Espaces vectoriels topologiques p-adiques et théorie de l'indice

Gilles Christol et Zoghman Mebkhout

Résumé. Ce rapport fait partie d'un travail développé à partir des idées de Robba dont le but ultime serait d'obtenir un théorème de finitude général pour la cohomologie p-adique. La question de base est de prouver l'existence d'indice pour les opérateurs différentiels ordinaires. Bien que cela soit apparemment de nature algébrique, les difficultés de la théorie de l'indice sont principalement analytiques. En particulier, cela implique une grosse part d'espaces vectoriels topologiques, bien au-delà de la théorie des espaces de Banach. Le but de ce rapport est d'illustrer ce fait.

I. Indice et dualité.

Soit k un corps complet ultramétrique, par exemple $k = \mathbb{C}_p$, soit E un espace k-vectoriel et $u : E \to E$ une application linéaire.

Définition. L'application u est dite avoir un *indice* si à la fois $\ker u$ et $\operatorname{coker} u = E/\operatorname{Im} u$ sont de dimensions finies. S'il en est ainsi, notons :

$$\chi(u) = \chi(u, E) = \dim(\ker u) - \dim(\operatorname{coker} u).$$

Soit E un espace k-vectoriel topologique (localement convexe), soit u continue et soit E' le dual (fort) de E.

Question. Si u a un indice, est-ce que ${}^t u$ en a un ? Si oui, comparer $\chi(u)$ et $\chi({}^t u)$.

Les faits suivants sont faciles à vérifier :

- $\ker({}^t u) = \operatorname{Im}(u)^\perp$ est isomorphe au dual de l'espace $\operatorname{coker}(u)$ muni de la topologie quotient.
- L'appariement $(\overline{x}, y) \overset{def}{=} (x, y)$ donne une application canonique $\operatorname{coker}({}^t u) \overrightarrow{i} (\ker u)'$.

Pour aller plus loin, on a besoin d'une définition :

Définition. L'espace E est dit avoir *la propriété de Banach* si à la fois les conditions u continue et $\operatorname{coker} u$ de dimension finie impliquent que $\operatorname{Im} u$ est fermé.

Par exemple, comme cela a déjà été noté par L. Schwartz, tout espace de Banach a la propriété de Banach (c'est une conséquence évidente du théorème de l'application ouverte appliqué à l'application $u \oplus Id : E \times F \to E$ pour un complémentaire F de $\operatorname{Im} u$ algébrique mais a priori non topologique).

Proposition 1 : *Si E a la propriété de Banach et si u a un indice alors* $\dim(\ker({}^t u) = dim(\operatorname{coker} u)$ *et* $\dim(\operatorname{coker} {}^t u) \leq \dim(\ker u)$. *En d'autres termes, ${}^t u$ a un indice et $\chi(u) + \chi({}^t u) \leq 0$.*

Preuve : Par hypothèse, $\operatorname{Im} u$ est fermé alors

Référence : Ann. Math. Blaise Pascal, Vol. 2, N° 1, 1995, p.93-98.
http://www.numdam.org/item?id=AMBP$_1$995$_{2193_0}$.
Traduction : Denise Vella-Chemla, 20.4.2022.

1) coker u est de Hausdorff et par conséquent :

$$\dim(\ker {}^t u) = \dim(\text{coker } u)' = \dim(\text{coker } u)$$

2) L'application $\text{coker}({}^t u) \overrightarrow{i} (\ker u)'$ est injective. Maintenant, soit x dans E. Si son image $\overline{x}$ dans coker ${}^t u$ appartient à ker i, on a $(x, y) = 0$ pour y dans ker u. Par conséquent, on peut définir z in $(\text{Im } u)'$ par $(z, u(y)) = (x, y)$. Comme Im u est fermé, z est la restriction d'un certain élément de E' aussi dénoté z. Alors on a $x = {}^t u(z)$ et $\overline{x} = 0$.

Remarque. Si le théorème de Hahn-Banach était vrai pour les espaces k-vectoriels, on pourrait aussi démontrer que i est sur[1]. Pour passer outre cette difficulté, des conditions supplémentaires sont nécessaires.

Corollaire 2 : Si E est réflexive (E et E'' topologiquement isomorphes) et à la fois E et E' ont la propriété de Banach alors u a un indice si et seulement si ${}^t u$ a un indice. Dans ce cas, $\chi(u) + \chi({}^t u) = 0$.

