

Résumé

Des formules explicites sont obtenues pour une famille d'applications continues des nombres p -adiques $\mathbf{Q}_p$ et des solénoïdes $\mathbf{T}_p$ dans le plan complexe $\mathbf{C}$ et l'espace $\mathbf{R}^3$, respectivement. Cette famille inclut les applications pour lesquelles l'ensemble de Cantor et le tapis de Sierpiński sont des images des boules unités dans $\mathbf{Q}_2$ et $\mathbf{Q}_3$. Dans chacune des familles, le sous-ensemble des plongements est trouvé. Pour ces plongements, les dimensions de Hausdorff sont calculées et il est montré que la mesure fractale sur l'image de $\mathbf{Q}_p$ coïncide avec la mesure de Haar sur $\mathbf{Q}_p$. Il est prouvé que, sous certaines conditions, l'image du solénoïde p -adique est un ensemble invariant de dimension fractionnaire pour un système dynamique. Des dessins informatiques de quelques images fractales sont présentés.

La structure hiérarchique des nombres p -adiques et des fractales, ainsi que les symétries des fractales auto-similaires, pointent vers une relation étroite entre ces objets qui a été notée à plusieurs reprises [1-3]. Un exemple clair de ce type est l'homéomorphisme de l'ensemble de Cantor sur l'anneau $\mathbf{Z}_2$ des nombres 2-adiques [1, 2, 4]. Cependant, pour autant que nous sachions, les formules explicites pour les plongements de divers sous-ensembles de $\mathbf{Q}_p$ dans les espaces euclidiens et les propriétés fractales des images correspondantes ont reçu peu d'attention. En même temps, la topologie de ces objets en tant qu'attracteurs étranges [5] est similaire à celle des solénoïdes p -adiques $\mathbf{T}_p$ et, par conséquent, la construction des plongements de $\mathbf{T}_p$, par exemple, dans l'espace euclidien tridimensionnel $\mathbf{R}^3$ est également intéressante.

Dans cet article, nous construisons les applications continues $\Upsilon_s^{(m)} : \mathbf{Q}_p \mapsto \mathbf{C}$ et $\Omega_{s,a}^{(m)} : \mathbf{T}_p \mapsto \mathbf{R}^3$, dépendant des paramètres $s, a \in \mathbf{C}$ et du nombre m , qui peut être un entier positif ou ∞ . Il s'avère que $\Upsilon_{1/3}^{(0)}(\mathbf{Z}_2)$ est un ensemble de Cantor et $\Upsilon_{1/2}^{(0)}(\mathbf{Z}_3)$ est un tapis de Sierpiński. Il est montré que pour un certain $s_0 > 0$, la condition $|s| < s_0$ (ainsi que $|a| < (1 - |s|)^{-1}$) détermine les ensembles d'applications $\Upsilon_s^{(m)}$ et $\Omega_{s,a}^{(m)}$ qui sont des plongements. Ces ensembles de plongements possèdent la propriété suivante. Étant donnés s et a , il existe des métriques additivement invariantes dans $\mathbf{Q}_p$ et $\mathbf{T}_p$ telles que les applications $\Upsilon_s^{(m)}$ et $\Omega_{s,a}^{(m)}$ préservent les dimensions de Hausdorff de sous-ensembles arbitraires. Cette propriété s'avère pratique pour étudier les mesures de Hausdorff des ensembles $\Upsilon_s^{(m)}(\mathbf{Q}_p)$ et $\Omega_{s,a}^{(m)}(\mathbf{T}_p)$ car les mesures de Hausdorff dans les espaces $\mathbf{Q}_p$ et $\mathbf{T}_p$, avec les métriques correspondantes, sont simplement les mesures de Haar. De plus, il s'avère que la mesure de Haar de tout ensemble dans $\mathbf{Q}_p$ coïncide avec la mesure fractale de son image (voir la formule (22)). Cette propriété et le fait que $\Upsilon_s^{(\infty)}$ est une série de caractères additifs continus dans $\mathbf{Q}_p$ rendent possible l'application de méthodes de théorie des groupes pour le calcul des intégrales par rapport à la mesure fractale. Cela peut servir de moyen efficace pour résoudre certains problèmes de mécanique quantique et de diffusion ou diffraction sur de telles fractales [3, 6, 7].

Nous prouvons que pour un plongement $\Omega_{s,a}^{(m)}$, il existe un système dynamique tel que $\Omega_{s,a}^{(m)}(\mathbf{T}_p)$ est un ensemble invariant de ce système et toute trajectoire intégrale se trouvant dans $\Omega_{s,a}^{(m)}(\mathbf{T}_p)$

Référence : Theoretical and Mathematical Physics, Vol. 109, No. 3, 1996, p. 323-337. Traduit de Teoreticheskaya i Matematicheskaya Fizika.

s'enroule densément autour de cet ensemble. De plus, les applications $\Upsilon_s^{(\infty)}$ et $\Omega_{s,a}^{(m)}$ sont interdépendantes. Dans le présent article, nous construisons un homomorphisme injectif j du groupe additif $\mathbf{Q}_p$ dans le groupe $\mathbf{T}_p$ tel que $j(\mathbf{Q}_p)$ est dense dans $\mathbf{T}_p$ et prouvons l'existence d'une relation entre $\Upsilon_s^{(\infty)}$ et $\Omega_{s,a}^{(\infty)}$.

1. Mesures de Hausdorff (définitions de base)

Nous présentons ici quelques éléments pertinents concernant les mesures de Hausdorff sous une forme adaptée à la présentation qui suit. Pour un espace métrique arbitraire (M, ρ) , nous définissons la mesure de Hausdorff extérieure δ -dimensionnelle h^δ en posant $\forall A \subset M$

$$h^\delta(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} h_\varepsilon^\delta(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(S_i)^\delta : \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \supseteq A, \text{diam}(S_i) \leq \varepsilon \right\}, \quad (1)$$

où δ est un nombre positif fixé et $\text{diam}(B) \equiv \sup\{\rho(x, y) : x, y \in B\}$. Alors h^δ est une mesure dénombrablement additive et régulière au sens de Borel [8]. Par définition, la dimension de Hausdorff d'un sous-ensemble $A \subset M$ est le nombre [9]

$$D_h(A) = \inf\{\delta : h^\delta(A) = 0\} = \sup\{\delta : h^\delta(A) = \infty\}. \quad (2)$$

En particulier, il s'ensuit que si $h^\delta(A) > 0$ et la mesure $h_A^\delta(\cdot) \equiv h^\delta(\cdot \cap A)$ est σ -finie, alors $\delta = D_h(A)$. Par dimension de Hausdorff locale en un point $x \in A$, nous entendons le nombre $D_h^L(x) = \inf(D_h(A \cap U_x))$, où l'inf est pris sur tous les voisinages ouverts U_x du point x .

Convention. Indépendamment de la nature de l'ensemble X , pour des fonctions arbitraires F et G à valeurs réelles non négatives sur X , nous écrivons $F \stackrel{L}{\preceq} G$ ou $\forall x \in X \ F(x) \stackrel{L}{\preceq} G(x)$ s'il existe $C > 0$ tel que $\forall x \in X \ F(x) \leq CG(x)$. Si les relations $F \stackrel{L}{\preceq} G$ et $G \stackrel{L}{\preceq} F$ sont simultanément vérifiées, alors $F \stackrel{L}{\simeq} G$ et nous disons que F et G sont équivalentes. En interprétant les constantes comme des fonctions triviales, nous écrivons $c \stackrel{L}{\preceq} 1$ au lieu de $0 < c < \infty$. Pour toutes constantes F, G , et $H \stackrel{L}{\preceq} F$, les relations élémentaires suivantes sont vérifiées : $\forall a, b, \alpha > 0$

$$\begin{aligned} \min(F, H) &\stackrel{L}{\preceq} H, & \max(F, H) &\stackrel{L}{\preceq} F, \\ aF + bG &\stackrel{L}{\preceq} \max(F, G) \stackrel{L}{\preceq} \max(F, G \pm H) \stackrel{L}{\preceq} (F^\alpha + G^\alpha)^{1/\alpha}. \end{aligned} \quad (3)$$

Soit $\Phi : M \mapsto N$ une application des espaces métriques (M, ρ) et (N, d) et soit $d^\Phi \equiv d(\Phi(\cdot), \Phi(\cdot))$. Alors Φ est une application lipschitzienne si $d^\Phi \stackrel{L}{\preceq} \rho$. Dans ce cas, Φ est appelée une L -contraction. Si $d^\Phi \stackrel{L}{\simeq} \rho$, alors Φ est un plongement lipschitzien et la restriction de Φ^{-1} à $\text{Ran}(\Phi)$ est également une application lipschitzienne ; une telle application est appelée une isométrie lipschitzienne ou L -isométrie.

