Un problème insoluble de théorie élémentaire des nombres.

Alonzo Church.

1. Introduction.

Il y a une classe de problèmes de théorie élémentaire des nombres qui peuvent être énoncés sous la forme qu'il est nécessaire de trouver une fonction effectivement calculable f de n sur les entiers positifs, telle que $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 2$ soit[1] une condition nécessaire et suffisante pour qu'une certaine proposition de théorie élémentaire des nombres dans laquelle $x_1, x_2, \ldots, x_n$ interviennent comme des variables libres soit vraie.

Un exemple d'un tel problème consiste à trouver un moyen de déterminer si pour n'importe quel entier positif n il existe des entiers positifs x, y, z, tels que $x^n + y^n = z^n$. Car cela peut être interprété, et cela requiert de trouver une fonction effectivement calculable f, telle que $f(n)$ est égal à 2 si et seulement s'il existe des entiers positifs x, y, z, tels que $x^n + y^n = z^n$. Clairement, la condition que la fonction f soit effectivement calculable est une partie essentielle du problème, puisque sans elle, le problème devient trivial.

Un autre exemple de problème de cette classe est, par exemple, le problème de topologie consistant à trouver un ensemble complet d'invariants effectivement calculables de variétés fermées simpliciales tri-dimensionnelles par des homéomorphismes. Ce problème peut être interprété comme un problème de théorie élémentaire des nombres au vu du fait que les complexes topologiques sont représentables par des matrices d'incidence. En fait, comme c'est bien connu, la propriété d'un ensemble de matrices d'incidence qu'il représente une variété fermée trois-dimensionnelle, et la propriété que deux ensembles de matrices d'incidence représentent des complexes homéomorphes, peuvent toutes les deux être décrites en termes appartenant simplement à la théorie des nombres. Si on énumère, d'une façon évidente, les ensembles de matrices d'incidence qui représentent des variétés fermées trois-dimensionnelles, il sera alors immédiatement démontrable que le problème considéré (trouver un ensemble complet d'invariants effectivement calculables de variétés fermées trois-dimensionnelles) est équivalent au problème de trouver une fonction effectivement calculable f sur les entiers positifs, telle que $f(m, n)$ est égal à 2 si et seulement si le $m^{\text{ième}}$ ensemble de matrices d'incidence et le $n^{\text{ième}}$ ensemble de matrices d'incidence dans l'énumération

Présenté à la Société américaine de mathématiques, 19 avril 1935.
Référence : American Journal of Mathematics, Vol. 58, No. 2. (Apr., 1936), p. 345-363.
Transcription - traduction Denise Vella-Chemla, août 2022.

[1] La sélection de l'entier positif particulier 2 plutôt qu'un autre est, bien sûr, accidentelle, et non essentielle.

représentent des complexes homéomorphes.

D'autres exemples seront bientôt présentés au lecteur.

Le but du présent article est de proposer une définition de la calculabilité effective[2] qui est pensée comme correspondant de façon satisfaisante à une notion intuitive assez vague selon laquelle les problèmes de cette classe sont souvent énoncés, et de montrer, au moyen d'un exemple, que tous les problèmes de cette classe ne sont pas toujours solubles.

2. Conversion et λ-définissabilité.

On sélectionne une liste particulière de symboles, constituée des symboles $\{$, $\}$, (,), λ, [,], et un ensemble infini dénombrable de symboles $a, b, c, \ldots$ qu'on appelle variables. Et on désigne par le mot formule toute séquence finie de symboles pris dans cette liste. Les termes *formule bien formée, variable libre*, et *variable liée* sont alors définis par induction comme suit. Une variable $\mathbf{x}$ seule est une formule bien formée et l'occurrence de $\mathbf{x}$ dans cette formule est une occurrence de $\mathbf{x}$ comme variable libre ; si les formules $\mathbf{F}$ et $\mathbf{X}$ sont bien formées, $\{\mathbf{F}\}(\mathbf{X})$ est bien formée, et une occurrence de $\mathbf{x}$ comme variable libre (liée) dans $\mathbf{F}$ or $\mathbf{X}$ est une occurrence de $\mathbf{x}$ comme variable libre (liée) dans $\{\mathbf{F}\}(\mathbf{X})$; si la formule $\mathbf{M}$ est bien formée et contient une occurrence de $\mathbf{x}$ comme variable libre dans $\mathbf{M}$, alors $\lambda\mathbf{x}[\mathbf{M}]$ est bien formée, n'importe quelle occurrence de $\mathbf{x}$ dans $\lambda\mathbf{x}[\mathbf{M}]$ est une occurrence de $\mathbf{x}$ comme variable liée dans $\lambda\mathbf{x}[\mathbf{M}]$,

[2]Comme cela apparaîtra, cette définition de la calculabilité effective peut être énoncée dans l'une ou l'autre de deux formes équivalentes, (1) qu'une fonction sur les entiers positifs sera dite effectivement calculable si elle est λ-définissable au sens du § 2 ci-dessous, (2) qu'une fonction sur les entiers positifs sera dite effectivement calculable si elle est récursive au sens du § 4 ci-dessous. La notion de λ-définissabilité est due conjointement à l'auteur du présent article et à S. C. Kleene, des étapes successives vers cette notion ayant été présentées par le présent auteur dans les *Annals of Mathematics*, vol. 34 (1933), p. 863, et par Kleene dans le *American Journal of Mathematics*, vol. 57 (1935), p. 219. La notion de récursivité au sens du § 4 ci-dessous est due conjointement à Jacques Herbrand et Kurt Gödel, comme cela est expliqué. Et la preuve de l'équivalence des deux notions est principalement due à Kleene, mais également en partie au présent auteur et à J. B. Rosser, comme expliqué ci-dessous. La proposition d'identifier ces notions avec la notion intuitive de calculabilité effective est faite pour la première fois dans le présent article (mais voir la première note de bas de page au § 7 ci-dessous).
À l'aide des méthodes de Kleene (*American Journal of Mathematics*, 1935), les considérations du présent article pourraient, avec de légères modifications comparativement, être amenées entièrement selon la λ-définissabilité, sans utiliser la notion de récursivité. D'un autre côté, puisque les résultats du présent article ont été obtenus, il a été montré par Kleene (voir son article à venir "General recursive functions of natural numbers") que des résultats analogues peuvent être obtenus entièrement selon la récursivité, sans utiliser la λ-définissabilité. Le fait, pourtant, que des définitions si grandement différentes et (selon l'opinion de l'auteur) également naturelles de la calculabilité effective s'avèrent être équivalentes ajoute à la force des raisons présentées ci-dessous pour croire qu'elles constituent une caractérisation à la fois générale de cette notion et également consistante avec la compréhension intuitive habituelle que l'on en a.

et une occurrence d'une variable $\mathbf{y}$, autre que $\mathbf{x}$, comme une variable libre (liée) dans $\mathbf{M}$ est une occurrence de $\mathbf{y}$ comme une variable libre (liée) dans $\lambda\mathbf{x}[\mathbf{M}]$.

Nous utiliserons des lettres en gras pour dénoter les variables ou les formules indéterminées. Et nous adoptons la convention que, à moins qu'on n'énonce le contraire, toute lettre en gras représente une formule bien formée et tout ensemble de symboles contenant une lettre en gras représente une formule bien formée.

Quand on écrit des formules bien formées particulières, on adopte les abréviations suivantes. Une formule $\{\mathbf{F}\}(\mathbf{X})$ peut être abrégée par $\mathbf{F(X)}$ à chaque fois que $\mathbf{F}$ est ou bien est représenté par un symbole unique. Une formule $\{\{\mathbf{F}\}(\mathbf{X})\}(\mathbf{Y})$ peut être abrégée par $\{\mathbf{F}\}(\mathbf{X,\ Y})$, ou, si $\mathbf{F}$ est ou est représenté par un symbole unique, par $\mathbf{F(X,\ Y)}$. Et $\{\{\{\mathbf{F}\}(\mathbf{X})\}(\mathbf{Y})\}(\mathbf{Z})$ peut être abrégée par $\{\mathbf{F}\}(\mathbf{X,\ Y,\ Z})$, ou par $\mathbf{F(X,\ Y,\ Z)}$, et etc. Une formule $\lambda\mathbf{x}_1[\lambda\mathbf{x}_2[\ldots\lambda\mathbf{x}_n[\mathbf{M}]\ldots]]$ peut être abrégée par $\lambda\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\ldots\mathbf{x}_n \cdot \mathbf{M}$ ou par $\lambda\ \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\ldots\mathbf{x}_n\mathbf{M}$.

