Sur la représentation d'un grand entier pair comme somme d'un nombre premier et du produit d'au plus deux nombres premiers

Jing-Run CHEN
(Institut de Mathématiques, Academia Sinica)

Reçu le 13 mars 1973

Résumé

Dans cet article, nous démontrons que tout entier pair suffisamment grand est la somme d'un nombre premier et du produit d'au plus 2 nombres premiers. La méthode utilisée est simple, sans aucun calcul numérique compliqué.

1. Introduction

Pour abréger, nous désignons par $(1, a)$ la proposition suivante :
Tout entier pair suffisamment grand est la somme d'un nombre premier et du produit d'au plus deux nombres premiers.
La méthode du crible et certains résultats sur la distribution des nombres premiers ont été employés pour démontrer la proposition ci-dessus par de nombreux mathématiciens, par exemple :

$(1, c)$ Renyi[1],

$(1, 5)$ Pan Cheng-tung[2], Barban[3],

$(1, 4)$ Wang Yuan[4], Pan Cheng-tung[5], Barban[6],

$(1, 3)$ Buxu[7], A. H. Bungarood[8], Bombieri[9].

Dans un article précédent de l'auteur [10], une preuve esquissée de $(1, 2)$ a été donnée. Dans cet article, nous donnons une preuve détaillée de $(1, 2)$.
Soit x un grand entier pair, h un entier pair quelconque, et C_x défini par

$$C_x = \prod_{\substack{p>2 \\ p|x}} \frac{p-1}{p-2} \prod_{p>2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right).$$

Soit $P_x(1, 2)$ le nombre de nombres premiers p satisfaisant aux conditions suivantes :

$$x - p = p_1 \quad \text{ou} \quad x - p = p_2 p_3,$$

où p_1, p_2, p_3 sont des nombres premiers.

Soit $x_h(1,2)$ le nombre de nombres premiers $p \leq x$ satisfaisant aux conditions suivantes :

$$p + h = p_1 \quad \text{ou} \quad p + h = p_2 p_3.$$

Dans cet article, nous donnons une preuve détaillée de

$$P_x(1,2) \geq \frac{0.67\, x\, C_x}{(\log x)^2}. \tag{$*$}$$

Dans [10], nous avons démontré $(*)$ avec le facteur 0.098 au lieu de 0.67. Par la même méthode, nous pouvons démontrer que

$$P_x(1,2) \geq \frac{0.67\, x\, C_x}{(\log x)^2}.$$

La méthode utilisée est simple, sans aucun calcul numérique compliqué. Dans la démonstration du Lemme 9, un résultat de Richert et le théorème bien connu de Bombieri sont employés. Nous énonçons maintenant nos résultats comme suit.

Théorème I. *Tout entier pair suffisamment grand est la somme d'un nombre premier et du produit d'au plus 2 nombres premiers, et l'on trouve*

$$P_x(1,2) \geq \frac{0.67\, x\, C_x}{(\log x)^2}.$$

Théorème II. *Il existe une infinité de nombres premiers p tels que $p + h$ soit un produit d'au plus 2 nombres premiers, h étant un entier pair quelconque, et*

$$x_h(1,2) \geq \frac{0.67\, x\, C_h}{(\log x)^2}.$$

L'auteur remercie le Professeur I. K. Hua pour ses encouragements, ainsi que les Professeurs S. H. Min et Wang Yuan pour leur grande aide.

2. Quelques lemmes

Lemme 1. *Pour tout nombre réel $x > 1$, nous désignons par $[\log x]$ la partie entière de $\log x$. Soit $y \geq 0$, et*

$$\Phi(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{y^\omega \mathrm{d}\mathrm{d}\omega}{\omega \left(1 + \frac{\omega}{(\log x)^{1.1}}\right)^{(\log x)^{1.1}}}.$$

Soit $\log x \geq 10^3$, et $y \geq \mathrm{e}^{2(\log x)^{0.1}}$. Alors il s'ensuit

$$1 - x^{-0.1} \leq \Phi(y) \leq 1,$$

et $\Phi(y)$ est non décroissante pour tout $y \geq 0$.

Preuve. Outre la relation évidente $\Phi(y) = 0$ pour $0 \leq y \leq 1$, nous avons besoin de

$$\frac{\partial^r}{\partial\omega^r}\left(\frac{y^\omega}{\omega}\right) = \left(\frac{y^\omega}{\omega}\right)\left\{(\log y)^r + \sum_{i=1}^{r}\frac{(-1)^i r\cdots(r-i+1)(\log y)^{r-i}}{\omega^i}\right\}. \tag{1}$$

Nous procédons par récurrence sur r. Il est évident que

$$\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{y^\omega}{\omega}\right) = \left(\frac{y^\omega}{\omega}\right)\left\{\log y - \frac{1}{\omega}\right\}$$

et (1) est donc vraie pour $r = 1$. Supposons (1) démontrée pour $r = 1, \ldots, s$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^{s+1}}{\partial\omega^{s+1}}\left(\frac{y^\omega}{\omega}\right) &= \frac{\partial}{\partial\omega}\left\{y^\omega\left(\frac{(\log y)^s}{\omega} + \sum_{i=1}^{s}\frac{(-1)^i s\cdots(s-i+1)(\log y)^{s-i}}{\omega^{i+1}}\right)\right\} \\
&= y^\omega\left\{\frac{(\log y)^{s+1}}{\omega} + \sum_{i=1}^{s}\frac{(-1)^i s\cdots(s-i+1)(\log y)^{s+1-i}}{\omega^{i+1}} - \frac{(\log y)^s}{\omega^2}\right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=1}^{s}\frac{(-1)^{i+1} s\cdots(s-i+1)(i+1)(\log y)^{s-i}}{\omega^{i+2}}\right\} = \left(\frac{y^\omega}{\omega}\right)\left\{(\log y)^{s+1}\right. \\
&\quad -\frac{(s+1)(\log y)^s}{\omega} + \frac{(-1)^{s+1}(s+1)!}{\omega^{s+1}} + \sum_{i=2}^{s}\frac{(-1)^i s\cdots(s-i+1)(\log y)^{s+1-i}}{\omega^i} \\
&\quad \left. + \frac{(-1)^i s\cdots(s+2-i)(\log y)^{s+1-i}}{\omega^i}\right\} = \left(\frac{y^\omega}{\omega}\right)\left\{(\log y)^{s+1}\right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=1}^{s+1}\frac{(-1)^i(s+1)\cdots(s+1-i+1)(\log y)^{s+1-i}}{\omega^i}\right\}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, (1) est aussi vraie pour $s + 1$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\Phi(y) &= 1 + \frac{(\log x)^{1.1[\log x]+1}}{[\log x]!}\left\{\frac{\partial^{[\log x]}}{\partial\omega^{[\log x]}}\left(\frac{y^\omega}{\omega}\right)\right\}_{\omega=-(\log x)^{1.1}} \\
&= 1 - \mathrm{e}^{-(\log x)^{1.1}(\log y)}\sum_{v=0}^{[\log x]}\frac{\{(\log x)^{1.1}(\log y)\}^v}{v!} \\
&= \frac{1}{[\log x]!}\int_0^{(\log x)^{1.1}(\log y)}\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^{[\log x]}\mathrm{d}\mathrm{d}\lambda,
\end{aligned}$$

pour $y \geq 1$, ce qui, en utilisant aussi la relation $\Phi(y) = 0$ pour $0 \leq y \leq 1$, met en évidence la propriété de non-décroissance. Pour $\log x \geq 10^3$, et $\mathrm{e}^{(\log x)^{0.1}} \leq \mathrm{e}^{\lambda\log 2}$ nous obtenons

$$\begin{aligned}
0 < 1 - \Phi(y) &= \frac{1}{[\log x]!}\int_{(\log x)^{1.1}(\log y)}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^{[\log x]}\mathrm{d}\mathrm{d}\lambda \\
&\leq \frac{1}{[\log x]!}\int_{2\log x}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^{[\log x]}\mathrm{d}\mathrm{d}\lambda = \frac{\{[\log x]\}^{1+[\log x]}}{[\log x]!} \\
&\quad \cdot\int_2^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda[\log x]}\lambda^{[\log x]}\mathrm{d}\mathrm{d}\lambda = \frac{\mathrm{e}^{-\log x\{[\log x]\}^{1+[\log x]}}}{[\log x]!}
\end{aligned}$$

$$\cdot \int_1^\infty \mathrm{e}^{-\lambda[\log x]}(1+\lambda)^{[\log x]}\mathrm{dd}\lambda \leq x^{-0.1}, \quad \text{quand } y \geq \mathrm{e}^{2(\log x)^{0.1}}.$$

Lemme 2. *Soit* $e(\alpha) = \mathrm{e}^{2\pi i\alpha}$ *et*

$$S(\alpha) = \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n e(n\alpha), \qquad Z = \sum_{n=M+1}^{M+N} |a_n|^2,$$

les a_n *étant des nombres réels quelconques. Notons* $\sum_q^*$ *une somme sur tous les caractères primitifs modulo* q*. Alors il s'ensuit*

$$\sum_{q\leq X} \frac{q}{\varphi(q)} \sum_q^* \left| \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n \chi_q(n) \right|^2 \leq (X^2 + \pi NX)Z, \tag{2}$$

et

$$\sum_{D<q\leq Q} \frac{1}{\varphi(q)} \sum_q^* \left| \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n \chi_q(n) \right|^2 \ll \left(Q + \frac{N}{D}\right) Z. \tag{3}$$

Preuve. Soit F une fonction à valeurs complexes de dérivée continue et de période 1. Nous moyennons l'inégalité

$$\left| F\left(\frac{a}{q}\right) \right| \leq |F(\alpha)| + \int_{\frac{a}{q}}^{\alpha} |F'(\beta)||\mathrm{dd}\beta|$$

sur l'intervalle $I(a,q)$ de longueur $\frac{1}{Q^2}$ centré en $\frac{a}{q}$. Les intervalles $I(a,q)$ avec $1 \leq a \leq q$, $(a,q)=1$, et $q \leq Q$ ne se recouvrent pas. Donc nous avons

$$\sum_{q\leq Q} \sum_{(a,q)=1} \left| F\left(\frac{a}{q}\right) \right| \leq \sum_{q\leq Q} \sum_{(a,q)=1} \left\{ Q^2 \int_{I(a,q)} |F(\alpha)|\mathrm{dd}\alpha + \frac{1}{2}\int_{I(a,q)} |F'(\beta)|\mathrm{dd}\beta \right\}$$

$$\leq Q^2 \int_0^1 |F(\alpha)|\mathrm{dd}\alpha + \frac{1}{2}\int_0^1 |F'(\beta)|\mathrm{dd}\beta.$$