Définition 1. Pour des pseudométriques données ρ_1 et ρ_2 sur un ensemble M , la quantité

$$\kappa_{1,2} = \sup_{x,y \in M} \left(\frac{|\rho_1(x, y) - \rho_2(x, y)|}{\rho_1(x, y) + \rho_2(x, y)} \right) \quad (4)$$

(où l'on pose $0/0 = 0$) est appelée la divergence de ρ_1 et ρ_2 .

Évidemment, $\kappa_{1,2} \leq 1$ et, de plus, on peut montrer que $\kappa_{1,2} < 1$ si et seulement si $\rho_1 \stackrel{L}{\simeq} \rho_2$. Il est facile de prouver que l'assertion suivante est vérifiée.

Théorème 2. *Soient ρ_1 et ρ_2 des métriques sur M , soit $\kappa_{1,2}$ leur divergence, et soient h_1^δ, D_1, D_1^L et h_2^δ, D_2, D_2^L les mesures δ -dimensionnelles et les dimensions de Hausdorff globales et locales correspondantes. Alors l'inégalité*

$$\left(\frac{1 - \kappa_{1,2}}{1 + \kappa_{1,2}}\right)^\delta h_1^\delta(F) \leq h_2^\delta(F) \leq \left(\frac{1 + \kappa_{1,2}}{1 - \kappa_{1,2}}\right)^\delta h_1^\delta(F) \quad (5)$$

est vérifiée, d'où il suit que si $\rho_1 \stackrel{L}{\simeq} \rho_2$, alors $h_1^\delta \stackrel{L}{\simeq} h_2^\delta$ et nous avons $D_{h,1}(F) = D_{h,2}(F) \forall F \subset M$ et $D_{h,1}^L(x) = D_{h,2}^L(x) \forall x \in F$.

Compte tenu de (3), le théorème 1 et le théorème 2.10.45 de [8] impliquent le théorème suivant.

Théorème 3. *Soit (M, ρ) un espace métrique. Introduisons une métrique d dans $\mathbb{R} \times M$ par la formule*

$$d((x, a), (y, b)) = \max(|x - y|, \rho(a, b)) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \forall a, b \in M.$$

Alors pour tout ensemble borélien $A \subset \mathbb{R}$ et tout $B \subset M$ avec $h^\delta(B) < \infty$, nous avons

$$h^{\delta+1}(A \times B) \stackrel{L}{\simeq} h^1(A)h^\delta(B).$$

2. Mesures de Hausdorff dans $\mathbf{Q}_p$ et $\mathbf{T}_p$

Dans cette section, $\mathbf{Q}_p$ et $\mathbf{T}_p$ sont considérés comme les complétés de $\mathbf{Q}$ par rapport aux métriques additivement invariantes correspondantes.

Chaque élément x du corps des nombres p -adiques $\mathbf{Q}_p$ est représentable de manière unique comme une série formelle [10],

$$x = \sum_{n=v}^{\infty} a_n p^n = \sum_{n=v}^{-1} a_n p^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n, \quad (6)$$

avec des coefficients $a_n \in \{0, 1, \dots, p-1\}$, où $v < \infty$ et p est un nombre premier fixé. Cette série converge absolument dans la norme p -adique définie $\forall x$ par la relation $\|x\| = p^{-\alpha v(x)}$ pour un certain $\alpha > 0$ et $v(x) = v$ est appelée la norme logarithmique de x . La première somme du membre de droite de (6) est notée $\{x\}_p$ et est la partie fractionnaire de x , et l'autre est notée $[x]_p$ et est la partie entière de x . Dans ce cas, $\{x\}_p \in \mathbf{Q} \cap [0, 1)$ et $[x]_p \in \mathbf{Z}_p$, où $\mathbf{Z}_p = \{x \in \mathbf{Q}_p : |x|_p \leq 1\}$ est l'anneau des entiers p -adiques. Tout nombre $q \in \mathbf{Q}$ peut être développé de manière unique en une série (6) et $\mathbf{Q}_p$ est le complété de $\mathbf{Q}$ [10]. La norme $\|\cdot\|$ possède la propriété d'ultramétrie, à savoir, $\forall x, y \in \mathbf{Q}_p$, nous avons

$$\|x - y\| \leq \max(\|x\|, \|y\|). \quad (7)$$

La norme avec $\alpha = 1$ est notée $|\cdot|_p$ et les autres sont notées simplement $|\cdot|_p^\alpha$. Toutes ces normes dépendant de α sont topologiquement équivalentes [10]; cependant, les mesures de Hausdorff correspondantes sont différentes (voir ci-dessous).

La mesure de Haar standard χ dans $\mathbf{Q}_p$ est choisie telle que [10]

$$\chi(\mathbf{Z}_p) = \int_{\mathbf{Z}_p} d\chi = 1. \quad (8)$$

Théorème 4. *La mesure de Hausdorff $h^{1/\alpha}$ sur $(\mathbf{Q}_p, |\cdot|_p^\alpha)$ est la mesure de Haar standard régulière, au sens de Borel, $\forall \alpha > 0$ et, par conséquent, les dimensions de Hausdorff locale et globale de $(\mathbf{Q}_p, |\cdot|_p^\alpha)$ coïncident et sont égales à $1/\alpha$.*

Démonstration. Par construction, h^δ est une mesure invariante $\forall \delta > 0$ et, par conséquent, l'unicité de χ implique qu'il suffit de montrer que, par exemple, $h^{1/\alpha}(\mathbf{Z}_p) = \chi(\mathbf{Z}_p) = 1$. Parce que $\mathbf{Z}_p$ est constitué d'exactly p^M boules disjointes de diamètre $p^{-M\alpha} \forall M \in \mathbf{N}$, nous avons $h^{1/\alpha}(\mathbf{Z}_p) \leq 1$. Nous montrons maintenant que $h^{1/\alpha}(\mathbf{Z}_p) \geq 1$. En effet, par la semi-additivité de $\chi \forall A \subset \mathbf{Q}_p$ et $\forall \varepsilon > 0$, l'inégalité

$$\chi(A) \leq \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \chi(U_i) : \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \supseteq A, \text{diam}(U_i) \leq \varepsilon \right\} \quad (9)$$

est vérifiée, où U_i sont des boules ouvertes dans $\mathbf{Q}_p$. D'autre part, il découle des propriétés de la norme (7) que tout sous-ensemble $B \subset \mathbf{Q}_p$ avec $\text{diam}(B) = r$ est contenu dans la boule ouverte (et simultanément fermée) $U = \{x : |x - x_0|_p^\alpha \leq r, x_0 \in B\}$ avec $\text{diam}(U) = r$ et ceci, avec la relation $\chi(U) = \text{diam}^{1/\alpha}(U)$ qui est valable pour toute boule U , implique que $h_\varepsilon^{1/\alpha}$ coïncide avec le membre de droite de l'inégalité (9) et, par conséquent, nous avons $h^{1/\alpha}(\mathbf{Z}_p) \geq \chi(\mathbf{Z}_p)$. $\square$

Considérons $\mathbb{R} \times \mathbf{Z}_p$ comme un produit direct de groupes additifs et introduisons une métrique dans ce groupe en fixant un certain $\alpha > 0$ et en posant $\forall a, b \in \mathbb{R}$ et $\forall x, y \in \mathbf{Z}_p$

$$\hat{\rho}_\alpha((a, x), (b, y)) = \max(|a - b|, |x - y|_p^\alpha). \quad (10)$$

Il est clair que $\hat{\rho}_\alpha$ est une métrique invariante et la topologie qu'elle engendre coïncide avec celle du produit direct de groupes.