Nous nous permettons aussi d'introduire des abréviations de la forme de symboles particuliers comme α qui représentent une séquence particulière de symboles $\mathbf{A}$, et on indiquera l'introduction d'une telle abréviation par la notation $\alpha \to \mathbf{A}$, que l'on doit lire, "α représente $\mathbf{A}$."

On introduit directement la liste suivante d'abréviations,

$$\begin{aligned}
&1 \to \lambda ab \cdot a(b),\\
&2 \to \lambda ab \cdot a(a(b)),\\
&3 \to \lambda ab \cdot a(a(a(b))),
\end{aligned}$$

et etc., chaque entier positif en notation arabe désignant une formule de la forme $\lambda ab \cdot a(a(\ldots a(b)\ldots))$.

L'expression $S^{\mathbf{x}}_{\mathbf{N}}\mathbf{M}\mid$ est utilisée pour représenter le résultat du remplacement de $\mathbf{x}$ par $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{M}$.

On considère les trois opérations suivantes sur les formules bien formées :

I. *Le remplacement de n'importe quelle portion $\lambda\boldsymbol{x}[\boldsymbol{M}]$ d'une formule par $\lambda\boldsymbol{y}[S^{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{M}\mid]$, où $\boldsymbol{y}$ est une variable qui n'apparaît pas dans $\boldsymbol{M}$.*

II. *Le remplacement de n'importe quelle portion $\{\lambda\boldsymbol{x}[\boldsymbol{M}]\}(\boldsymbol{N})$ d'une formule par $S^{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{N}}\boldsymbol{M}\mid$, en respectant la contrainte que les variables liées dans $\boldsymbol{M}$ sont distinctes à la fois de $\boldsymbol{x}$ et des variables libres dans $\boldsymbol{N}$.*

III. *Le remplacement de n'importe quelle portion* $S^{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{N}}\boldsymbol{M} \mid$ *(ne suivant pas immédiatement* λ*) d'une formule par* $\{\lambda \boldsymbol{x}[\boldsymbol{M}]\}(\boldsymbol{N})$*, en respectant la contrainte que les variables liées dans* $\boldsymbol{M}$ *sont distinctes à la fois de* $\boldsymbol{x}$ *et des variables libres dans* $\boldsymbol{N}$*.*

Toute séquence finie de ces opérations est appelée une *conversion*, et si **B** peut être obtenue à partir de **A** par une conversion, on dit que **A** est *convertible* en **B**, ou, "**A** conv **B**." Si **B** est identique à **A** ou peut être obtenue à partir de **A** par une application unique de l'une des trois opérations I, II, III, on dit que **A** est *immédiatement convertible* en **B**.

Une conversion qui contient exactement une application de l'opération II, et aucune application de l'opération III, est appelée une *réduction.*

Une formule est dite être *en forme normale* si elle est bien formée et si elle ne contient aucune partie de la forme $\{\lambda\mathbf{x}[\mathbf{M}]\}(\mathbf{N})$. Et **B** est dite être une *forme normale de* **A** si **B** est en forme normale et **A** conv **B**.

L'ordre donné originellement $a, b, c, \ldots$ des variables est appelé leur *ordre naturel.* Et une formule est dite être *en forme normale principale* si elle est en forme normale, et si aucune variable n'apparaît dans cette formule soit comme une variable libre, soit comme une variable liée et les variables qui apparaissent dans la formule et qui suivent immédiatement le symbole λ sont, quand on les prend dans l'ordre dans lequel elles apparaissent dans la formule, dans leur ordre naturel sans répétitions, en commençant par a et en omettant seulement les variables qui apparaissent dans la formule comme des variables libres[3]. La formule **B** est dite être la *forme normale principale de* **A** si **B** est en forme normale principale et **A** conv **B**.

Des trois théorèmes suivants, la preuve du premier est immédiate, et le second et le troisième ont été démontrés par le présent auteur et J. B. Rosser[4] :

Théorème I. *Si une formule est en forme normale, aucune réduction de cette formule n'est possible.*

Théorème II. *Si une formule a une forme normale, cette forme normale est unique à applications de l'opération I près, et toute séquence de réductions de la formule doit*

[3]Par exemple, les formules $\lambda ab.b(a)$ et $\lambda a.a(\lambda c.b(c))$ sont en forme normale principale, et $\lambda ac.c(a)$, et $\lambda bc.c(b)$, et $\lambda a.a(\lambda a.b(a))$ sont en forme normale mais non en forme normale principale. L'usage de la forme normale principale a été suggéré par S. C. Kleene comme un moyen d'éviter l'ambiguité de la détermination de la forme normale d'une formule, qui est gênant dans certaines connexions. Observons que les formules 1, 2, 3,... sont toutes en forme normale principale.

[4]Alonzo Church et J. B. Rosser, "Some properties of conversion", article à paraître (résumé dans le Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 41, p. 332).

(si on la poursuit) se terminer par la forme normale.

Théorème III. *Si une formule a une forme normale, toute partie bien formée de cette formule a une forme normale.*

On dira d'une fonction que c'est une *fonction des entiers positifs* si le domaine de chaque variable indépendante est la classe des entiers positifs et le domaine de chaque variable dépendante est contenu dans la classe des entiers positifs. Et quand on souhaite indiquer le nombre de variables indépendantes, on parlera d'une fonction d'un entier positif, de deux entiers positifs, et etc. Ainsi si F est une fonction de n entiers positifs, et $a_1, a_2, \ldots a_n$ sont des entiers positifs, alors $F(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ doit être un entier positif.

Une fonction F d'un entier positif est dite être λ-définissable s'il est possible de trouver une formule F telle que, si $F(m) = r$ et $\mathbf{m}$ et $\mathbf{r}$ sont des formules pour lesquelles les entiers positifs m et r (écrits en chiffres arabes) sont en accord avec les abréviations que nous avons introduites ci-dessus, alors $\{\mathbf{F}\}(\mathbf{m})$ conv $\mathbf{r}$.

De façon similaire, une fonction F de deux entiers positifs est dite être λ-définissable s'il est possible de trouver une formule $\mathbf{F}$ telle que, à chaque fois que $F(m, n) = r$, la formule $\{\mathbf{F}\}(\mathbf{m}, \mathbf{n})$ peut être convertie en $\mathbf{r}$ $\quad(m, n, r$ étant des entiers positifs et $\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{r}$ les formules correspondantes). Et etc, pour les fonctions de trois entiers positifs ou plus[5].

Il est clair que, dans le cas de n'importe quelle fonction λ-définissable d'entiers positifs, le processus de réduction des formules en forme normale fournit un algorithme pour le calcul effectif de valeurs particulières de la fonction.

3. La représentation de Gödel d'une formule.

En adaptant à la notation formelle qui vient tout juste d'être décrite une idée qui est due à Gödel[6], on associe à toute formule un entier positif pour le représenter, de la façon suivante. À chacun des symboles {, (, [on fait correspondre le nombre 11, à chacun des symboles },),] le nombre 13, au symbole λ le nombre 1, et aux variables $a, b, c, \ldots$ les nombres premiers 17, 19, 23,... respectivement. Et à une formule

[5]Cf. S. C. Kleene, "A theory of positive integers in formal logic", *American Journal of Mathematics*, vol. 57 (1935), p. 153-173 and 219-244, où la λ-définissabilité d'un nombre de fonctions familières des entiers positifs, et d'un nombre important de classes générales de fonctions, est établie. Kleene utilise le terme *définissable*, ou *formellement définissable*, dans le sens dans lequel nous utilisons ici l'expression λ-*définissable*.

[6]Kurt Gödel, "Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I", *Monatshefte für Mathematik und Physik*, vol. 38 (1931), p. 173-198.

qui est composée des n symboles $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ dans cet ordre, on associe le nombre $2^{t_1}3^{t_2}\ldots p_n^{t_n}$, où t_i est le nombre correspondant au symbole τ_i, et où p_n désigne le $n^{\text{ième}}$ nombre premier.

Ce nombre $2^{t_1}3^{t_2}\ldots p_n^{t_n}$ sera appelé la *représentation de Gödel* de la formule $\tau_1\tau_2\ldots\tau_n$.

Deux formules distinctes peuvent parfois avoir la même représentation de Gödel, parce que les nombres 11 et 13 correspondent chacun à trois symboles différents, mais il est facilement prouvé que *deux formules distinctes bien formées ne peuvent avoir la même représentation de Gödel.* Il est clair, de plus, qu'il y a une méthode effective par laquelle, étant donnée une formule, sa représentation de Gödel peut être calculée ; et de la même façon, il y a une méthode effective par laquelle, étant donné un nombre entier positif, il est possible de déterminer s'il est la représentation de Gödel d'une formule bien formée et, si c'est le cas, d'obtenir cette formule.

