est défini par collage d'Artin le long du point générique. Pour tout ouvert de Zariski  $U$  de  $\bar{\mathcal{C}}$ , les sections sont données par le produit fibré des sections sur les composantes finie et archimédienne au-dessus de la fibre générique  $\mathbb{F}_{12}$  :

$$\mathcal{O}_{\bar{\mathcal{C}}}(U) = \mathcal{O}_{\text{fin}}(U \cap \mathcal{C}_{\text{fin}}) \times_{\mathbb{F}_{12}} \mathcal{O}_{\infty}(U \cap \mathcal{C}_{\infty}).$$

Cet amalgame est la réalisation algébrique absolue de la géométrie de  $\overline{\text{Spec } \mathbb{Z}}$ .

Dans la théorie d'Arakelov classique, la place archimédienne est ajoutée formellement, car elle manque d'une véritable fibre géométrique. Ici,  $\mathcal{C}_{\infty}$  fournit la fibre géométrique requise. La structure réelle de twisteur unifie les sphères complexes au-dessus du point fermé  $\infty$ , tandis que la symétrie d'orbifold réduit la fibre générique à  $\mathbb{F}_{12}$ , correspondant au point générique fini et permettant à la courbe globale de se recoller.

## 7.1. La courbe absolue dans le topos arithmétique impair

Pour définir correctement la structure globale de la courbe absolue, nous devons spécifier la catégorie ambiante dans laquelle elle vit. Tandis qu'en géométrie algébrique classique, une courbe est un espace annelé localement, en géométrie absolue sur  $\mathbb{F}_1$  ou  $\mathbb{F}_{12}$ , la catégorie ambiante fondamentale est le topos arithmétique. La raison principale en est l'existence d'une opération géométrique absolue canonique : l'endomorphisme de Frobenius.

Les objets du topos arithmétique sont des ensembles (faisceaux d'ensembles) munis d'une action du monoïde multiplicatif des entiers. En travaillant sur  $\mathbb{F}_1$ , le topos pertinent est  $\widehat{\mathbb{N}^{\times}}$ , et l'endomorphisme de Frobenius absolu  $\text{Fr}_n(x) = x^n$  agit pour tout  $n \in \mathbb{N}^{\times}$ . Cependant, le passage à la base enrichie  $\mathbb{F}_{12}$  introduit une subtilité arithmétique. Pour que  $\text{Fr}_n$  soit un endomorphisme valide d'une  $\mathbb{F}_{12}$ -algèbre, il doit fixer cette algèbre de base point par point ; en particulier, il doit fixer le signe canonique  $\epsilon = -1$ . Ceci force une restriction au sous-monoïde des entiers impairs,  $\mathbb{N}_{\text{odd}}^{\times}$ .

Nous définissons donc la courbe absolue non pas simplement comme un espace annelé statique, mais comme un *objet géométrique dynamique* interne à ce topos arithmétique impair.

**Définition 10.** La courbe absolue globale  $\bar{\mathcal{C}}$  est un objet interne au topos arithmétique impair  $\widehat{\mathbb{N}_{\text{odd}}^{\times}}$ . Elle est définie par les données suivantes :

- **Espace topologique :** L'espace sous-jacent  $|\bar{\mathcal{C}}|$  est l'amalgame des nombres premiers finis  $\mathcal{P}$  et du point fermé archimédien  $\infty$ , recollés le long d'un point générique dense  $\eta_{\text{global}}$ . Le monoïde  $\mathbb{N}_{\text{odd}}^{\times}$  agit trivialement sur cet espace.
- **Faisceau structural :** Le faisceau structural  $\mathcal{O}_{\bar{\mathcal{C}}}$  est un faisceau de  $\mathbb{F}_{12}$ -algèbres muni de l'action canonique du Frobenius absolu. Pour tout ouvert  $U$  et toute section  $s \in \mathcal{O}_{\bar{\mathcal{C}}}(U)$ , le monoïde  $\mathbb{N}_{\text{odd}}^{\times}$  agit via les endomorphismes :

$$\text{Fr}_n(s) = s^n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}_{\text{odd}}^{\times}.$$

