

Bandes de semi-groupes
A. H. Clifford
1954

Introduction

En étudiant un semi-groupe général S , il est naturel de chercher à décomposer S (si possible) en la somme de classes d'un ensemble $\{S_\alpha; \alpha \in I\}$ de sous-semi-groupes S_α deux à deux disjoints, tels que :

1. chaque S_α appartienne à un type $\mathbb{C}$ de semi-groupes plus ou moins restrictif;
2. le produit $S_\alpha S_\beta$ de deux quelconques d'entre eux soit entièrement contenu dans un troisième : $S_\alpha S_\beta \subseteq S_\gamma$, pour un certain $\gamma \in I$ dépendant de α et β .

Nous dirons alors que S est une *bande de semi-groupes de type $\mathbb{C}$* . Si, pour tous $\alpha, \beta \in I$, $S_\alpha S_\beta$ et $S_\beta S_\alpha$ sont tous deux contenus dans un même S_γ , nous appellerons S un *treillis de semi-groupes de type $\mathbb{C}$* .

Nous nous intéresserons également à la spécialisation suivante de la notion de bande de semi-groupes. Supposons que I soit le produit direct $J \times K$ de deux classes J et K . Les sous-semi-groupes S_α sont alors décrits par deux indices : $S_{i\kappa}$ ($i \in J, \kappa \in K$). Supposons de plus que $S_{i\kappa} S_{j\lambda} \subseteq S_{i\lambda}$ pour tous $i, j \in J$ et tous $\kappa, \lambda \in K$. Nous appellerons alors S une *matrice de semi-groupes de type $\mathbb{C}$* . Le but principal de cet article est de montrer (théorème 4) qu'une bande de semi-groupes de type $\mathbb{C}$ est un treillis de semi-groupes, chacun d'eux étant une matrice de semi-groupes de type $\mathbb{C}$.

Le reste de l'article est consacré à donner des conditions nécessaires et suffisantes sur un semi-groupe S pour qu'il soit une bande ou un treillis de :

1. semi-groupes simples,
2. semi-groupes complètement simples,
3. groupes.

(On utilisera le terme *simple* pour signifier simple sans zéro, c'est-à-dire qu'un semi-groupe simple est un semi-groupe ne contenant aucun idéal bilatère propre.) Pour (1), nous avons la condition élégante, due à Olaf Andersen [1] : $a \in Sa^2S$ pour tout $a \in S$. Si un semi-groupe S est une somme de classes de semi-groupes [complètement] simples, il est aussi un treillis de semi-groupes [complètement] simples. Mais une somme de classes de groupes n'est pas nécessairement une bande de groupes, et une bande de groupes n'est pas nécessairement un treillis de groupes; ces trois catégories sont caractérisées par les théorèmes 6, 7 et 8 respectivement.

Notons qu'un semi-groupe S est une "bande de groupes d'ordre un" si et seulement si chaque élément de S est idempotent. Dans ce cas, nous appellerons S simplement une *bande*, et nous posons donc la définition : une bande est un semi-groupe dont tout élément est idempotent. De même, nous définissons un *treillis* comme étant une bande commutative. Une "matrice de groupes

Article original : A. H. Clifford, *Bands of Semigroups*, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 5, No. 3 (Jun., 1954), pp. 499-504.

d'ordre un" sera appelée une *bande rectangulaire*. Ainsi, nous définissons une bande rectangulaire comme le produit direct $J \times K$ de deux classes J et K , muni de la multiplication définie par :

$$(i, \kappa)(j, \lambda) = (i, \lambda) \quad (\forall i, j \in J; \kappa, \lambda \in K). \quad (1)$$

La raison de cette terminologie est la suivante. Considérons $J \times K$ comme un tableau rectangulaire de points, le point $\alpha = (i, \kappa)$ se trouvant à la i -ème ligne et à la κ -ème colonne. Alors $\alpha = (i, \kappa)$ et $\beta = (j, \lambda)$ sont les sommets opposés d'un rectangle dont les deux autres sommets sont $\alpha\beta = (i, \lambda)$ et $\beta\alpha = (j, \kappa)$.