Définition 5. *Soit B le sous-groupe $\{(n, -n) : n \in \mathbf{Z}\}$ du groupe $\mathbb{R} \times \mathbf{Z}_p$. Alors le groupe quotient $\mathbf{T}_p = (\mathbb{R} \times \mathbf{Z}_p)/B$ est appelé un solénoïde p -adique.*

On peut montrer [11] que $\mathbf{T}_p$ est un groupe abélien compact connexe. Nous pouvons définir une métrique invariante ρ_α sur $\mathbf{T}_p$ compatible avec la topologie comme la métrique quotient selon le schéma standard [11], à savoir, $\forall f, g \in \mathbf{T}_p$, nous posons

$$\rho_\alpha(f, g) = \inf \{ \hat{\rho}_\alpha((a, x), (b, y)) : (a, x) \in f, (b, y) \in g \}. \quad (11)$$

La construction ci-dessous donne une réalisation concrète de $\mathbf{T}_p$.

Théorème 6. *Considérons le produit $[0, 1) \times \mathbf{Z}_p$ et définissons l'addition dans celui-ci par la règle suivante : $\forall f = (\xi, x), g = (\eta, y) \in [0, 1) \times \mathbf{Z}_p$*

$$f + g = (\xi + \eta - [\xi + \eta], x + y + [\xi + \eta]), \quad (12)$$

où $[\xi + \eta]$ est la partie entière du nombre réel $\xi + \eta$. Pour un $\alpha > 0$ fixé, nous définissons une métrique ρ_α en posant

$$\rho_\alpha(f, g) = \min(\ell_\alpha(f - g), \ell_\alpha(g - f)), \quad (13)$$

où $\ell_\alpha(f) = \max(\xi, |x|_p^\alpha)$. Alors le groupe abélien résultant avec la topologie induite par la métrique est algébriquement et isométriquement isomorphe à $\mathbf{T}_p$ avec la métrique (11).

Démonstration. L'isomorphisme algébrique est établi de manière pratiquement identique à la preuve du théorème 10.15 dans [11]. Il découle de (10) et (11) et de la définition du sous-groupe B que la métrique sur $\mathbf{T}_p$ satisfait la relation

$$\rho_\alpha(f, 0) = \inf\{\max(|\xi - n|, |x + n|_p^\alpha) : n \in \mathbf{Z}\}.$$

Cependant, parce que $\forall x \in \mathbf{Z}_p$, l'inégalité $|x + n|_p^\alpha \leq 1$ est vérifiée, l'infimum dans la formule ci-dessus peut être étendu sur l'ensemble $\{n = 0, 1\}$. En tenant compte de $(-f) = (1 - \xi, -x - 1)$ pour $\xi \neq 0$, nous pouvons facilement montrer que les métriques coïncident en fait. $\square$

En utilisant le théorème 4 et les faits que $\forall x \in \mathbf{Z}_p$, $\rho_\alpha((0, x), 0) = |x|_p^\alpha$ et $\{x\}_p = 0$, et, également, que l'ensemble $\{\{x\}_p : x \in \mathbf{Q}_p\}$ est dense dans $[0, 1)$ (dans la topologie usuelle), nous pouvons prouver le théorème suivant.

Théorème 7. *L'application $j : \mathbf{Q}_p \mapsto \mathbf{T}_p$, associant à chaque $x \in \mathbf{Q}_p$ l'élément $(\{x\}_p, [x]_p) \in \mathbf{T}_p$, est un homomorphisme injectif du groupe additif $\mathbf{Q}_p$ dans $\mathbf{T}_p$ et est également une isométrie locale de $(\mathbf{Q}_p, |\cdot|_p^\alpha)$ dans $(\mathbf{T}_p, \rho_\alpha)$ $\forall \alpha > 0$. De plus, $\text{Ran}(j) \subset \text{Ran}(\mathbf{Q}_p)$ est dense dans $\mathbf{T}_p$. Parce que $\mathbf{T}_p$ est complet (en raison de la compacité [12]), $\mathbf{T}_p$ est le complété de $\mathbf{Q}$ par rapport à la métrique ρ_α .*

Le solénoïde p -adique $\mathbf{T}_p$ est un groupe abélien compact [11] et, par conséquent, il existe une mesure de Haar finie χ sur lui, unique et invariante. Montrons que la mesure de Hausdorff h^δ sur $(\mathbf{T}_p, \rho_\alpha)$ pour $\delta = \alpha^{-1} + 1$ coïncide (à un multiplicateur fini non nul près) avec χ sur tous les sous-ensembles boréliens de $\mathbf{T}_p$. Puisque ρ_α est une métrique invariante, il suffit de prouver que $h^\delta(\phi(U_{1/2})) \stackrel{L}{\simeq} 1$ pour l'ensemble $U_{1/2} = \{y \in \mathbb{R} \times \mathbf{Z}_p : \rho_\alpha(y, 0) < 1/2\}$, où ϕ est la projection canonique de $\mathbb{R} \times \mathbf{Z}_p$ sur $\mathbf{T}_p$. Cependant, parce que $\forall a, b \in B \subset \mathbb{R} \times \mathbf{Z}_p$, nous avons $\hat{\rho}_\alpha(a, b) > 1$ pour $a \neq b$, la restriction de ϕ à $U_{1/2}$ est une isométrie. Par conséquent, en appliquant la relation $U_{1/2} = (-1/2, 1/2] \times \{x \in \mathbf{Z}_p : |x|_p \leq p^{-1}\}$, nous concluons, en vertu du théorème 2, que

$$h^\delta(\phi(U_{1/2})) = h^\delta((-1/2, 1/2] \times \{x \in \mathbf{Z}_p : |x|_p \leq p^{-1}\}) \stackrel{L}{\simeq} p^{-1} h^{1/\alpha}(\mathbf{Z}_p).$$

Ici h^δ et $h^{1/\alpha}$ désignent les mesures de Hausdorff dans $\mathbb{R} \times \mathbf{Z}_p$ et $\mathbf{T}_p$, respectivement. Ainsi, comme dans le cas de $\mathbf{Q}_p$, les dimensions de Hausdorff locale et globale de $(\mathbf{T}_p, \rho_\alpha)$ coïncident et sont égales à $\alpha^{-1} + 1$.

3. Applications continues de $\mathbf{Q}_p$ dans $\mathbf{C}$

Étant donnés $n \in \mathbf{Z}$ et $m \in \bar{\mathbf{N}} = \mathbf{N} \cup \{\infty\}$, nous définissons les fonctions à valeurs complexes $\chi_n^{(m)}(\cdot)$ sur $\mathbf{Q}_p$ par la formule

$$\chi_n^{(m)}(x) = \exp\left(i2\pi \sum_{k=0}^m x_{n-k} p^{-k}\right) \quad \forall x \in \mathbf{Q}_p, \quad (14)$$

où x_n est le n -ième coefficient dans le développement de x en série (6). Il est facile de montrer que $\chi_n^{(m)}(\cdot)$ sont continues. Notons que $\chi_n^{(\infty)}(\cdot)$ coïncide avec le caractère additif continu $\chi_{p^{n+1}}(\cdot)$ sur $\mathbf{Q}_p$ [11, 13].

Définition 8. Pour tout $s \in U_1 = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ et $\forall m \in \overline{\mathbf{N}}$, nous définissons une application continue $\Upsilon_s^{(m)} : \mathbf{Q}_p \mapsto \mathbf{C}$ en posant

$$\Upsilon_s^{(m)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n \chi_n^{(m)}(x) \quad \forall x \in \mathbf{Q}_p. \quad (15)$$

Évidemment, l'application $\Upsilon_s^{(m)}$ est bien définie et pour tout $x \in \mathbf{Q}_p$ fixé, la formule (15) définit une fonction de s holomorphe dans le disque U_1 . De plus, en tenant compte du fait que les coefficients de la série (6) sont nuls (périodiques [10]) à partir d'un certain $n_q \forall q \in \mathbf{N}(\mathbf{Q})$, nous pouvons montrer que la propriété intéressante suivante est vérifiée : $\Upsilon^{(m)}(q) - \Upsilon^{(m)}(0)$ est un polynôme (une fonction rationnelle) pour $m < \infty$ et $\rho(\cdot)\Upsilon^{(m)}(q)$ est une fonction entière (une fonction méromorphe, c'est-à-dire un rapport de fonctions entières) pour $m = \infty$, où

$$\rho(s) = \prod_{k=0}^{\infty} (1 - p^{-k}s).$$

Il est facile de prouver que $\forall x \in \mathbf{Q}_p$, nous avons les relations

$$\{\Upsilon_s^{(m)}\}(x) = \{\Upsilon_s^{(m)}\}(\{x\}_p), \quad \Upsilon_s^{(m)}(\{x\}_p) = [\Upsilon_s^{(m)}](\{x\}_p), \quad [\Upsilon_s^{(m)}](p^{-m}x) = [\Upsilon_s^{(m)}](p^{-m}[x]_p). \quad (16)$$

La propriété fondamentale suivante de l'application (la mise à l'échelle) $\Upsilon_s^{(m)}$ est également vérifiée :

$$\forall x \in \mathbf{Q}_p \quad \Upsilon_s^{(m)}(px) = s\Upsilon_s^{(m)}(x) + 1 = p^{-1/D_s} e^{i \arg(s)} \Upsilon_s^{(m)}(x) + 1, \quad (17)$$

où $D_s = -\log_p^{-1}(|s|)$ est appelée la dimension d'échelle de $\Upsilon_s^{(m)}$. Cette relation découle du fait que $\chi_{n+k}^{(m)}(p^k x) = \chi_n^{(m)}(x) \forall k \in \mathbf{Z}$.

