Symétrie et équation de Chazy

Peter A. Clarkson
Peter J. Olver

Résumé. Il y a trois différentes actions du groupe de Lie unimodulaire SL(2) sur un espace à deux dimensions. Dans tous les cas, on montre comment une équation différentielle ordinaire admettant SL(2) comme groupe de symétrie peut voir son ordre réduit par trois, et sa solution retrouvée à partir de celle de l'équation réduite via une paire de quadratures et la solution d'une équation linéaire du second ordre. Une exemple particulier est l'équation de Chazy, dont la solution générale peut être exprimée comme un ratio de deux solutions d'une équation hypergéométrique. La méthode de réduction amène à une formule alternative en fonction des solutions à l'équation de Lamé, résultant en une transformation surprenante entre les équations de Lamé et les équations hypergéométriques. Finalement, on discute de l'analyse de Painlevé des singularités de l'équation de Chazy.

1. Introduction.

La plus simple des équations introduite par Chazy, [6], [7], [8], prend la forme

$$y_{xxx} = 2yy_{xx} - 3y_x^2. \tag{1.1}$$

Elle naît de l'étude des équations différentielles du troisième ordre qui ont la "propriété de Painlevé" que leurs solutions ont seulement des pôles pour les singularités mobiles (voir aussi [3],[4]). L'équation de Chazy est importante parce qu'elle est l'exemple le plus simple d'une équation différentielle dont les solutions ont une coupure mobile naturelle. Par coupure naturelle, nous voulons dire une courbe fermée dans le plan complexe au-delà de laquelle la solution ne peut être prolongée analytiquement. Ce phénomène advient d'abord dans le cas des équations du troisième ordre. Dans le cas de l'équation de Chazy, la coupure est un cercle, est ce cercle est mobile dans le sens où sa position dépend des données initiales pour la solution. Chazy a démontré l'existence de coupures mobiles pour (1.1) en reliant ses solutions à celles de l'équation linéaire hypergéométrique

---

P. A. C. : Département de mathématiques de l'Université d'Exeter Exeter, EX4 4QE U.K.
e-mail: clarkson@maths. exeter.ac.uk
Financé en partie par une bourse Nuffield Science et une subvention SERC Grant GR/H39420.
P. J. O. : École de mathématiques, Université du Minnesota Minneapolis, Minnesota, États-Unis, 55455
e-mail: olver@ima.umn.edu
Financé en partie par les subventions NSF DMS 91-16672 et DMS 92-04192.
Reçu le 12 octobre 1994.

Traduction Denise Vella-Chemla, juillet 2022.

$$t(1-t)\frac{d^2\chi}{dt^2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{7}{6}t\right)\frac{d\chi}{dt}+\frac{1}{144}\chi=0 \tag{1.2}$$

Étant données deux solutions indépendantes de cette équation, $\phi(t)$ et $\psi(t)$, définissons la fonction $x(t)$ par $x(t)=\phi(t)/\psi(t)$. Alors $x(t)$ envoie le t-demi-plan supérieur dans l'intérieur d'un triangle sphérique d'angles $0, \frac{1}{2}\pi, \frac{1}{3}\pi$, cf. [18; p. 206]. La fonction inverse $t(x)$ est la fonction Schwarzienne $S(x\ ;\ 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$, qui a une droite ou un cercle comme coupure naturelle et dont le triangle fondamental a également les angles $0, \frac{1}{2}\pi, \frac{1}{3}\pi$. La solution générale de (1.1) est alors donnée par

$$y(x)=\frac{6}{\psi}\frac{d\psi}{dx}=\frac{6}{\psi}\frac{d\psi}{dt}\frac{dt}{dx},$$

et a la même coupure naturelle que $S(x)$. Donc la solution générale de (1.1) a une seule valeur dans son domaine de définition. (En fait, toute solution est analytique soit dans un plan privé d'un point, soit dans un domaine limité par une droite ou un cercle, dont le lieu dépend des constantes d'intégration). De plus, le rayon et le centre de ce cercle peuvent être spécifiés par les "conditions initiales", i.e., en fonction de y, y_x et y_{xx} en un certain point donné x_0, cf. [1].

L'équation de Chazy est profondément reliée à des fonctions automorphes particulières (les fonctions modulaires elliptiques) qui émergent dans de nombreuses branches des mathématiques, en particulier en théorie des nombres (voir, par exemple, [23] pour plus de détails.) Une analyse de Painlevé démontre que l'équation de Chazy possède également trois "résonances négatives" qui suscitent beaucoup d'intérêt actuellement, cf. [10],[11], et § 6 ci-dessous.

Dans les années récentes, l'équation de Chazy (1.1) a eu une importance accrue depuis qu'elle est apparue comme une réduction des équations auto-duales de Yang-Mills (SDYM), [5]. Ward [24] a conjecturé que dans un certain sens, toutes les équations des solitons émergent comme cas particuliers des équations SDYM. À la suite de cela, un grand nombre des équations bien connues des solitons, comme celles de Korteweg de Vries, les équations non linéaires de Schrödinger, celles de sine-Gordon, de Kadomtsev-Petviashvili, de Davey-Stewart fils, et les équations de Painlevé, se sont avérées être des réductions exactes ou asymptotiques des équations SDYM (cf. [1]). Toutes ces équations classiques des solitons émergent lorsqu'on suppose que les potentiels de Yang-Mills prennent des valeurs dans une algèbre de Lie de dimension finie comme $\mathfrak{su}(2)$. Par contraste, l'équation de Chazy émerge quand on suppose que les potentiels de Yang-Mills prennent des valeurs dans l'algèbre de Lie de dimension infinie $\mathfrak{sdiff}(\mathrm{SU}(2))$ de tous les champs de vecteurs "sans-divergence" sur SU(2), [5]; en fait, l'équation de Chazy est peut-être l'équation la plus simple qui émerge d'une algèbre de Lie de dimension infinie. Donc, l'équation de Chazy joue un rôle important dans la théorie des solitons et dans les systèmes intégrables.

On remarque que l'équation de Chazy (1.1) émerge aussi comme réduction des équations de Prandtl stationnaires, incompressibles de la couche limite (cf. [22])

$$\psi_{\eta\eta\eta} = \psi_\eta \psi_{\xi\eta} - \psi_\xi \psi_{\xi\eta}. \tag{1.3}$$

En utilisant la méthode classique de Lie des transformations infinitésimales (cf. [19]) on obtient la réduction de similarité

$$\psi(\xi, \eta) = \xi^\beta y(x), \qquad x = \eta\xi^{\beta-1} + f(\xi),$$

où $f(\xi)$ est une fonction arbitraire. En substituant cela dans (1.3), on obtient

$$y_{xxx} = \beta y y_{xx} - (2\beta - 1) y_x^2,$$

qui, dans le cas particulier $\beta = 2$, est l'équation de Chazy (1.1).

