Sur la théorie des formes analytiques appelées arbres

Arthur Cayley

[Extrait du *Philosophical Magazine*, vol. XIII. (1857), pp. 172-176.]

Un symbole tel que $A\partial_x + B\partial_y + \ldots$, où A, B, etc. contiennent les variables x, y, etc. par rapport auxquelles les différentiations doivent être effectuées, participe de la nature d'un opérande et d'un opérateur, et peut donc être appelé un opérandeur. Soient $P, Q, R, \ldots$ des opérandeurs quelconques, et soit U un symbole du même type, ou, pour fixer les idées, un simple opérande ; PU désigne le résultat de l'opération P effectuée sur U, et QPU désigne le résultat de l'opération Q effectuée sur PU ; et généralement, dans de telles combinaisons de symboles, chaque opération est considérée comme affectant l'opérande désigné par tous les symboles à droite de l'opération en question. Considérant maintenant l'expression QPU, il est facile de voir que nous pouvons écrire

$$QPU = (Q \times P)U + (QP)U,$$

où, à droite, $(Q \times P)$ et (QP) signifient ce qui suit : $Q \times P$ désigne le simple produit algébrique de Q et P, tandis que QP (conformément à la notation générale expliquée précédemment) désigne le résultat de l'opération Q effectuée sur l'opérande P ; et les deux parties $(Q \times P)U$ et $(QP)U$ désignent respectivement les résultats des opérations $(Q \times P)$ et (QP) effectuées chacune d'elles sur U comme opérande. Il convient de remarquer que $(Q \times P)$ et $(P \times Q)$ ont exactement la même signification, et le symbole peut être écrit indifféremment sous l'une ou l'autre forme. Mais sans une notation plus pratique, il serait difficile de trouver les expressions correspondantes pour $RQPU$, etc. Ceci peut cependant être réalisé immédiatement au moyen des formes analytiques appelées arbres (voir fig. 1, 2, 3), qui contiennent tous les arbres qui peuvent être formés avec une branche, deux branches et trois branches respectivement.

L'examen de ces figures montrera immédiatement ce que signifie le terme en question, ainsi que les termes racine, branches (qui peuvent être des branches principales, des branches intermédiaires ou des branches libres) et nœuds (qui peuvent être soit la racine elle-même, soit des nœuds propres, soit les extrémités des branches libres). Pour appliquer cela à la question posée, PU se compose d'un seul terme représenté par la figure 1 (bis) ; QPU se compose, comme ci-dessus, de deux termes représentés par les deux parties de la figure 2 (bis), à savoir que la première partie représente le terme $(Q \times P)U$, et la seconde partie représente le terme $(QP)U$.

Référence : *On the Analytical Forms Called Trees*, Professor Cayley, American Journal of Mathematics, Vol. 4, No. 1 (1881), pp. 266-268.

Transcription en LaTeX : Denise Vella-Chemla (assistée des outils Google Lens et Google traduction).

Fig. 1.

Fig. 2.

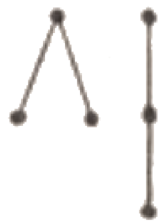


Fig. 3.

Il est évident que la figure 2 (bis) est immédiatement formée à partir de la figure 1 (bis) en ajoutant une branche terminée par Q à chacun des nœuds de la partie unique de la figure 1 (bis). De même, $RQPU$ est composé de six termes représentés par les six parties de la figure 3 (bis), et cette figure est immédiatement formée à partir de la figure 2 (bis) en ajoutant une branche terminée par R à chaque nœud de chaque partie de la figure 2 (bis).

Fig. 1 (*bis*).

Fig. 2 (*bis*).