De plus, en appliquant (16) et (17), nous pouvons montrer que l'ensemble $\text{Ran } \Upsilon_s^{(m)}$ est auto-similaire $\forall m < \infty$. Plus précisément, soit $B_l^n \equiv \Upsilon_s^{(m)}(\{x \in \mathbf{Q}_p : |x - l|_p \leq p^{-n}\})$; alors

$$B_l^n = \bigcup_{i=0}^{p^n-1} \{z_{n,l}^i + e^{i \arg(s)mn} p^{-mn/D_s} B_l^0\} \quad (18)$$

$\forall n \in \mathbf{Z}$ et $l \in \mathbf{Q}_p$. Ici $z_{n,l}^i$ sont des translations de $\mathbf{C}$ dépendant de l , $\bar{l}$, et n . Ainsi, chaque B_l^n peut être obtenu à partir de p^m ensembles B_l^0 au moyen de mouvements continus du plan $\mathbf{C}$ (translations et rotations) et d'une transformation d'échelle.

Maintenant, nous trouvons les conditions sous lesquelles les applications $\Upsilon_s^{(m)}$ deviennent des plongements. À cette fin, nous définissons le nombre

$$\Delta_s^{(m)} = \inf\{|\Upsilon_s^{(m)}(x) - \Upsilon_s^{(m)}(y)| : \forall x, y \in \mathbf{Q}_p : |x - y|_p = 1\}. \quad (19)$$

En utilisant le fait que $|\chi_0^{(m)}(x) - \chi_0^{(m)}(y)| \geq 2 \sin(\pi/p)$ pour $|x - y|_p = 1$, nous pouvons dériver l'inégalité

$$\frac{\Delta_s^{(m)}}{2} \geq \sin\left(\frac{\pi}{p}\right) - \frac{|s|}{1 - |s|}.$$

Il s'ensuit que $\Delta_s^{(m)} > 0$ pour $|s| < s_0 = \sin(\pi/p)/(1 + \sin(\pi/p))$.

Théorème 9. Soient s et m tels que $\Delta_s^{(m)} > 0$; alors $\Upsilon_s^{(m)}$ est une L -isométrie de $(\mathbf{Q}_p, |\cdot|_p^{D_s^{-1}})$ dans $(\mathbf{C}, |\cdot|)$ et, par conséquent, $\Upsilon_s^{(m)}$ est un plongement.

Démonstration. La preuve peut être dérivée de l'inégalité ci-dessous, qui est une conséquence de (17) et de la définition (14), à savoir, $\forall x, y \in \mathbf{Q}_p$, nous avons

$$\Delta_s^{(m)} |s|^{v(x-y)} \leq |\Upsilon_s^{(m)}(x) - \Upsilon_s^{(m)}(y)| \leq \frac{2}{1-|s|} |s|^{v(x-y)}. \quad (21)$$

□

Il découle des théorèmes 1 et 6 que si $\Delta_s^{(m)} > 0$, alors les dimensions de Hausdorff locale et globale de $\Upsilon_s^{(m)}(\mathbf{Q}_p)$ sont égales à D_s . Ces théorèmes impliquent également que $h^{D_s}(\Upsilon_s^{(m)}(\mathbf{Z}_p)) \stackrel{L}{\simeq} 1$. Par conséquent, nous pouvons introduire une mesure μ_f sur $\mathbf{C}$ par la formule

$$\mu_f(B) = \frac{h^\delta(B \cap \Upsilon_s^{(m)}(\mathbf{Q}_p))}{h^\delta(\Upsilon_s^{(m)}(\mathbf{Z}_p))} \quad \forall B \subset \mathbf{C}. \quad (22)$$

La restriction de cette mesure à $\Upsilon_s^{(m)}(\mathbf{Z}_p)$ coïncide avec la mesure multifractale μ_f^0 [15] de l'ensemble $\Upsilon_s^{(m)}(\mathbf{Z}_p)$. De plus, l'assertion ci-dessous est vérifiée.

Théorème 10. Soit $\chi(\cdot)$ la mesure de Haar standard dans $\mathbf{Q}_p$. Dans ce cas, si $\Delta_s^{(m)} > 0$, alors

$$\mu_f(\cdot) = \chi((\Upsilon_s^{(m)})^{-1}(\cdot)). \quad (23)$$

Démonstration. Parce que $\Upsilon_s^{(m)}$ est un plongement, les clusters B_i^n définis en (18) ne s'intersectent pas. Par conséquent, si $m < \infty$, alors l'auto-similarité de l'ensemble $\Upsilon_s^{(m)}(\mathbf{Q}_p)$ implique que $h^{D_s}(\Upsilon_s^{(m)}(B)) = h^{D_s}(\Upsilon_s^{(m)}(\mathbf{Z}_p))\chi(B)$ pour tous les ensembles ouverts B . La preuve du théorème dans le cas $m = \infty$ découle du théorème 1 et du lemme ci-dessous. □

Lemme 11. Soient ρ_m des pseudométriques sur $\mathbf{Q}_p$ définies par la formule

$$\rho_m(x, y) = |\Upsilon_s^{(m)}(x) - \Upsilon_s^{(m)}(y)| \quad \forall x, y \in \mathbf{Q}_p$$

et soit $\kappa_{m,\infty}$ la divergence de ρ_m et ρ_∞ . Alors

$$\kappa_{m,\infty} < \frac{4\pi}{(1-|s|)(\Delta_s^{(m)} + \Delta_s^{(\infty)})} p^{-m}.$$

Preuve du lemme. Notons que grâce à la mise à l'échelle (17), le supremum dans la formule (4) peut être étendu à tous les x, y tels que $|x - y|_p = 1$ et, par conséquent, le dénominateur dans (4) est supérieur ou égal à $\Delta_s^{(m)} + \Delta_s^{(\infty)}$. D'autre part, puisque $\forall x \in \mathbf{Q}_p$

$$\left| \chi_n^{(\infty)}(x) - \chi_n^{(m)}(x) \right| = \left| 1 - \exp \left(\frac{i2\pi}{p} \sum_{k=m+1}^{\infty} x_{n-k} p^{-k} \right) \right| < 2\pi p^{-m}, \quad (24)$$

il est facile de montrer que le numérateur dans (4) est toujours inférieur à $4\pi p^{-m}/(1-|s|)$. □

Ainsi, le théorème 7 permet d'appliquer la technique d'intégration dans $\mathbf{Q}_p$ [1] pour calculer les intégrales par rapport à la mesure fractale μ_f ou μ_f^0 . Par exemple, il est possible de calculer les intégrales de polynômes arbitraires en z et $\bar{z}$ par rapport à μ_f^0 pour $z \in \mathbf{C}$. En effet, on peut prouver que la formule

$$\langle z^L \bar{z}^{\bar{L}} \rangle \equiv \int_{\mathbf{C}} z^L \bar{z}^{\bar{L}} d\mu_f^0(x) = \int_{\mathbf{Z}_p} (\Upsilon_s^{(m)}(x))^L (\overline{\Upsilon_s^{(m)}(x)})^{\bar{L}} d\chi(x) = \sum_{n, \bar{n}=0}^{\infty} C_{n, \bar{n}}^{L, \bar{L}} s^n \bar{s}^{\bar{n}} \quad (25)$$

est vérifiée. De plus, $C_{n, \bar{n}}^{L, \bar{L}} \in \mathbf{N}$ pour $m = 0, \infty$. En particulier, pour $m = \infty$, l'expression $C_{n, \bar{n}}^{L, \bar{L}}$ est le nombre de représentations $n = n_0 + \dots + n_L$ et $\bar{n} = \bar{n}_0 + \dots + \bar{n}_{\bar{L}}$ telles que

$$\sum_{k=0}^L p^{-n_k} = \sum_{k=0}^{\bar{L}} p^{-\bar{n}_k} \pmod{p}.$$

En appliquant cette formule, nous pouvons montrer que, par exemple, $\langle z^p \rangle = \langle \bar{z}^p \rangle = 1$ et $\langle z^L \bar{z}^{\bar{L}} \rangle = (1 - |s|^2)^{-L} \delta_{L, \bar{L}}$ pour $L, \bar{L} < p$.