On sait que l'équation de Chazy (1.1) admet un groupe de symétrie à trois dimensions de transformations unimodulaires, avec générateurs infinitésimaux

$$\partial_x, \qquad x\partial_x - y\partial_y, \qquad x^2\partial_x - (2xy + 6)\partial_y. \tag{1.4}$$

Pourtant, sa réduction, utilisant des méthodes de symétrie bien établies, [19], n'est pas aussi directe qu'on pourrait le supposer. Les deux premiers générateurs peuvent être utilisés pour réduire (1.1) à une équation du premier ordre (cf. [14]). Pourtant le troisième générateur ne réduit pas l'équation résultante. Dans cet article, nous montrons que son groupe de symétrie est le plus compliqué des trois actions de groupe unimodulaires connues d'une variété complexe deux-dimensionnelle, telles qu'elles ont été classées par Lie. On décrit une relation simple entre ces trois actions via le processus standard de prolongement, et on l'utilise pour relier entre eux leurs invariants différentiels. La méthode d'intégration connue pour l'action unimodulaire basique peut alors être appliquée pour déterminer une méthode pour résoudre l'équation différentielle ordinaire générale SL(2)-invariante, qui inclut l'équation de Chazy comme cas particulier. Finalement, nous montrons comment les solutions de l'équation de Chazy peuvent être construites à partir de l'équation de Lamé, qui peut être reliée (étonamment) à l'équation hypergéométrique (1.2) par un changement elliptique de variables.

2. Actions planaires du groupe unimodulaire.

Selon la classification de Lie des actions de groupes, [17], il y a précisément trois actions locales non singulières non équivalentes du groupe spécial linéaire trois-dimensionnel ou unimodulaire $\mathcal{U} = SL(2, \mathbb{C})$, avec algèbre de Lie $\mathfrak{u} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, sur toute variété complexe deux-dimensionnelle. Elles sont modélisées par les algèbres de Lie étendues par les champs de vecteurs

$$
\begin{array}{lll}
\{\partial_x, & x\partial_x, & x^2\partial_x\} \\
\{\partial_x, & x\partial_x + u\partial_u, & x^2\partial_x + 2xu\partial_u\} \\
\{\partial_x + \partial_u, & x\partial_x + u\partial_u, & x^2\partial_x + u^2\partial_u\}
\end{array} \tag{2.1}
$$

où $\partial_x \equiv \partial/\partial x$ etc., sur l'espace $M = \mathbb{C}^2$.

Remarque : il y a cinq actions non équivalentes des groupes de Lie simples trois-dimensionnels sur une variété réelle deux-dimensionnelle. Il y a quatre actions différentes du groupe unimodulaire réel SL(2, $\mathbb{R}$), fournies par les trois listées en (2.1) (considérées comme des algèbres de Lie), et l'algèbre supplémentaire de Lie unimodulaire réelle

$$\{\partial_x, \qquad x\partial_x + u\partial_u, \qquad (x^2 - u^2)\partial_x + 2xu\partial_u\}.$$

La cinquième algèbre de Lie

$$\{u\partial_x - x\partial_u, \qquad (1 + x^2 - u^2)\partial_x + 2xu\partial_u, \qquad 2xu\partial_x + (1 - x^2 + u^2)\partial_u\},$$

définit l'action du groupe de rotation SO(3) qui est obtenu à partir de son action naturelle sur la sphère deux-dimensionnelle par projection stéréographique.

À chaque fois qu'on a un groupe de Lie G agissant sur un espace $M \simeq X \times U$, où X représente les variables indépendantes et U les variables dépendantes, il y a une action induite sur la construction du fibré de jet associé $\mathrm{J}^n = \mathrm{J}^n M$, qui est appelé le $n^{\text{ème}}$ prolongement de G, et noté $\mathrm{pr}^{(n)}G$. C'est un fait intéressant que les trois actions de SL(2) soient directement reliées par prolongement. La première algèbre de Lie des champs de vecteurs

$$\mathfrak{u}^{(0)} : \qquad \partial_x, \qquad x\partial_x, \qquad x^2\partial_x, \tag{2.2}$$

engendre la fractionnelle linéaire projective ou action de Möbius

$$\mathcal{U}^{(0)} : \qquad (x, u) \longmapsto \left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, u\right), \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1, \tag{2.3}$$

du groupe unimodulaire. Le premier prolongement de cette action de groupe est engendré par le champ de vecteurs prolongé

$$\mathfrak{u}^{(1)} : \qquad \partial_x, \qquad x\partial_x - v\partial_v, \qquad x^2\partial_x - 2xv\partial_v, \tag{2.4}$$

où on utilise $v = u_x$, pour indiquer la coordonnée de la dérivée. Ces champs de vecteurs forment une algèbre de Lie ayant les mêmes relations de commutation $\mathfrak{sl}(2)$. L'algèbre de Lie (2.4) se projette de façon évidente dans le plan (x, v), définissant ainsi une algèbre de Lie de champs de vecteurs équivalente à la seconde algèbre de Lie dans notre liste (2.1); en effet, l'isomorphisme explicite consiste à remplacer v par $u = 1/v$. L'action de groupe correspondante est

$$\mathcal{U}^{(1)} : \qquad (x, v) \longmapsto \left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, (\gamma x + \delta)^2\, v\right). \tag{2.5}$$

En posant $q = u_{xx}$, le second prolongement des trois champs de vecteurs originaux amène

$$\partial_x, \qquad x\partial_x - v\partial_v - 2q\partial_q, \qquad x^2\partial_x - 2xv\partial_v - (4xq+2q)\partial_q,$$

ayant à nouveau les mêmes relations de commutation que les trois champs de vecteurs originaux. Soit

$$w = \frac{q}{2v} = \frac{v_x}{2v} = \frac{u_{xx}}{2u_x}. \tag{2.6}$$

(Le facteur de $\frac{1}{2}$ est seulement pour raison pratique). En utilisant (x, u, v, w) à la place de (x, u, v, q) sur le sous-ensemble ouvert de J^2 où $v \neq 0$, on voit que le champ de vecteurs a la forme équivalente

$$\partial_x, \qquad x\partial_x - v\partial_v - w\partial_w, \qquad x^2\partial_x - 2xv\partial_v - (2xw+1)\partial_w.$$

À nouveau, on peut projeter cette action sur le sous-espace deux-dimensionnel de coordonnées les x et les w, sur lequel les champs de vecteurs se réduisent à

$$\mathfrak{u}^{(2)}: \qquad \partial_x, \qquad x\partial_x - w\partial_w, \qquad x^2\partial_x - (2xw+1)\partial_w, \tag{2.7}$$

Ces champs de vecteurs étendent une algèbre de Lie isomorphe à la troisième dans la liste (2.1); en effet, la transformation donnée par $u = x + 1/w$ fournit l'isomorphisme explicite. L'action de groupe associée est

$$\mathcal{U}^{(2)}: \qquad (x, w) \longmapsto \left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, (\gamma x + \delta)^2 w + \gamma(\gamma x + \delta) \right). \tag{2.8}$$

Ainsi, les trois actions non équivalentes de SL(2) sur les variétés complexes deux-dimensionnelles émergent d'une origine unique à travers le processus de prolongement. Cela amène l'intéressante question de savoir à quel point ce phénomène est général. Est-ce que les actions (complexes) différentes d'un groupe de transformation donné sont reliées par le processus de prolongement et de projection ?