En définissant la courbe intérieurement au topos, la notion de section globale est fondamentalement améliorée. Dans tout topos, l'espace des sections globales d'un objet  $Y$  est défini catégoriquement comme l'ensemble des morphismes de l'objet terminal  $\mathbf{1}$  vers  $Y$ . Dans ce cas :

$$\Gamma(Y) := \text{Hom}_{\widehat{\mathbb{N}_{\text{odd}}^{\times}}}(\mathbf{1}, Y).$$

L'objet terminal  $\mathbf{1}$  est l'ensemble à un point muni de l'action triviale du monoïde. Par conséquent, un morphisme  $\mathbf{1} \rightarrow Y$  correspond exactement à la sélection d'un élément de  $Y$  qui est équivariant par rapport à l'action triviale, c'est-à-dire un élément invariant sous le monoïde.

En appliquant cette règle catégorique au faisceau structural de la courbe absolue, une véritable section globale n'est pas simplement une famille compatible de sections locales, mais une famille de sections locales qui sont des *points fixes simultanés* de l'action du Frobenius absolu. Cette exigence topo-théorique fournit le mécanisme exact pour la rigidité globale.

**Proposition 11.** *L'espace des sections globales de la courbe compactifiée absolue  $\bar{\mathcal{C}}$  est précisément l'anneau de base  $\mathbb{F}_{12}$  :*

$$\Gamma(\bar{\mathcal{C}}, \mathcal{O}_{\bar{\mathcal{C}}}) = \mathbb{F}_{12}.$$

*Démonstration.* Soit  $s \in \Gamma(\bar{\mathcal{C}}, \mathcal{O}_{\bar{\mathcal{C}}})$  une section globale. Topologiquement,  $s$  définit un germe local  $s_v \in \mathcal{O}_v$  en tout point fermé  $v \in \mathcal{P} \cup \{\infty\}$ , ainsi qu'un germe générique  $s_\eta \in \mathcal{O}_\eta$  au point générique dense  $\eta_{\text{global}}$ .

La condition de compatibilité du faisceau requiert que pour tout point fermé  $v$ , l'application de localisation canonique  $\rho_v : \mathcal{O}_v \rightarrow \mathcal{O}_\eta$  envoie le germe local vers le germe générique :

$$\rho_v(s_v) = s_\eta. \quad (16)$$

Parce que la courbe est définie intérieurement au topos arithmétique, une section globale est un morphisme de l'objet terminal, ce qui signifie qu'elle doit être un point fixe de l'action du Frobenius absolu impair. Ainsi, en toute place  $v$ , nous avons  $\text{Fr}_n(s_v) = s_v^n = s_v$  pour tout  $n \in \mathbb{N}_{\text{odd}}^\times$ .

Comme montré précédemment, à la place archimédienne, la fibre locale est modélisée par

$$\mathbb{F}_{12}[T^{\mathbb{Z}_{\geq 0}}, J_+]/(J_+^2 = \epsilon).$$

La condition  $s_\infty^n = s_\infty$  pour tout  $n \geq 3$  impair force les composantes spatiale et imaginaire à s'annuler (puisque  $T^n \neq T$  et  $J_+^3 = -J_+ \neq J_+$ ). Par conséquent, les points fixes de Frobenius de la fibre se réduisent strictement à l'anneau de base :  $s_\infty \in \mathbb{F}_{12}$ . Par un raisonnement identique aux nombres premiers finis,  $s_p \in \mathbb{F}_{12}$  pour tout  $p \in \mathcal{P}$ .

Nous appliquons maintenant la condition de compatibilité du faisceau (16). Parce que les applications de localisation  $\rho_v$  sont des homomorphismes de  $\mathbb{F}_{12}$ -algèbres, elles agissent comme l'identité sur l'anneau de base  $\mathbb{F}_{12}$ . Puisque  $s_v \in \mathbb{F}_{12}$ , nous avons :

$$s_v = \rho_v(s_v) = s_\eta \quad \text{pour tout } v \in \mathcal{P} \cup \{\infty\}.$$

Ceci force  $s_v$  à être exactement la même constante dans  $\mathbb{F}_{12}$  en toute place, déterminée de manière unique par le germe générique  $s_\eta$ . Ainsi, les sections globales sont exactement les sections constantes  $\mathbb{F}_{12}$ .  $\square$