Preuve : Par la proposition 1 appliquée à u et ${}^t u$

$$\dim(\ker {}^t u) = \dim(\text{coker } u),$$

$$\dim(\text{coker } {}^t u) = \dim(\ker {}^{tt} u) = \dim(\ker u).$$

II. Espaces.

Pour chaque $r > 0$, soit $H(r)$ l'anneau des séries de puissances $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ de $k[[x]]$ qui convergent dans le disque "fermé" $|x| \leq r$ (d'une extension suffisamment grande de k). L'espace k-vectoriel $H(r)$ est un espace de Banach pour la norme habituelle $\|f\|_r = \max_{|x| \leq r} |f(x)|$.

Soit $K(r)$ l'anneau des séries de Laurent $\sum_{n<0} a_n x^n$ de $\frac{1}{x} k[[\frac{1}{x}]]$ qui convergent dans le disque "fermé" centré à l'infini $|x| \geq r$ et qui sont nulles à l'infini. L'espace k-vectoriel $K(r)$ est un espace de Banach pour la norme $\|f\| = \max_{|x| \geq r} |f(x)|$.

Soit $\mathcal{A}(r)$ l'anneau des séries de puissances $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ de $k[[x]]$ qui convergent dans le disque "ouvert" $|x| < r$. La relation :

$$\mathcal{A}(r) = \bigcap_{s<r} H(s) = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} H(r - \frac{1}{n})$$

montre que $\mathcal{A}(r)$ est une limite inverse dénombrable d'espaces de Banach. C'est alors un espace de Frechet quand on le munit de la topologie de limite inverse. Ceci est la topologie "habituelle" définie par la famille de normes $\{\|.\|s\}_{s<r}$ et nous l'utiliserons.

[1] ???? traduction : i is onto.

Soit $\mathcal{H}^\dagger(r)$ l'anneau des séries de Laurent $f = \sum_{n<0} a_n x^n$ of $\frac{1}{x}k[[\frac{1}{x}]]$ qui convergent dans le disque $s \leq |x|$ pour un certain $s < r$ (dépendant de f). La relation :

$$\mathcal{H}^\dagger(r) = \bigcup_{s<r} K(s) = \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} K(r - \frac{1}{n})$$

montre que $\mathcal{H}^\dagger(r)$ est une limite dénombrable directe d'espaces de Banach. Nous la munissons d'une topologie de limite directe (localement convexe). Maintenant, par définition de la topologie de limite directe, l'encastrement canonique $\mathcal{H}^\dagger(r) \to H(r)$ est continu. Par conséquent, $\mathcal{H}^\dagger(r)$ est une limite dénombrable directe de Hausdorff d'espaces de Banach, notamment un espace $\mathcal{LF}$ selon la terminologie de Grothendieck [4].

Soit $\mathcal{R}(r)$ le corps des séries de Laurent $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n x^n$ de $k[[x, \frac{1}{x}]]$ qui convergent dans l'anneau $s \leq |x| < r$ pour un certain $s < r$ (dépendant de f). La décomposition de Mittag-Leffler

$$\mathcal{R}(r) = \mathcal{H}^\dagger(r) \oplus \mathcal{A}(r)$$

définit la topologie sur $\mathcal{R}(r)$ qui est alors un espace $\mathcal{LF}$.

Théorème 3 [5] : *L'espace $\mathcal{A}(r)$ est réflexif et son dual est $\mathcal{H}^\dagger(r)$ pour l'appariement*

$$(\textstyle\sum_{n\geq 0} a_n x^n, \sum_{n\geq 0} b_n x^{-n-1}) = \sum_{n\geq 0} a_n b_n.$$

Ainsi $\mathcal{H}^\dagger(r)$ est à la fois un espace $\mathcal{LF}$ et un espace $\mathcal{DF}$ (dual de Frechet [4]). De plus, l'espace $\mathcal{R}(r)$ est son propre dual.

Pour conclure cette section, nous rappelons deux résultats "classiques" :

Théorème 4 : *Tout espace de Frechet a la propriété de Banach.*

Théorème 5 [4, page 200] : *Tout espace $\mathcal{LF}$ a la propriété de Banach.*

En fait, le second est écrit pour les espaces réels ou complexes. Il est possible mais plutôt fastidieux de vérifier que Hahn-Banach n'est pas utilisé dans cette longue démonstration. Saisissons cette opportunité pour exprimer le souhait que ce théorème de base et les théorèmes qui lui sont reliés prennent leur juste place dans la future prise en compte des espaces topologiques sur un corps ultramétrique.