3. Invariants différentiels.

Rappelons d'abord qu'une fonction valuée par des scalaires $I(x, u^{(n)})$ dépendant de variables dépendantes et indépendantes et de leurs dérivées, qui est invariante par l'action de prolongement de groupe $\mathrm{pr}^{(n)}G$, est appelée *un invariant différentiel* du groupe G. Sur le sous-ensemble de l'espace de jet où le groupe de prolongement agit régulièrement, tout système invariant d'équations différentielles peut être écrit en fonction des invariants différentiels de l'action de groupe. (Le sous-ensemble singulier de l'action de groupe prolongé est aussi déterminé par une équation différentielle G-invariante, dont la forme est explicitement donnée en fonction du déterminant de Lie de G, [17]. Pour des raisons de simplicité, pourtant, on omettra cette analyse ici). Un système complet d'invariants différentiels est construit en utilisant des opérateurs différentiels invariants - voir [20],[21], pour la théorie générale. Dans le cas présent, puisque nous travaillons avec une seule variable dépendante et une seule variable indépendante, nous n'avons besoin que de deux invariants différentiels fonctionnellement indépendants $z = I(x, u^{(n)}), w = J(x, u^{(m)})$; tout autre invariant différentiel peut être déterminé comme une fonction de I, J et les invariants différenciés $d^k z/dw^k = (D_x^k J)/(D_x^k I)$. Lie, [17], a calculé les invariants différentiels fondamentaux pour tous les groupes de transformations complexes dans le plan, incluant les trois copies précédentes de SL(2). La construction des invariants différentiels requis est simplifiée par le lien de prolongement entre ces trois actions.

Cas I : $\mathcal{U}^{(0)}$

Pour la première action du groupe unimodulaire, les deux invariants différentiels fondamentaux sont

$$(3.1) \qquad \mathcal{U}^{(0)} : \qquad u \quad \text{et} \quad s = \frac{u_x u_{xxx} - \frac{3}{2}u_{xx}^2}{u_x^4}.$$

On note que, si on échange les rôles des variables indépendantes et dépendantes, alors le second invariant différentiel fondamental dans l'équation (3.1) devient

$$(3.2) \qquad s = -\frac{x_u x_{uuu} - \frac{3}{2}x_{uu}^2}{x_u^2}$$

qui coïncide avec l'opposé de la dérivée Schwarzienne bien connue invariante par projection, d'importance dans l'application conforme et les autres applications en analyse complexe, [12]. Toute équation différentielle ordinaire du $n^{\text{ème}}$ ordre admettant $\mathcal{U}^{(0)}$ comme groupe de symétrie peut être réécrite sous la forme

$$(3.3) \qquad \frac{d^{n-3}s}{du^{n-3}} = H\left(u, s, \frac{ds}{du}, \ldots, \frac{d^{n-4}s}{du^{n-4}}\right).$$

Ainsi l'équation voit son ordre réduit par 3 ; une fois qu'on connaît la solution $s = F(u)$ de l'équation différentielle ordinaire réduite (3.3), on retrouve la solution de l'équation différentielle ordinaire originale en résolvant l'équation du troisième ordre $\mathcal{U}^{(0)}$-invariante $s = F(u)$, ou, explicitement,

$$(3.4) \qquad u_x u_{xxx} - \frac{3}{2}u_{xx}^2 = u_x^4 F(u).$$

Même si elle admet un groupe de symétrie à trois paramètres, l'équation (3.4) ne peut être explicitement intégrée par quadrature parce que le groupe de symétrie n'est pas résoluble, cf. [19]. Pourtant, comme c'est bien connu, on peut réduire son intégration à la solution d'une équation de Riccati suivie par une paire de quadratures. En utilisant la méthode de réduction de Lie associée au sous-groupe résoluble deux-dimensionnel engendré par ∂_x et $x\partial_x$, on pose

$$(3.5) \qquad z = \frac{u_x}{u_x^2}, \qquad \text{en fonction de quoi} \qquad s = \frac{dz}{du} + \frac{1}{2}z^2.$$

Alors l'équation (3.4) se réduit à l'équation de Riccati

$$\frac{dz}{du} + \frac{1}{2}z^2 = F(u) \tag{3.6}$$

Une fois qu'on a résolu l'équation (3.6) pour $z = z(u)$, on peut retrouver la solution $u = f(x)$ de l'équation (3.4) par une paire de quadratures : d'abord

$$u_x = g(u) = c \exp\left\{\int^u z(\widehat{u})d\widehat{u}\right\}, \tag{3.7}$$

suivie de

$$\int^u \frac{d\widehat{u}}{g(\widehat{u})} = x + k. \tag{3.8}$$

L'équation de Riccati (3.6) peut, bien sûr, être linéarisée. Si on définit $\psi = \sqrt{u_x}$, alors

$$z = \frac{u_{xx}}{u_x^2} = 2\frac{\psi_x}{u_x\psi} = 2\frac{\psi_u}{\psi} = 2(\log\psi)_u.$$

Donc $\psi = \psi(u)$ est une solution de l'équation de Schrödinger du second ordre, homogène, linéaire

$$\frac{d^2\psi}{du^2} - \frac{1}{2}F(u)\psi = 0, \tag{3.9}$$

de potentiel $-\frac{1}{2}F(u)$. Dans ce cas, puisque $u_x = \psi^2$, on retrouve u par une seule quadrature :

$$\int^u \frac{d\widehat{u}}{\psi^2(\widehat{u})} = x + k. \tag{3.10}$$

En fait, cette forme de la solution peut être réexprimée directement en fonction des solutions de l'équation de Schrödinger linéaire. On rappelle que, selon la méthode de variation des paramètres, [13; p. 122], si $\psi(u)$ est une solution de l'équation différentielle linéaire ordinaire (3.9), alors une seconde solution linéairement indépendante, est donnée par

$$\varphi(u) = \psi(u)\int^u \frac{d\widehat{u}}{\psi(\widehat{u})^2}. \tag{3.11}$$

En comparant avec (3.10), on conclut que la solution générale à l'équation $\mathcal{U}^{(0)}$-invariante (3.4) est donnée, paramétriquement, sous la forme

$$x = \frac{\varphi(u)}{\psi(u)}, \tag{3.12}$$

où $\varphi(u)$ et $\psi(u)$ sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation de Schrödinger linéaire (3.9). Ici, on a absorbé la constante d'intégration k dans (3.10) en remplaçant $\varphi(u)$ par $\varphi + k\psi$. Si $\psi_1(u), \psi_2(u)$ dénotent une base de l'espace des solutions de (3.9), alors $\varphi = a\psi_1 + b\psi_2, \psi = c\psi_1 + d\psi_2$, où $ad - bc \neq 0$. De plus, puisqu'on peut toujours annuler un facteur commun dans le rapport (3.12), on peut, sans perte de généralité, supposer que $ad - bc = 1$. Alors la formule (3.12) dépend effectivement de trois constantes arbitraires, et représente effectivement la solution générale de l'équation (3.4).

Finalement, on remarque que, en vue d'identifier l'invariant différentiel s avec la dérivée Schwarzienne (3.2), notre réduction de symétrie de (3.4) fournit également une preuve directe du théorème classique dû à Schwarz (voir [12; Théorème 10.1.1]).