Dans cette connexion, la représentation de Gödel joue un rôle similaire à celui de la matrice d'incidence en topologie combinatoire (cf. § 1 ci-dessus). Car il y a, dans la théorie des formules bien formées, une importante classe de problèmes, dont chacun est équivalent à un problème de théorie élémentaire des nombres qui peut être obtenu au moyen de la représentation de Gödel[7].

4. Fonctions récursives.

On définit une classe d'expressions, que l'on appellera *expressions élémentaires*, et dans lesquelles interviennent, entre parenthèses et virgules, les symboles 1, S, un ensemble infini de variables numériques $x, y, z, \ldots$ et, pour chaque entier positif n, un ensemble infini $f_n, g_n, h_n, \ldots$ de variables fonctionnelles d'indice n. Cette définition se fait par induction comme suit. Le symbole 1 ou n'importe quelle variable numérique, pris seul, est une expression élémentaire. Si A est une expression élémentaire, alors $S(A)$ est une expression élémentaire. Si $A_1, A_2, , \ldots, A_n$, sont des expressions élémentaires et f_n est n'importe quelle variable fonctionnelle d'indice n, alors $f_n(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ est une expression élémentaire.

Les expressions élémentaires particulières $1, S(1), S(S(1)), \ldots$, sont appelées des *numéraux*. Et les entiers positifs 1, 2, 3, sont dits correspondre aux numéraux

[7]Ceci est principalement un cas particulier de la remarque maintenant familière selon laquelle, au vu de la représentation de Gödel et des idées qui lui sont associées, la logique symbolique en général peut être vue, mathématiquement, comme une branche de la théorie élémentaire des nombres. Cette remarque est principalement due à Hilbert (cf. par exemple, *Verhandlungen des dritten internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg*, 1904, p. 185 ; également Paul Bernays dans *Die Naturwissenschaften*, vol. 10 (1922), p. 97 and 98) mais est formulée plus clairement dans les termes de la représentation de Gödel.

$1, S(1), S(S(1)), \ldots.$

Une expression de la forme $A = B$, où A et B sont des expressions élémentaires, est appelée une *équation élémentaire*.

Les *équations dérivées* d'un ensemble E d'équations élémentaires sont définies par induction comme suit. Les équations de E elles-mêmes sont des équations dérivées. Si $A = B$ est une équation dérivée contenant une variable numérique x, alors le résultat du remplacement par un numéral particulier de toutes les occurrences de x dans $A = B$ est une équation dérivée. Si $A = B$ est une équation dérivée contenant une expression élémentaire C (comme partie soit de A soit de B), et si soit $C = D$ soit $D = C$ est une équation dérivée, alors le résultat du remplacement par D d'une occurrence particulière de C dans $A = B$ est une équation dérivée.

Supposons qu'aucune équation dérivée d'un certain ensemble fini E d'équations élémentaires ait la forme $k = l$ où k et l sont des numéraux différents, et les variables fonctionnelles qui apparaissent dans E sont $f^1_{n_1}, f^2_{n_2}, \ldots, f^r_{n_r}$ avec les indices $n_1, n_2, \ldots, n_r$ respectivement, et que, pour toute valeur de i de 1 à r inclus, et pour tout ensemble de numéraux $k^i_1, k^i_2, \ldots, k^i_{n_i}$, il existe un unique numéral k^i tel que $f^i_{n_i}(k^i_1, k^i_2, \ldots, k^i_{n_i})$ est une équation dérivée de E. Et appelons $F^1, F^2, \ldots, F^r$ les fonctions sur les entiers positifs définies par la condition que, dans tous les cas, $F^i(m^i_1, m^i_2, \ldots, m^i_{n_i})$ seront égaux aux m^i, où $m^i_1, m^i_2, \ldots, m^i_{n_i}$ et les m^i sont les entiers positifs qui correspondent aux numéraux $k^i_1, k^i_2, \ldots, k^i_{n_i}$, et aux k^i respectivement. Alors l'ensemble d'équations E est dit *définir*, ou bien être un ensemble d'*équations récursives* pour chacune des fonctions F^i, et la variable fonctionnelle $f^i_{n_i}$, est dite *dénoter* la fonction F^i.

Une fonction des entiers positifs pour laquelle un ensemble d'équations récursives peut être donné est dite être *récursive*[8].

Il est clair que pour toute fonction récursive sur les entiers positifs, il existe un algorithme par lequel n'importe quelle valeur particulière requise de la fonction peut être calculée effectivement. Car les équations dérivées de l'ensemble des équations

[8]Cette définition est intimement reliée à, et a été suggérée par, une définition des fonctions récursives qui a été proposée par Kurt Gödel, dans des exposés à Princeton, N. J., 1934, et a été attribuée par lui en partie à une suggestion non publiée de Jacques Herbrand. Les caractéristiques principales selon lesquelles la définition présente de la récursivité diffère de celle de Gödel sont dues à S. C. Kleene.
Dans un article à venir de Kleene qui s'appellera, "General recursive functions of natural numbers", (résumé dans *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 41), il sera question de plusieurs définitions de la récursivité et des équivalences entre elles seront obtenues. En particulier, il découle facilement des résultats de Kleene dans l'article en question que toute fonction récursive au sens présent ici est également récursive au sens de Gödel (1934) et inversement.

récursives E sont effectivement énumérables, et parce que l'algorithme de calcul de valeurs particulières d'une fonction F^i, dénotée par une variable fonctionnelle $f^i_{n_i}$, consiste à faire l'énumération des équations dérivées de E jusqu'à ce que l'équation particulière requise de la forme $f^i_{n_i}(k^i_1, k^i_2, \dots k^i_{n_i}) = k^i$ soit trouvée[9].

On dit qu'une séquence infinie sur les entiers positifs est récursive si la fonction F telle que $F(n)$ est le $n^{\text{ième}}$ terme de la séquence est récursive.

On dit qu'une fonction propositionnelle sur les entiers positifs est récursive si la fonction dont la valeur est 2 ou 1, selon que la fonction propositionnelle est vraie ou fausse, est récursive. Par propriété récursive des entiers positifs, nous voulons dire une fonction récursive propositionnelle d'un entier positif unique, et par relation récursive entre des entiers positifs, nous voulons dire une fonction propositionnelle récursive de deux entiers positifs ou plus.

Une fonction F, pour laquelle le domaine de la variable dépendante est contenu dans la classe des entiers positifs et le domaine de la variable indépendante, ou de chaque variable indépendante, est un sous-ensemble (non forcément l'ensemble entier) de la classe des entiers positifs, sera dit *potentiellement récursif*, s'il est possible de trouver une fonction récursive F' sur les entiers positifs (pour laquelle le domaine de la variable indépendante, ou de chaque variable indépendante, est l'ensemble complet de la classe des entiers positifs), tel que la valeur de F' est en accord avec la valeur de F dans tous les cas où cette dernière est définie.

Par une *opération sur* des formules bien formées, nous voudrons dire une fonction pour laquelle le domaine de la variable dépendante est contenu dans la classe des formules bien formées et le domaine de la variable indépendante, ou de chaque variable indépendante, est la totalité de la classe des formules bien formées. Et nous dirons qu'une telle opération est récursive si la fonction correspondante obtenue en remplaçant toutes les formules par leur représentation de Gödel est potentiellement récursive.

De façon similaire, toute fonction pour laquelle le domaine de la variable dépendante est contenu soit dans la classe des entiers positifs, soit dans la classe des formules bien

---

[9]Le lecteur peut objecter que cet algorithme ne peut être utilisé pour fournir un calcul effectif de la valeur particulière requise de F^i à moins que l'on puisse avoir une preuve constructive que l'équation requise $f^i_{n_i}(k^i_1, k^i_2, \dots k^i_{n_i}) = k^i$ finira bien par être trouvée. Mais s'il en est ainsi, cela signifie facilement que le lecteur pourrait prendre le quantificateur existentiel qui apparaît dans notre définition d'un ensemble d'équations récursives dans un sens constructif. On laisse au lecteur le soin de trouver ce que le critère de constructibilité devrait être.
La même remarque s'applique en lien avec l'existence d'un algorithme pour calculer les valeurs d'une fonction λ-définissable sur les entiers positifs.

formées et pour laquelle le domaine de toute variable indépendante est identique soit à la classe des entiers positifs soit à la classe des formules bien formées (autorisant le cas où certains domaines sont identiques à une classe et d'autres à l'autre), sera dite récursive si la fonction correspondante obtenue en remplaçant toutes les formules par leur représentation de Gödel est potentiellement récursive. On dira qu'une séquence infinie de formules bien formées est récursive si la séquence infinie correspondante des représentations de Gödel est récursive. Et on dira qu'une propriété de, ou une relation entre, des formules bien formées est récursive si la propriété correspondante de, ou la relation entre, leur représentation de Gödel est potentiellement récursive. Un ensemble de formules bien formées est dit récursivement énumérable s'il existe une séquence infinie récursive qui est constituée entièrement de formules de l'ensemble et contient toute formule de l'ensemble au moins une fois[10].