Posons maintenant $F(\alpha) = \{S(\alpha)\}^2$. Puisque $\int_0^1 |F(\alpha)|\mathrm{dd}\alpha = Z$ et

$$\frac{1}{2}\int_0^1 |F'(\beta)|\mathrm{dd}\beta = \int_0^1 |S(\alpha)||S'(\alpha)|\mathrm{dd}\alpha$$

$$\leq \left\{ \left(\int_0^1 |S(\alpha)|^2 \mathrm{dd}\alpha \right) \left(\int_0^1 |S'(\alpha)|^2 \mathrm{dd}\alpha \right) \right\}^{\frac{1}{2}} = Z^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |S'(\alpha)|^2 \mathrm{dd}\alpha \right)^{\frac{1}{2}},$$

par conséquent nous avons

$$\sum_{q\leq Q} \sum_{(a,q)=1} \left| S\left(\frac{a}{q}\right) \right|^2 = \sum_{q\leq Q} \sum_{(a,q)=1} \left\{ |S\left(\frac{a}{q}\right)| \left| e\left(-\frac{a\left(M + \left[\frac{N}{2}\right]\right)}{q} \right) \right| \right\}^2$$

$$= \sum_{q\leq Q} \sum_{(a,q)=1} \left| \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n e\left(\left\{ n - \left(M + \left[\frac{N}{2}\right] \right) \right\} \frac{a}{q} \right) \right|^2$$

$$= \sum_{q\le Q}\sum_{(a,q)=1}\left|\sum_{n=M+1}^{M+N} a_{n+M+[\frac{N}{2}]}e\left(\frac{na}{q}\right)\right|^2$$

$$\le ZQ^2 + Z^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{n=-[\frac{N}{2}]+1}^{N-[\frac{N}{2}]}((2\pi n)a_{n+M+[\frac{N}{2}]})^2\right\}^{\frac{1}{2}} \le ZQ^2$$

$$+\pi NZ^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=-[\frac{N}{2}]+1}^{N-[\frac{N}{2}]}|a_{n+M+[\frac{N}{2}]}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le (Q^2+\pi N)Z.$$

Pour chaque caractère primitif χ, nous posons $\tau(\chi_q^q) = \sum_{1\le a<q}\chi_q^q(a)e\left(\frac{a}{q}\right)$. Nous avons $\tau(\overline{\chi_q^q})\cdot\chi_q^q(n) = \sum_{a=1}^q \overline{\chi_q^q}(a)e\left(\frac{na}{q}\right)$. Puisque $|\tau(\overline{\chi_q^q})|^2 = q$, nous obtenons

$$\left(\frac{1}{q\varphi(q)}\right)\sum_q^*\left|\sum_{n=M+1}^{M+N}a_n\chi_q(n)\right|^2 \le \left(\frac{1}{q\varphi(q)}\right)\sum_q^*\left|\tau(\overline{\chi_q})\sum_{n=M+1}^{M+N}a_n\chi_q(n)\right|^2$$

$$= \left(\frac{1}{q\varphi(q)}\right)\sum_q^*\left|\sum_{a=1}^q\overline{\chi_q}(a)\sum_{n=M+1}^{M+N}a_n e\left(\frac{na}{q}\right)\right|^2$$

(2) s'ensuit maintenant de (4). Soit h un entier positif satisfaisant l'inégalité $2^hD < Q \le 2^{h+1}D$. Nous avons

$$\sum_{D<q\le Q}\frac{1}{\varphi(q)}\sum_q^*\left|\sum_{n=M+1}^{M+N}a_n\chi_q(n)\right|^2 \le \sum_{i=0}^h\left(\sum_{2^iD<q\le 2^{i+1}D}\frac{1}{\varphi(q)}\sum_q^*\left|\sum_{n=M+1}^{M+N}a_n\chi_q(n)\right|^2\right)$$

$$\le \sum_{i=0}^h\left(\frac{1}{2^iD}\right)\left(\sum_{2^iD<q\le 2^{i+1}D}\frac{q}{\varphi(q)}\sum_q^*\left|\sum_{n=M+1}^{M+N}a_n\chi_q(n)\right|^2\right)$$

$$\le \sum_{i=0}^h\left(2^{i+2}D+\frac{\pi N}{2^iD}\right)\sum_{n=M+1}^{M+N}|a_n|^2 \le \left(Q+\frac{N}{D}\right)\sum_{n=M+1}^{M+N}|a_n|^2.$$

Ainsi le lemme est démontré.

Lemme 3. *Soit $\sum_q^*$ une somme sur tous les caractères primitifs modulo q. Posons $s=\sigma+it$, et supposons que $\sigma \ge \frac{1}{2}$. Alors on en déduit que*

$$\sum_{q\le Q}\sum_q^*|L(s,\chi_q)| \le Q^2|s|(\log Q)^2.$$

Preuve. Nous avons

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^\infty\frac{\chi(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^N\frac{\chi(n)}{n^s} + \sum_{n=N+1}^\infty\frac{\sum_{i\le n}\chi(i)-\sum_{i\le n-1}\chi(i)}{n^s}$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \frac{\chi(n)}{n^s} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\sum_{i \leq n} \chi(i) \right) \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} \right) - \frac{\sum_{i \leq N} \chi(i)}{(N+1)^s}$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \frac{\chi(n)}{n^s} + O\left(\frac{|s| q^{\frac{1}{2}} \log q}{N^\sigma} \right).$$

En utilisant $\sigma \geq \frac{1}{2}$ et le Lemme 2, nous obtenons

$$\sum_{q \leq Q} \sum_{q}^{*} |L(s, \chi_q)|^2 \leq \sum_{q \leq Q} \sum_{q}^{*} \left(\left| \sum_{n=1}^{[Q]} \frac{\chi_q(n)}{n^s} \right|^2 + Q^{-2\sigma} |s|^2 q^2 (\log q)^2 \right)$$

$$\leq |s|^2 Q^2 (\log Q)^2 + (Q^2 + Q^2 |s|^2) \sum_{n=1}^{[Q]} \frac{d^2(n)}{n} \leq Q^2 |s|^2 (\log Q)^2.$$

Ce qui démontre le lemme.

Lemme 4. *Soit m un entier, avec $m \neq 1$. Pour k impair sans facteur carré, l'estimation*

$$\left| \sum_{q}^{*} \chi_q(m) \right| \leq |(m-1, k)|$$

est valable.

Preuve. Pour la preuve, remarquons que si $k = p_1 \cdots p_l$, $p_1 < \cdots < p_l$, g_j est une racine primitive modulo p_j et, de plus, si $mequiv g_j^{\xi_j} (\mathrm{mod}\, p_j)$, $0 \leq \xi_j \leq p_j - 2$, $j = 1, \ldots, l$, alors pour v_j, s fixés avec $1 \leq v_j \leq p_j - 2$, $j = 1, \ldots, l$, les caractères primitifs appartenant au module k sont donnés par $\chi_k^*(m) = e^{2\pi i \left(\frac{v_1 \xi_1}{p_1 - 1} + \cdots + \frac{v_l \xi_l}{p_l - 1} \right)}$. Posons $Z(m, k) = \left| \sum_{\chi_k}^{*} \chi_k(m) \right|$. Nous avons

$$Z(m, k) = \prod_{j=1}^{l} Z(m, p_j) = \prod_{j=1}^{l} \left| \sum_{v_j=1}^{p_j - 2} e^{2\pi i \frac{v_j \xi_j}{p_j - 1}} \right|$$

$$= \prod_{\substack{j=1 \\ p_j \nmid (m-1)}}^{l} (p_j - 2) < \prod_{p_j | (m-1)} p_j = |(m-1, k)|.$$

Ce qui démontre le lemme.

Soit x un entier pair, λ_1 égal à 1, et λ_d égal à 0 pour $d > x^{\frac{1}{3} - \frac{\varepsilon}{2}}$. Posons $g(k) = \frac{1}{\varphi(k)}$, $f(k) = \varphi(k) \prod_{p|k} \frac{p-2}{p-1}$, et

$$\lambda_d = \frac{\mu(d)}{f(d) g(d)} \left\{ \sum_{\substack{1 \leq k \leq x^{\frac{1}{3} - \frac{\varepsilon}{2}} \\ (k, x) = 1}} \frac{\mu^2(k)}{f(k)} \right\}^{-1} \sum_{\substack{1 \leq k \leq x^{\frac{1}{3} - \frac{\varepsilon}{2}} \\ (k, x) = 1,\, d | k}} \frac{\mu^2(k)}{f(k)}$$

pour $1 < d \leq x^{\frac{1}{3}-\frac{\varepsilon}{2}}$. Si d est un entier impair, $\mu(d) \neq 0$, alors nous avons

$$\sum_{\substack{1\leq k\leq x^{\frac{1}{3}-\frac{\varepsilon}{2}}\\(k,x)=1}} \frac{\mu^2(k)}{f(k)} = \sum_{r|d} \sum_{\substack{1\leq k\leq x^{\frac{1}{3}-\frac{\varepsilon}{2}}\\(k,x)=1,\,(k,d)=r}} \frac{\mu^2(k)}{f(k)} = \sum_{r|d} \left\{\frac{1}{\prod_{p|r}(p-2)}\right\} \sum_{\substack{1\leq k\leq x^{\frac{1}{3}-\frac{\varepsilon}{2}}\\(k,x)=1,\,(k,d)=1}} \frac{\mu^2(k)}{f(k)}$$

$$\geq \left\{\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p-2}\right)\right\} \left\{ \sum_{\substack{1\leq k\leq x^{\frac{1}{3}-\frac{\varepsilon}{2}}\\(k,x)=1,\,(k,d)=1}} \frac{\mu^2(k)}{f(k)} \right\}.$$

Ainsi nous avons $|\lambda_d| \leq 1$ pour tous les entiers positifs d. Désignons par x un entier pair satisfaisant $\log x \geq 10^6$. Nous utilisons les notations suivantes :

$$Q = \prod_{x^{\frac{1}{10}} < p \leq x^{\frac{1}{3}}} p,$$

$$\Omega = \sum_{\substack{x^{\frac{1}{10}}<p_1<x^{\frac{1}{3}}<p_2<\left(\frac{x}{p_1}\right)^{\frac{1}{2}}\\ p_1p_2\leq x^{\frac{2}{3}}\\ (x-p_1p_2,Q)=1}} 1, \quad M = \sum_{\substack{x^{\frac{1}{10}}<p_1<x^{\frac{1}{3}}<p_2<\left(\frac{x}{p_1}\right)^{\frac{1}{2}}\\ (x-p_1p_2,Q)=1}} \left(\frac{1}{\log \frac{x}{p_1p_2}}\right) \left(\sum_{\substack{n\leq \frac{x}{p_1p_2}\\(n,Q)=1}} \Lambda(n)\right).$$

Nous avons $\Omega \leq \frac{M}{1-\varepsilon} + N$, où

$$N \ll \sum_{x^{\frac{1}{10}}<p_1<x^{\frac{1}{3}}<p_2<\left(\frac{x}{p_1}\right)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{x}{p_1p_2}\right)^{1-\varepsilon} \ll x^{1-\varepsilon} \int_{x^{\frac{1}{10}}}^{x^{\frac{1}{3}}} \frac{\mathrm{d}S}{S^{1-\varepsilon}} \int_{x^{\frac{1}{3}}}^{\left(\frac{x}{S}\right)^{\frac{1}{2}}} \frac{\mathrm{d}t}{t^{1-\varepsilon}} \ll x^{1-\varepsilon} \int_{x^{\frac{1}{10}}}^{x^{\frac{1}{3}}} \frac{\mathrm{d}S}{S^{1-\frac{\varepsilon}{2}}} \ll x^{1-\frac{\varepsilon}{3}}.$$