Théorème 3.1. *La solution générale de l'équation Schwarzienne*

$$\frac{x_u x_{uuu} - \frac{3}{2}x_{uu}^2}{x_u^2} = -F(u). \tag{3.13}$$

a la forme

$$x = \frac{\varphi(u)}{\psi(u)}, \tag{3.14}$$

où $\varphi(u)$ et $\psi(u)$ forment deux solutions linéairement indépendantes, mais sinon arbitraires de l'équation linéaire de Schrödinger (3.9).

Cas II : $\mathcal{U}^{(1)}$

Pour la seconde action du groupe unimodulaire, par la relation de prolongement, tout invariant différentiel de $\mathcal{U}^{(0)}$ sera un invariant différentiel de $\mathcal{U}^{(1)}$, *à la condition qu'* il dépende explicitement de u. (Les invariants différentiels dépendant de u fournissent des invariants "non-locaux" de $\mathcal{U}^{(1)}$). Ainsi les invariants différentiels fondamentaux de $\mathcal{U}^{(1)}$ sont les invariants Schwarziens

$$s = \frac{v v_{xx} - \frac{3}{2}v_x^2}{v^4} \tag{3.15}$$

(réécrit en fonction de $v = u_x$) et de sa dérivée.

$$r = \frac{ds}{du} = \frac{v^2 v_{xxx} - 6 v v_x v_{xx} + 6 v_x^3}{v^6}. \tag{3.16}$$

Toute équation différentielle du $n^{\text{ème}}$ ordre admettant $\mathcal{U}^{(1)}$ comme groupe de symétrie peut être réécrite sous la forme

$$\frac{d^{n-3}r}{ds^{n-3}} = H\left(s, r, \frac{dr}{ds}, \dots, \frac{d^{n-4}r}{ds^{n-4}}\right). \tag{3.17}$$

Une fois qu'on connaît la solution $r = G(s)$ de l'équation différentielle ordinaire réduite (3.17), on retrouve la solution de l'équation différentielle ordinaire originale en résolvant l'équation $\mathcal{U}^{(1)}$-invariante du troisième ordre $r = G(s)$, ou, explicitement,

$$v^2 v_{xxx} - 6 v v_x v_{xx} + 6 v_x^3 = v^6 G\left(\frac{v v_{xx} - \frac{3}{2}v_x^2}{v^4}\right). \tag{3.18}$$

En rappelant que $r = ds/du$, on peut intégrer l'équation (3.18) une fois pour obtenir

$$H(s) = \int^s \frac{d\widehat{s}}{G(\widehat{s})} = u + k \tag{3.19}$$

qui, une fois résolu pour $s = F(u)$, se réduit à l'équation du troisième ordre $\mathcal{U}^{(0)}$-invariante (3.4), une équation que nous savons résoudre en fonction d'une paire de quadratures et d'une équation de Riccati. Ainsi, l'équation du troisième ordre originale (3.18) peut être intégrée en utilisant une équation de Riccati et trois quadratures. Alternativement, la solution (3.12) basée sur l'équation de Schrödinger linéaire (3.9) peut aussi effectivement être utilisée dans ce cas. On doit calculer

$$v = u_x = \frac{1}{x_u} = \frac{\psi(u)^2}{\omega}, \tag{3.20}$$

où

$$\omega = \varphi\psi_u - \varphi_u\psi \tag{3.21}$$

dénote le Wronskien des deux solutions $\varphi(u)$ et $\psi(u)$ de (3.9), qui, par la formule d'Abel, est constant. Donc, la solution générale de l'équation $\mathcal{U}^{(1)}$-invariante (3.18) peut être réécrite sous forme paramétrique comme

$$x = \frac{\varphi(u)}{\psi(u)}, \qquad v = \frac{\psi(u)^2}{\omega}. \tag{3.22}$$

Cela vaut la peine de remarquer, pourtant, que l'on peut éviter l'introduction d'une variable auxiliaire u par une réduction plus directe de (3.18). Selon l'équation (3.5), si on pose $z = v_x/v^2$, alors

$$\frac{dz}{ds} = \frac{z_u}{s_u} = \frac{s - \frac{1}{2}z^2}{r} = \frac{s - \frac{1}{2}z^2}{G(s)}, \tag{3.23}$$

qui est une équation de Riccati pour z comme fonction de s. Une fois qu'on a résolu (3.23) pour $z = A(s)$, et inversé pour trouver $s = B(z)$, alors on peut trouver comment v dépend de x en résolvant l'équation du second ordre

$$vv_{xx} - \frac{3}{2}v_x^2 = v^4 B(v^{-2}v_x). \tag{3.24}$$

Le fait que l'équation (3.24) soit invariante par le groupe à deux paramètres consistant en les translations en x et les mises à l'échelle $(x, v) \mapsto (\lambda x, \lambda^{-1}v)$ implique que l'on peut retrouver $v = g(x)$ par deux quadratures. On trouve

$$v\frac{dz}{dv} = \frac{s - \frac{1}{2}z^2}{z} = \frac{B(z)}{z} - \frac{z}{2},$$

ce qui donne

$$v = C(z) = c \exp\left\{\int^z \frac{\widehat{z}\,d\widehat{z}}{B(\widehat{z}) - \frac{1}{2}\widehat{z}^2}\right\}.$$

En inversant la dernière équation pour trouver $z = D(v)$, on utilise la définition de z pour retrouver

$$E(v) = \int^v \frac{d\widehat{v}}{\widehat{v}^2 D(\widehat{v})} = x + k. \tag{3.25}$$

L'équation alternative de Riccati (3.23) est linéarisée en posant $z = 2G(s)(\log \psi)_s$, en fonction duquel

$$G(s)^2 \frac{d^2\psi}{ds^2} + G'(s)G(s)\frac{d\psi}{ds} - \frac{s}{2}\psi = 0. \tag{3.26}$$

Ainsi on a réduit l'équation originale à une équation apparemment différente linéaire du second ordre. En fait, les deux équations linéaires (3.9) et (3.26) sont la même équation pour la même variable dépendante ψ, mais écrites en fonction de variables indépendantes différentes. En effet, on passe de l'une à l'autre par un changement de variable indépendante $s = F(u)$; selon l'équation (3.18), on a $s_u = F'(u) = G(s)$, et $s_{uu} = F''(u) = G'(s)G(s)$, ce qui prouve l'isomorphisme entre les deux équations linéaires (3.9), (3.26).