Selon la notion de récursivité, on peut également définir une *proposition de la théorie élémentaire des nombres*, par induction comme suit. Si ϕ est une fonction propositionnelle récursive de n entiers positifs (définie en donnant un ensemble particulier d'équations récursives de la fonction correspondante dont les valeurs sont 2 et 1) et si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont des variables qui prennent comme valeurs des entiers positifs, alors $\phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une proposition de la théorie élémentaire des nombres. Si P est une proposition de la théorie élémentaire des nombres dans laquelle x apparaît comme une variable libre, alors le résultat du remplacement de toutes les occurrences de x comme une variable libre dans P par un entier positif particulier est une proposition de la théorie élémentaire des nombres, et $(x)P$ et $(\exists x)P$ sont des propositions de la théorie élémentaire des nombres, où (x) et $(\exists x)$ sont respectivement les quantificateurs universel et existentiel sur une classe d'entiers positifs.

On voit alors facilement que la négation d'une proposition de la théorie élémentaire des nombres ou le produit logique ou la somme logique de deux propositions de la théorie élémentaire des nombres est équivalente, de façon simple, à une autre proposition de la théorie élémentaire des nombres.

5. Récursivité de la $\mathfrak{p}$-fonction de Kleene.

On prouve deux théorèmes qui établissent la récursivité de certaines fonctions qui sont définissables par des mots au moyen de la phrase "Le plus petit entier positif tel que", ou, "Le $n^{\text{ième}}$ entier positif tel que".

Théorème IV. *Si F est une fonction récursive de deux entiers positifs, et si, pour*

[10] On peut montrer, en vue du théorème V ci-dessous que, si un ensemble infini de formules est récursivement énumérable selon ce sens-là, il est également récursivement énumérable au sens où il existe une séquence infinie récursive qui est entièrement constituée de formules de l'ensemble et contient toute formule de l'ensemble exactement une fois.

tout entier positif x il existe un entier positif y tel que $F(x, y) > 1$, alors la fonction F^*, telle que, pour tout entier positif x, $F^*(x)$ est égale au plus petit entier positif y pour lequel $F(x, y) > 1$, est récursive.

Car un ensemble d'équations récursives pour F^* consiste en les équations récursives pour F auxquelles on ajoute les équations,

$$\begin{array}{ll}
i_2(1,2) = 2, & g_2(x,1) = i_2(f_2(x,1),2), \\
i_2(S(x),2) = 1, & g_2(x,S(y)) = i_2(f_2(x,S(y)), g_2(x,y)), \\
i_2(x,1) = 3, & h_2(S(x),y) = x, \\
i_2(x,S(S(y))) = 3, & h_2(g_2(x,y),x) = j_2 g_2(x,y),y), \\
j_2(1,y) = y, & f_1(x) = h_2(1,x), \\
j_2(S(x),y) = x, &
\end{array}$$

où les variables fonctionnelles f_2 et f_1 dénotent les fonctions F et F^* respectivement, et 2 et 3 sont les abréviations pour $S(1)$ et $S(S(1))$ respectivement[11].

Théorème V. *Si F est une fonction récursive d'un entier positif, et s'il existe un nombre infini d'entiers positifs x pour lesquels $F(x) > 1$, alors la fonction F^0, telle que, pour tout entier positif n, $F^0(n)$ est égale au $n^{\text{ième}}$ entier positif x (en ordre croissant) pour lequel $F(x) > 1$, est récursive.*

Pour un ensemble d'équations récursives pour lesquelles F^0 est constitué des équations de récursion pour F auxquelles on ajoute les équations,

$$\begin{array}{l}
g_2(1,y) = g_2(f_1(S(y)), S(y)), \\
g_2(S(x),y) = y, \\
g_1(1) = k, \\
g_1(S(y)) = g_2(1, g_1(y)),
\end{array}$$

où les variables fonctionnelles g_1 et f_1 dénotent les fonctions F^0 et F respectivement, et où k est le numéral auquel correspond le plus petit entier positif x pour lequel $F(x) > 1$.[12]

[11] Lorsque ce résultat a été obtenu, S. C. Kleene a fait remarquer à l'auteur qu'il pouvait être démontré plus simplement en utilisant les méthodes de ce dernier dans *American Journal of Mathematics*, vol. 57 (1935), p. 231 *et seq.* Sa preuve sera fournie dans l'article à venir auquel il a déjà été fait référence.

[12] Cette preuve est due à Kleene.

6. Récursivité de certaines fonctions des formules.

Nous listons maintenant un certain nombre de théorèmes qui seront démontrés en détail dans un article à venir par S. C. Kleene[13] ou découlent immédiatement des considérations données là. Nous omettons les démonstrations, excepté pour de brèves indications dans quelques cas particuliers.

Notre énoncé des théorèmes et notre notation diffèrent de ceux de Kleene en ce que nous utilisons l'ensemble des entiers positifs $(1, 2, 3, \ldots)$ de la façon dont il utilise l'ensemble des entiers naturels $(0, 1, 2, \ldots)$. Cette différence est, bien sûr, non essentielle. Nous avons sélectionné ce qui, selon certains points de vue, est l'alternative la moins naturelle, dans le but de préserver le côté pratique et naturel de l'identification de la formule $\lambda ab \cdot a(b)$ avec 1 plutôt qu'avec 0.

Théorème VI. *La propriété d'un entier positif, qu'il existe une formule bien formée dont il est la représentation de Gödel est récursive.*

Théorème VII. *L'ensemble des formules bien formées est récursivement énumérable.*

Cela découle des théorèmes V et VI.

Théorème VIII. *La fonction de deux variables, dont la valeur, lorsqu'elle est prise par les formules bien formées* $\mathbf{F}$ *et* $\mathbf{X}$, *est la formule* $\{\mathbf{F}\}(\mathbf{X})$, *est récursive.*

Théorème IX. *La fonction, dont la valeur pour chacun des entiers positifs* $1, 2, 3, \ldots$ *est la formule correspondante* $1, 2, 3, \ldots$, *est récursive.*

Théorème X. *Une fonction, dont la valeur pour chacune des formules* $1, 2, 3, \ldots$ *est l'entier positif correspondant, et dont la valeur pour d'autres formules bien formées est un entier positif fixé, est récursive. Il en est de même de la fonction, dont la valeur pour chacune des formules* $1, 2, 3, \ldots$ *est l'entier positif correspondant plus un, et dont la valeur des autres formules bien formées est l'entier positif, est récursive.*

Théorème XI. *La relation de la convertibilité immédiate, entre formules bien formées, est récursive.*

---

[13] S. C. Kleene, "λ-definability and recursiveness", à paraître (résumé dans *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 41). En relation avec de nombreux théorèmes listés, voir également Kurt Gödel, *Monatshefte für Mathematik und Physik*, vol. 38 (1931), p. 181 *et seq.*, en observant que toute fonction est récursive au sens où le mot utilisé là par Gödel est également le mot récursive dans le sens présent plus général.

THÉORÈME XII. *Il est possible d'associer simultanément à toute formule bien formée une énumération des formules que l'on peut obtenir à partir d'elle par conversion, de telle manière que la fonction de deux variables, dont la valeur, prise sur une formule bien formée* $\boldsymbol{A}$ *et pour un entier positif* n*, est la* $n^{\text{ième}}$ *formule dans l'énumération des formules que l'on peut obtenir à partir de* $\boldsymbol{A}$ *par conversion, soit récursive.*

THÉORÈME XIII. *La propriété d'une formule bien formée qui est en forme normale principale est qu'elle est récursive.*

THÉORÈME XIV. *L'ensemble des formules bien formées qui sont en forme normale principale est récursivement énumérable.*

Cela découle des théorèmes V, VII, XIII.

THÉORÈME XV. *L'ensemble des formules bien formées qui ont une forme normale est récursivement énumérable*[14].

Pour les théorèmes XII et XIV cet ensemble peut être arrangé dans un tableau carré infini qui est défini récursivement (i. e. défini par une fonction récursive de deux variables). Et le processus familier par lequel ce tableau carré est réduit à une unique séquence infinie est récursif (i. e. il peut être exprimé au moyen de fonctions récursives).

THÉORÈME XVI. *Toute fonction récursive sur les entiers positifs est* λ*-définissable*[15].

THÉORÈME XVII. *Toute fonction* λ*-définissable sur les entiers positifs est récursive*[16].