Il s'ensuit maintenant du Lemme 1 que

$$M \leq \sum_{x^{\frac{1}{10}}<p_1<x^{\frac{1}{3}}<p_2<\left(\frac{x}{p_1}\right)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{1}{\log \frac{x}{p_1p_2}}\right) \sum_{\substack{n\leq \frac{x}{p_1p_2}\\(x-p_1p_2,n)=1}} \Lambda(n)\Phi\left(\frac{x}{p_1p_2n}\right) + O\left(\frac{x}{(\log x)^{2.01}}\right)$$

$$\leq \sum_{x^{\frac{1}{10}}<p_1<x^{\frac{1}{3}}<p_2<\left(\frac{x}{p_1}\right)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{1}{\log \frac{x}{p_1p_2}}\right) \sum_{\substack{n\leq \frac{x}{p_1p_2}\\(x-p_1p_2,n)=1}} \Lambda(n)\Phi\left(\frac{x}{p_1p_2n}\right) \left(\sum_{\substack{d|(x-p_1p_2n)\\(d,x)=1}} \lambda_d\right)^2$$

$$+O\left(\frac{x}{(\log x)^{2.01}}\right) = \sum_{\substack{(d_1,x)=1\\d_1\leq Q}} \sum_{\substack{(d_2,x)=1\\d_2\leq Q}} \lambda_{d_1}\lambda_{d_2} N_{\substack{d_1d_2\\(d_1,d_2)}} + O\left(\frac{x}{(\log x)^{2.01}}\right), \tag{5}$$

où

$$N_{\substack{d_1d_2\\(d_1,d_2)}} = \sum_{\substack{x^{\frac{1}{10}}<p_1<x^{\frac{1}{3}}<p_2<\left(\frac{x}{p_1}\right)^{\frac{1}{2}}\\ p_1p_2\leq x^{\frac{2}{3}}\\ x-p_1p_2 equiv 0 (\mathrm{mod}\, d_1d_2)}} \left(\frac{1}{\log \frac{x}{p_1p_2}}\right) \sum_{\substack{n\leq \frac{x}{p_1p_2}\\ x-p_1p_2 n equiv 0 (\mathrm{mod}\, \frac{d_1d_2}{(d_1,d_2)})}} \Lambda(n)\Phi\left(\frac{x}{p_1p_2n}\right)$$

$$= \left\{ \frac{1}{\varphi\left(\frac{d_1 d_2}{(d_1,d_2)}\right)} \right\} \sum_{\substack{x^{\frac{1}{10}} < p_1 < x^{\frac{1}{3}} < p_2 < \left(\frac{x}{p_1}\right)^{\frac{1}{2}} \\ p_1 p_2 \leq x^{\frac{2}{3}} \\ (p_1 p_2 n, d_1 d_2)=1}} \left(\frac{1}{\log \frac{x}{p_1 p_2}}\right) \Lambda(n) \Phi\left(\frac{x}{p_1 p_2 n}\right)$$

$$+ \sum_{\substack{\chi_{d_1 d_2} \neq \chi_0 \\ (d_1 d_2)}} \overline{\chi_{d_1 d_2}}(x) \sum_{\substack{x^{\frac{1}{10}} < p_1 < x^{\frac{1}{3}} < p_2 < \left(\frac{x}{p_1}\right)^{\frac{1}{2}} \\ p_1 p_2 \leq x^{\frac{2}{3}} \\ n \leq \frac{x}{p_1 p_2}}} \left(\frac{\Lambda(n)}{\log \frac{x}{p_1 p_2}}\right) \Phi\left(\frac{x}{p_1 p_2 n}\right) \chi_{d_1 d_2}(p_1 p_2 n)$$

$$= \left\{ \frac{1}{\varphi\left(\frac{d_1 d_2}{(d_1,d_2)}\right)} \right\} \sum_{\substack{x^{\frac{1}{10}} < p_1 < x^{\frac{1}{3}} < p_2 < \left(\frac{x}{p_1}\right)^{\frac{1}{2}} \\ p_1 p_2 \leq x^{\frac{2}{3}} \\ (p_1 p_2 n, d_1 d_2)=1}} \left(\frac{1}{\log \frac{x}{p_1 p_2}}\right) \Lambda(n) \Phi\left(\frac{x}{p_1 p_2 n}\right) - \left\{ \frac{1}{2\pi i \varphi\left(\frac{d_1 d_2}{(d_1,d_2)}\right)} \right\}$$

$$\cdot \left\{ \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \left(1 + \frac{\omega}{(\log x)^{1.1}}\right)^{-[\log x]-1} \left(\frac{x^\omega}{\omega}\right) \sum_{\substack{\chi_{d_1 d_2} \neq \chi_0 \\ (d_1 d_2)}} \overline{\chi_{d_1 d_2}}(x) \frac{L'}{L}(\omega, \chi_{d_1 d_2}) \right.$$

$$\left. \cdot \sum_{x^{\frac{1}{10}} < p_1 < x^{\frac{1}{3}} < p_2 < \left(\frac{x}{p_1}\right)^{\frac{1}{2}}} \chi_{d_1 d_2}(p_1 p_2) \cdot \left(\frac{1}{\log \frac{x}{p_1 p_2}}\right) \left(\frac{\mathrm{d}d\omega}{\omega}\right) \right\}. \tag{6}$$

Nous désignons par $\nu(d)$ le nombre de facteurs premiers de d. Pour un caractère χ_d, soit d^* son conducteur et χ_d^* le caractère primitif correspondant. Nous utilisons les notations suivantes :

$$M_1 = \sum_{\substack{(d_1,x)=1 \\ (d_2,x)=1}} \sum_{\substack{(d_1,x)=1 \\ (d_2,x)=1}} \frac{\lambda_{d_1} \lambda_{d_2}}{\varphi\left(\frac{d_1 d_2}{(d_1,d_2)}\right)} \sum_{\substack{x^{\frac{1}{10}} < p_1 < x^{\frac{1}{3}} < p_2 < \left(\frac{x}{p_1}\right)^{\frac{1}{2}} \\ p_1 p_2 \leq x^{\frac{2}{3}} \\ n \leq \frac{x}{p_1 p_2}}} \left(\frac{1}{\log \frac{x}{p_1 p_2}}\right) \Lambda(n) \Phi\left(\frac{x}{p_1 p_2 n}\right),$$

$$M_2 = \sum_{\substack{d \leq x^{\frac{1}{3}-\varepsilon} \\ (d,x)=1}} \frac{|\mu(d)| 3^{\nu(d)}}{\varphi(d)} \left| \sum_{\chi_d \neq \chi_0} \overline{\chi_d^*}(x) \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \left(\frac{x^\omega}{\omega}\right) \left(1 + \frac{\omega}{(\log x)^{1.1}}\right)^{-[\log x]-1} \right.$$

$$\left. \cdot \frac{L'}{L}(\omega, \chi_d^*) \sum_{\substack{x^{\frac{1}{10}} < p_1 < x^{\frac{1}{3}} < p_2 < \left(\frac{x}{p_1}\right)^{\frac{1}{2}} \\ (p_1 p_2, d)=1}} \chi_d^*(p_1 p_2) \left((p_1 p_2)^\omega \log \frac{x}{p_1 p_2}\right)^{-1} \mathrm{d}d\omega \right|.$$

Lemme 5. *Soit x un entier pair. Alors nous obtenons*

$$\Omega \leq \frac{M_1 + M_2}{1-\varepsilon} + O\left(\frac{x}{(\log x)^{2.01}}\right).$$

Preuve. De (5) et (6) nous avons

$$M \leq M_1 + |M_3| + M_4 + O\left(\frac{x}{(\log x)^{2.01}}\right), \tag{7}$$

où

$$M_3 = \sum_{\substack{(d_1,x)=1\\(d_2,x)=1}} \sum_{\substack{(d_1,x)=1\\(d_2,x)=1}} \frac{\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}}{\varphi\left(\frac{d_1d_2}{(d_1,d_2)}\right)} \sum_{\substack{x^{\frac{1}{10}}<p_1<x^{\frac{1}{3}}<p_2<\left(\frac{x}{p_1}\right)^{\frac{1}{2}}\\ p_1p_2\leq x^{\frac{2}{3}}\\ (d_1d_2,p_1p_2)>1}} \left(\frac{1}{\log\frac{x}{p_1p_2}}\right)\Lambda(n)\Phi\left(\frac{x}{p_1p_2n}\right),$$

$$M_4 = \sum_{\substack{(d_1,x)=1\\(d_2,x)=1}} \sum_{\substack{(d_1,x)=1\\(d_2,x)=1}} \left(-\frac{\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}}{2\pi i\varphi\left(\frac{d_1d_2}{(d_1,d_2)}\right)}\right) \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \left(\frac{x^\omega}{\omega}\right)\left(1+\frac{\omega}{(\log x)^{1.1}}\right)^{-[\log x]-1}$$

$$\cdot \sum_{\substack{\chi_{d_1d_2}\neq\chi_0\\(d_1d_2)}} \overline{\chi_{d_1d_2}}(x)\frac{L'}{L}(\omega,\chi_{d_1d_2}) \sum_{\substack{x^{\frac{1}{10}}<p_1<x^{\frac{1}{3}}<p_2<\left(\frac{x}{p_1}\right)^{\frac{1}{2}}\\(p_1p_2,d)=1}}$$

$$\cdot \left(\frac{1}{(p_1p_2)^\omega\log\frac{x}{p_1p_2}}\right)\chi_{d_1d_2}(p_1p_2)\mathrm{d}\mathrm{d}\omega.$$

Nous allons maintenant estimer la somme M_3. Nous avons

$$M_3 \ll x^\varepsilon \sum_{d\leq x^{\frac{1}{3}-\varepsilon}} \frac{1}{d} \sum_{\substack{x^{\frac{1}{10}}<p_1<x^{\frac{1}{3}}<p_2<\left(\frac{x}{p_1}\right)^{\frac{1}{2}}\\ p_1p_2\leq x^{\frac{2}{3}}\\ (d,p_1p_2)>1}} \Lambda(n) \ll \sum_{\substack{x^{\frac{1}{10}}<p_1<x^{\frac{1}{3}}<p_2<\left(\frac{x}{p_1}\right)^{\frac{1}{2}}\\ p_1p_2\leq x^{\frac{2}{3}}}} \left(\frac{x^{1+\varepsilon}}{p_1p_2}\right)\left(\sum_{\substack{d\leq x^{\frac{1}{3}-\varepsilon}\\ p_1|d}}\frac{1}{d}\right)$$

$$+ \sum_{\substack{d\leq x^{\frac{1}{3}-\varepsilon}\\ p_1|d}}\frac{1}{d} + \sum_{\substack{x^{\frac{1}{10}}<p_1<x^{\frac{1}{3}}<p_2<\left(\frac{x}{p_1}\right)^{\frac{1}{2}}\\ p_1p_2\leq x^{\frac{2}{3}}}} \sum_{p\leq\frac{x}{p_1p_2}}(\log p) \sum_{\substack{d\leq x^{\frac{1}{3}-\varepsilon}\\ p|d}}\frac{x^\varepsilon}{d} + x^{1-\varepsilon} \ll x^{1-\varepsilon}. \tag{8}$$