Mettant de côté le problème de la justification mathématique stricte, nous indiquons une autre application possible du théorème 7. Considérons une particule quantique sur la fractale $\mathbf{F} = \text{Ran}(\Upsilon_s^{(m)})$. Dans ce cas, $L^2(\mathbf{C}, \mu_f)$ peut être considéré comme un espace de Hilbert. Supposons que l'équation de Schrödinger pour les valeurs propres d'énergie E puisse être écrite sous la forme

$$E\Psi(z) = \int K(|z - \dot{z}|) \Psi(\dot{z}) d\mu_f(\dot{z}). \quad (26)$$

En utilisant le théorème 7, nous pouvons passer à une équation équivalente dans $L^2(\mathbf{Q}_p, \chi)$ avec le noyau $K(|\Upsilon_s^{(m)}(x) - \Upsilon_s^{(m)}(y)|)$ pour $x, y \in \mathbf{Q}_p$. Évidemment, dans le cas général, cela ne donne pas de nouveaux résultats car le noyau K est invariant par translation dans $\mathbf{C}$, alors que μ_f ne l'est pas. Inversement, χ est invariante dans $\mathbf{Q}_p$, alors que K ne l'est pas. Cependant, en appliquant (17), nous pouvons écrire le noyau sous la forme

$$K(|x - y|_p^\alpha \cdot |(\chi_{v(x-y)}^{(m)}(x - y) - 1) - O^{x,y}(s)|), \quad (27)$$

où $|O^{x,y}(s)| \leq |s|/(1 - |s|) \forall x, y \in \mathbf{Q}_p$. Par conséquent, pour $|s| \ll 1$, le noyau dépend uniquement de $x - y$ et, par conséquent, la transformation de Fourier pour $\mathbf{Q}_p$ [1, 13] amène le hamiltonien à une forme diagonale. De plus, pour $p = 2, 3$, la relation $|\chi_{v(x)}^{(m)}(x) - 1| = 2 \sin(\pi/p)$ peut être appliquée pour prouver que le spectre du hamiltonien (dans cette approximation) a la forme $\{E_n = \bar{K}(p^n) : n \in \mathbf{Z}\}$ et toutes les fonctions propres, sauf l'état fondamental, sont strictement localisées (c'est-à-dire qu'elles sont à support compact [1]). Ici $\bar{K}(\cdot)$ est l'image de Fourier de la fonction $K(2 \sin(\pi/p)| \cdot |_p^\alpha)$. En appliquant les formules (14) et (15) et la technique d'intégration p -adique, et en développant successivement (27) en série de puissances en s (pour α fixé), nous pouvons trouver les images de Fourier des coefficients de la série, au moins dans le cas $m = \infty$ et $p = 2, 3$. Ainsi, il semble possible de calculer les corrections ultérieures au spectre et aux fonctions d'onde en utilisant la théorie des perturbations. Notons que ce qui précède s'applique également au problème de diffusion sur la fractale $\mathbf{F}$.

4. Applications continues de $\mathbf{T}_p$ dans $\mathbf{R}^3$

Pour $n \in \mathbf{Z}$ et $m \in \overline{\mathbf{N}} \equiv \mathbf{N} \cup \{\infty\}$, nous définissons des fonctions continues à valeurs complexes $\tilde{\chi}_n^{(m)}(\cdot)$ sur $\mathbb{R} \times \mathbf{Z}_p$ en posant $\forall (\xi, x) \in \mathbb{R} \times \mathbf{Z}_p$

$$\tilde{\chi}_n^{(m)}(\xi, x) = \exp \left(i2\pi\xi \frac{\theta(p^{m-n} - |x|_p)}{p^{\min(n,m)+1}} \right) \chi_n^{(m)}(x). \quad (28)$$

Ici $\theta(t) = 1$ pour $t \geq 1$ et 0 sinon. On vérifie que

$$\tilde{\chi}_n^{(m)}(\xi + l, x - l) = \tilde{\chi}_n^{(m)}(\xi, x) \quad (29)$$

$\forall l \in \mathbf{Z}, (\xi, x) \in \mathbb{R} \times \mathbf{Z}_p$, c'est-à-dire qu'elles sont constantes sur les classes du groupe B (voir la Définition 2). Notons que $\forall f = (\xi, x) \in \mathbf{T}_p$, nous avons $\tilde{\chi}_n^{(\infty)}(\xi, x) = \tilde{\chi}_{(-p^{-n-1})}(f)$, où $\tilde{\chi}_{(q)}(\cdot)$ sont des caractères additifs continus sur $\mathbf{T}_p$ [11].

Définition 12. Pour tout $s \in U_1$ et $\forall m \in \overline{\mathbf{N}}$, nous définissons l'application continue $\omega_s^{(m)} : \mathbb{R} \times \mathbf{Z}_p \mapsto \mathbf{C}$ par la formule

$$\omega_s^{(m)}(\xi, x) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n \tilde{\chi}_n^{(m)}(\xi, x) \quad \forall (\xi, x) \in \mathbb{R} \times \mathbf{Z}_p. \quad (30)$$

Notons que $\forall x \in \mathbf{Z}_p$, la relation

$$\Upsilon_s^{(m)}(x) = \omega_s^{(m)}(0, x) \quad (31)$$

est vérifiée. Pour $a \in \mathbf{C}$ donné, nous introduisons l'application $\sigma_a : \mathbf{S}_1 \times \mathbf{C} \mapsto \mathbb{R}^3$ en définissant la correspondance $\mathbf{S}_1 \times \mathbf{C} \ni (e^{i2\pi\xi}, z) \mapsto (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ selon les formules

$$x_1 + ix_3 = e^{i2\pi\xi} |a| \left(1 + \Re \left(\frac{z}{a} \right) \right), \quad x_2 = |a| \Im \left(\frac{z}{a} \right), \quad (32)$$

où $\mathbf{S}_1$ est le cercle unité dans $\mathbf{C}$. Nous définissons maintenant une application de $\mathbf{T}_p$ dans $\mathbb{R}^3$ comme la composition de σ_a ; une application de $\mathbf{T}_p$ vers $\mathbf{S}_1 \times \mathbf{C}$ est construite ci-dessous. À cette fin, nous considérons $\mathbf{T}_p$ et $\mathbf{S}_1 \times \mathbf{C}$ comme des espaces quotients par rapport à l'action du groupe $\mathbf{Z}$ sur $\mathbb{R} \times \mathbf{Z}_p$ et $\mathbb{R} \times \mathbf{C}$, à savoir, $\forall n \in \mathbf{Z}$, l'action sur $\mathbb{R} \times \mathbf{Z}_p$ et $\mathbb{R} \times \mathbf{C}$ est définie comme les translations par les éléments $(n, -n) \in B$ et $(n, 0) \in \mathbf{Z} \times \{0\}$, respectivement. Soit $\otimes \omega_s^{(m)} \equiv \text{id} \times \omega_s^{(m)} : \mathbb{R} \times \mathbf{Z}_p \mapsto \mathbb{R} \times \mathbf{C}$, où id est l'application identité. Il est facile de voir que la propriété (29) garantit l'existence de l'application quotient continue $\Omega_s^{(m)} : \mathbf{T}_p \mapsto \mathbf{S}_1 \times \mathbf{C}$, ainsi qu'une application $\Omega_{s,a}^{(m)} : \mathbf{T}_p \mapsto \mathbb{R}^3$, telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbf{Z}_p & \xrightarrow{\otimes \omega_s^{(m)}} & \mathbb{R} \times \mathbf{C} \\ \phi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ \mathbf{T}_p & \xrightarrow{\Omega_s^{(m)}} & \mathbf{S}_1 \times \mathbf{C} \\ & \searrow \Omega_{s,a}^{(m)} & \downarrow \sigma_a \\ & & \mathbb{R}^3 \end{array}$$

est commutatif. Ici ϕ et φ sont les projections canoniques correspondantes. De plus, on peut montrer que les actions du groupe $\mathbf{Z}$ sur $\mathbb{R} \times \mathbf{Z}_p$ et $\mathbb{R} \times \mathbf{C}$ sont compatibles dans le sens où $\forall f \in \mathbf{T}_p$, la relation

$$\otimes \omega_s^{(m)}(\phi^{-1}(f)) = \varphi^{-1}(\Omega_s^{(m)}(f)) \quad (33)$$

est vérifiée.