Pour des fonctions d'un seul entier positif, il découle des théorèmes IX, VIII, XII, XIII, IV, X. Pour les fonctions de plus d'un entier positif, il découle par la même méthode, en utilisant une généralisation du théorème IV aux fonctions de plus de

[14] Ce théorème a d'abord été proposé par le présent auteur, avec l'esquisse de preuve indiquée ici. Les détails de sa preuve sont dus à Kleene et seront donnés par lui dans l'article à venir, "λ-definability and recursiveness".

[15] Ce théorème peut être démontré comme une application évidente des méthodes introduites par Kleene dans le *American Journal of Mathematics* (loc. cit.). Sous la forme donnée ici, il a d'abord été obtenu par Kleene. Le résultat lié avait été obtenu précédemment par J. B. Rosser qui est que, si l'on modifie la définition de *bien formé* en omettant la contrainte que M contienne x comme variable libre pour que $\lambda \mathbf{x}[M]$ soit bien formée, alors toute fonction récursive sur les entiers positifs est λ-définissable au sens modifié résultant.

[16] Ce résultat a été obtenu indépendamment par le présent auteur et par S. C. Kleene environ au même moment.

deux entiers positifs.

7. La notion de calculabilité effective.

Nous définissons maintenant la notion, déjà discutée, d'une fonction *effectivement calculable* sur les entiers positifs en l'identifiant avec la notion de fonction récursive sur les entiers positifs[17] (ou d'une fonction λ-définissable sur les entiers positifs). On pense que cette définition est justifiée par les considérations qui suivent, pour autant que des justifications positives puissent être obtenues lorsqu'on sélectionne une définition formelle pour qu'elle corresponde à une notion intuitive.

On a déjà indiqué que, pour toute fonction sur les entiers positifs qui est effectivement calculable au sens qui vient d'être défini, il existe un algorithme qui calcule ses valeurs.

Inversement, il est vrai, selon la même définition de la calculabilité effective, que toute fonction pour laquelle un algorithme existe qui calcule ses valeurs, est effectivement calculable. Par exemple, dans le cas d'une fonction F d'un seul entier positif, un algorithme consiste en une méthode par laquelle, étant donné n'importe quel entier positif n, une séquence d'expressions (dans une certaine notation) $E_{n_1}, E_{n_2}, \ldots, E_{n_{r_n}}$, peut être obtenue quand E_{n_1} est effectivement calculable quand n est donné et que sont données les expressions $E_{n_j}, j < i$; et lorsque n et toutes les expressions E_{n_i} jusqu'à et en incluant E_{n_r} sont données, le fait que l'algorithme termine devient effectivement connu et il s'agit de la valeur de $F(n)$ qui est effectivement calculable. Supposons que nous établissions un système de représentations de Gödel pour la notation utilisée dans les expressions E_{n_i}, et que nous adoptions alors la méthode de Gödel qui consiste à représenter une séquence finie d'expressions $E_{n_1}, E_{n_2}, \ldots, E_{n_i}$ par l'unique entier positif $2^{e_{n_1}} 3^{e_{n_2}} \ldots p_i^{e_{n_i}}$ où $e_{n_1}, e_{n_2}, \ldots, e_{n_i}$ sont respectivement les représentations de Gödel des $E_{n_1}, E_{n_2}, \ldots, E_{n_i}$ (en particulier on représente la séquence vide par l'entier positif 1). Alors on peut définir une fonction G de deux entiers positifs telle que, si x représente la séquence finie $E_{n_1}, E_{n_2}, \ldots, E_{n_k}$ alors $G(n, x)$ est égale à la représentation de Gödel de E_{n_i}, où $i = k+1$, ou est égal à 10 si $k = r_n$ (c'est à dire si l'algorithme s'est arrêté sur la valeur E_{n_k}), et dans tous les autres cas $G(n, x)$ est égal à 1. Et on peut définir une fonction H de deux entiers positifs, telle que la valeur de $H(n, x)$ est la même que celle de $G(n, x)$, excepté dans le cas où $G(n, x) = 10$, auquel cas $H(n, x) = F(n)$. Si on autorise l'interprétation que la nécessité de la calculabilité effective qui apparaît dans notre description d'un algorithme signifie la calculabilité effective des fonctions G et H[18], et si nous prenons la calculabilité effec-

[17] La question de la relation entre la calculabilité effective et la récursivité (à laquelle on propose de répondre ici en identifiant les deux notions) a été amenée par Gödel dans une conversation avec l'auteur. La question correspondante de la relation entre la calculabilité effective et la λ-définissabilité avait été proposée précédemment par l'auteur indépendamment.

[18] Si cette interprétation ou une autre similaire n'est pas autorisée, il est difficile de voir comment la notion d'un algorithme peut recevoir un sens quelconque.

tive de G et H comme signifiant la récursivité (λ-définissabilité), alors la récursivité (λ-définissabilité) de F en découle par un argument évident.

Supposons que l'on utilise un certain système de logique symbolique, qui contient un symbole, $=$, pour l'égalité entre entiers positifs, un symbole $\{\}()$ pour l'application d'une fonction d'un entier positif à son argument, et des expressions $1, 2, 3, \ldots$ pour représenter les entiers positifs. Les théorèmes de ce système consistent en une liste finie, ou infinie dénombrable, d'expressions, les *axiomes formels*, ainsi que de toutes les expressions que l'on peut obtenir à partir d'eux par une succession finie d'applications d'opérations choisies parmi une liste finie, ou infinie dénombrable d'opérations, les *règles procédurales*. Si le système est destiné à répondre aux besoins auxquels un tel système de logique symbolique est habituellement destiné, il est nécessaire que chaque règle procédurale soit une opération effectivement calculable, que l'ensemble complet de règles procédurales (s'il est infini) soit effectivement dénombrable, que l'ensemble complet d'axiomes formels (s'il est infini) soit effectivement dénombrable, et que la relation entre un entier positif et l'expression qui le représente puisse être effectivement déterminée. Supposons que nous interprétions cela pour signifier que selon un système de représentations de Gödel pour les expressions de la logique, chaque règle procédurale doit être une opération récursive[19], l'ensemble complet des règles procédurales doit être récursivement énumérable (au sens où il existe une fonction récursive Φ telle que $\Phi(n, x)$ est la représentation du résultat de l'application de la $n^{\text{ième}}$ règle procédurale à l'ensemble ordonné fini des formules représenté par x), l'ensemble complet des axiomes formels doit être récursivement énumérable, et la relation entre un entier positif et l'expression qui le représente doit être récursive[20]. Et appelons F une fonction d'un seul entier positif[21] *calculable dans* la logique s'il existe une expression f dans la logique telle que $\{f\}(\mu) = \nu$ est un théorème quand, et seulement quand, $F(m) = n$ est vraie, μ et ν étant les expressions qui représentent les entiers positifs m et n. Alors, puisque l'ensemble complet de théorèmes de la logique est récursivement énumérable, il découle par le théorème IV ci-dessus que toute fonction d'un seul entier positif qui est calculable dans la logique est aussi effectivement calculable (au sens de notre définition).

---

[19]En réalité, dans les systèmes connus de logique symbolique, e. g. dans ceux des *Principia Mathematica*, l'assertion plus forte, que la relation de *conséquence immédiate (unmittelbare Folge)* est récursive, est vérifiée. Cf. Gödel, loc. cit., p. 185. Dans tous les cas quand la relation de conséquence immédiate est récursive, il est possible de trouver un ensemble de règles procédurales équivalent aux règles originales, tel que chaque règle est une opération récursive (à une seule valeur), et tel que l'ensemble complet de règles est récursivement énumérable.

[20]L'auteur éprouve ici de la reconnaissance pour Gödel qui, dans ses exposés de 1934, a déjà fait référence et proposé substantiellement ces conditions, mais selon la notion plus restreinte de récursivité qu'il avait utilisée en 1931, et en utilisant la condition que la relation de conséquence immédiate soit récursive plutôt que les conditions présentes sur les règles procédurales.

[21]On se restreint pour des raisons pratiques au cas des fonctions d'un seul entier positif. L'extension aux fonctions de plusieurs entiers positifs est immédiate.

Ainsi, on montre qu'aucune définition plus générale de la calculabilité effective que celle proposée ci-dessus ne peut être obtenue par l'une ou l'autre des deux méthodes qui se suggèrent naturellement (1) par la définition d'une fonction d'être effectivement calculable s'il existe un algorithme pour le calcul de ses valeurs (2) par la définition d'une fonction F (d'un seul entier positif) d'être effectivement calculable si, pour tout entier positif m, il existe un entier positif n tel que $F(m) = n$ est un théorème prouvable.