Nous allons maintenant estimer la somme M_4. Soit $d>0$ et $\mu(d)\neq 0$. Le nombre de solutions de l'équation $\frac{d_1d_2}{(d_1,d_2)} = d$, où d_1 et d_2 sont des entiers positifs, est donné par $3^{\nu(d)}$. Puisque $|\lambda_d|\leq 1$, nous obtenons

$$M_4 \leq \sum_{\substack{d\leq x^{\frac{1}{3}-\varepsilon}\\(d,x)=1}} \frac{3^{\nu(d)}|\mu(d)|}{\varphi(d)} \left|\sum_{\chi_d\neq\chi_0} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\left(\frac{x^\omega}{\omega}\right)\left(1+\frac{\omega}{(\log x)^{1.1}}\right)^{-[\log x]-1}\right.$$

$$\cdot\overline{\chi_d^*}(x)\frac{L'}{L}(\omega,\chi_d)\sum_{x^{\frac{1}{10}}<p_1<x^{\frac{1}{3}}<p_2<\left(\frac{x}{p_1}\right)^{\frac{1}{2}}}\chi_d(p_1p_2)\left(\frac{1}{(p_1p_2)^\omega\log\frac{x}{p_1p_2}}\right)\left(\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}\omega}{\omega}\right)\Bigg|.$$

Puisque $\frac{L'}{L}(\omega,\chi_d)=\frac{L'}{L}(\omega,\chi_d^*)+\sum_{\substack{p|d\\p|d^*}}\frac{\chi_d^*(p)\log p}{p^\omega-\chi_d^*(p)}$, il s'ensuit que

$$M_4\le M_2+M_5, \tag{9}$$

où

$$M_5=\sum_{\substack{d\le x^{\frac{1}{3}-\varepsilon}\\(d,x)=1}}\frac{|\mu(d)|3^{\nu(d)}}{\varphi(d)}\Bigg|\sum_{\chi_d\neq\chi_0}\overline{\chi_d^*}(x)\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\left(\frac{x^\omega}{\omega}\right)\left(1+\frac{\omega}{(\log x)^{1.1}}\right)^{-[\log x]-1}$$

$$\cdot\left(\sum_{\substack{p|d\\p|d^*}}\frac{\chi_d^*(p)\log p}{p^\omega-\chi_d^*(p)}\right)\sum_{x^{\frac{1}{10}}<p_1<x^{\frac{1}{3}}<p_2<\left(\frac{x}{p_1}\right)^{\frac{1}{2}}}\chi_d^*(p_1p_2)\left(\frac{1}{(p_1p_2)^\omega\log\frac{x}{p_1p_2}}\right)\mathrm{d}\mathrm{d}\omega\Bigg|.$$

Nous avons $\frac{\chi_d^*(p)}{p^\omega-\chi_d^*(p)}=\sum_{k=1}^\infty\frac{(\chi_d^*(p))^k}{p^{k\omega}}$ lorsque $\mathbb{R}e\omega=2$. Soit y la solution de la congruence $xyequiv1(\mathrm{mod}\,d^*)$. Par le Lemme 4 nous avons

$$\left|\sum_{\chi_d}^*\overline{\chi_d^*}(x)\chi_d(p_1p_2p^k)\right|=\left|\sum_{\chi_d}^*\chi_d(p_1p_2p^ky)\right|$$

$$\le|(p_1p_2p^ky-1,d^*)|=|(x-p_1p_2p^k,d^*)|, \tag{10}$$

lorsque $\lambda\ge1$, $\mu(d^*)\neq0$ et $(d^*,xp_1p_2p^k)=1$.

De (10) et du Lemme 1 nous avons

$$M_5\ll\sum_{\substack{d\le x^{\frac{1}{3}-\varepsilon}\\(d,x)=1}}\frac{|\mu(d)|3^{\nu(d)}}{\varphi(d)}\sum_{\substack{p|d\\p\nmid d^*}}\left(\sum_{k=1}^\infty(\log p)\sum_{\substack{x^{\frac{1}{10}}<p_1<x^{\frac{1}{3}}<p_2<\left(\frac{x}{p_1}\right)^{\frac{1}{2}}\\(p_1p_2,d)=1}}\sum_{\chi_d}^*\overline{\chi_d^*}(x)\chi_d(p_1p_2p^k)\right)$$

$$\cdot\left(\frac{1}{\log\frac{x}{p_1p_2}}\right)\Phi\left(\frac{x}{p_1p_2p^k}\right)\ll\sum_{\substack{d\le x^{\frac{1}{3}-\varepsilon}\\(d,x)=1}}\frac{|\mu(d)|3^{\nu(d)}}{\varphi(d)}\sum_{\substack{p|d\\p\nmid d^*}}\frac{1}{p}\sum_{\substack{x^{\frac{1}{10}}<p_1<x^{\frac{1}{3}}<p_2<\left(\frac{x}{p_1}\right)^{\frac{1}{2}}\\(p_1p_2,d)=1}}$$

$$\cdot\sum_{1\le k\le(\log\frac{x}{p_1p_2})/(\log p)}(\log p)\left(\frac{(x-p_1p_2p^k,d^*)}{p_1p_2p^k}\right)\ll\sum_{\substack{k_1,k_2\le x^{\frac{1}{3}-\varepsilon}\\(k_1,k_2x)=1}}\frac{|\mu(k_1)||\mu(k_2)|x^{\frac{1}{3}}}{\varphi(k_1)\varphi(k_2)}$$

$$\cdot \sum_{\substack{k_1\le x^{\frac13-\varepsilon}\\ k_1\le(\log\frac{x}{p_1p_2})/(\log p)}} \sum_{\substack{x^{\frac{1}{10}}<p_1<x^{\frac13}<p_2<\left(\frac{x}{p_1}\right)^{\frac12}\\ (p_1p_2,d)=1}} ((x-p_1p_2p^k,k_1)) \ll x^{\frac23} \sum_{\substack{k_1\le x^{\frac13-\varepsilon}\\ (k_1,x)=1}}$$

$$\cdot\frac{1}{k_1} \sum_{\substack{k_1\le x^{\frac13-\varepsilon}\\ k_1\le(\log\frac{x}{p_1p_2})/(\log p)}} \sum_{\substack{x^{\frac{1}{10}}<p_1<x^{\frac13}<p_2<\left(\frac{x}{p_1}\right)^{\frac12}\\ (p_1p_2,d)=1}} (x-p_1p_2p^k,k_1) \sum_{\substack{k_1\le x^{\frac13-\varepsilon}\\ k_1 equiv 0(\mathrm{mod}\, p)}} \frac{1}{k_1} \ll x^{\frac23} \sum_{x^{\frac{1}{10}}<p_1<x^{\frac13}<p_2<\left(\frac{x}{p_1}\right)^{\frac12}}$$

$$\cdot\frac{1}{p} \sum_{d|(x-p_1p_2p^k)} d \sum_{\substack{k_1\le x^{\frac13-\varepsilon}\\ k_1 equiv 0(\mathrm{mod}\, d)}} \frac{1}{k_1} \ll x^{1-\varepsilon}. \tag{11}$$

De (7), (8), (9) et (11) nous complétons la preuve du Lemme 5.

Lemme 6. *Nous avons*

$$M_2 \ll \frac{x}{(\log x)^{2.01}}.$$

Preuve. Posons

$$\Phi(y,\chi) = \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \left(\frac{y^\omega}{\omega}\right)\left(1+\frac{\omega}{(\log x)^{1.1}}\right)^{-[\log x]-1} \frac{L'}{L}(\omega,\chi)\mathrm{d}\omega$$

$$= \int_{1+\frac{1}{\log x}-i\infty}^{1+\frac{1}{\log x}+i\infty} \left(\frac{y^\omega}{\omega}\right)\left(1+\frac{\omega}{(\log x)^{1.1}}\right)^{-[\log x]-1} \frac{L'}{L}(\omega,\chi)\mathrm{d}\omega.$$

Alors il s'ensuit

$$M_2 \le \sum_{1\le\xi\le\frac12-\varepsilon} \left\{ \sum_{\substack{1\le\xi\le\frac12-\varepsilon\\ (d,x)=1}} \frac{\mu(d)}{\varphi(d)} \left| \sideset{}{^*}\sum_{\chi_d} \overline{\chi_d}(x) \sum_{\substack{x^{\frac{1}{10}}<p_1<x^{\frac13}<p_2<\left(\frac{x}{p_1}\right)^{\frac12}\\ (p_1p_2,d)=1}} \left(\frac{1}{\log\frac{x}{p_1p_2}}\right) \right.\right.$$

$$\left.\left. \cdot\Phi\left(\frac{x}{p_1p_2},\chi_d\right)\chi_d(p_1p_2)\right| \le \sum_{\substack{1\le\xi\le\frac12-\varepsilon\\ (d,x)=1}} \frac{\mu(d)}{\varphi(d)} \left|\frac{1}{\log\frac{x}{p_1p_2}}\right| \right.$$

$$\cdot \left\{ \sum_{\substack{1\le\xi\le\frac12-\varepsilon\\ (d,x)=1}} \frac{\mu(d)}{\varphi(d)} \left| \sideset{}{^*}\sum_{\chi_d} \sum_{\substack{x^{\frac{1}{10}}<p_1<x^{\frac13}<p_2<\left(\frac{x}{p_1}\right)^{\frac12}\\ (p_1p_2,d)=1}} \left(\frac{1}{\log\frac{x}{p_1p_2}}\right) \right.\right.$$

$$\left.\left. \cdot\Phi\left(\frac{x}{p_1p_2},\chi_d\right)\chi_d(p_1p_2)\right| \right\}.$$

Nous avons

$$\sum_{1<\xi\leq\frac{1}{2}-\varepsilon}\frac{3^{\nu(d)}|\mu(d)|}{\varphi(d)}\ll(\log x)\sum_{d\leq x^{\frac{1}{3}-\varepsilon}}d\ll(\log x)^{\gamma},$$

où $\tau(l)=\sum_{d|l}1$. Par conséquent nous avons

$$M_2\ll(\log x)^{\alpha}\max N_m,$$

où

$$N_m=\sum_{1\leq\xi\leq\frac{1}{2}-\varepsilon}\frac{|\mu(d)|3^{\nu(d)}}{d}\left|\sum_{\chi_d}^{*}\overline{\chi_d}(x)\sum_{\substack{x^{\frac{1}{10}}<p_1<x^{\frac{1}{3}}<p_2<\left(\frac{x}{p_1}\right)^{\frac{1}{2}}\\(p_1p_2,m)=1}}\sum_{(\xi_1,m)}\sum_{(\xi_2)}\sum_{(\xi_2)}\sum_{(\xi_2)}\sum_{(\xi_2)}\sum_{(\xi_2)}\sum_{(\xi_2)}\sum_{(\xi_2)}\sum_{(\xi_2)}\sum_{(\xi_2)}\sum_{(\xi_2)}\sum_{(\xi_2)}\right.$$

$$\left.\cdot\left(\frac{1}{\log\frac{x}{p_1p_2}}\right)\Phi\left(\frac{x}{p_1p_2},\chi_d\right)\chi_d(p_1p_2)\right|.$$