III. Opérateurs.

Soit $\mathcal{D}$ l'anneau non-commutatif $K[x, \frac{d}{dx}]$ des opérateurs différentiels (linéaires) à coefficients polynomiaux. Les espaces $\mathcal{A}(r), \mathcal{H}^\dagger(r)$ et $\mathcal{R}(r)$ sont stables par dérivation. Puisque $\mathcal{A}(r)$ et $\mathcal{R}(r)$ contiennent $K[x]$, ce sont des $\mathcal{D}$-modules pour la multiplication scalaire $P\,f = P(f)$. Pour définir une structure de $\mathcal{D}$-module sur $\mathcal{H}^\dagger(r)$ on utilise la séquence exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}(r) \longrightarrow \mathcal{R}(r) \longrightarrow \mathcal{H}^\dagger(r) \longrightarrow 0 \qquad (**)$$

Pour f dans $\mathcal{H}^\dagger(r)$ et P in $\mathcal{D}$, on définit la multiplication scalaire par $P\,f = \gamma(P(f))$. Alors (**) devient une séquence exacte de $\mathcal{D}$-modules.

Tout opérateur différentiel P agit continûment sur les espaces de Banach $H(r)$ et $K(r)$. Par conséquent, il agit continûment sur $\mathcal{A}(r)$ et $\mathcal{R}(r)$ et alors sur $\mathcal{H}^\dagger(r)$.

Faits de base : Soit $P = \sum_{i=0}^{d} a_i(\frac{d}{dx})^i$ un opérateur différentiel de $\mathcal{D}$. L'assertion suivante est aisée à vérifier :

A) $\ker(P, \mathcal{A}(r)), \ker(P, \mathcal{R}(r))$ et $\ker(P, \mathcal{H}^\dagger(r))$ sont de dimensions finies et leurs dimensions sont bornées par $c(P) = d + \max_i \deg(a_i)$

B) On a ${}^tP = \sum_{i=0}^{d}(-\frac{d}{dz})^i a_i$ pour les trois dualités que nous avons définies (utiliser la règle de Leibniz pour réarranger les termes).

Maintenant le résultat suivant est un cas particulier du corollaire 2.

Corollaire 6 : *Un opérateur différentiel P a un indice dans $\mathcal{A}(r)$ si et seulement si l'opérateur différentiel ${}^tP$ a un indice dans $\mathcal{H}^\dagger(r)$). S'il en est ainsi, $\chi(P, \mathcal{A}(r)) + \chi({}^tP, \mathcal{H}^\dagger(r)) = 0$.*

Si l'on est seulement intéressé par l'existence de l'indice, on peut travailler sur $\mathbb{R}$ comme cela est montré par le résultat suivant :

Proposition 7 : *Si un opérateur différentiel P a un indice dans $\mathcal{R}(r)$ alors il a un indice à la fois dans $\mathcal{A}(r)$ et dans $\mathcal{H}^\dagger(r)$ et on a :*

$$\chi(P, \mathcal{R}(r)) = \chi(P, \mathcal{A}(r)) + \chi(P, \mathcal{H}^\dagger(r)) = \chi(P, \mathcal{A}(r)) - \chi({}^tP, \mathcal{A}(r))$$

Preuve : La séquence exacte courte (**) donne naissance à une séquence exacte longue :

$$0 \longrightarrow \underline{\ker(P, \mathcal{A}(r))} \longrightarrow \underline{\ker(P, \mathcal{R}(r))} \longrightarrow \underline{\ker(P, \mathcal{H}^\dagger(r)} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \operatorname{coker}(P, \mathcal{A}(r)) \longrightarrow \underline{\operatorname{coker}(P, \mathcal{R}(r))} \longrightarrow \operatorname{coker}(P, \mathcal{H}^\dagger(r)) \longrightarrow 0$$

où! les espaces soulignés sont de dimensions finies par hypothèse ou par l'assertion A). Alors les deux espaces restant sont aussi de dimensions finies.

IV. Les théorèmes.

Nous nous intéressons maintenant à la manière dont l'indice varie en fonction de r.