Cas III: $\mathcal{U}^{(2)}$

Comme pour la troisième action du groupe unimodulaire, par la relation de prolongement, tout invariant différentiel de $\mathcal{U}^{(1)}$ sera un invariant différentiel de $\mathcal{U}^{(2)}$, *à la condition que*, quand on l'écrit en fonction de $x, u, v = u_x, w = v_x/(2v)$, il ne dépende pas explicitement de v. Notons d'abord que

$$s = 2\frac{w_x - w^2}{v^2}, \qquad r = \frac{ds}{du} = 2\frac{w_{xx} - 6ww_x + 4w^3}{v^3}$$

Ainsi les invariants différentiels fondamentaux de $\mathcal{U}^{(2)}$ sont

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{2}\frac{r}{s^{3/2}} &&= \frac{w_{xx} - 6ww_x + 4w^3}{(w_x - w^2)^{3/2}}, \\ y &= \frac{2}{s^2}\frac{dr}{du} &&= \frac{w_{xxx} - 12ww_{xx} - 6w_x^2 + 48w^2w_x - 24w^4}{(w_x - w^2)^2}. \end{aligned} \tag{3.27}$$

On note qu'on peut remplacer le second invariant par un invariant différentiel légèrement différent

$$y + 24 = \frac{2}{s^2}\frac{dr}{du} + 24 = \frac{w_{xxx} - 12ww_{xx} + 18w_x^2}{(w_x - w^2)^2}. \tag{3.28}$$

N'importe quelle équation différentielle ordinaire du $n^{\text{ème}}$ ordre admettant $\mathcal{U}^{(2)}$ comme groupe de symétrie peut être écrite sous la forme

$$\frac{d^{n-3}y}{dt^{n-3}} = H\left(t, y, \frac{dy}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-4}y}{dt^{n-4}}\right). \tag{3.29}$$

Une fois qu'on connaît la solution $y = K(t)$ de l'équation différentielle ordinaire réduite (3.29), on retrouve la solution de l'équation différentielle ordinaire originale en résolvant l'équation du troisième ordre $\mathcal{U}^{(2)}$-invariante

$$\frac{dr}{du} = s^2 K\left(\frac{r}{s^{3/2}}\right), \tag{3.30}$$

ou, de façon complètement détaillée,

$$w_{xxx} - 12ww_{xx} + 18w_x^2 = (w_x - w^2)^2 \widehat{K}\left(\frac{w_{xx} - 6ww_x + 4w^3}{(w_x - w^2)^{3/2}}\right), \tag{3.31}$$

où

$$\widehat{K}(t) = 2K\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + 24.$$

On peut réécrire l'équation (3.30) sous la forme

$$\frac{r}{s^2}\frac{dr}{ds} = K\left(\frac{r}{s^{3/2}}\right). \tag{3.32}$$

L'équation (3.32) peut être intégrée une fois comme conséquence de son invariance sous le groupe de mise à l'échelle à un paramètre $(s, r) \mapsto (\lambda s, \lambda^{3/2} r)$. En posant $t = r/s^{3/2}$, on trouve que (3.32) devient

$$s\frac{dt}{ds} = \frac{K(t)}{t} - \frac{3t}{2}, \tag{3.33}$$

par conséquent $t = M(s)$ est trouvé par quadrature :

$$s = L(t) = c \exp\left\{\int^t \frac{2\widehat{t}d\widehat{t}}{2K(\widehat{t}) - 3\widehat{t}^2}\right\}. \tag{3.34}$$

En inversant, cela amène à l'équation $\mathcal{U}^{(1)}$-invariante

$$r = s^{3/2} M(s),$$

cf. l'équation (3.18), et ainsi on peut la résoudre par une équation de Riccati. Donc la solution de l'équation originale $\mathcal{U}^{(2)}$-invariante (3.31) peut être trouvée en résolvant l'équation de Riccati associée ainsi qu'en effectuant trois ou quatre quadratures. Alternativement, on utilise la solution (3.12) basée sur l'équation de Schrödinger linéaire (3.9), alors, en utilisant (3.20),

$$w = \frac{v_x}{2v} = \frac{\psi_x}{\psi} = \frac{\psi\psi_u}{\omega}. \tag{3.35}$$

Ainsi, la solution générale de l'équation $\mathcal{U}^{(2)}$-invariante (3.30) peut être exprimée sous la forme paramétrique

$$x = \frac{\varphi(u)}{\psi(u)}, \qquad w = \frac{\psi_x}{\psi} = \frac{\psi\psi_u}{\omega}, \tag{3.36}$$

où $\varphi(u)$ et $\psi(u)$ forment deux solutions de l'équation linéaire du second ordre (3.9), et ω est leur Wronskien, cf. (3.21).

Ceci complète notre analyse de la réduction des équations différentielles ordinaires (complexes) admettant un groupe unimodulaire de symétries. Nous avons montré que, dans tous les cas, une équation du $n^{\text{ème}}$ ordre invariante par SL(2) peut voir son ordre réduit par 3. De plus, les solutions de l'équation originale peuvent, dans tous les cas, être retrouvées à partir de celles de l'équation réduite via des quadratures et la solution d'une équation de Riccati, ou, de façon équivalente, par une équation différentielle ordinaire linéaire du second ordre.

4. L'équation de Chazy.

Dans cette étude des équations différentielles du troisième ordre ayant la propriété de Painlevé, Chazy, [8], a été amené à la famille remarquable d'équations

$$y_{xxx} = 2yy_{xx} - 3y_x^2 + \alpha(6y_x - y^2)^2. \tag{4.1}$$

Chazy a montré que quand

$$\alpha = 0, \qquad \text{ou} \qquad \alpha = \frac{4}{36-k^2}, \qquad \text{où} \qquad 6 < k \in \mathbb{N}, \tag{4.2}$$

alors les solutions non triviales $y = f(x)$ à (4.1) ont une coupure naturelle circulaire mobile. C'est une conséquence du théorème suivant.

Théorème 4.1. *Supposons que $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ soient deux solutions arbitraires linéairement indépendantes de l'équation hypergéométrique*

$$t(1-t)\frac{d^2\chi}{dt^2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{7}{6}t\right)\frac{d\chi}{dt} - \sigma\chi = 0. \tag{4.3}$$

Alors

$$x = \frac{\varphi(t)}{\psi(t)}, \qquad y = \frac{6}{\psi(t)}\frac{d\psi}{dx} = \frac{6\psi(t)}{\omega}\frac{d\psi}{dt}, \tag{4.4}$$

où $\omega = \psi\varphi_t - \varphi\psi_t$, paramètre la solution générale $y = f(x)$ de l'équation de Chazy (4.1) avec comme valeur du paramètre

$$\sigma = \frac{1}{144(1-9\alpha)}. \tag{4.5}$$

En particulier, les cas

$$\sigma = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{36} - \frac{1}{k^2}\right), \tag{4.6}$$

correspondent aux valeurs préférées de Chazy (4.2) pour ses équations du troisième ordre. De façon intéressante, (4.3) émerge dans la théorie de Schwarz des fonctions algébriques hypergéométriques ; en fait, pour $k = 2, 3, 4$, et 5, les valeurs des paramètres (4.6) constituent quatre types d'équations hypergéométriques dont toutes les solutions sont des fonctions algébriques – elles correspondent aux classes de symétrie du triangle diédral, tétraédral, octaédral et icosaédral. Voir Hille, [12; § 10.3], pour les détails sur la théorie de Schwarz.