Soit $\sum_{(\xi_1,m)}d$ une somme étendue à tous les nombres premiers p_1,p_2 satisfaisant $x^{\frac{1}{10}}<p_1\leq x^{\frac{1}{3}}<p_2\leq\left(\frac{x}{p_1}\right)^{\frac{1}{2}}$, $x^{30}2^k<p_1p_2\leq x^{30}2^{k+1}$ et $(p_1p_2,m)=1$. Soit I_1 un entier positif satisfaisant l'inégalité $2^{I_1-1}(\log x)^{100}<x^{\frac{1}{2}-\varepsilon}<2^{I_1}(\log x)^{100}$, et soit I_2 égal à $\left[\frac{7\log x}{30\log 2}\right]$. Nous avons

$$N_m\leq\sum_{l=0}^{I_1}\sum_{k=0}^{I_2}N_m^{(l,k)},$$

où

$$N_m^{(0,k)}=\sum_{1\leq\xi\leq\frac{1}{2}-\varepsilon}\frac{|\mu(d)|3^{\nu(d)}}{d}\left|\sum_{\chi_d}^{*}\overline{\chi_d}(x)\sum_{(\xi_1,m)}\left(\frac{1}{\log\frac{x}{p_1p_2}}\right)\Phi\left(\frac{x}{p_1p_2},\chi_d\right)\chi_d(p_1p_2)\right|,$$

$$N_m^{(l,k)}=\sum_{\substack{2^{l-1}(\log x)^{100}<d\leq2^l(\log x)^{100}\\(d,x)=1}}\frac{|\mu(d)|3^{\nu(d)}}{d}$$

$$\cdot\left|\sum_{\chi_d}\frac{\pi_d(x)}{(k,m)}\sum_{(k,m)}\left(\frac{1}{\log\frac{x}{p_1p_2}}\right)\Phi\left(\frac{x}{p_1p_2},\chi_d\right)\chi_d(p_1p_2)\right|\quad\text{pour } l\geq1.$$

Posons $S(H,\omega,\chi_d)=\sum_{n=1}^{H}\frac{\mu(n)\chi_d(n)}{n^{\omega}}$, où $H\ll x$. Pour $\mathbb{R}e\omega\geq1$, nous avons

$$S(H,\omega,\chi_d)\ll\log x,\quad L(\omega,\chi_d)=\sum_{n=1}^{H}\frac{\chi_d(n)}{n^{\omega}}+O\left(\frac{|\omega|d^{\frac{1}{2}}\log d}{H}\right).$$

Pour $\mathbb{R}e\omega\geq1$, nous avons

$$1-L(\omega,\chi_d)S(H,\omega,\chi_d)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_H(n)\chi_d(n)}{n^{\omega}}+O\left(\frac{|\omega|d^{\frac{1}{2}}(\log x)^2}{H}\right),$$

où $C_H(1)=0$, et pour $n>1$, $C_H(n)=-\sum_{d_1,n_1\le d\le H}\mu(d)$, de sorte que $C_H(n)=0$ pour $1\le n\le H$ et $C_H(n)\le\tau(n)$ si $n>H$, et $C_H(n)=0$ pour $n>H$. En appliquant l'inégalité de Schwarz nous obtenons

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_H(n)\chi_d(n)}{n^{\omega}}\right|^2\ll(\log x)\sum_{l=0}^{3l}\left|\sum_{n=2^lH+1}^{2^{l+1}H}\frac{C_H(n)\chi_d(n)}{n^{\omega}}\right|^2, \tag{14}$$

lorsque $H\ll x$. Lorsque $Q\ll x$, de (3), (14), et $\sum_{n\le x}\tau^2(n)\ll x(\log x)^3$ nous avons

$$\sum_{0<d<Q}\frac{1}{\varphi(d)}\sum_{\chi_d}\left|\sum_{n=2^lH+1}^{2^{l+1}H}\frac{C_H(n)\chi_d(n)}{n^{\alpha+i\nu}}\right|^2\ll\left(Q+\frac{2^lH}{D}\right)\sum_{n=2^lH+1}^{2^{l+1}H}\frac{(\tau(n))^2}{n^2}$$

$$\ll\left(\frac{Q}{2^lH}+\frac{1}{D}\right)(\log x)^3,$$

et

$$\sum_{0<d<Q}\frac{1}{\varphi(d)}\sum_{\chi_d}\sum_{n=1}^{\infty}|1-L(\alpha+i\nu,\chi_d)S(H,\alpha+i\nu,\chi_d)|^2$$

$$\ll\sum_{0<d<Q}\frac{1}{\varphi(d)}\sum_{\chi_d}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_H(n)\chi_d(n)}{n^{\alpha+i\nu}}\right|^2+\frac{|\alpha+i\nu|^2Q^2(\log x)^4}{H^2}$$

$$\ll\left(\frac{Q}{H}+\frac{1}{D}+\frac{|\alpha+i\nu|^2Q^2}{H^2}\right)(\log x)^3,$$

où $\alpha=1+\frac{1}{\log x}$. Nous avons

$$\{S(H,\beta+i\nu,\chi_d)\}^2=\sum_{n=1}^{H}\frac{j(n)\chi_d(n)}{n^{\beta+i\nu}}, \tag{16}$$

où $\beta=\frac{1}{2}+\frac{1}{\log x}$ et $|j(n)|\le\tau(n)$.

De (3) et (16) nous avons

$$\sum_{2^{l-1}(\log x)^{100}<d\le2^l(\log x)^{100}}\frac{1}{\varphi(d)}\sum_{\chi_d}\sum_{n=1}^{\infty}|S(H,\beta+i\nu,\chi_d)|^4$$

$$\ll\left(2^l(\log x)^{100}+\frac{H^2}{2^l(\log x)^{100}}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\tau(n))^2}{n}\ll2^l(\log x)^{100}+\frac{H^2}{2^l(\log x)^{100}}\cdot(\log x)^3$$

lorsque $l\ge1$ et $H\ll x$. En utilisant $L'(\omega,\chi_d)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{L(\xi,\chi_d)}{(\xi-\omega)^2}\mathrm{d}\mathrm{d}\xi$ où Γ est un cercle de centre ω et de rayon $(\log x)^{-1}$, nous avons $|L'(\omega,\chi_d)|\ll(\log x)^2\int_\Gamma|L(\xi,\chi_d)|\mathrm{d}\mathrm{d}\xi$. Par l'inégalité de Hölder nous avons $|L'(\omega,\chi_d)|^4\ll(\log x)^5\int_\Gamma|L(\xi,\chi_d)|^4\mathrm{d}\mathrm{d}\xi$. Il s'ensuit du Lemme 3 que

$$\sum_{2^{l-1}(\log x)^{100}<d\le2^l(\log x)^{100}}\left(\frac{1}{\varphi(d)}\right)\sum_{\chi_d}|L'(\beta+i\nu,\chi_d)|^4\ll2^l(\log x)^{100}(|\beta+i\nu|)^2.$$

Nous avons

$$\frac{L'}{L}(\omega,\chi_d)=\left\{\frac{L'}{L}(\omega,\chi_d)\right\}\{1-L(\omega,\chi_d)S(H,\omega,\chi_d)\}+L'(\omega,\chi_d)S(H,\omega,\chi_d). \tag{18}$$

Les notations suivantes sont utilisées :

$$A(l,k,\omega,m,H)=\sum_{2^{l-1}(\log x)^{100}<d\le 2^l(\log x)^{100}}\frac{|\mu(d)|3^{\nu(d)}}{d}$$

$$\cdot\sum_{\chi_d}\left|\sum_{(k,m)}\frac{\chi_d(p_1p_2)}{(p_1p_2)^{\omega}\log\frac{x}{p_1p_2}}\right||1-L(\omega,\chi_d)S(H,\omega,\chi_d)|,$$

$$B(l,k,\omega,m,H)=\sum_{2^{l-1}(\log x)^{100}<d\le 2^l(\log x)^{100}}\frac{|\mu(d)|3^{\nu(d)}}{d}$$

$$\cdot\sum_{\chi_d}\left|\sum_{(k,m)}\frac{\chi_d(p_1p_2)}{(p_1p_2)^{\omega}\log\frac{x}{p_1p_2}}\right||L'(\omega,\chi_d)S(H,\omega,\chi_d)|.$$

Lorsque $l\ge 1$, de (18) nous avons

$$N_m^{(l,k)}\ll x(\log x)^2\int_0^{\infty}\frac{A(l,k,\alpha+i\nu,m,H)}{|\alpha+i\nu|\left(1+\frac{|\alpha+i\nu|}{(\log x)^{1.1}}\right)^{1.1}}\mathrm{d}\mathrm{d}\nu$$

$$+x^{\frac12}\int_0^{\infty}\frac{B(l,k,\beta+i\nu,m,H)}{|\beta+i\nu|\left(1+\frac{|\beta+i\nu|}{(\log x)^{1.1}}\right)^{1.1}}\mathrm{d}\mathrm{d}\nu.$$

Il est évident que

$$3^{\nu(d)}\le \mathrm{e}^{\frac{\log d}{\log\log d}}, \tag{20}$$

lorsque $|\mu(d)|\ne 0$ et d est grand.

Nous traitons maintenant $N_m^{(l,k)}$ en trois cas.

Cas 1. Soit $l\ge 1$. Supposons que l et k satisfont $2^kx^{\frac{1}{10}}>x^{\frac13-\varepsilon}$ ou $x^{\frac13-\varepsilon}\ge 2^kx^{\frac{1}{10}}>2^l(\log x)^{100}$.