Nous introduisons une métrique invariante $\dot{d}$ sur $\mathbb{R} \times \mathbf{C}$ telle que $\dot{d}((\xi_1, z_1), (\xi_2, z_2)) = \max(|\xi_1 - \xi_2|, |z_1 - z_2|) \forall (\xi_1, z_1), (\xi_2, z_2) \in \mathbb{R} \times \mathbf{C}$. La métrique d sur $\mathbf{S}_1 \times \mathbf{C}$ est définie comme la métrique quotient de $\dot{d}$ suivant le même schéma que dans (11). Alors, il n'est pas difficile de prouver que $\forall (e^{i2\pi\xi_1}, z_1), (e^{i2\pi\xi_2}, z_2) \in \mathbf{S}_1 \times \mathbf{C}$ (ici nous supposons que $\xi_1, \xi_2 \in [0, 1)$),

$$d((e^{i2\pi\xi_1}, z_1), (e^{i2\pi\xi_2}, z_2)) = \max \left(\inf_{n=0, \pm 1} (|\xi_1 - \xi_2 + n|), |z_1 - z_2| \right). \quad (34)$$

Parce que ϕ, φ , et la restriction de σ_a à tout ensemble borné dans $\mathbf{S}_1 \times \mathbf{C}$ sont des L -contractions, si nous montrons que $\otimes \omega_s^{(m)}$ est une L -contraction, alors cela implique que $\Omega_s^{(m)}$ et $\Omega_{s,a}^{(m)}$ sont des L -contractions également. De plus, si $\otimes \omega_s^{(m)}$ est une L -isométrie, alors $\Omega_s^{(m)}$ l'est aussi. En utilisant (33), nous pouvons montrer que $\forall f, g \in \mathbf{T}_p$, il existe $(\xi, x) \in f$ et $(\eta, y) \in g$ tels que, $\forall \varepsilon > 0$, la chaîne d'inégalités

$$\rho_\alpha(f, g) \leq \hat{\rho}_\alpha((\xi, x), (\eta, y)) \stackrel{L}{\leq} d(\otimes \omega_s^{(m)}(\xi, x), \otimes \omega_s^{(m)}(\eta, y)) \leq d(\Omega_s^{(m)}(f), \Omega_s^{(m)}(g)) + \varepsilon$$

est vérifiée. Il est également évident que si la restriction de σ_a à $\text{Ran}(\varphi \circ \otimes \omega_s^{(m)})$ est une L -isométrie, alors l'application $\Omega_{s,a}^{(m)}$ l'est aussi.

Pour trouver les conditions sous lesquelles $\otimes \omega_s^{(m)}$ est une L -contraction ou une L -isométrie, nous introduisons les deux nombres suivants :

$$\Delta_s^{(m)} = \inf_{\substack{x, y \in \mathbf{Z}_p, \xi \in \mathbb{R} \\ |x-y|_p=1}} |\omega_s^{(m)}(\xi, x) - \omega_s^{(m)}(\xi, y)|, \quad (35)$$

$$\gamma_s^{(m)} = - \inf_{(\xi, x) \in \mathbb{R} \times \mathbf{Z}_p} \Re(\omega_s^{(m)}(\xi, x)/a). \quad (36)$$

Il est facile de montrer que $\Delta_s^{(m)}$ satisfait la même inégalité que celle dans (20) et, par conséquent, $\Delta_s^{(m)} > 0$ pour $|s| < s_0$. De plus, on peut prouver que $\Delta_s^{(m)} = \Delta_s^{(m)}$ (voir ci-dessous). Les conditions mentionnées ci-dessus découlent de la chaîne d'inégalités suivante :

$$\begin{aligned} \Delta_s^{(m)} \max(|\xi - \eta|, |x - y|_p^\alpha) &\stackrel{L}{\leq} |\omega_s^{(m)}(\xi, x) - \omega_s^{(m)}(\eta, y)| \\ &\stackrel{L}{\leq} \max \left(|\xi - \eta|, \frac{2}{1-|s|} |x - y|_p^\alpha + \frac{p}{(1-|s|)} |\xi - \eta| \right) \\ &\stackrel{L}{\leq} \max(|\xi - \eta|, |x - y|_p^\alpha), \end{aligned}$$

les première et dernière étant des conséquences des relations (3) ; les autres ont été obtenues de manière analogue à (21). Une considération géométrique élémentaire implique que la restriction de σ_a à tout ensemble compact dans $H_a = \{z \in \mathbf{C} : \Re(z/a) > 1\}$ est une L -isométrie et, de plus, $\text{Ran}(\Omega_s^{(m)}) \subset H_a$ pour $\gamma_s^{(m)} < 1$.

Ainsi, nous avons prouvé le théorème suivant.

Théorème 13. Soient $\hat{\rho}_\alpha, \rho_\alpha, \hat{d}$, et d les métriques dans $\mathbb{R} \times \mathbf{Z}_p, \mathbf{T}_p, \mathbb{R} \times \mathbf{C}$, et $\mathbf{S}_1 \times \mathbf{C}$, respectivement. Soit $\mathbb{R}^3$ muni de la métrique euclidienne standard et soit $\alpha = D_s^{-1}$. Alors pour tout $m \in \overline{\mathbb{N}}$ et $s \in U_1$, les assertions suivantes sont vérifiées :

1. $\otimes \omega_s^{(m)}$ est une L -contraction et, par conséquent, $\Omega_s^{(m)}$ et $\Omega_{s,a}^{(m)}$ sont également des L -contractions ;
2. si $\Delta_s^{(m)} > 0$, alors $\otimes \omega_s^{(m)}$ et $\Omega_s^{(m)}$ sont des L -isométries et si, en plus, $\gamma_s^{(m)} < 1$, alors $\Omega_{s,a}^{(m)}$ est une L -isométrie.

Il s'ensuit immédiatement que si s et a sont tels que $\Delta_s^{(m)} > 0$ et $\gamma_s^{(m)} < 1$, alors l'application $\Omega_{s,a}^{(m)}$ est un plongement continu de $\mathbf{T}_p$ dans $\mathbb{R}^3$ et les dimensions de Hausdorff locale et globale de $\Omega_{s,a}^{(m)}(\mathbf{T}_p)$ sont égales à $D_s + 1$.