Chazy a noté que l'équation (4.1) admet un groupe de symétrie unimodulaire, avec générateurs infinitésimaux

$$\partial_x, \qquad x\partial_x - y\partial_y, \qquad x^2\partial_x - (2xy+6)\partial_y. \tag{4.7}$$

(voir aussi [14]). Ce résultat peut aussi être vérifié en utilisant facilement la méthode infinitésimale standard de Lie pour calculer les groupes de symétrie des équations différentielles, [19]. L'algèbre de Lie (4.7) est envoyée vers l'algèbre de Lie $\mathfrak{u}^{(2)}$, donnée en (2.7), par l'application $y = 6w$. Donc, notre méthode d'intégration peut être directement appliquée à l'équation générale de Chazy (4.1). Notons que, sous cette remise à l'échelle, l'équation de Chazy (4.1) s'avère être la plus simple équation $\mathcal{U}^{(2)}$-invariante de la forme générale (3.31), où

$$K = 12(9\alpha - 1), \qquad \text{ou} \qquad \widehat{K} = 216\,\alpha,$$

est une fonction constante. Nous discutons maintenant de la façon dont s'applique la technique générale de réduction au cas particulier de l'équation de Chazy.

D'abord, en fonction des invariants différentiels fondamentaux r, s, l'équation de Chazy prend la forme

$$\frac{r}{s^2}\frac{dr}{ds} = 12(9\alpha - 1). \tag{4.8}$$

L'équation (4.8) peut être directement résolue, en produisant $r^2 = 8(9\alpha - 1)s^3 + c$, où c est une constante d'intégration. Ainsi, si on introduit le paramètre u de telle façon que $r = ds/du$, on voit que

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = 8(9\alpha - 1)s^3 + c. \tag{4.9}$$

Donc, si $\alpha \neq \frac{1}{9}$ et $\wp$ dénotent la fonction elliptique de Weierstrass avec paramètres $g_2 = 0, g_3 = -4c(9\alpha - 1)^2$, alors

$$s(u) = \frac{\wp(u+k)}{2(9\alpha - 1)}.$$

L'équation linéaire du second ordre (3.9) qui en résulte est équivalente à l'équation de Lamé

$$\frac{d^2\psi}{du^2} - \frac{\wp(u+k)}{4(9\alpha-1)}\psi = 0. \tag{4.10}$$

On déduit que si $\varphi(u)$ et $\psi(u)$ forment deux solutions indépendantes de l'équation de Lamé (4.10), alors

$$x = \frac{\varphi(u)}{\psi(u)}, \qquad y = \frac{6}{\psi}\frac{d\psi}{dx}, \tag{4.11}$$

paramètre la solution générale de l'équation de Chazy. Notons que, en vue de la formule de variation des paramètres (3.11), on peut retrouver la seconde solution indépendante $\varphi(u)$ à partir de la première solution $\psi(u)$ en utilisant une simple quadrature.

D'autre part, si $\alpha = \frac{1}{9}$ (i.e., $k = 0$), l'équation du second ordre analogue est l'équation de Airy

$$\frac{d^2\psi}{du^2} - \frac{1}{2}cu\psi = 0. \tag{4.12}$$

On vérifie facilement que si $\varphi(u)$ et $\psi(u)$ sont n'importe quelles deux solutions linéairement indépendantes de (4.12), alors $y(x)$ comme défini par (4.11) satisfait l'équation (4.1) avec $\alpha = \frac{1}{9}$. Il s'avère que ce résultat n'a pas été écrit précédemment. On laisse l'analyse suivante de ce cas particulier au lecteur.

L'équation de Schwarz hypergéométrique (4.3) est directement reliée à l'équation de Lamé (4.10). En effet, supposons que soit donnée une équation linéaire du second ordre

$$f(t)\frac{d^2\psi}{dt^2} + g(t)\frac{d\psi}{dt} + h(t)\psi = 0.$$

Si l'on fait un changement de la variable indépendante $u = \mu(t)$, alors l'équation devient

$$f(t)\left(\frac{du}{dt}\right)^2\frac{d^2\psi}{du^2} + \left[f(t)\frac{d^2u}{dt^2} + g(t)\frac{du}{dt}\right]\frac{d\psi}{du} + h(t)\psi = 0$$

En particulier, si on choisit u de telle façon que

$$\frac{du}{dt} = \exp\left\{\int^t \frac{g(\hat{t})}{f(\hat{t})}d\hat{t}\right\}, \tag{4.13}$$

alors le terme de la première dérivée s'évanouit, et l'équation prend la forme de Schrödinger (3.9) avec

$$F(u) = -2\frac{h(t)}{f(t)}\left(\frac{dt}{du}\right)^2. \tag{4.14}$$

Dans le cas présent, en commençant avec l'équation hypergéométrique (4.3), le changement de variables requis pour la mettre en forme de Schrödinger satisfait

$$\text{(4.15)} \qquad \frac{du}{dt} = \exp\left\{-\int^t \frac{\frac{1}{2} - \frac{7}{6}\widehat{t}}{\widehat{t}(1-\widehat{t})} d\widehat{t}\right\} = \frac{a}{t^{1/2}(1-t)^{2/3}},$$

où a est une constante, donc

$$u(t) = a\int^t \frac{d\widehat{t}}{\widehat{t}^{1/2}(1-\widehat{t})^{2/3}}.$$

La dernière intégrale peut être réécrite comme une intégrale elliptique ; on pose $\widehat{t} = 1 - \tau^3$, de telle façon que

$$\text{(4.16)} \qquad u(t) = -3a\int^{(1-t)^{1/3}} \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^3}}.$$

Le potentiel requis (4.14) est

$$s = F(u) = \frac{2\sigma}{t(1-t)}\left(\frac{dt}{du}\right)^2 = \frac{2\sigma}{a^2}(1-t)^{1/3}.$$

Notons que

$$\frac{ds}{du} = -\frac{2\sigma}{3a^2(1-t)^{2/3}}\frac{dt}{du} = -\frac{2\sigma t^{1/2}}{3a^3},$$

donc

$$\text{(4.17)} \qquad \left(\frac{ds}{du}\right)^2 = \frac{4\sigma^2 t}{9a^6} = -\frac{s^3}{18\sigma} + \frac{4\sigma^2}{9a^6}.$$

Ainsi $s = F(u)$ définit la fonction elliptique correcte de Weierstass, et l'équation de Schrödinger résultante est en accord avec l'équation de Lamé (4.10), à condition que les paramètres σ et α soient reliés par (4.5). Puisque la formule (4.11) reliant la solution de l'équation linéaire à celle de l'équation de Chazy n'est pas affectée par un changement de variable indépendante, le résultat de Chazy dans le théorème 4.1 a été réétabli.

Même si la transformation précédente entre l'équation hypergéométrique et l'équation de Lamé apparaît effectivement dans Kamke, [15; p. 501], son existence nous est apparue comme une surprise. On remarque que l'équation hypergéométrique admet des points singuliers réguliers, alors que l'équation de Lamé a un seul point singulier irrégulier. Par conséquent, il apparaît que l'effet du changement de variable elliptique (4.16) est d'"insérer" un point singulier irrégulier.

5. Quelques considérations générales.

Une question qui émerge de l'analyse précédente est de savoir si elle peut être étendue à d'autres classes d'équations différentielles. Dans cette section, nous investiguons la méthode utilisée par Chazy pour résoudre l'équation (4.1) et déterminons la forme générale d'une équation différentielle résoluble par cette technique. En particulier, nous allons voir que l'équation hypergéométrique (4.3) est le choix naturel pour la méthode de Chazy.