Posons

$$H=2^l(\log x)^{100}I_{l,x},\quad \text{où } I_{l,x}=\mathrm{e}^{\frac{\log x\{2^l(\log x)^{100}\}}{\log\log x}}.$$

De (15), (17), (18), (19) et (20) nous avons

$$N_m^{(l,k)}\ll x(\log x)^2\int_0^{\infty}\left\{\sum_{\substack{2^{l-1}(\log x)^{100}<d\le 2^l(\log x)^{100}\\(d,x)=1}}\frac{|\mu(d)|}{d}\sideset{}{^*}\sum_{\chi_d}\left|\sum_{(k,m)}\frac{\chi_d(p_1p_2)}{(p_1p_2)^{\alpha+i\nu}\log\frac{x}{p_1p_2}}\right|^2\right\}^{\frac12}$$

$$\cdot\left\{\sum_{\substack{2^{l-1}(\log x)^{100}<d\le 2^l(\log x)^{100}\\(d,x)=1}}\frac{|\mu(d)|}{d}\sideset{}{^*}\sum_{\chi_d}|1-L(\alpha+i\nu,\chi_d)S(H,\alpha+i\nu,\chi_d)|^2I_{l,x}\right\}^{\frac12}$$

$$\cdot\left(\frac{\mathrm{d}d\nu}{1+\nu^{1.1}}\right)+x^{\frac{1}{2}}(\log x)^4\int_0^\infty\left\{\sum_{\substack{2^{l-1}(\log x)^{100}<d\le 2^l(\log x)^{100}\\(d,x)=1}}\frac{|\mu(d)|}{d}\sum_{\chi_d}^{*}\left|\sum_{(k,m)}\frac{\chi_d(p_1p_2)}{(p_1p_2)^{\beta+i\nu}\log\frac{x}{p_1p_2}}\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}}(I_{l,x})^{\frac{1}{2}}$$

$$\cdot\left\{\sum_{\substack{2^{l-1}(\log x)^{100}<d\le 2^l(\log x)^{100}\\(d,x)=1}}\frac{|\mu(d)|}{d}\sum_{\chi_d}^{*}|L'(\beta+i\nu,\chi_d)|^4\right\}^{\frac{1}{4}}$$

$$\cdot\left\{\sum_{\substack{2^{l-1}(\log x)^{100}<d\le 2^l(\log x)^{100}\\(d,x)=1}}\frac{|\mu(d)|}{d}\sum_{\chi_d}^{*}|S(H,\beta+i\nu,\chi_d)|^4\right\}^{\frac{1}{4}}\left(\frac{\mathrm{d}d\nu}{1+\nu^{1.1}}\right)$$

$$\ll x(\log x)^2\int_0^\infty\left\{\left(2^l(\log x)^{100}+\frac{2^kx^{\frac{1}{10}}}{2^l(\log x)^{100}}\right)\left(\sum_{x^{\frac{1}{10}}<p_1<x^{\frac{1}{3}}<p_2<\left(\frac{x}{p_1}\right)^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{n^2}\right)\frac{2^l(\log x)^{100}}{H}\right.$$

$$+\frac{1}{2^l(\log x)^{100}}+\frac{(1+\nu^2)2^{2l}(\log x)^{200}}{H^2}(I_{l,x})^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\mathrm{d}d\nu}{1+\nu^{1.1}}\right)+x^{\frac{1}{2}}(\log x)^5\int_0^\infty\Big\{\Big(2^l(\log x)^{100}$$

$$\left.+\frac{2^kx^{\frac{1}{10}}}{2^l(\log x)^{100}}\right)I_{l,x}\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{2^l(\log x)^{100}+H^2(\log x)^{100}\right\}^{\frac{1}{4}}(1+\nu^2)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{\mathrm{d}d\nu}{1+\nu^{1.1}}\right)\ll\frac{x}{(\log x)^{20}}. \tag{21}$$

Cas 2. Supposons que l et k satisfont

$$2^kx^{\frac{1}{10}}\le 2^l(\log x)^{100}<2x^{\frac{1}{3}-\varepsilon}.$$

Posons $H=\max\left(x^{\frac{1}{2}-\varepsilon},2^{2k}x^{-\frac{1}{10}}(\log x)^{100}I_{l,x}\right)$, nous avons

$$N_m^{(l,k)}\ll x(\log x)^2\int_0^\infty\left\{\left(2^l(\log x)^{100}+\frac{2^kx^{\frac{1}{10}}}{2^l(\log x)^{100}}\right)\left(\sum_{2^kx^{\frac{1}{10}}<p_1p_2<2^{k+1}x^{\frac{1}{10}}}\frac{1}{n^2}\right)\right.$$

$$\cdot\left(\frac{2^l(\log x)^{100}}{H}+\frac{1}{2^l(\log x)^{100}}+\frac{(1+\nu^2)2^{2l}(\log x)^{200}}{H^2}\right)(I_{l,x})^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\mathrm{d}d\nu}{1+\nu^{1.1}}\right)$$

$$+x^{\frac{1}{2}}(\log x)^4\int_0^\infty\left\{\sum_{\substack{2^{l-1}(\log x)^{100}<d\le 2^l(\log x)^{100}\\(d,x)=1}}\frac{|\mu(d)|}{d}\sum_{\chi_d}^{*}|S(H,\beta+i\nu,\chi_d)|^4\right\}^{\frac{1}{4}}(I_{l,x})^{\frac{1}{4}}$$

$$\left.\cdot\left\{\sum_{\substack{2^{l-1}(\log x)^{100}<d\le 2^l(\log x)^{100}\\(d,x)=1}}\frac{|\mu(d)|}{d}\sum_{\chi_d}^{*}|L'(\beta+i\nu,\chi_d)|^4\right\}^{\frac{1}{4}}\right.$$

$$\cdot\left\{\sum_{\substack{2^{l-1}(\log x)^{100}<d\le 2^l(\log x)^{100}\\(d,x)=1}}\frac{|\mu(d)|}{d}\sum_{\chi_d}^{*}\left(\sum_{(k,m)}\frac{\chi_d(p_1p_2)}{(p_1p_2)^{\beta+i\nu}\log\frac{x}{p_1p_2}}\right)^2\right\}^{\frac12}\left(\frac{\mathrm{d}d\nu}{1+\nu^{1.1}}\right)$$

$$\ll x^{\frac12}(\log x)^{23}\left\{2^l(\log x)^{100}+\frac{H}{2^l(\log x)^{100}}\right\}^{\frac12}(I_{l,x})^{\frac12}(2^l(\log x)^{100})^{\frac12}$$

$$\cdot\left(2^l(\log x)^{100}+\frac{2^{2k}x^{\frac{1}{10}}}{2^l(\log x)^{100}}\right)^{\frac12}\int_0^\infty\frac{(1+\nu^2)^{\frac12}}{1+\nu^{1.1}}\mathrm{d}d\nu+\frac{x}{(\log x)^{20}}\ll\frac{x}{(\log x)^{20}}. \tag{22}$$

Cas 3. Posons $l=0$, et supposons que $0\le k\le I_2$. Soit c une constante positive, et χ_d un caractère primitif. Il est bien connu que

$$L(s,\chi_d)\neq 0,$$

lorsque $\mathbb{R}es\ge 1-\frac{c}{d^{500}}$. Donc nous avons

$$N_m^{(0,k)}\ll\sum_{1<d\le(\log x)^{100}}\frac{3^{\nu(d)}|\mu(d)|}{d}\sum_{\chi_d}^{*}\left|\int_{1-\frac{1}{(\log x)^{1/2}}-i\infty}^{1-\frac{1}{(\log x)^{1/2}}+i\infty}\sum_{(k,m)}\left(\frac{1}{\log\frac{x}{p_1p_2}}\right)\right.$$

$$\left.\cdot\chi_d(p_1p_2)\left(\frac{x}{p_1p_2}\right)^{\omega}\left(1+\frac{\omega}{(\log x)^{1.1}}\right)^{-[\log x]-1}\frac{L'}{L}(\omega,\chi_d)\frac{\mathrm{d}d\omega}{\omega}\right|$$

$$\ll(\log x)^{500}\sum_{x^{\frac{1}{10}}<p_1<x^{\frac13}<p_2<\left(\frac{x}{p_1}\right)^{\frac12}}\left(\frac{x}{p_1p_2}\right)^{1-\frac{1}{(\log x)^{1/2}}}\ll\frac{x}{(\log x)^{20}}. \tag{23}$$

De (12), (13), (21), (22) et (23) nous complétons la preuve du Lemme 6.

Lemme 7. *Soit x un grand entier pair. Alors nous avons*

$$M_1\le\left\{\frac{(8+24\varepsilon)xC_x}{\log x}\right\}\left\{\sum_{x^{\frac{1}{10}}<p_1<x^{\frac13}<p_2<\left(\frac{x}{p_1}\right)^{\frac12}}\frac{1}{p_1p_2\log\frac{x}{p_1p_2}}\right\},$$

où

$$C_x=\prod_{\substack{p>2\\p|x}}\frac{p-1}{p-2}\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right).$$

Preuve. Posons $S=\sum_{\substack{1\le k\le x^{\frac13-\frac{\varepsilon}{2}}\\(k,x)=1}}\frac{\mu^2(k)}{f(k)}$. Alors il s'ensuit

$$\lambda_d g(d)=\left(\frac{1}{S}\right)\sum_{\substack{1\le k\le x^{\frac13-\frac{\varepsilon}{2}}\\(k,x)=1,d|k}}\frac{\mu(kd)\mu(k)}{f(kd)}.$$

Donc, si $(m,x)=1$, nous avons

$$\sum_{\substack{d\le x^{\frac{1}{3}-\frac{\varepsilon}{2}}\\(d,x)=1,m|d}}\lambda_d g(d)=\left(\frac{1}{S}\right)\left(\sum_{\substack{d\le x^{\frac{1}{3}-\frac{\varepsilon}{2}}\\(d,x)=1,m|d}}\sum_{\substack{1\le k\le x^{\frac{1}{3}-\frac{\varepsilon}{2}}\\(k,x)=1,d|k}}\frac{\mu(kd)\mu(k)}{f(kd)}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{S}\right)\sum_{\substack{1\le r\le x^{\frac{1}{3}-\frac{\varepsilon}{2}}\\(r,x)=1}}\frac{\mu(r)}{f(r)}\sum_{m|r}\mu\left(\frac{r}{m}\right)=\frac{\mu(m)}{Sf(m)}.$$

Puisque $\frac{1}{\varphi\left(\frac{d_1d_2}{(d_1,d_2)}\right)}=g(d_1)g(d_2)\sum_{d|(d_1,d_2)}f(d)$, par conséquent nous avons

$$\sum_{\substack{d\le x^{\frac{1}{3}-\frac{\varepsilon}{2}}\\(d_1,x)=1}}\sum_{\substack{d_2\le x^{\frac{1}{3}-\frac{\varepsilon}{2}}\\(d_2,x)=1}}\frac{\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}}{\varphi\left(\frac{d_1d_2}{(d_1,d_2)}\right)}=\sum_{\substack{d_1\le x^{\frac{1}{3}-\frac{\varepsilon}{2}}\\(d_1,x)=1}}\sum_{\substack{d_2\le x^{\frac{1}{3}-\frac{\varepsilon}{2}}\\(d_2,x)=1}}\lambda_{d_1}g(d_1)\lambda_{d_2}g(d_2)\sum_{d|(d_1,d_2)}f(d)$$

$$=\sum_{d\le x^{\frac{1}{3}-\frac{\varepsilon}{2}}}f(k)\left(\sum_{\substack{d\le x^{\frac{1}{3}-\frac{\varepsilon}{2}}\\(d,x)=1}}\lambda_d g(d)\right)^2=\frac{1}{S}. \tag{24}$$