8. Invariants de conversion.

Le problème se pose de lui-même de trouver des invariants de cette transformation de formules que nous avons appelée conversion. Les seuls invariants effectivement calculables connus à présent sont ceux qui sont immédiatement évidents (e. g. l'ensemble des variables libres contenues dans une formule). D'autres invariants d'importance existent très probablement. Mais on démontrera (dans le théorème XIX) que, selon la définition de la calculabilité effective proposée dans le § 7, *il n'existe pas d'ensemble complet d'invariants effectivement calculables de conversion* (cf. § 1).

Les résultats de Kleene (*American Journal of Mathematics*, 1935) montrent clairement que, si le problème de trouver un ensemble complet d'invariants effectivement calculables de conversion était résolu, la plupart des problèmes familiers non résolus de la théorie élémentaire des nombres devraient par conséquent aussi être résolus. Et à partir du théorème XVI ci-dessus, il s'ensuit que trouver un ensemble complet d'invariants effectivement calculables de conversion devrait impliquer la solution du problème de la décision pour tout système de logique symbolique quel qu'il soit (qui vérifierait les restrictions très générales du § 7). À la lumière de cela, il est très surprenant que le problème de trouver un tel ensemble d'invariants soit insoluble.

On doit rappeler, pourtant, que, si l'on considère seulement l'énoncé du problème (et si on ignore les choses qui peuvent être démontrées à son propos par des arguments plus ou moins longs), il s'avère être un problème de la même classe que les problèmes de théorie des nombres et de topologie auxquels il a été comparé au § 1, n'ayant aucune caractéristique frappante qui permettrait de le distinguer d'eux. La tentation est grande en raisonnant par analogie de penser qu'il se pourrait que d'autres problèmes de cette classe soient également insolubles.

LEMME. *Le problème de trouver une fonction récursive de deux formules* $\boldsymbol{A}$ *et* $\boldsymbol{B}$ *dont la valeur est 2 ou 1 selon que* $\boldsymbol{A}$ conv $\boldsymbol{B}$ *est, ou n'est pas, équivalent au problème de trouver une fonction récursive d'une seule formule* $\boldsymbol{C}$ *dont la valeur est 2 ou 1 selon que* $\boldsymbol{C}$ *a une forme normale ou pas*[22].

[22]Ces deux problèmes, dans leur forme, (1) de trouver une méthode effective de déterminer pour

Car, par le théorème X, la formule **a** (la formule **b**), qui représente l'entier positif qui est la représentation de Gödel de la formule **A** (la formule **B**), peut être exprimée comme une fonction récursive de la formule **A** (la formule **B**). De plus, par les théorèmes VI et XII, il existe une fonction récursive F de deux entiers positifs telle que, si m est la représentation de Gödel d'une formule bien formée **M**, alors $F(m, n)$ est la représentation de Gödel de la $n^{\text{ième}}$ formule dans une énumération des formules que l'on peut obtenir à partir de **M** par conversion. Et, par le théorème XVI, F est λ-définissable, par une formule $\mathfrak{f}$. Si on définit

$$\begin{aligned} Z_1 &\to \mathscr{Q}(\lambda x \cdot x(I), I), \\ Z_2 &\to \mathscr{Q}(\lambda xy \cdot S(x) - y, I), \end{aligned}$$

où $\mathscr{Q}$ est la formule définie par Kleene (*American Journal of Mathematics*, vol. 57 (1935), p. 226), alors Z_1 et Z_2 λ-définissent les fonctions d'un entier positif dont les valeurs, pour un entier positif n, sont les $n^{\text{ièmes}}$ termes respectivement des séquences infinies $1, 1, 2, 1, 2, 3, \ldots$ et $1, 2, 1, 3, 2, 1, \ldots$. Par le théorème VIII, la formule,

$$\{\lambda xy \cdot \mathfrak{p}(\lambda n \cdot \delta(\mathfrak{f}(x, Z_1(n)), \mathfrak{f}(y, Z_2(n))), 1)\}(\mathbf{a},\ \mathbf{b}),$$

où $\mathfrak{p}$ et δ sont définis comme ils le sont par Kleene (*loc. cit.*, p. 173 et p. 231), est une fonction récursive de **A** et **B**, et cette formule a une forme normale si et seulement si **A** conv **B**.

À nouveau, par le théorème X, la formule c, qui représente l'entier positif qui est la représentation de Gödel de la formule C, cpeut être exprimée comme une fonction récursive de la formule C. Par les théorèmes VI et XIII, il existe une fonction récursive G d'un entier positif telle que $G(m) = 2$ si m est la représentation de Gödel d'une formule en forme normale principale, et $G(m) = 1$ dans tous les autres cas. Et, par le théorème XVI, G est λ-définissable, par une formule $\mathfrak{g}$. Par le théorème VIII, la formule,

$$\{\lambda x \cdot \mathfrak{p}(\lambda n \cdot \mathfrak{g}(\mathfrak{f}(x, n), 1, 1))\}(c)$$

où $\mathfrak{f}$ est la formule $\mathfrak{f}$ utilisée dans le paragraphe précédent, est une fonction récursive de **C**, et cette formule peut être convertie en la formule 1 si et seulement si **C** a une forme normale.

Ainsi on a démontré qu'on peut trouver une formule **C** comme une fonction récursive des formules **A** et **B**, telle que **C** a une forme normale si et seulement si **A** conv **B**

deux formules A et B si A conv B, (2) de trouver une méthode effective de déterminer pour une formule C si elle a une forme normale, ont été proposés tous les deux par Kleene à l'auteur, au cours d'une discussion des propriétés de la $\mathfrak{p}$-fonction, aux alentours de 1932. Quelques tentatives vers la solution de (1) au moyen des invariants numériques ont été effectuées par Kleene aux environs de cette époque.

; et qu'on peut trouver une formule **A** comme fonction récursive d'une formule **C**, telle que **A** conv 1 si et seulement si **C** a une forme normale. De cela découle le lemme.

Théorème XVIII. *Il n'y a pas de fonction récursive d'une formule **C**, dont la valeur est 2 ou 1 selon que **C** a une forme normale ou pas.*

C'est-à-dire que la propriété qu'une formule bien formée ait une forme normale n'est pas récursive.

Car supposons le contraire.

Alors il existe une fonction récursive H d'un seul entier positif telle que $H(m) = 2$ si m est la représentation de Gödel d'une formule qui a une forme normale, et $H(m) = 1$ dans tous les autres cas. Et, par le théorème XVI, H est λ-définissable par une formule $\mathfrak{h}$.

Par le théorème XV, il existe une énumération des formules bien formées qui ont une forme normale, et une fonction récursive A d'un seul entier positif telle que $A(n)$ est la représentation de Gödel de la $n^{\text{ième}}$ formule dans cette énumération. Et, par le théorème XVI, A est λ-définissable, par une formule $\mathfrak{a}$.

Par les théorèmes VI et VIII, il existe une fonction récursive B de deux entiers positifs telle que, si m et n sont les représentations de Gödel des formules bien formées **M** et **N**, alors $B(m, n)$ est la représentation de Gödel de $\{\mathbf{M}\}(\mathbf{N})$. Et, par le théorème XVI, B est λ-définissable, par une formule $\mathfrak{b}$.

Par les théorèmes VI et X, il existe une fonction récursive C d'un seul entier positif telle que, si m est la représentation de Gödel d'une des formules $1, 2, 3, \ldots$, alors $C(m)$ est l'entier positif correspondant plus un, et dans tous les autres cas $C(m) = 1$. Et, par le théorème XVI, C est λ-définissable, par une formule $\mathfrak{c}$.

Par le théorème IX il existe une fonction récursive Z^{-1} d'un seul entier positif, dont la valeur pour chacun des entiers positifs $1, 2, 3, \ldots$ est la représentation de Gödel des formules correspondantes $1, 2, 3, \ldots$. Et, par le théorème XVI, Z^{-1} est λ-définissable, par une formule $\mathfrak{z}$.