Supposons que $\chi(t)$ soit une solution de l'équation linéaire du second ordre

$$\frac{d^2\chi}{dt^2} = p(t)\frac{d\chi}{dt} + q(t)\chi \tag{5.1}$$

où $p(t)$ et $q(t)$ sont déterminés. On recherche une solution $y(x)$ d'une équation, à présent inconnue, de la forme

$$y(x) = \frac{6}{\chi}\frac{d\chi}{dx} = \frac{6}{\chi}\frac{d\chi}{dt}\frac{dt}{dx}, \tag{5.2}$$

avec

$$\frac{dt}{dx} = \frac{\chi^2(t)}{\omega(t)}, \qquad \omega(t) = \exp\left\{\int^t p(s)ds\right\}. \tag{5.3}$$

Différencier de façon répétée (5.2) amène

$$y_x - \frac{1}{6}y^2 = \frac{6q(t)\chi^4(t)}{\omega^2(t)}, \tag{5.4}$$

$$y_{xx} - yy_x + \frac{1}{9}y^3 = K_2(t)(y_x - \tfrac{1}{6}y^2)^{3/2}, \tag{5.5}$$

$$y_{xxx} - 2yy_{xx} + 3(y_x)^2 = [4 + K_3(t)](y_x - \frac{1}{6}y^2)^2, \tag{5.6}$$

où

$$K_2(t) = \frac{1}{\sqrt{6}q^{3/2}}\left(\frac{dq}{dt} - 2pq\right), \qquad K_3(t) = \frac{1}{6q^2}\left(\frac{d^2q}{dt^2} - 5p\frac{dq}{dt} - 2q\frac{dp}{dt} + 6p^2q\right).$$

Pour que (5.5) soit une équation locale, il est nécessaire que $K_2(t) = c_2$, une constante. Donc, $p(t)$ et $q(t)$ satisfont

$$\frac{dq}{dt} - 2pq = c_2\sqrt{6}q^{3/2}, \tag{5.7}$$

et après avoir effectué le changement de variables

$$\chi(t) = v(z), \qquad \frac{dz}{dt} = \sqrt{q(t)}, \tag{5.8}$$

l'équation (5.1) devient

$$\frac{d^2v}{dz^2} + 2\mu\frac{dv}{dz} - v = 0, \tag{5.9}$$

où $\mu = \frac{1}{4}c_2\sqrt{6}$. Résoudre (5.9) amène la solution générale de (5.5), avec $K_2(t) = 4\mu/\sqrt{6}$ donné par

$$y(x) = \frac{6[(x - x_0) - \mu a]}{(1 + \mu^2)a^2 - (x - x_0)^2},$$

où x_0 et a sont des constantes arbitraires.

Maintenant, considérons l'équation du troisième ordre (5.6). Comme pour (5.5), on pose $K_3(t) = c_3$, une constante, pour obtenir une équation locale. Alors $p(t)$ et $q(t)$ satisfont

$$\frac{d^2q}{dt^2} - 5p\frac{dq}{dt} - 2q\frac{dp}{dt} + 6p^2q = 6c_3q^2,$$

qui est une équation de Riccati pour $p(t)$ et a comme solution

$$p(t) = \frac{1}{2q(t)}\frac{dq}{dt} - \frac{1}{3}\sqrt{q(t)}\,\cot\left(\mu\int^t\sqrt{q(s)}ds\right), \tag{5.10}$$

où $c_3 = -\frac{1}{9}\mu^2$. Alors, par analogie avec le cas du second ordre, en faisant subir la transformation (5.8) à (5.1), avec $p(t)$ donné par (5.10), on obtient

$$\frac{d^2v}{dz^2} + \frac{1}{3}\mu\cot(\mu z)\frac{dv}{dz} - v = 0. \tag{5.11}$$

Finalement, poser $s = cos^2(\mu z)$ amène l'équation hypergéométrique

$$s(1-s)\frac{d^2v}{ds^2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{7}{6}s\right)\frac{dv}{dz} - \left(\frac{1}{144} - \frac{1}{4k^2}\right)v = 0, \tag{5.12}$$

où $\mu^2 = 36k^2/(k^2 - 36)$.

Cette méthode de résolution d'une équation différentielle ordinaire non linéaire en fonction du quotient des solutions d'une équation linéaire du second ordre peut être généralisée à des équations d'ordres supérieurs, [9]. De plus, les équations de la hiérarchie qui sont engendrées dans [9] s'avèrent être également résolubles en fonction de fonctions modulaires, [23].

6. Analyse de Painlevé.

Dans cette section, on discute de la structure des singularités des solutions de l'équation de Chazy en utilisant une analyse de Painlevé. On prend l'équation de la forme

$$y_{xxx} = 2yy_{xx} - 3y_x^2 + \frac{4}{36 - k^2}(6y_x - y^2)^2, \tag{6.1}$$

qui est (4.1) avec $\alpha = 4/(36 - k^2)$, sous condition que $k \neq 6$ (on supposera sans perte de généralité que $k \geq 0$). Une équation différentielle ordinaire est dite vérifier la propriété de Painlevé si ses solutions sont à valeur unique au voisinage de ses points singuliers mobiles. On remarque qu'on établit souvent qu'une équation différentielle ordinaire vérifie la propriété de Painlevé si ses solutions n'ont pas de points singuliers mobiles exceptés les pôles, bien que ceci ne soit pas au sens strict la définition fournie par Painlevé lui-même (cf. [10],[16]).

Dans le but de déterminer si (6.1) vérifie la propriété de Painlevé, on applique l'algorithme dû à Ablowitz, Ramani et Segur [2]. On cherche une solution de (6.1) au voisinage d'un point arbitraire x_0 de la forme d'une série de Laurent

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{n+\rho}, \tag{6.2}$$

où $\rho, a_n, n = 0, 1, 2, \ldots$, sont des constantes à déterminer telles que $a_0 \neq 0$. Mener une analyse de l'ordre montre que l'équilibre dominant maximal a lieu quand $\rho = -1$ et qu'il y a trois ordres dominants possibles : $a_0 = -6, -3+\frac{1}{2}k, -3-\frac{1}{2}k$. En substituant

$$y(x) = \frac{a_0}{x - x_0} + \beta(x - x_0)^{r-1},$$

dans (6.1), il est facile de montrer que ce qu'on nomme les *résonances* sont

dans le cas (a), $r = -1, -2, -3$ si $a_0 = -6$,

dans le cas (b), $r = -1, 1, k$ si $a_0 = -3 + \frac{1}{2}k$, et

dans le cas (c), $r = -1, 1, -k$ si $a_0 = -3 - \frac{1}{2}k$.

Le cas (a) correspond à l'occurrence bien connue des trois "résonances négatives" pour l'équation (6.1). Bien que ce phénomène ait été connu de Chazy, selon nous, de telles résonances négatives n'ont toujours pas été complètement expliquées et elles attirent actuellement un intérêt considérable. Fordy et Pickering, [11], ont proposé un critère basé sur l'analyse de type Fuchsien, le "test de Fuchs-Painlevé", dans lequel ils analysent simultanément l'équation originale et sa linéarisation. Ensuite, Conte, Fordy, et Pickering, [10], ont étendu ces idées à des séries de perturbation plus générales, et développé une approche appelée l'"approche perturbative de Painlevé", et ils ont donné de nombreux exemples illustratifs. Il s'est avéré qu'il continuerait à y avoir beaucoup d'intérêt à l'existence et à l'interprétation des résonances négatives, pourtant nous n'en poursuivrons pas l'étude ici.