Posons $V_k(x)=\sum_{\substack{n\le x\\(n,k)=1}}\frac{\mu^2(n)}{\varphi(n)}$. Alors nous obtenons

$$\log x\le\sum_{n=1}^{x}\frac{1}{n}\le\sum_{1\le n\le x}\frac{\mu^2(n)}{n}\prod_{p|n}\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{p^l}\right)=\sum_{1\le n\le x}\frac{\mu^2(n)}{n}\prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}$$

$$=V_1(x)=\sum_{d|k}\sum_{\substack{1\le n\le x\\(n,k)=d}}\frac{\mu^2(n)}{\varphi(n)}=\sum_{d|k}\frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)}\sum_{\substack{1\le m\le\frac{x}{d}\\(m,k)=1}}\frac{\mu^2(m)}{\varphi(m)}\le\sum_{d|k}\frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)}V_k(x)$$

$$=\frac{kV_k(x)}{\varphi(k)}.$$

Donc $V_k(x)\ge\frac{\varphi(k)}{k}\log x$ est valable. Posons $\psi(1)=1$ et $\psi(q)=\prod_{p|q}(p-2)$, où $q>2$. Alors nous avons

$$S=\sum_{\substack{1\le k\le x^{\frac{1}{3}-\frac{\varepsilon}{2}}\\(k,x)=1}}\frac{\mu^2(k)}{\psi(k)}\prod_{p|k}\left(1+\frac{1}{p-2}\right)=\sum_{\substack{1\le k\le x^{\frac{1}{3}-\frac{\varepsilon}{2}}\\(k,x)=1}}\frac{\mu^2(k)}{\psi(k)}\sum_{q|k}\frac{1}{\psi(q)}$$

$$=\sum_{\substack{q\le x^{\frac{1}{3}-\frac{\varepsilon}{2}}\\(q,x)=1}}\frac{\mu^2(q)}{\psi(q)\varphi(q)}\sum_{\substack{r\le x^{\frac{1}{3}-\frac{\varepsilon}{2}}\\(r,x)=1}}\frac{\mu^2(r)}{\varphi(r)}\ge\sum_{\substack{q\le x^{\frac{1}{3}-\frac{\varepsilon}{2}}\\(q,x)=1}}\frac{\mu^2(q)}{\psi(q)\varphi(q)}\left\{\frac{\varphi(qx)}{qx}\log\frac{x^{\frac{1}{3}-\frac{\varepsilon}{2}}}{q}\right\}$$

$$=\left(\frac{\varphi(x)}{x}\right)\left(\log x^{\frac{1}{3}-\frac{\varepsilon}{2}}\right)\prod_{p\le x}\left(1+\frac{1}{p(p-2)}\right)+O(1)=\left(\frac{1}{8}-\frac{\varepsilon}{4}\right)\frac{(\log x)}{C_x}+O(1). \tag{25}$$

Lorsque x est un grand entier, de (24) et (25) nous avons

$$M_1 \leq (8+24\varepsilon)C_x(\log x)^{-1} \sum_{\substack{x^{\frac{1}{10}}<p_1<x^{\frac{1}{3}}<p_2<\left(\frac{x}{p_1}\right)^{\frac{1}{2}} \\ n\leq\frac{x}{p_1p_2}}} \sum_{n\leq\frac{x}{p_1p_2}} \left(\frac{\Lambda(n)}{\log\frac{x}{p_1p_2}}\right)\Phi\left(\frac{x}{p_1p_2n}\right). \tag{26}$$

Le Lemme 7 est vrai d'après (26) et le Lemme 1.

Lemme 8. *Soit x un grand entier pair. Alors $Q \leq \frac{3.9404xC_x}{(\log x)^2}$ est valable.*

Preuve. Lorsque x est un grand entier pair, des Lemmes 5, 6 et 7, nous avons

$$Q \leq \left\{\frac{8(1+5\varepsilon)xC_x}{\log x}\right\}\left\{\sum_{x^{\frac{1}{10}}<p_1<x^{\frac{1}{3}}<p_2<\left(\frac{x}{p_1}\right)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{p_1p_2\log\frac{x}{p_1p_2}}\right\}. \tag{27}$$

Nous avons

$$\sum_{x^{\frac{1}{10}}<p_1<x^{\frac{1}{3}}<p_2<\left(\frac{x}{p_1}\right)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{p_1p_2\log\frac{x}{p_1p_2}} \leq (1+\varepsilon)\sum_{x^{\frac{1}{10}}<p_1<x^{\frac{1}{3}}} \int_{x^{\frac{1}{3}}}^{\left(\frac{x}{p_1}\right)^{\frac{1}{2}}} \frac{\mathrm{d}t}{p_1t(\log t)\log\frac{x}{p_1t}}$$

$$\leq (1+2\varepsilon)\int_{x^{\frac{1}{10}}}^{x^{\frac{1}{3}}} \frac{\mathrm{d}S}{S\log S}\int_{x^{\frac{1}{3}}}^{\left(\frac{x}{S}\right)^{\frac{1}{2}}} \frac{\mathrm{d}t}{t(\log t)\left(\log\frac{x}{St}\right)} \leq (1+2\varepsilon)\int_{\frac{1}{10}}^{\frac{1}{3}} \frac{\mathrm{d}\alpha}{\alpha}\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1-\alpha}{2}} \frac{\mathrm{d}\beta}{\beta(1-\alpha-\beta)\log x},$$

$$\int_{\frac{1}{10}}^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}\alpha\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1-\alpha}{2}}\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{1-\alpha-\beta}\right)\mathrm{d}\beta = \int_{\frac{1}{10}}^{\frac{1}{3}} \frac{\log\frac{1-\alpha}{2}-\log\frac{1}{3}-\log\frac{1-\alpha}{2}+\log\left(\frac{2}{3}-\alpha\right)}{\alpha(1-\alpha)}\mathrm{d}\alpha$$

$$= \int_{\frac{1}{10}}^{\frac{1}{3}} \frac{\log(2-3\alpha)}{\alpha(1-\alpha)}\mathrm{d}\alpha = \sum_{i=0}^{5}\int_{\frac{1}{10}+\frac{i}{30}}^{\frac{1}{10}+\frac{i+1}{30}} \frac{\log\left(1.6-\frac{i}{10}\right)}{\alpha(1-\alpha)}\mathrm{d}\alpha + \sum_{i=0}^{5}\int_{\frac{1}{10}+\frac{i}{30}}^{\frac{1}{10}+\frac{i+1}{30}} \frac{\log\frac{2-3\alpha}{\alpha(1-\alpha)}}{\alpha(1-\alpha)}\mathrm{d}\alpha$$

$$\leq \sum_{i=0}^{5}\left\{\log\left(1.6-\frac{i}{10}\right)\right\}\left\{\log\frac{\frac{9}{10}-\frac{i}{30}}{\frac{1}{10}+\frac{i}{30}} - \log\frac{\frac{9}{10}-\frac{i+1}{30}}{\frac{1}{10}+\frac{i+1}{30}}\right\}$$

$$+\sum_{i=0}^{5}\int_{\frac{1}{10}+\frac{i}{30}}^{\frac{1}{10}+\frac{i+1}{30}} \frac{(0.4+0.3i-3\alpha)}{(1.6-0.1i)\alpha(1-\alpha)}\mathrm{d}\alpha \leq \sum_{i=0}^{5}\left\{\log(1.6-0.1i)+\frac{4+i}{16-i}\right\}\left\{\log\frac{27-i}{3+i}\right.$$

$$\left.-\log\frac{26-i}{4+i}\right\} - 3\sum_{i=0}^{5}\int_{\frac{1}{10}+\frac{i}{30}}^{\frac{1}{10}+\frac{i+1}{30}} \frac{\mathrm{d}\alpha}{(1.6-0.1i)(1-\alpha)} = \sum_{i=0}^{5}\left\{\log(1.6-0.1i)+\frac{4+i}{16-i}\right\}$$

$$\cdot\left\{\log\frac{108+23i-i^2}{78+23i-i^2}\right\} - 3\sum_{i=0}^{5}\left(\frac{1}{1.6-0.1i}\right)\left(\log\frac{27-i}{26-i}\right)$$

$$\leq (0.47+0.25)(0.32542)+(0.40547+0.33334)(0.26236)+(0.33647$$

$$+0.42858)(0.22315) + (0.26236 + 0.53847)(0.19671) + (0.18232$$
$$+0.66667)(0.17799) + (0.09531 + 0.81819)(0.16431)$$
$$+0.15415 - 3\left(\frac{0.03774}{1.6} + \frac{0.03922}{1.5} + \frac{0.04082}{1.4} + \frac{0.04256}{1.3} + \frac{0.04445}{1.2}\right.$$
$$\left. + \frac{0.04652}{1.1} + \frac{0.04879}{1.1}\right) \leq 0.234303 + 0.193837 + 0.17073 + 0.15754 + 0.151115$$
$$+0.1501 + 0.15415 - 3(0.023587 + 0.026146 + 0.029157 + 0.032738$$
$$+0.037041 + 0.04229 + 0.04879) \leq 1.21178 - 0.71924 = 0.49254. \tag{28}$$

De (27) et (28) nous complétons la preuve du Lemme 8.

Soit x un grand entier pair et $P_x(x, x^{\frac{1}{2}})$ le nombre de nombres premiers p satisfaisant aux conditions suivantes :

$$p \leq x, \quad p \not\equiv x (\mathrm{mod}\, p_i) \qquad (1 \leq i \leq j),$$

où $3 = p_1 < p_2 < \cdots < p_i \leq x^{\frac{1}{2}}$ est l'ensemble des nombres premiers impairs n'excédant pas $x^{\frac{1}{2}}$. Pour un nombre premier p', soit $P_x(x, p', x^{\frac{1}{2}})$ le nombre de nombres premiers p satisfaisant aux conditions suivantes :

$$p \leq x, \quad p \equiv x (\mathrm{mod}\, p'), \quad p \not\equiv x (\mathrm{mod}\, p_i) \qquad (1 \leq i \leq j),$$

où $p_i, \ldots, p_j$ sont les mêmes que ceux mentionnés ci-dessus.

Lemme 9. *Soit x un grand entier pair. Alors nous avons*

$$P_x(x, x^{\frac{1}{2}}) - \left(\frac{1}{2}\right) \sum_{x^{\frac{1}{10}} < p < x^{\frac{1}{3}}} P_x(x, p, x^{\frac{1}{2}}) \geq \frac{2.648 C_x}{(\log x)^2}.$$

Preuve. En posant $r(p) = \frac{p}{p-1}$, $K = x$ et $z = x^{\frac{1}{2}}$ dans (2.11) de [11], nous voyons que (A1) et (A2) de [11] sont satisfaites. Par conséquent, en appliquant (2.11) de [11], nous obtenons

$$r_x(x^{\frac{1}{2}}) = \frac{x}{\varphi(x)} \prod_{p \neq x} \frac{1 - \frac{1}{p-1}}{1 - \frac{1}{p}} \cdot \frac{\mathrm{e}^{-\gamma}}{\log x^{\frac{1}{2}}} \left\{1 + o\left(\frac{1}{\log x}\right)\right\}$$

$$= \frac{x}{\varphi(x)} \prod_{p \neq x} \frac{(p-1)^2}{p(p-2)} \prod_{p > 2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \frac{\mathrm{e}^{-\gamma}}{\log x^{\frac{1}{2}}} \left\{1 + o\left(\frac{1}{\log x}\right)\right\}$$

$$= \frac{20 \mathrm{e}^{-\gamma} C_x}{\log x} \left\{1 + o\left(\frac{1}{\log x}\right)\right\},$$

où γ désigne la constante d'Euler. Posons

$$F(u) = \frac{2\mathrm{e}^{\gamma}}{u}, \qquad f(u) = 0, \qquad 0 < u \leq 2,$$

$$(uF(u))' = f(u-1), \qquad (uf(u))' = F(u-1), \qquad u \geq 2.$$

Lorsque $2 < u \leq 3$, de (30) nous avons

$$uF(u) = 2F(2), \qquad F(u) = \frac{2\mathrm{e}^{\gamma}}{u}.$$

Nous avons

$$uf(u) = \int_2^u F(t-1)\mathrm{d}\mathrm{d}t = 2\mathrm{e}^{\gamma}\log(u-1), \quad \text{lorsque } 2 < u \leq 4;$$

$$f(u) = \frac{2\mathrm{e}^{\gamma}\log(u-1)}{u}, \quad \text{lorsque } 2 < u \leq 4;$$

$$uF(u) = 2\mathrm{e}^{\gamma} + \int_3^u f(t-1)\mathrm{d}\mathrm{d}t = 2\mathrm{e}^{\gamma}\left(1 + \int_2^{u-1}\frac{\log(t-1)}{t}\mathrm{d}\mathrm{d}t\right), \quad \text{lorsque } 3 \leq u \leq 4;$$

$$5f(5) = 2\mathrm{e}^{\gamma}\log 3 + \int_3^5 F(u-1)\mathrm{d}\mathrm{d}u = 2\mathrm{e}^{\gamma}\left(\log 4 + \int_4^5 \mathrm{d}\mathrm{d}u\int_2^{u-1}\frac{\log(t-1)}{t}\mathrm{d}\mathrm{d}t\right).$$