Ensuite, nous décrivons la structure géométrique de l'ensemble $\Omega_{s,a}^{(m)}(\mathbf{T}_p)$. À cette fin, nous notons que $(\mathbf{T}_p, \rho_\alpha)$ peut être considéré comme l'espace total du fibré localement trivial $(\mathbf{T}_p, \mathbf{S}_1)$ avec la projection $\chi_0 : \mathbf{T}_p \mapsto \mathbf{S}_1$, telle que $\chi_0(\xi, x) = \exp(i2\pi\xi) \in \mathbf{S}_1 \ \forall (\xi, x) \in \mathbf{T}_p$ (évidemment, χ_0 est une application continue car c'est un caractère sur $\mathbf{T}_p$) et les fibres $\chi_0^{-1}(\exp(i2\pi\xi)) = (\xi, \mathbf{Z}_p)$ isométriques à $(\mathbf{Z}_p, |\cdot|_p^\alpha)$. Il est facile de voir que l'application $\Omega_s^{(m)}$ est un morphisme de fibrés du fibré $(\mathbf{T}_p, \mathbf{S}_1)$ dans le fibré trivial $(\mathbf{S}_1 \times \mathbf{D}(r_s), \mathbf{S}_1) \subset (\mathbf{S}_1 \times \mathbf{C}, \mathbf{S}_1)$ (où $\mathbf{D}(r_s)$ est un disque fermé de rayon $r_s = (1 - |s|)^{-1}$). Dans ce cas, les fibres sont les ensembles $\omega_s^{(m)}(\xi, \mathbf{Z}_p) \subset \mathbf{D}(r_s)$ pour chaque ξ fixé et si $\Omega_s^{(m)}$ est une L -isométrie, alors ces ensembles sont des fractales de dimensions globale et locale égales à D_s . De plus, il découle de (31) que la fibre avec $\xi = 0$ est isométrique à $\Upsilon_s^{(m)}(\mathbf{Z}_p)$. Pour simplifier, nous supposons que $a > r_s$. Alors σ_a est le plongement standard de $(\mathbf{S}_1 \times \mathbf{D}(r_s), \mathbf{S}_1)$ dans un tore solide dans $\mathbb{R}^3$ (un tore ainsi que son intérieur) et les fibres sont appliquées isométriquement sur des disques situés dans le plan tourné autour de l'axe x_2 d'un angle $2\pi\xi$ par rapport au plan $x_3 = 0$.

Définissons l'action d'un élément t du groupe $\mathbb{R}$ sur $f \in \mathbf{T}_p$ comme la translation $f \mapsto f_t = f + \phi(t, 0)$ et considérons les orbites de ce groupe dans $\mathbf{T}_p$. On peut montrer [11] que chaque orbite est un sous-ensemble dense dans $\mathbf{T}_p$. Parce que les applications $\Omega_s^{(m)}$ et $\Omega_{s,a}^{(m)}$ sont des L -contractions, les images de ces orbites sont des courbes continues qui s'enroulent également densément autour de $\Omega_s^{(m)}(\mathbf{T}_p) \subset \mathbf{S}_1 \times \mathbf{D}(r_s)$ et $\Omega_{s,a}^{(m)} \subset \mathbb{R}^3$, respectivement.

Il s'avère que dans le cas $m = \infty$, les images des orbites du groupe $\mathbb{R}$ sont des courbes lisses qui sont des trajectoires d'un système dynamique.

Théorème 14. Soit $\Omega_{s,a}^{(\infty)}$ une L -isométrie. Alors il existe un champ de vecteurs lipschitzien $\Gamma : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}^3$ tel que $\forall f \in \mathbf{T}_p$

$$\Gamma(\Omega_{s,a}^{(\infty)}(f)) = -2\pi \left(L_{(2)}\Omega_{s,a}^{(\infty)}(f) + p^{-1}\Re(\chi_{-1}^{(\infty)}(f)(L_{(3)} + iL_{(1)})\Omega_{s/p,+0a}^{(\infty)}(f)) \right). \quad (37)$$

L'action du groupe de difféomorphismes à un paramètre $U_t : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$, engendré par l'équation

$$\frac{d}{dt}r = \Gamma(r),$$

est compatible avec l'action de $\mathbb{R}$ dans $\mathbf{T}_p$ dans le sens où $\forall f \in \mathbf{T}_p$ et $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\Omega_{s,a}^{(\infty)}(f_t) = U_t\Omega_{s,a}^{(\infty)}(f). \quad (38)$$

Ici $(L_{(k)})_{i,j} = \varepsilon_{i,j,k}$, où $\varepsilon_{i,j,k}$ est le symbole de Levi-Civita et $\Omega_{s/p,+0a}^{(\infty)}(f) \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \Omega_{s/p,\varepsilon a}^{(\infty)}(f)$.

Démonstration. D'abord, nous montrons que $\Gamma|_{\text{Ran}(\Omega_{s,a}^{(\infty)})}$ est une L -contraction. Évidemment, il est suffisant de prouver que $\left((\Omega_{s,a}^{(\infty)})^{-1} \circ \Omega_{s/p, +0a}^{(\infty)}\right)|_{\text{Ran}(\Omega_{s,a}^{(\infty)})}$ est une L -contraction. Cependant, ceci est une conséquence directe du fait que $(\Omega_{s,a}^{(\infty)})^{-1}$ et $\Omega_{s/p, +0a}^{(\infty)}$ sont des L -contractions pour $(\mathbf{T}_p, \rho_\alpha)$ si $\alpha = D_s^{-1}$ ($\Omega_{s/p, +0a}^{(\infty)}$ est une L -contraction puisque $\rho_{\alpha+1} \stackrel{L}{\preceq} \rho_\alpha$). L'existence d'une application lipschitzienne Γ définie sur tout $\mathbb{R}^3$ et satisfaisant (37) est maintenant assurée par le théorème de Kirschbraun [8]. Il découle immédiatement des formules (28) et (30) que $\forall t \in \mathbb{R}, x \in \mathbf{Z}_p$, l'équation

$$\frac{d}{dt}\omega_s^{(\infty)}(t, x) = \frac{i2\pi}{p}\omega_{s/p}^{(\infty)}(t, x) \quad (39)$$

est vérifiée. Avec l'aide de (32), il peut être déduit de cette équation que $\forall f \in \mathbf{T}_p$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, nous avons

$$\frac{d}{dt}\Omega_{s,a}^{(\infty)}(f_t) = \Gamma(\Omega_{s,a}^{(\infty)}(f_t)).$$

D'après la théorie des équations différentielles [17], cela implique la formule (38). $\square$

Mentionnons une autre particularité spécifique du cas $m = \infty$. Il découle des formules (14), (15), (28), et (30) que $\forall x \in \mathbf{Q}_p$,

$$[\Upsilon_s^{(\infty)}](x) = \omega_s^{(\infty)}(\{x\}_p, [x]_p). \quad (40)$$

Cela implique la relation mentionnée ci-dessus $\Delta_s^{(\infty)} = \Delta_s^{(\infty)}$. De plus, en utilisant le théorème 5 et le théorème de Kirschbraun [8], nous pouvons maintenant prouver que si $\Omega_{s,a}^{(\infty)}$ est une L -isométrie, alors il existe une L -contraction $J : \mathbf{C} \mapsto \mathbb{R}^3$ telle que J applique isométriquement chaque cluster $B_l^0 = \Upsilon_s^{(\infty)}(\{x \in \mathbf{Q}_p : |x - l|_p < 1\})$ sur l'image de la fibre $(\{l\}_p, \mathbf{Z}_p)$ et nous avons