Soit $\mathfrak{f}$ et $\mathfrak{g}$ les formules $\mathfrak{f}$ et $\mathfrak{g}$ utilisées dans la preuve du lemme. Par Kleene 15 III Cor. (*loc. cit.*, p. 220), on peut trouver une formule $\mathfrak{d}$ telle que,

$$\mathfrak{d}(1) \text{ conv } \lambda x \cdot x(1)$$
$$\mathfrak{d}(2) \text{ conv } \lambda u \cdot \mathfrak{c}(\mathfrak{f}(u, \mathfrak{p}(\lambda m \cdot \mathfrak{g}(\mathfrak{f}(u, m)), 1))).$$

On définit,

$$\mathfrak{e} \to \lambda n \cdot \mathfrak{d}(\mathfrak{h}(\mathfrak{b}(\mathfrak{a}(n), \mathfrak{z}(n))), \mathfrak{b}(\mathfrak{a}(n), \mathfrak{z}(n))).$$

Alors si $\mathbf{n}$ est une des formules $1, 2, 3, \ldots, \mathfrak{e}(\mathbf{n})$ peut être convertie en l'une des formules $1, 2, 3, \ldots$ selon les règles suivantes : (1) si $\mathfrak{b}(\mathfrak{a}(\mathbf{n}), \mathfrak{z}(\mathbf{n}))$ conv une formule qui est la représentation de Gödel d'une formule qui n'a pas de forme normale, $\mathfrak{e}(\mathbf{n})$ conv 1, (2) si $\mathfrak{b}(\mathfrak{a}(\mathbf{n}), \mathfrak{z}(\mathbf{n}))$ conv une formule qui est la représentation de Gödel d'une formule qui a une forme normale principale qui n'est aucune des formules $1, 2, 3, \ldots, \mathfrak{e}(\mathbf{n})$ conv 1, (3) si $\mathfrak{b}(\mathfrak{a}(\mathbf{n}), \mathfrak{z}(\mathbf{n}))$ conv une formule qui est la représentation de Gödel d'une formule qui a une forme normale principale qui est une des formules $1, 2, 3, , \ldots, \mathfrak{e}(n)$ conv la formule suivante dans la liste $1, 2, 3, \ldots$.

Par le théorème III, puisque $\mathfrak{e}(1)$ a une forme normale, la formule $\mathfrak{e}$ a une forme normale. Soit $\mathfrak{E}$ la formule qui est la représentation de Gödel de $\mathfrak{e}$. Alors, si $\mathbf{n}$ est n'importe laquelle des formules $1, 2, 3, \ldots$, $\mathfrak{E}$ ne peut être convertie en la formule $\mathfrak{a}(\mathbf{n})$, parce que $\mathfrak{b}(\mathfrak{E}, \mathfrak{z}(\mathbf{n}))$ peut, par la définition de $\mathfrak{b}$, être convertie en la formule qui est la représentation de Gödel de $\mathfrak{e}(\mathbf{n})$, alors que $\mathfrak{b}(\mathfrak{a}(\mathbf{n}), \mathfrak{z}(\mathbf{n}))$ peut, par le paragraphe précédent, être convertie en la formule qui est la représentation de Gödel d'une formule qui ne peut définitivement pas être convertie en $\mathfrak{e}(\mathbf{n})$ (théorème II). Mais, par notre définition de $\mathfrak{a}$, il doit être vrai d'une des formules $\mathbf{n}$ dans la liste $1, 2, 3, \ldots$ que $\mathfrak{a}(\mathbf{n})$ conv $\mathfrak{E}$.

Ainsi, puisque notre supposition du contraire a amené à une contradiction, le théorème est vrai.

Pour présenter les idées essentielles sans aucune tentative d'énoncé exact, la preuve précédente peut être esquissée comme suit. Nous devons obtenir une contradiction de la supposition qu'on peut effectivement déterminer de toute formule bien formée si elle a ou n'a pas une forme normale. Si la supposition est juste, on peut effectivement déterminer pour toute formule bien formée si elle peut ou ne peut pas être convertie en l'une des formules $1, 2, 3, \ldots$; car, étant donnée une formule bien formée $\mathbf{R}$, on peut d'abord déterminer si elle a ou pas une forme normale, et si elle en a une, on peut obtenir la forme principale en énumérant les formules dans lesquelles $\mathbf{R}$ peut être convertie (théorème XII) et en prenant la première formule en forme normale principale dans l'énumération, on peut alors déterminer si la forme normale principale est l'une des formules $1, 2, 3, \ldots$. Dénotons par $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \ldots$ une énumération effective des formules bien formées qui ont une forme normale (théorème XV). Appelons E une fonction d'un seul entier positif, définie selon la règle que, quand $\mathbf{m}$ et $\mathbf{n}$ sont les formules qui représentent les entiers positifs m et n respectivement, $E(n) = 1$ si $\{\mathbf{A}_n\}(\mathbf{n})$ ne peut être convertie en l'une des formules $1, 2, 3, \ldots$ et $E(n) = m + 1$ si $\{\mathbf{A}\}(\mathbf{n})$ conv $\mathbf{m}$ et $\mathbf{m}$ est l'une des formules $1, 2, 3, \ldots$. La fonction E est effectivement calculable et est par conséquent λ-définissable, par une formule $\mathfrak{e}$. La formule $\mathfrak{e}$ a une forme normale, puisque $\mathfrak{e}(1)$ a une forme normale. Mais $\mathfrak{e}$ n'est pas n'importe laquelle des formules $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \ldots$, parce que, pour tout n, $\mathfrak{e}(\mathbf{n})$ est une formule qui ne peut être convertie en $\{\mathbf{A}_n\}(\mathbf{n})$. Et cela contredit la propriété de l'énumération $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \ldots$ qu'elle contient toutes les formules bien formées qui ont une forme normale.

Corollaire 1. *L'ensemble des formules bien formées qui n'ont pas de forme normale n'est pas récursivement énumérable*[23].

En effet, pour esquisser l'argument, l'ensemble des formules bien formées qui ont une forme normale est récursivement énumérable, par le théorème XV. Si l'ensemble de celles qui n'ont pas de forme normale était également récursivement énumérable, il serait possible de dire effectivement pour toute formule bien formée si elle a une forme normale, par le processus de recherche à travers les deux énumérations jusqu'à ce que la forme normale soit trouvée, dans l'une ou l'autre énumération. Ceci, pourtant, est contraire au théorème XVIII.

Ce corollaire nous donne un exemple d'un ensemble effectivement énumérable (l'ensemble des formules bien formées) qui est divisé en deux sous-ensembles disjoints dont l'un est effectivement énumérable et l'autre ne l'est pas. En effet, au vu de la difficulté d'attacher un quelconque sens raisonnable à l'assertion qu'un ensemble est énumerable mais non effectivement énumérable, il est permis d'aller une étape plus loin en disant que ceci est un exemple d'un ensemble énumérable qui est divisé en deux ensembles disjoints dont l'un est énumérable et l'autre est non énumérable[24].

Corollaire 2. *Soit une fonction F d'un seul entier positif définie par la règle que $F(n)$ doit être égal à 2 ou 1 selon que n est ou n'est pas la représentation de Gödel d'une formule qui a une forme normale. Alors F (si l'on peut admettre cette définition comme valide) est un exemple de fonction non récursive sur les entiers positifs*[25].

Cela découle immédiatement du théorème XVIII.

[23]Ce corollaire a été proposé par J. B. Rosser.
L'esquisse de la preuve est donnée ici car elle est sujette à l'objection, récemment rappelée à l'attention de l'auteur par Paul Bernays, qu'elle requiert ostensiblement un usage non constructif du principe du tiers exclus. On rencontre cette objection en révisant la preuve, la preuve révisée consistant à prendre toute énumération récursive des formules qui n'ont pas de forme normale et en montrant que cette énumération n'est pas une énumération complète de telles formules, en construisant une formule $\mathfrak{e}(\mathbf{n})$ telle que (1) la supposition que $\mathfrak{e}(\mathbf{n})$ fait partie de l'énumération amène à une contradiction (2) la supposition que $\mathfrak{e}(\mathbf{n})$ a une forme normale amène à une contradiction.

[24]Cf. les remarques de l'auteur dans *The American Mathematical Monthly*, vol. 41 (1934), p. 356-361.

[25]D'autres exemples de fonctions non récursives ont depuis été obtenus par S. C. Kleene dans une relation différente. Voir son article à venir, “General recursive functions of natural numbers.”

Considérons la séquence infinie d'entiers positifs, $F(1), F(2), F(3), \ldots$. Il est impossible de spécifier effectivement une méthode par laquelle, n étant donné, le $n^{\text{ième}}$ terme de cette séquence pourrait être calculé. Mais il est également impossible de sélectionner un terme particulier de cette séquence et de prouver à propos de ce terme que sa valeur ne pourrait pas être calculée (à cause du théorème évident que si cette séquence a des termes dont les valeurs ne peuvent pas être calculées, alors la valeur de chacun de ces termes est 1). Par conséquent il est naturel de poser la question de savoir si, malgré le fait qu'il n'y ait pas de méthode pour calculer effectivement les termes de cette séquence, il pourrait ne pas être vrai de chaque terme pris individuellement qu'il existerait une méthode pour calculer sa valeur. À cette question, la meilleure réponse est que la question elle-même n'a pas de sens, sur la base du fait que le quantificateur universel qu'elle contient est destiné à exprimer une succession simple d'accidents plutôt que quoi que ce soit de systématique.

Il y a par conséquent une place pour le doute par rapport au fait que l'on puisse donner un sens raisonnable à l'assertion que la fonction F existe.