Théorème 1. *Un semi-groupe S est une bande de semi-groupes de type $\mathbb{C}$ si et seulement s'il existe une bande I et un homomorphisme ϕ de S sur I tels que l'image réciproque $\phi^{-1}(\alpha)$ de chaque élément α de I soit un sous-semi-groupe S_α de S de type $\mathbb{C}$.*

Démonstration. Soit S une bande de semi-groupes S_α ($\alpha \in I$) de type $\mathbb{C}$. Alors, à chaque couple d'éléments α, β de la classe d'indices I correspond un unique élément γ de I tel que $S_\alpha S_\beta \subseteq S_\gamma$. Définissons $\alpha\beta = \gamma$. Puisque $S_\alpha S_\beta \cdot S_\gamma = S_\alpha \cdot S_\beta S_\gamma$, et $S_\alpha S_\alpha \subseteq S_\alpha$, cette multiplication est associative et idempotente, c'est-à-dire que I devient une bande pour cette loi. Chaque élément a de S appartient à un unique S_α , et, si nous définissons $\phi(a) = \alpha$, l'application ϕ de S sur I est clairement un homomorphisme possédant la propriété énoncée dans le théorème. La réciproque est évidente. $\square$

Nous utiliserons l'expression " S est une bande I de semi-groupes S_α ($\alpha \in I$) de type $\mathbb{C}$ " pour décrire la situation du théorème 1. L'homomorphisme ϕ sera appelé l'homomorphisme naturel de S sur I .

Nous appellerons un semi-groupe S *simple* si $SaS = S$ pour tout $a \in S$, et *complètement simple* si S est simple et contient un idempotent primitif (cf. Rees [3]). (Un idempotent e est primitif si de $f^2 = f$ et $ef = fe = f$ on déduit $f = e$.) Nous n'aurons pas à considérer de semi-groupes avec un élément zéro, et nous omettons par conséquent la précision "sans zéro". Rees [2] a montré (en particulier) que tout semi-groupe complètement simple est isomorphe à un "semi-groupe matriciel sur un groupe G ", défini comme suit. Soient J et K deux ensembles quelconques. Soit S l'ensemble de tous les triplets $(a; i, \kappa)$, avec $a \in G, i \in J, \kappa \in K$, et définissons le produit de deux éléments de S par :

$$(a; i, \kappa)(b; j, \lambda) = (a\phi_{\kappa j}b; i, \lambda) \quad (a, b \in G; i, j \in J; \kappa, \lambda \in K), \quad (2)$$

où $(\phi_{\kappa j})$ est une matrice $K \times J$ fixée d'éléments $\phi_{\kappa j}$ de G . Comme Suschkewitsch [4] a démontré essentiellement le même théorème pour les S finis, nous nous référerons à ce résultat comme au théorème de Suschkewitsch-Rees.

Le théorème suivant est simplement une reformulation, dans la terminologie du présent article, du théorème 2 d'un article antérieur [5].

Théorème 2. *Un semi-groupe est une somme de classes de groupes si et seulement s'il est un treillis de semi-groupes complètement simples.*

Nous remarquons que si un semi-groupe S est une somme de classes de groupes, il est une somme de classes de groupes deux à deux disjoints. Cela découle du théorème 1 de [5] et du fait évident

que S admet des inverses relatifs. Une remarque analogue est valable si S est une somme de classes de semi-groupes simples ou complètement simples, la première par le théorème d'Andersen (énoncé ci-dessous) et la seconde par le théorème 2.

Nous exprimons maintenant dans notre terminologie un résultat dû à McLean [6]. Appelons une bande *nulle part commutative* si $ab = ba$ implique $a = b$.

Théorème 3 ((McLean)). *Toute bande est un treillis de bandes nulle part commutatives.*

Puisqu'une bande rectangulaire est clairement nulle part commutative, le théorème suivant affine celui de McLean.

Théorème 4. *Toute bande est un treillis de bandes rectangulaires.*

Démonstration. Une bande est une somme de classes de groupes (d'ordre un), et donc, par le théorème 2, est un treillis de bandes complètement simples. Appliquant le théorème de Suschkewitsch-Rees à une bande complètement simple B , on voit que le groupe structural de B doit être d'ordre un, et donc la loi (2) de multiplication se réduit à (1). $\square$

Nous arrivons maintenant au résultat principal de cet article.

Théorème 5. *Une bande de semi-groupes de type $\mathbb{G}$ est un treillis de semi-groupes, chacun étant une matrice de semi-groupes de type $\mathbb{G}$.*

Démonstration. Soit S une bande I de semi-groupes S_α ($\alpha \in I$) de type $\mathbb{G}$. Par le théorème 3, I est elle-même un treillis P de bandes rectangulaires I_τ ($\tau \in P$). Soit ϕ l'homomorphisme naturel de S sur I , et soit ψ celui de I sur P . L'application $a \mapsto \psi(\phi(a))$ est clairement un homomorphisme de S sur P . L'image réciproque S'_τ d'un élément τ de P est la somme des classes de tous les S_α pour lesquels $\psi(\alpha) = \tau$, c'est-à-dire pour lesquels $\alpha \in I_\tau$. En décrivant les éléments α de I_τ comme des paires (i, κ) d'éléments de classes d'indices J_τ et K_τ , comme ci-dessus, on peut alors écrire $S_{i\kappa}$ pour S_α et obtenir $S_{i\kappa}S_{j\lambda} \subseteq S_{i\lambda}$ pour tous $i, j \in J_\tau$ et tous $\kappa, \lambda \in K_\tau$. Ainsi S'_τ est une matrice de semi-groupes $S_{i\kappa}$, et ces derniers (qui sont les S_α) sont de type $\mathbb{G}$. $\square$