$$\Omega_{s,a}^{(\infty)} \circ j = J \circ \Upsilon_s^{(\infty)}. \quad (41)$$

5. Explication des figures

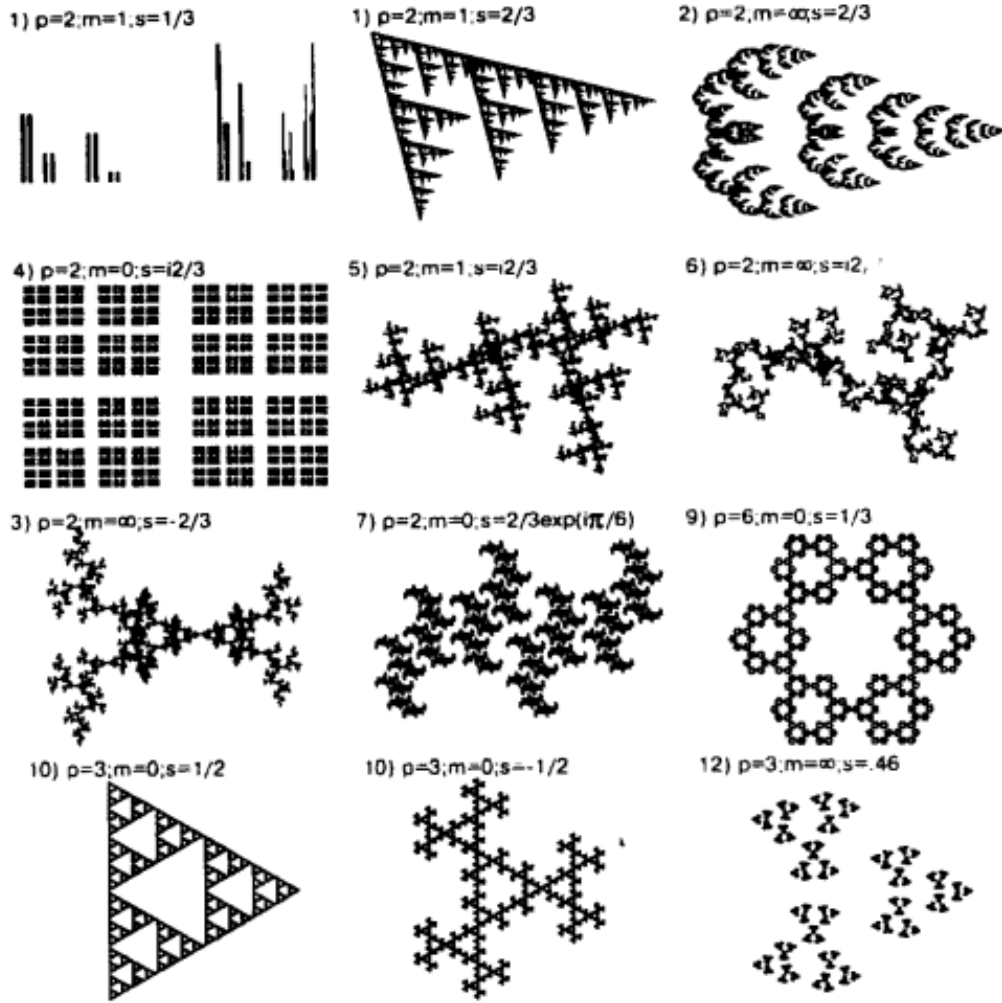


Fig. 1. Images of Z_p in the complex plane for different values of p , m , and s .

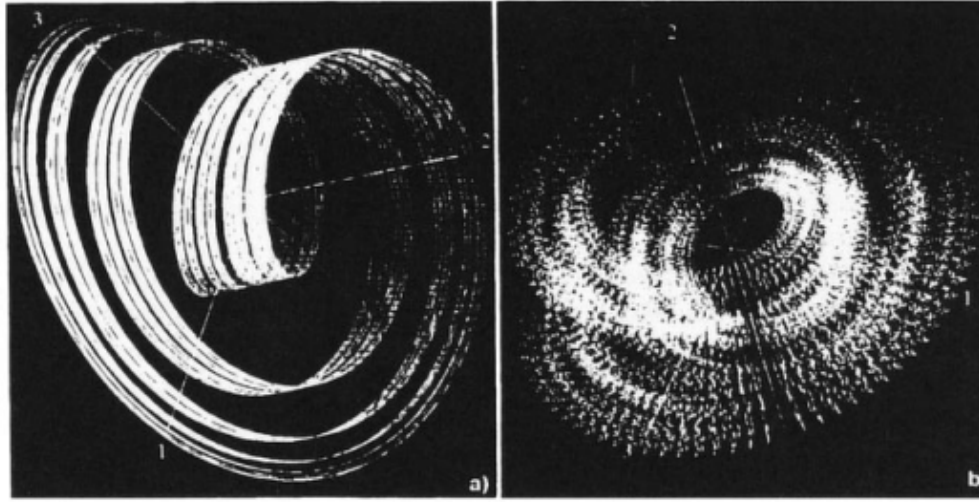


Fig. 2. Embeddings in $\mathbb{R}^3$: (a) $\mathbf{T}_2$ ($m = 0$); (b) $\mathbf{T}_3$ (by fibers) or $3^{-4}\mathbf{Z}_3$ ($m = \infty$).

En raison de la convergence rapide des séries (6) et (15) et, également, parce que même des entiers positifs pas très grands forment un réseau suffisamment dense dans $\mathbf{Z}_p$, la construction informatique des ensembles $\Upsilon_s^{(m)}(\mathbf{Z}_p)$ et $\Omega_{s,a}^{(m)}(\mathbf{T}_p)$ ne rencontre pas de difficultés fondamentales.

La Figure 1.1 représente un ensemble de Cantor et, pour plus de clarté, un segment, dont la longueur est proportionnelle à l'un des nombres $e_i = 1, 3, 5, 7, 2, 6, 10, 14$, est associé à chaque point si le point de l'image a la forme $\Upsilon_{1/3}^{(0)}(e_i + y)$ pour $y \in \mathbf{Z}_p$ (pour ces nombres, voir [1]). L'ensemble de la Fig. 1.10 est évidemment le tapis de Sierpiński. On peut voir sur la Fig. 1.9 que les frontières des composantes connexes de l'ensemble $\mathbf{C} \setminus \Upsilon_{1/3}^{(0)}(\mathbf{Z}_6)$ sont constituées de courbes de Koch (notons que p n'est pas un nombre premier; voir la note de bas de page 3). Enfin, la Fig. 1.4 peut servir d'illustration du fait que $\mathbf{Z}_4$ est homéomorphe à $\mathbf{Z}_2$.

La Figure 2a montre un plongement de $\mathbf{T}_2$ dans $\mathbb{R}^3$ avec les paramètres $s = 1/2.2$, $a = i2$, et $m = 0$, et la structure de Cantor de cet ensemble peut être clairement observée. La Figure 2b illustre un plongement pour $p = 3$, $s = 0.46$, $a = i3.3$, et $m = \infty$. Une caractéristique essentielle ici est que les fibres sont des tapis de Sierpiński (ou des ensembles proches d'eux) (voir les Fig. 1.10 et 1.12). La Figure 2c montre la même image que la Fig. 2b, mais à une échelle plus grande. La structure en couches de l'ensemble peut être clairement distinguée. Enfin, la Figure 2d est une image de $\Omega_{s,a}^{(0)}(\mathbf{T}_3)$ avec les paramètres $s = 0.4$, $a = i3.5$. La couche intérieure de cet ensemble a une structure plus lisse.

Références

- [VVZ94] V. S. Vladimirov, I. V. Volovich, and E. I. Zelenov, *p-Adic Analysis and Mathematical Physics*, World Scientific, Singapore-New Jersey-London-Hong Kong (1994).
- [Pit94] M. Pitkanen, *p-Adic Physics ?* Preprint SF-00170, University of Helsinki (1994).
- [HW86] S. Havlin and N. Weissman, J. Phys. A, 19, 1021-1026 (1986).
- [Zel91] E. I. Zelenov, J. Math. Phys., 32, 147-152 (1991).

- [LL83] A. J. Lichtenberg and M. A. Lieberman, *Regular and Stochastic Motion*, Springer, New York-Heidelberg-Berlin (1983).
- [OS85] A. T. Ogielski and D. L. Stein, Phys. Rev. Let., 55, No. 15 (1985).
- [AK86] K. Allen and M. Klauter, *Optical Transformations in Fractals. Fractals in Physics*, North Holland, Amsterdam-Oxford-New York-Tokyo (1986).
- [Fed69] H. Federer, *Geometric Measure Theory*, Springer, New York-Heidelberg-Berlin (1969).
- [Bill65] P. Billingsley, *Ergodic Theory and Information*, Wiley, New York-London-Sydney (1965).
- [Kob77] N. Koblitz, *p-Adic Numbers, p-Adic Analysis, and Zeta-Functions*, Springer, New York-Heidelberg-Berlin (1977).
- [HR63] E. Hewitt and K. Ross, *Abstract Harmonic Analysis*, Vol. I, Springer, New York-Heidelberg-Berlin (1963).
- [Kel57] J. L. Kelley, *General Topology*, Van Nostrand, Princeton, New Jersey (1957).
- [GPS69] I. M. Gel'fand, M. I. Graev, and L. I. Pyatetskii-Shapiro, *Representation Theory and Automorphic Functions*, Saunders, Philadelphia (1969).
- [Sha85] B. V. Shabat, *Complex Analysis* [in Russian], Vol. 1, Nauka, Moscow (1985).
- [Fed88] J. Feder, *Fractals*, Plenum, New York (1988).
- [Zim79] J. M. Ziman, *Models of Disorder. The Theoretical Physics of Homogeneously Disordered Systems*, Cambridge University Press, Cambridge-London-New York-Melbourne (1979).
- [Arn78] V. I. Arnold, *Ordinary Differential Equations*, MIT Press, Cambridge (1978).
- [Mum83] D. Mumford, *Tata Lectures Notes on Theta Functions*, Vols. I, II, Birkhäuser, Boston-Basel-Stuttgart (1983, 1984).