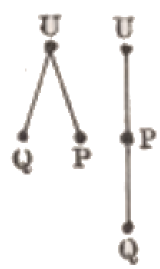
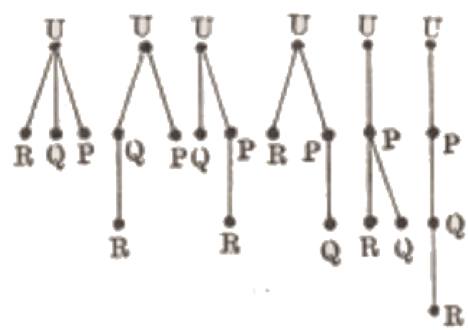


Fig. 3 (*bis*).



Il est à peine nécessaire de remarquer que la première partie de la figure 3 (bis) désigne ce qui, dans la notation expliquée en premier lieu, serait désigné par $(R \times Q \times P)U$, le deuxième terme ce qui serait de la même manière désigné par $(RQ \times P)U$, et ainsi de suite, la dernière partie étant le terme qui serait désigné par $((RQ)P)U$; c'est-à-dire que R opère sur Q, donnant l'opérande RQ, qui opère sur P, donnant l'opérande $(RQ)P$, qui opère finalement sur U.

Les figures 1 (bis), 2 (bis), etc. contiennent les mêmes arbres que ceux contenus dans les figures correspondantes 1, 2, etc. ; seulement, en raison des différents modes de remplissage, les arbres sont considérés comme autant d'arbres distincts dans une figure du deuxième ensemble qui sont considérés comme un seul et même arbre dans la figure correspondante du premier ensemble. Une différence dans le nombre d'arbres apparaît d'abord dans les figures 3 et 3 (bis), la première ne contient que quatre arbres, tandis que la seconde en contient six, à savoir le premier arbre, le deuxième, le troisième et le quatrième, le cinquième et le sixième de la figure 3 (bis) correspondent respectivement au premier, au deuxième, au troisième et au quatrième arbre de la figure 3. Pour dériver la figure 3 (bis) à partir de la figure 3, nous devons remplir les arbres de la figure 3 avec U à la racine et R, Q, P pour les autres nœuds de toutes les manières possibles, sous réserve seulement de la restriction suivante : en comptant de l'extrémité d'une branche libre jusqu'à la racine, il ne doit y avoir aucune transposition dans l'ordre des symboles RQP, et en veillant à n'admettre que des arbres distincts. Ainsi, le premier arbre de la figure 3 pourrait être rempli de six manières ; mais les arbres ainsi obtenus sont considérés comme un seul et même arbre, et nous n'avons que le premier arbre de la figure 3 (bis). Encore une fois, en raison de la restriction, le quatrième arbre de la figure 3 ne peut être rempli que d'une seule manière, et nous avons ainsi le sixième arbre de la figure 3 (bis). Et ainsi, en général, chaque figure du deuxième ensemble peut être formée immédiatement à partir de la figure correspondante du premier ensemble ; ou lorsque le premier ensemble de figures est donné, l'expression pour $YX \dots QPU$ peut être formée directement sans l'aide de l'expression pour le symbole précédent $X \dots QPU$; le nombre de termes pour la n-ième figure du deuxième ensemble est évidemment $1.2.3 \dots n$, et par conséquent, il suffit de compter les termes pour s'assurer qu'aucun mode de remplissage admissible n'a été omis.