Théorème 6. *Une matrice de semi-groupes [complètement] simples est [complètement] simple.*

Démonstration. Soit S une matrice de semi-groupes simples $S_{i\kappa}$ ($i \in J, \kappa \in K$). Soient a et b des éléments arbitraires de S ; nous devons montrer qu'il existe x, y dans S tels que $xay = b$. Supposons $a \in S_{i\kappa}$ et $b \in S_{j\lambda}$. Alors $bab \in S_{j\lambda}$. Puisque $S_{j\lambda}$ est simple, il existe $u, v \in S_{j\lambda}$ tels que $u \cdot (bab) \cdot v = b$. On peut donc prendre $x = ub$ et $y = bv$.

Supposons maintenant que les semi-groupes $S_{i\kappa}$ sont complètement simples. Pour montrer que S est complètement simple, il suffit de montrer que tout idempotent e de $S_{i\kappa}$ est primitif dans S aussi bien que dans $S_{i\kappa}$. Soit f un idempotent de S tel que $fe = ef = f$. Supposons $f \in S_{j\lambda}$. Alors $fe \in S_{j\lambda}S_{i\kappa} \subseteq S_{j\kappa}$ et $ef \in S_{i\kappa}S_{j\lambda} \subseteq S_{i\lambda}$. Donc $S_{j\kappa}$ et $S_{i\lambda}$ doivent être identiques à $S_{j\lambda}$, c'est-à-dire $i = j$ et $\kappa = \lambda$. Ainsi $f \in S_{i\kappa}$, et puisque e est primitif dans $S_{i\kappa}$, on conclut que $f = e$. $\square$

Du théorème 5 et du théorème de Suschkewitsch-Rees, il découle qu'un semi-groupe est une matrice de groupes si et seulement s'il est complètement simple.

Le théorème suivant est le théorème 9.5 dans [1]. (Une preuve peut être construite en modifiant convenablement la preuve du théorème 2.)

Théorème 7 ((Croisot-Andersen)). *Les trois assertions suivantes concernant un semi-groupe S sont équivalentes :*

- (A) S est une somme de classes de semi-groupes simples.
- (B) S est un treillis de semi-groupes simples.
- (C) $a \in Sa^2S$ pour tout $a \in S$.

Appelons deux éléments a, b d'un semi-groupe S r -associés (resp. l -associés) s'ils engendrent le même idéal à droite (resp. à gauche) de S , et $r \cap l$ -associés s'ils sont à la fois r - et l -associés. Le théorème suivant est le théorème 7 dans [7].

Théorème 8 ((J. A. Green)). *Si un élément a d'un semi-groupe S est $r \cap l$ -associé à a^2 , alors l'ensemble de tous les éléments de S qui sont $r \cap l$ -associés à a est un sous-groupe de S .*

Théorème 9. *Les quatre assertions suivantes concernant un semi-groupe S sont équivalentes :*

- (A) S est une somme de classes de semi-groupes complètement simples.
- (B) S est une somme de classes de groupes.
- (C) S est un treillis de semi-groupes complètement simples.
- (D) $a \in Sa^2 \cap a^2S$ pour tout $a \in S$.

Démonstration. (A) implique (B), puisque tout semi-groupe complètement simple est une somme de classes de groupes. (B) implique (C) par le théorème 2, et évidemment (C) implique (A). (B) implique (D), car, si $a \in S$, alors a et a^2 appartiennent tous deux au même sous-groupe G de S , de sorte que $a \in Ga^2 \cap a^2G \subseteq Sa^2 \cap a^2S$. (D) implique (B), car, si $a \in S$, (D) implique que a et a^2 sont $r \cap l$ -associés, et donc a appartient à un sous-groupe de S par le théorème de Green. $\square$

Théorème 10. *Un semi-groupe S est une bande de groupes si et seulement s'il satisfait les deux conditions suivantes :*

- (1) $a \in Sa^2 \cap a^2S$ pour tout $a \in S$;
- (2) pour toute paire d'éléments a, b de S , $Sba = Sba^2$ et $abS = a^2bS$.

Démonstration. Soit S une bande de groupes. En particulier, S est une somme de classes de groupes, et (1) découle comme dans la preuve du théorème 6. Soient $a, b \in S$. Du fait que a et a^2 appartiennent au même sous-groupe de S et de l'hypothèse que S est une bande de groupes, on conclut que ba et ba^2 appartiennent au même sous-groupe de S , et donc $Sba = Sba^2$. De même, $abS = a^2bS$.