**Remarque 12.** *Bien que la courbe absolue soit définie via la perspective interne du topos, l'évaluation de cette structure sur des points géométriques (par exemple, sur  $\mathbb{C}$ ) redonne naturellement la perspective dynamique non commutative. L'action canonique du Frobenius sur l' $\mathbb{F}_{12}$ -algèbre abstraite induit le système dynamique ramifié  $z \mapsto z^n$  et  $z \mapsto -1/z^n$  sur la droite de twisteur complexe. L'espace produit croisé non commutatif  $\bar{\mathcal{C}}(\mathbb{C}) \rtimes \mathbb{N}_{\text{odd}}^\times$  est donc une conséquence géométrique dérivée de la structure interne canonique du topos définie ci-dessus.*

## 7.2. L'Action du monoïde impair sur la droite de twisteur et la ramification en 2

La restriction du Frobenius absolu au monoïde impair  $\mathbb{N}_{\text{odd}}^\times$  a une manifestation géométrique importante sur la droite de twisteur archimédienne. Parce que l'enrichissement par  $\mathbb{F}_{12}$  adjoint un générateur imaginaire  $J$  satisfaisant  $J^2 = \epsilon = -1$ , il agit comme l'avatar géométrique absolu des entiers de Gauss  $\mathbb{Z}[i]$ .

Le nombre premier 2 est uniquement ramifié dans  $\mathbb{Z}[i]$ , tandis que le comportement des nombres premiers impairs est gouverné par le caractère de Dirichlet non trivial modulo 4. Cette structure arithmétique exacte émerge dynamiquement sur les points complexes de la courbe absolue. L'exclusion des entiers pairs de l'action du monoïde correspond précisément à la ramification du nombre premier 2, tandis que le monoïde impair induit un système dynamique ramifié sur la droite de twisteur unifiée.

Soit  $\mathcal{C}_\infty(\mathbb{C}) \cong \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  la droite de twisteur complexe unifiée, obtenue en quotientant le  $\mathbb{F}_{12}$ -schéma  $\mathcal{X}(\mathbb{C})$  (voir (10)) par la symétrie géométrique  $\alpha$ .

**Proposition 13.** *Le monoïde arithmétique impair  $\mathbb{N}_{\text{odd}}^\times$  agit sur  $\mathcal{C}_\infty(\mathbb{C})$  via le système dynamique :*

$$\text{Fr}_n(z) := \begin{cases} z^n & \text{si } n \equiv 1 \pmod{4}, \\ -\frac{1}{z^n} & \text{si } n \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

*De plus, cette action commute strictement avec la structure réelle quaternionique*

$$\sigma(z) = -1/\bar{z}.$$

*Démonstration.* Sur l'espace non quotienté  $\mathcal{X}(\mathbb{C}) = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})_+ \sqcup \mathbb{P}^1(\mathbb{C})_-$ , un point complexe est déterminé par une coordonnée spatiale  $z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  et une coordonnée imaginaire  $j \in \{i, -i\}$ . Le Frobenius algébrique  $\text{Fr}_n(x) = x^n$  agit sur ces coordonnées comme :

$$\text{Fr}_n(z, j) = (z^n, j^n) = \left(z^n, (-1)^{\frac{n-1}{2}} j\right).$$

Si  $n \equiv 1 \pmod{4}$ , la coordonnée imaginaire est préservée, ce qui signifie que  $\text{Fr}_n$  envoie chaque sphère sur elle-même via  $z \mapsto z^n$ .