À moins que k ne soit un entier, alors il existe des résonances non entières dans les cas (b) et (c), ce qui est une indication forte que l'équation (6.1) ne vérifie pas la propriété de Painlevé pour de tels k.

Si $k = 1$, i.e., $\alpha = \frac{4}{35}$, alors il y a une double résonance en $r = 1$ dans les deux cas (b) et (c), ce qui est aussi une indication forte que (6.1) avec $\alpha = \frac{4}{35}$ ne vérifie pas la propriété de Painlevé pour de tels k.

Si $k = 0$, i.e., $\alpha = \frac{1}{9}$, alors l'occurrence d'une résonance en $r = 0$ dans les cas (b) et (c) est habituellement associée au fait que le comportement de l'ordre dominant soit arbitraire. Pourtant ce n'est pas la situation dans ce cas. Une analyse similaire à celle qui a été utilisée par Ablowitz, Ramani et Segur, [2; p. 718], démontre qu'il existe des solutions à l'équation

$$y_{xx} + 4yy_x + 3y^3 = 0, \tag{6.3}$$

qui possède des points de branchement logarithmiques mobiles, et montre que (6.1) avec $k = 0$ ne vérifie pas la propriété de Painlevé. On note que l'équation (6.1) avec $k = 0$ a la solution exacte

$$y(x) = -\frac{3}{x - x_1} - \frac{3}{x - x_2},$$

où x_1 and x_2 sont des constantes arbitraires.

À chaque résonance positive, il y a une condition de compatibilité qui doit être satisfaite identiquement pour que l'expansion (6.2) soit valide. On montre aisément que les conditions de compatibilité associées à la résonance $r = 1$ dans les deux cas (b) et (c) sont identiquement satisfaites pour toutes les valeurs de k, ce qui implique que a_1 est arbitraire. De plus, il est facile de montrer que la condition de compatibilité associée à la résonance $r = k$ dans le cas (c) est également identiquement satisfaite pour toutes les valeurs entières de k. L'existence d'une seconde résonance négative dans le cas (b) est habituellement interprétée comme indiquant que l'ordre dominant associé donne naissance à ce qu'on appelle une branche secondaire.

Par conséquent, nous concluons qu'une condition nécessaire pour que l'équation (6.2) vérifie la propriété de Painlevé est que $\alpha = 4/(36 - k^2)$ avec $1 < k \in \mathbb{N}$, sous la condition que $k \neq 6$. Comme on l'a remarqué dans la § 4 ci-dessus, les cas $k = 2, 3, 4$, et 5, correspondent aux classes de symétrie du triangle diédral, tétraédral, octaédral et icosaédral [12; § 10.3]. Ainsi, il apparaît que ces quatre valeurs de k sont similaires pour $k > 6$ du point de vue de l'analyse de Painlevé.

Remerciements : PAC souhaiterait remercier Mark Ablowitz et Sarbarish Chakravarty pour des discussions nombreuses et stimulantes au sujet de l'équation de Chazy et l'École de mathématiques de l'Université du Minnesota pour leur charmante hospitalité durant sa visite lors de laquelle une grosse partie du présent travail a été réalisée.

Références

[1] Ablowitz, M.J., Clarkson, P.A., *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and the Inverse Scattering Transform*, L.M.S. Lecture Notes in Mathematics, vol. 149, C.U.P., Cambridge, 1991.

[2] Ablowitz, M.J., Ramani, A., Segur, H. A., A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of P-type. I, *J. Math. Phys.* 21 (1980), 715-721.

[3] Bureau, F.J., Integration of some nonlinear systems of differential equations, *Ann. Mat. Pura Appl.* (IV) 94 (1972), 345-360.

[4] Bureau, F.J., Sur des systèmes non linéaires du troisième ordre et les équations différentielles non linéaires associées, *Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sc. (5)* 73 (1987), 335-353.

[5] Chakravarty, S., Ablowitz, M.J., Clarkson, P.A., Reductions of self-dual Yang-Mills fields and classical systems, *Phys. Rev. Lett.* 65 (1990), 1085-1087.

[6] Chazy, J., Sur les équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme et admet des singularities essentielles mobiles, *C.R. Acad. Sc. Paris* 149 (1909), 563-565.

[7] Chazy, J., Sur les équations différentielles dont l'intégrale générale possède une coupure essentielle mobile, *C.R. Acad. Sc. Paris* 150 (1910), 456-458.

[8] Chazy, J., Sur les équations différentielles du troisième ordre et d'ordre supérieur dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes, *Acta Math.* 34 (1911), 317-385.

[9] Clarkson, P.A., SERC Postdoctoral Fellowship Report B/RF/6935 (1986).

[10] Conte, R., Fordy, A.P., Pickering, A., A perturbative Painlevé approach to nonlinear differential equations, *Physica* D69 (1993), 33-58.

[11] Fordy, A.P., Pickering, A., Analysing negative resonances in the Painlevé test, *Phys. Lett.* A160 (1991), 347-354.

[12] Hille, E., *Ordinary Differential Equations in the Complex Domain*, John Wiley & Sons, New York, 1976.

[13] Ince, E.L., *Ordinary Differential Equations*, Dover, New York, 1956.

[14] Joshi, N., Kruskal, M.D., A local asymptotic method of seeing the natural barrier of the solutions of the Chazy equation, *in: Applications of Analytic and Geometric Methods to Nonlinear Partial Differential Equations*, P.A. Clarkson, ed., Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, the Netherlands, 331-340, New York, 1971.

[15] Kamke, E., *Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen*, vol. 1, Chelsea.

[16] Kruskal, M.D., Clarkson, P.A., The Painlevé-Kowalevski and poly-Painlevé tests for integrability, *Stud. Appl. Math.* 86 (1992), 87-165.

[17] Lie, S., Klassifikation und Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen zwischen x, y, die eine Gruppe von Transformationen gestatten I, II, *Math. Ann.* 32 (1888), 213-281; also *Gesammelte Abhandlungen*, vol. 5, B.G. Teubner, Leipzig, 1924, 240-310.

[18] Nehari, Z., *Conformal Mapping*, McGraw-Hill, New York, 1952. [Reprinted by Dover, New York, (1975)].

[19] Olver, P.J., *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, Second Edition, Graduate Texts in Mathematics, vol. 107, Springer-Verlag, New York, 1993.

[20] Olver, P.J., Differential invariants, *in: Algebraic and Geometric Structures in Differential Equations*, P.H.M. Kersten & I.S. Krasil'shchik, eds., Proceedings, University of Twente, 1993, to appear.

[21] Ovsiannikov, L.V., *Group Analysis of Differential Equations*, Academic Press, New York, 1982.

[22] Rosenhead, L. (Editor), *Laminar Boundary Layers*, Clarendon Press, Oxford, 1963.

[23] Takhtajan, L.A., A simple example of modular-forms as tau-functions for integrable equations, *Theo. Math. Phys.* 93 (1993), 1308-1317.

[24] Ward, R.S., Integrable and solvable systems, and relations amongst them, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* 315 (1985), 451-457.