Supposons réciproquement que (1) et (2) sont satisfaites dans S . Par (1) et le théorème de Green, S est la somme de classes de groupes G_α ($\alpha \in I$). Soient $a, b \in S$. Soit G_a le sous-groupe de S auquel appartient a , soit e_a l'élément identité de G_a , et soit a^{-1} l'inverse de a dans G_a . En remplaçant b par $a^{-1}b$ dans la seconde partie de (2), on obtient $e_a bS = abS$. Si a' est un autre élément de G_a , on obtient de même $e_a bS = a'bS$, et donc $abS = a'bS$. Évidemment $Sa = Sa'$, et donc $Sab = Sa'b$. Par conséquent ab et $a'b$ sont $r \cap l$ -associés. Or, dans un semi-groupe S qui est la somme de classes de groupes, deux éléments de S sont $r \cap l$ -associés si et seulement s'ils appartiennent au même sous-groupe de S . Par conséquent ab et $a'b$ appartiennent au même sous-groupe de S . Par l'argument dual gauche-droite, ba et ba' appartiennent aussi au même sous-groupe de S . Ainsi la relation d'appartenance au même sous-groupe de S est une congruence, d'où S est une bande de groupes. $\square$

Théorème 11. *Un semi-groupe S est un treillis de groupes si et seulement s'il satisfait les deux conditions suivantes :*

- (1) $a \in Sa^2 \cap a^2S$ pour tout $a \in S$;
- (2) si e et f sont des idempotents de S , alors $ef = fe$.

Démonstration. Supposons que S soit un treillis I de groupes G_α ($\alpha \in I$). Puisque S est en particulier une somme de classes de groupes, (1) découle comme dans la preuve du théorème 6. Pour montrer (2), soient e et f des idempotents de S . Alors $e \in G_\alpha$ et $f \in G_\beta$ pour certains $\alpha, \beta \in I$. Puisque G_α et G_β sont des groupes, e et f doivent être les éléments identités de ceux-ci : $e = e_\alpha$, $f = e_\beta$. Soit $\gamma = \alpha\beta$ ($= \beta\alpha$ puisque I est par hypothèse commutatif). Soit e_γ l'identité de G_γ . Puisque $e_\alpha e_\beta \in G_\gamma$, on a $e_\gamma \cdot e_\alpha e_\beta = e_\alpha e_\beta$. Or $e_\gamma e_\alpha \in G_\gamma = G_\alpha$, donc $e_\gamma e_\alpha \cdot e_\gamma = e_\gamma e_\alpha$. Par conséquent

$$(e_\gamma e_\alpha)^2 = (e_\gamma e_\alpha \cdot e_\gamma) e_\alpha = e_\gamma e_\alpha e_\alpha = e_\gamma e_\alpha.$$

Puisque e_γ est le seul idempotent de G_γ , on conclut que $e_\gamma e_\alpha = e_\gamma$. De même, $e_\gamma e_\beta = e_\gamma$. D'où

$$e_\alpha e_\beta = e_\gamma e_\alpha e_\beta = e_\gamma e_\beta = e_\gamma.$$

Ainsi $e_\alpha e_\beta = e_{\alpha\beta}$ pour tous $\alpha, \beta \in I$, d'où $e_\beta e_\alpha = e_{\beta\alpha} = e_{\alpha\beta} = e_\alpha e_\beta$.

Réciproquement, soit S un semi-groupe satisfaisant les conditions (1) et (2). Par (1) et le théorème de Green, S est une somme de classes de groupes. Du théorème 3 de [5] et de la condition (2), il découle alors que S est un treillis de groupes ; de plus, le théorème cité fournit une construction explicite pour tout S de ce type. $\square$

Références

- [1] Olaf Andersen, *Ein Bericht über die Struktur abstrakter Halbgruppen*, Thèse, Hambourg, 1952, non publiée.
- [2] D. Rees, *On semi-groups*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **36** (1940), 387-400.
- [3] D. Rees, *Note on semi-groups*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **37** (1941), 434-435.
- [4] A. Suschkewitsch, *Über die endlichen Gruppen ohne das Gesetz der eindeutigen Umkehrbarkeit*, Math. Ann. **99** (1928), 30-50.
- [5] A. H. Clifford, *Semigroups admitting relative inverses*, Ann. of Math. **42** (1941), 1037-1049.
- [6] David McLean, *Idempotent semigroups*, Amer. Math. Monthly **61** (1954), 110-113.
- [7] J. A. Green, *On the structure of semigroups*, Ann. of Math. **54** (1951), 163-172.
- [8] R. Croisot, *Demi-groupes inversifs et demi-groupes réunions de demi-groupes simples*, Ann. École Norm. (3) **70** (1953), 361-379. (Ajouté pendant l'impression.)

UNIVERSITÉ JOHNS HOPKINS