Si  $n \equiv 3 \pmod{4}$ , la coordonnée imaginaire est inversée ( $j \mapsto -j$ ), ce qui signifie que le point est envoyé sur la sphère opposée. Pour évaluer cette action sur l'espace quotient  $\mathcal{C}_\infty(\mathbb{C})$ , nous devons identifier le point cible avec son représentant sur la sphère originale en appliquant la symétrie géométrique  $\alpha$ . Par la Définition 7,  $\alpha^*(T) = \epsilon T^{-1}$ , ce qui induit l'application géométrique  $\alpha(w) = -1/w$  sur la coordonnée complexe. En composant le saut avec cette identification, on obtient l'action effective :

$$z \longmapsto z^n \xrightarrow{\alpha} -\frac{1}{z^n}.$$

Pour vérifier la compatibilité avec la structure réelle de twisteur  $\sigma(z) = -1/\bar{z}$ , nous vérifions les deux cas. Pour  $n \equiv 1 \pmod{4}$  :

$$\sigma(z^n) = -\frac{1}{z^n} \quad \text{et} \quad (\sigma(z))^n = \left(-\frac{1}{\bar{z}}\right)^n = -\frac{1}{z^n} \quad (\text{car } n \text{ est impair}).$$

Pour  $n \equiv 3 \pmod{4}$  :

$$\sigma\left(-\frac{1}{z^n}\right) = -\frac{1}{(-1/z^n)} = \bar{z}^n \quad \text{et} \quad -\frac{1}{(\sigma(z))^n} = -\frac{1}{(-1/\bar{z})^n} = \bar{z}^n.$$

Ainsi, le système dynamique ramifié préserve parfaitement la structure quaternionique.  $\square$

Cette proposition montre que l'action du Frobenius absolu sur la composante archimédienne n'est pas simplement une opération algébrique formelle, mais un endomorphisme géométrique hautement structuré. Le fait que l'application  $z \mapsto -1/z^n$  émerge naturellement pour  $n \equiv 3 \pmod{4}$  montre que le faisceau de twisteur sur  $\mathbb{F}_{12}$  « connaît » intrinsèquement la conjugaison complexe et la topologie non triviale de la place archimédienne.

## Références

- [1] A. Connes, C. Consani, *On the absolute geometry of  $\overline{\text{Spec } \mathbb{Z}}$  and the Fargues-Fontaine curve*, Preprint (2026).
- [2] A. Connes, C. Consani, *On the Jacobian of  $\overline{\text{Spec } \mathbb{Z}}$* , to appear in Journal of Noncommutative Geometry. Preprint (2026),
- [3] A. Connes, C. Consani, *Riemann-Roch for the ring  $\mathbb{Z}$* , C. R. Math. Acad. Sci. Paris **362** (2024), 229-235.
- [4] A. Connes, C. Consani, *Cyclic theory and the pericyclic category*, in Cyclic cohomology at 40 : achievements and future prospects, 103–122, Proc. Sympos. Pure Math., **105**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2023).
- [5] A. Connes, C. Consani, *Riemann-Roch for  $\overline{\text{Spec } \mathbb{Z}}$* , Bulletin des Sciences Mathématiques **187** (2023).
- [6] A. Connes, C. Consani, *Geometry of the Scaling Site*, Selecta Math. (N.S.) **23** (2017), no. 3, 1803–1850.
- [7] A. Connes, C. Consani, *Absolute Algebra and Segal's  $\Gamma$ -Rings : au Dessous de  $\overline{\text{Spec } \mathbb{Z}}$* , J. Number Theory **162** (2016), 518–551.
- [8] A. Connes, C. Consani, *Cyclic homology, Serre's local factors and  $\lambda$ -operations*, J. K-Theory **14** (2014), no. 1, 1–45.
- [9] A. Connes, C. Consani, *On the Notion of Geometry over  $\mathbb{F}_1$* , J. Algebraic Geometry **20** (2011), no. 3, 525–557.
- [10] A. Connes, C. Consani, *Schemes over  $\mathbb{F}_1$  and Zeta Functions*, Compositio Math. **146** (2010), no. 6, 1383–1415.
- [11] L. Hesselholt, *Topological Hochschild homology and the Hasse-Weil zeta function*, in An alpine bouquet of algebraic topology, 157–180, Contemp. Math., **708**, Amer. Math. Soc., (Providence), RI, (2018).
- [12] P. Scholze, *p-adic geometry*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians—Rio de Janeiro 2018. Vol. I. Plenary lectures, 899–933, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2018.
- [13] C. Simpson, *The Hodge filtration on nonabelian cohomology*, Algebraic Geometry- Santa Cruz 1995, Proc. Sympos. Pure Math., vol. **62**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, pp. 217-281.