Théorème XIX. *Il n'y a pas de fonction récursive de deux formules* $\boldsymbol{A}$ *et* $\boldsymbol{B}$, *dont la valeur est 2 ou 1 selon que* $\boldsymbol{A}$ *conv* $\boldsymbol{B}$ *ou pas.*

Cela découle immédiatement du théorème XVIII et du lemme le précédant.

Comme corollaire du théorème XIX, il découle que le problème de la décision est insoluble dans le cas de n'importe quel système de logique symbolique qui est ω-consistant (ω-widerspruchsfrei) dans le sens de Gödel (*loc. cit.*, p. 187) et est assez fort pour autoriser certaines méthodes comparativement simples de définition et preuve. Car dans n'importe quel tel système, on pourra exprimer à propos de deux entiers positifs a et b la proposition que ce sont des représentations de Gödel de deux formules **A** et **B** telles que **A** peut être immédiatement convertie en **B**. Par conséquent, en utilisant le fait qu'une conversion est une séquence finie de conversions immédiates, on pourra exprimer la proposition $\Phi(a, b)$ que a et b sont des représentations de Gödel des formules **A** et **B** telles que **A** conv **B**. De plus, si **A** conv **B**, et a et b sont les représentations de Gödel de A et B respectivement, la proposition $\Phi(a, b)$ sera démontrable dans le système, par une preuve qui consiste à exhiber, selon les représentations de Gödel, une séquence finie particulière de conversions immédiates, amenant de **A** à **B** ; et si **A** n'est pas convertible en **B**, la ω-consistance du système signifie que $\Phi(a, b)$ ne sera pas démontrable. Si le problème de la décision pour le système était résolu, il y aurait un moyen de déterminer effectivement pour toute proposition $\Phi(a, b)$ si elle est démontrable, et par conséquent un moyen de déterminer effectivement pour toute paire de formules **A** et **B** si **A** conv **B**, contrairement au théorème XIX.

En particulier, si le système des *Principia Mathematica* est ω-consistant, son problème de la décision est insoluble.

Princeton University

Une note sur le problème de décision.

Alonzo Church.

Dans un article récent[26] l'auteur a proposé la définition de l'expression communément utilisée "effectivement calculable" et a montré sur la base de cette définition que le cas général du problème de la décision est insoluble dans tout système de logique symbolique qui est pertinent pour une certaine portion de l'arithmétique et qui est ω-consistant. Le but de la présente note est de présenter une extension de ce résultat au calcul de fonctions plus restreint de Hilbert et Ackermann[27].

Dans l'article cité de l'auteur, il est indiqué qu'on peut associer récursivement à toute formule bien formée[28] une énumération récursive des formules en lesquelles elle peut être convertie[3]. Cela signifie l'existence d'une fonction définie récursivement a de deux entiers positifs telle que, si y est la représentation de Gödel d'une formule bien formée Y alors $a(x, y)$ est la représentation de Gödel de la $x^{\text{ième}}$ formule dans l'énumération des formules en lesquelles Y peut être convertie.

Considérons le système L de logique symbolique qui naît du calcul de fonctions en lui ajoutant, comme symbole additionnel, un symbole 1 pour le nombre 1 (regardé comme un individu), un symbole $=$ pour la fonction propositionnelle $=$ (égalité entre individus), un symbole s pour la fonction arithmétique $x + 1$, un symbole a pour la fonction arithmétique a décrite dans le paragraphe précédent, et les symboles $b_1, b_2, \ldots, b_k$ pour les fonctions arithmétiques auxiliaires qui sont utilisées dans la définition récursive de a ; et les axiomes additionnels, les équations récursives pour les fonctions $a, b_1, b_2, \ldots, b_k$ (exprimées comme des variables libres individuelles, la classe des individus étant prise comme égale à la classe des entiers positifs), et deux axiomes d'égalité, $x = x$, et $x = y \to [F(x) \to F(y)]$.

La consistance du système L découle des méthodes de preuves existentielles[29]. La ω-consistance de L est un sujet plus difficile, mais pour notre but présent, la pro-

Reçu le 15 avril 1936.
Référence : The Journal of Symbolic Logic, Volume 1, Number 1, March 1936, p. 40-41
Transcription / traduction Denise Vella-Chemla, août 2022.

[26] *An unsolvable problem of elementary number theory, American journal of mathematics,* vol. 58 (1936).

[27] *Grundzüge der theoretischen Logik,* Berlin 1928.

[28] Les définitions des expressions *formules bien formées* et *convertible* sont données dans l'article cité.

[29] Cf. Wilhelm Ackermann, *Begründung des "tertium non datur" mittels der Hilbertschen Theorie der Widerspruchsfreiheit, Mathematische Annalen*, vol. 93 (1924-5), p. 1-136; J. v. Neumann, *Zur Hilbertschen Beweistheorie, Mathematische Zeitschrift*, vol. 26 (1927), p. 1-46; Jacques Herbrand, *Sur la non-contradiction de l'arithmétique, Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 166 (1931-2), p. 1-8.

priété plus faible suivante de L est suffisante : *si P ne contient pas de quantificateurs et $(Ex)P$ est prouvable dans L alors les $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3, \ldots$ ne sont pas tous prouvables dans L (où les $P_1, P_2, P_3, \ldots$ sont respectivement les résultats du remplacement par* $1, 2, 3, \ldots$ *des x dans P).* Cette propriété a été démontrée par Paul Bernays[30] pour n'importe quel système appartenant à une classe de systèmes dont L fait partie. Donc, par l'argument du papier cité de l'auteur il découle que :

Le cas général du problème de la décision[31] *du système L est insoluble.*

Maintenant par un dispositif qui est bien connu, il est possible de remplacer le système L par un système équivalent L' qui ne contient aucun symbole pour les fonctions arithmétiques. Cela est fait en remplaçant $s, a, b_1, b_2, \ldots, b_k$ par les symboles $S, A, B_1, B_2, \ldots, B_k$ pour les fonctions propositionnelles $x = s(y), x = a(y, z)$, etc., et en faisant les modifications correspondantes dans les axiomes formels de L.

Le système L' diffère du calcul des fonctions par les termes indéfinis supplémentaires $1, =, S, A, B_1, B_2, \ldots, B_k$ et un certain nombre d'expressions formelles introduites comme axiomes supplémentaires. Soit T le produit logique de ces axiomes supplémentaires, soit z une variable individuelle qui n'apparaît dans aucun des axiomes formels de L', et soit $G_1, G_2, \ldots, G_{k+s}$ des variables de fonction propositionnelle qui n'apparaissent dans aucun des axiomes formels de L'. Soit U le résultat de la substitution dans T des symboles $1, =, S, A, B_1, B_2, \ldots, B_k$ par les symboles $z, G_1, G_2, \ldots, G_{k+3}$ respectivement.

Soit Q une expression formelle dans la notation de L'. On peut supposer sans perte de généralité que Q ne contient aucune des variables $z, G_1, G_2, , G_{k+3}$. Soit R le résultat de la substitution dans Q des symboles $1, =, S, A, B_1, B_2, \ldots, B_k$ par les symboles $s, G_1, G_2, \ldots, G_{k+3}$ respectivement. Alors Q est démontrable dans L' si et seulement si $U \rightarrow R$ est démontrable dans le calcul fonctionnel.

Ainsi une solution du cas général du problème de la décision du calcul fonctionnel

[30] Dans des exposés à Princeton, N. J., 1936. Les méthodes utilisées sont celles des preuves de consistance existantes.

[31] Ici par problème de la décision d'un système de logique symbolique, on entend le problème de trouver une méthode effective par laquelle, étant donnée n'importe quelle expression Q dans la notation du système, on peut déterminer si Q est démontrable dans ce système ou pas. Hilbert et Ackermann (loc. cit.) comprennent le problème de la décision du calcul des fonctions en un sens légèrement différent. Mais les deux sens sont équivalents au vu de la preuve par Kurt Gödel de la complétude du calcul fonctionnel (*Monatshefte für Mathematik und Physik*, vol. 37 (1930), p. 349-360).

devrait amener à une solution du cas général du problème de la décision de L' et donc de L. Par conséquent :

Le cas général du problème de la décision du calcul fonctionnel est insoluble[32]

Princeton University
Princeton N. J.

[32] De ceci découle de plus l'insolubilité du cas particulier du problème de la décision du calcul fonctionnel qui concerne la prouvabilité des expressions de la forme $(Ex_1)(Ex_2)(Ex_3)(y_1)(y_2)\dots(y_n)P$, où P ne contient aucun quantificateur et aucune variable individuelle exceptés $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, \dots, y_n$. Cf. Kurt Gödel, *Zum Entscheidungsproblem des logischen Funktionenkalküls, Monatshefte für Mathematik und Physik*, vol. 40 (1933), p. 433-443.