Théorème 8 : *Soit r_n une séquence grossissant avec pour limite r et soit P un opérateur différentiel. Si P a un indice dans $\mathcal{H}^\dagger(r_n)$ pour tout n alors il a un indice dans $\mathcal{H}^\dagger(r)$ et $\chi(P, \mathcal{H}^\dagger(r)) = \lim_{n\to\infty}\chi(P, H^\dagger(r_n))$ (les indices étant entiers, cela signifie que $\chi(P, \mathcal{H}^\dagger(r)) = \chi(P, \mathcal{H}^\dagger(r_n)$ pour n suffisamment grand).*

Preuve : (voir [1]). Comme $r_n \leq r_{n+1}$, l'injection canonique $\mathcal{H}^\dagger(r_n) \to \mathcal{H}^\dagger(r_{n+1})$ a une image dense. Alors l'application coker $(P, \mathcal{H}(r_n)) \to \text{coker}(P, \mathcal{H}(r_{n+1}))$, entre espaces de dimensions de Hausdorff finies, s'envoie donc sur une image dense. Par conséquent la séquence $\dim(\text{coker}(P, \mathcal{H}(r_n))$ est décroissante et la séquence $\dim(\text{coker}(P, \mathcal{H}^\dagger(r_n))$ est croissante et bornée par l'assertion A). Par conséquent les deux sont constantes pour n suffisamment grand. Pour conclure, il suffit de dire que $\mathcal{H}^\dagger(r) = \varinjlim \mathcal{H}^\dagger(r_n)$ et que $\varinjlim$ est un foncteur exact.

Corollaire 9 : *Soit r_n une séquence croissante de limite r et soit P un opérateur différentiel. Si P a un indice dans $\mathcal{A}(r_n)$ pour tout n alors il a un indice dans $\mathcal{A}(r)$ et $\chi(P, \mathcal{A}(r)) = \lim_{n\to\infty} \chi(P, \mathcal{A}(r_n))$.*

Preuve : par dualité (voir [1]).

Remarque : Il y a deux obstructions pour obtenir une preuve directe du corollaire 9. La première est que $\varprojlim$ n'est pas un foncteur exact. On peut passer outre au moyen d'une version sophistiquée de la condition de Mittag-Leffler due à Grothendieck ([3], III-0-13.2.4). La seconde obstruction qui est plus profonde est que la séquence $\dim(\text{coker}(P, \mathcal{A}(r_n))$ n'a a priori pas de raison d'être bornée.

Nous expliquerons ailleurs [2] comment définir, pour tout r, "des exposants p-adiques pour le rayon r" de l'opérateur différentiel P. Cette définition est beaucoup trop longue pour être donnée ici. Alors il sera possible de prouver le résultat très profond suivant conjecturé par Robba [6] :

Théorème 10 [1,2] : *Si les exposants p-adiques pour le rayon r de P ne sont pas Liouville et n'ont pas des différences qui sont Liouville, alors*

1) *P a un indice dans $\mathcal{A}(r)$.*

2) *$\chi(P, \mathcal{A}(r)) = \chi({}^tP, \mathcal{A}(r))$, et donc $\chi(P, \mathcal{R}(r)) = 0$.*

Bibliographie

[1] G. Christol, Z. Mebkhout : Sur le théorème de l'indice des équations différentielles p-adiques I, Ann. Inst. Fourier, 43 (1993) 1545-1574.

[2] G. Christol, Z. Mebkhout : Sur le théorème de l'indice des équations différentielles p-adiques II, (en préparation).

[3] A. Grothendieck, J. Dieudonné : Éléments de Géométrie Algébrique, Publ. Math. IHES 11 (1961).

[4] A. Grothendieck : Espaces vectoriels topologiques, Sao Paulo (1954).

[5] Y. Morita, W. Schikhof : Duality of projective limit spaces and inductive limit spaces over non spherical complete field, Tohoku Math. J. 38 (1986) 387-397.

[6] P. Robba : Conjectures sur les équations différentielles p-adiques linéaires, G.E.A.U. 12ème année (1984-85) n° 2, 8 pages.

Gilles CHRISTOL
Equipe d'Arithmétique
Université PARIS 6
4 place Jussieu
F-75252 Paris Cedex 5, FRANCE

Zoghman MEBKHOUT
Mathématiques
Université PARIS 7
2 place Jussieu
F-75251 Paris Cedex 5 FRANCE