Posons $\xi^2 = x^{1-\varepsilon}$, $q = 1$ et $z = x^{\frac{1}{10}}$ dans le Théorème A de [11]. De (2.19), (4.18) et (3.24) de [11], et (29) du présent article, nous avons

$$P_x(x, x^{\frac{1}{10}}) \geq \frac{2(1-\sqrt{\mathrm{e}})\mathrm{e}^{-\gamma}xC_xf(5)}{(\log x)(\log x^{\frac{1}{10}})} \geq \left\{\frac{8(1-\sqrt{\mathrm{e}})xC_x}{(\log x)^2}\right\}$$

$$\cdot\left\{\log 4 + \int_3^4 \mathrm{d}\mathrm{d}u\int_2^{u-1}\frac{\log(t-1)}{t}\mathrm{d}\mathrm{d}t\right\}, \tag{31}$$

où x est un grand entier.

Posons à nouveau $\xi^2 = \frac{x^{1-\varepsilon}}{p}$, $q = p$ et $z = x^{\frac{1}{10}}$ dans le Théorème A de [11]. De (2.18), (3.24) et (4.18) de [11] et (29) du présent article, nous avons

$$\sum_{x^{\frac{1}{10}}<p<x^{\frac{1}{3}}} P_x(x, p, x^{\frac{1}{10}}) \leq \left\{\frac{20(1+\sqrt{\mathrm{e}})\mathrm{e}^{-\gamma}xC_x}{(\log x)^2}\right\}\left\{\sum_{x^{\frac{1}{10}}<p<x^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{1}{p}\right)\right.$$

$$\left.\cdot 2\mathrm{e}^{\gamma}\left(1 + \int_2^{4-\frac{10\log p}{\log x}}\frac{\log(t-1)}{t}\mathrm{d}\mathrm{d}t\right)\left(\frac{\log x^{\frac{1}{10}}}{\log\frac{x}{p}}\right) + \sum_{x^{\frac{1}{10}}<p<x^{\frac{1}{3}}}\frac{2\mathrm{e}^{\gamma}\log x^{\frac{1}{10}}}{p\log\frac{x}{p}}\right\}$$

$$\leq \left\{\frac{(4+5\sqrt{\mathrm{e}})xC_x}{\log x}\right\}\left\{\int_{x^{\frac{1}{10}}}^{x^{\frac{1}{3}}}\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}S}{S(\log S)\left(\log\frac{x^{\frac{1}{2}}}{S}\right)}\int_2^{4-\frac{10\log p}{\log x}}\frac{\log(t-1)}{t}\mathrm{d}\mathrm{d}t\right.$$

$$\left. + \int_{x^{\frac{1}{10}}}^{x^{\frac{1}{3}}}\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}S}{S(\log S)\left(\log\frac{x^{\frac{1}{2}}}{S}\right)}\right\} = \left\{\frac{(4+5\sqrt{\mathrm{e}})xC_x}{(\log x)^2}\right\}\left\{\int_{\frac{1}{10}}^{\frac{1}{3}}\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}\alpha}{\alpha\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)}\int_2^{4-10\alpha}\frac{\log(t-1)}{t}\mathrm{d}\mathrm{d}t\right.$$

$$\left. + \int_{\frac{1}{10}}^{\frac{1}{3}}\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}\alpha}{\alpha\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)}\right\} = \left\{\frac{(8+10\sqrt{\mathrm{e}})xC_x}{(\log x)^2}\right\}$$

$$\cdot \left\{ \log 8 + \int_{\frac{1}{10}}^{\frac{1}{3}} \frac{\mathrm{d}\mathrm{d}\alpha}{2\alpha\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)} \int_2^{4-10\alpha} \frac{\log(t-1)}{t} \mathrm{d}\mathrm{d}t \right\}. \tag{32}$$

En posant $4-10\alpha = u-1$, on trouve $\alpha = \frac{5-u}{10}$ et $-\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}\alpha}{\alpha\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)} = -\frac{10\mathrm{d}\mathrm{d}u}{u(5-u)}$.

Nous avons

$$u = 4 \quad \text{lorsque } \alpha = \frac{1}{10};$$
$$u = 3 \quad \text{lorsque } \alpha = \frac{1}{5}.$$

Il s'ensuit donc

$$\int_{\frac{1}{10}}^{\frac{1}{3}} \frac{\mathrm{d}\mathrm{d}\alpha}{\alpha\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)} \int_2^{4-10\alpha} \frac{\log(t-1)}{t} \mathrm{d}\mathrm{d}t = \int_3^4 \frac{10\mathrm{d}\mathrm{d}u}{u(5-u)} \int_2^{u-1} \frac{\log(t-1)}{t} \mathrm{d}\mathrm{d}t.$$

Nous avons

$$\int_3^4 \mathrm{d}\mathrm{d}u \int_2^{u-1} \frac{\log(t-1)}{t} \mathrm{d}\mathrm{d}t - \left(\frac{1}{4}\right) \int_{\frac{1}{10}}^{\frac{1}{3}} \frac{\mathrm{d}\mathrm{d}\alpha}{\alpha\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)} \int_2^{4-10\alpha} \frac{\log(t-1)}{t} \mathrm{d}\mathrm{d}t$$

$$= \int_3^4 \left(\frac{1}{u} - \frac{2.5}{u(5-u)}\right) \mathrm{d}\mathrm{d}u \int_2^{u-1} \frac{\log(t-1)}{t} \mathrm{d}\mathrm{d}t \geq \int_3^4 \left\{\frac{2.5-u}{u(5-u)}\right\} \mathrm{d}\mathrm{d}u$$

$$\cdot \int_2^{u-1} \left(\frac{t-2}{2} + \frac{t-2}{t}\right) \left(\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}t}{t}\right) = \int_3^4 \left\{\frac{2.5-u}{2u(5-u)}\right\} \left(u-3+\frac{4}{u-1}-2\right) \mathrm{d}\mathrm{d}u$$

$$= \int_3^4 \left(\frac{1}{2} - \frac{2.25}{u} - \frac{1}{4(5-u)} + \frac{0.75}{u-1}\right) \mathrm{d}\mathrm{d}u = \frac{1}{2} - 2.25\log\frac{4}{3} - \frac{\log 2}{4}$$

$$+0.75\log\frac{3}{2} = \frac{1}{2} + 0.75\log\frac{9}{8} - 1.5\log\frac{4}{3} - \frac{\log 2}{4}$$

$$\geq 0.588335 - 0.6048075 = -0.0164725, \tag{33}$$

en utilisant

$$\log x \leq \frac{x-1}{2} + \frac{x-1}{1+x} \quad \text{pour } 1 \leq x \leq 2.$$

De (31), (32) et (33), nous avons

$$P_x(x, x^{\frac{1}{10}}) - \left(\frac{1}{2}\right) \sum_{x^{\frac{1}{10}} < p < x^{\frac{1}{3}}} P_x(x, p, x^{\frac{1}{10}}) \geq \left(\frac{(8-50\sqrt{\mathrm{e}})xC_x}{(\log x)^2}\right)$$

$$\cdot \left(\log 4 - \frac{\log 8}{2} - 0.0164725\right) \geq \frac{(8xC_x)(0.3301)}{(\log x)^2},$$

ce qui démontre le Lemme.

3. La preuve de nos résultats principaux

Il est évident que

$$P_x(1,2) \geq P_x(x, x^{\frac{1}{10}}) - \left(\frac{1}{2}\right) \sum_{x^{\frac{1}{10}} < p < x^{\frac{1}{3}}} P_x(x, p, x^{\frac{1}{10}}) - \frac{\Omega}{2} - x^{0.91}. \tag{34}$$

Par (34) et les Lemmes 8 et 9, nous obtenons

$$P_x(1,2) \geq \frac{0.67\, x\, C_x}{(\log x)^2},$$

et le Théorème I s'ensuit.

Par la même méthode que celle utilisée pour estimer $P_x(1,2)$, nous pouvons facilement trouver que

$$x_h(1,2) \geq \frac{0.67\, x\, C_h}{(\log x)^2},$$

et le Théorème II s'ensuit.

Références

[1] Renyi, A. 1948 On the representation of an even number as the sum of a prime and of an almost prime, Hss. AH CCCP, cep. Mat. 12, 57-78.

[2] Pan, Cheng-tung 1962 On the representation of an even number as the sum of a prime and of an almost prime, Acta Mathematica Sinica, 12, 95-106.

[3] Barban M. B. 1961 Fonctions arithmétiques sur des ensembles épars, Doc. Académie des sciences de la RSS d'Ouzbékistan, 8, 9-11.

[4] Wang, Yuan 1962 On the representation of large integer as a sum of a prime and an almost prime, Sci. Sin., 11, 1033-1054.

[5] Pan Cheng-dong 1963 Sur la représentation des nombres pairs comme somme d'un nombre premier et d'un produit n'excédant pas 4 nombres premiers, Sci. Sin., 12, 455–474.

[6] Barban M. B. 1963 La densité des zéros des séries L de Dirichlet et le problème de l'addition des nombres premiers et presque premiers, Mat. Sb., 61, 419–425.

[7] Bukhshtab A. A. 1965 Nouveaux résultats dans l'étude du problème de Goldbach-Euler et du problème des nombres premiers jumeaux, Doc. Akad. Sci. USSR, 162, 739–742.

[8] Vinogradov A. I. 1965 Sur l'hypothèse de densité pour les séries L de Dirichlet, Izv. USSR Academy of Sciences, sec. Mat., 29, 903–934.

[9] Bombieri, E. 1965 On the large sieve, Mathematica, 12, 201-225.

[10] Chen, Jing-run 1966 On the representation of a large even integer as the sum of a prime and the product of at most 2 primes, Kexue Tongbao, 17, 385-386.

[11] Richert, H. E. 1969 Selberg's sieve with weights, Mathematica, 16, 1-22.