Le nombre de parties dans l'une quelconque des figures du premier ensemble est beaucoup plus petit que le nombre de parties dans la figure correspondante du deuxième ensemble ; et la loi pour le nombre de parties, c'est-à-dire pour le nombre A_n des arbres avec des branches, est très singulière. Pour obtenir cette loi, nous devons considérer comment les arbres avec des branches peuvent être formés au moyen de ceux ayant un nombre de branches plus petit. Un arbre à n branches possède soit une seule branche principale, soit deux branches principales, trois branches principales, etc. Si l'arbre possède une seule branche principale, il ne peut être formé qu'en y ajoutant un arbre à $(n-1)$ branches, c'est-à-dire que A_n contient la partie A_{n-1}. Si l'arbre possède deux branches principales, alors $p+q$ étant une partition de $n-2$, l'arbre peut être formé en ajoutant à une branche principale un arbre à p branches, et à l'autre branche principale un arbre à q branches ; le nombre d'arbres ainsi obtenus est A_pA_q : ceci suppose cependant que les parties p et q sont inégales ; si elles sont égales, il est facile de voir que le nombre d'arbres est seulement $\frac{1}{2}A_p(A_p+1)$. Par conséquent, pour toute partition $p+q$ de $n-2$, A_n contient la partie A_pA_q si p et q sont inégaux, et la partie $\frac{1}{2}A_p(A_p+1)$ si p et q sont égaux. De même, considérant les arbres à trois branches principales, si $p+q+r$ est une partition quelconque de $n-3$, A_n contient la partie $A_pA_qA_r$ si p, q et r sont différents ; mais si deux de ces nombres, par exemple p et q, sont égaux, alors la partie $\frac{1}{2}A_p(A_p+1)A_r$; et si p, q et r sont tous égaux, alors la partie $\frac{1}{6}A_p(A_p+1)(A_p+2)$; et ainsi de suite, jusqu'à ce que nous ayons finalement un seul arbre à une branche principale, ou que A_n contienne la partie 1. Une brève réflexion montrera que la règle précédente pour la formation du nombre A_n est complètement exprimée par l'équation

$$(1-x)^{-1}(1-x^2)^{-A_1}(1-x^3)^{-A_2}(1-x^4)^{-A_3}\dots = 1 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + \dots,$$

et par conséquent que nous pouvons, au moyen de cette équation, calculer successivement pour les différentes valeurs de n le nombre A_n des arbres à n branches. Le calcul peut être effectué très facilement comme suit : [le tableau, tel qu'imprimé à l'origine, contenait à la fin quelques erreurs de calcul qui ont été corrigées, Rapport B.A. pour 1875, p. 258].

$A_1 =$	1	(1)	1 1	1 1	1 1 1	1 1 1	1 1 1 1	1 1 1 1	1 1 1 1 1	1 1 1 1 1	1 1 1 1 1 1	$(1-x^2)^{-1}$
$A_2 =$	1	1	(2)	2 2	3 2	3 4	4 4 3	4 6 3	5 6 6	5 8 6 4	5 8 9 4	$(1-x^3)^{-2}$
$A_3 =$	1	1	2	(4)	5 4	7 4	11 8	13 16	17 20 10	23 28 10	27 44 20	$(1-x^4)^{-4}$
$A_4 =$	1	1	2	4	(9)	11 9	19 9	29 18	47 36	61 81	91 99 45	$(1-x^5)^{-9}$
$A_5 =$	1	1	2	4	9	(20)	28 20	47 20	83 40	142 80	235 180	$(1-x^6)^{-20}$
$A_6 =$	1	1	2	4	9	20	(48)	67 48	123 48	222 96	415 192	$(1-x^7)^{-48}$
$A_7 =$	1	1	2	4	9	20	48	(115)	171 115	318 115	607 230	$(1-x^8)^{-115}$
$A_8 =$	1	1	2	4	9	20	48	115	(286)	433 286	837 286	$(1-x^9)^{-286}$
$A_9 =$	1	1	2	4	9	20	48	115	286	(719)	1123 719	$(1-x^{10})^{-719}$
$A_r =$		1	2	4	9	20	48	115	286	719	1842	
for $r =$		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

J'ai eu l'occasion, pour un autre objectif, d'examiner la question de la recherche du nombre d'arbres avec un nombre donné de branches libres, bifurcations au moins. Ainsi, lorsque le nombre de branches libres est de trois, les arbres de la forme en question sont ceux de la figure annexée, et le nombre est donc deux. Il n'est pas difficile de voir que nous avons dans ce cas (B étant le nombre de tels arbres avec des branches libres),

$$(1-x)^{-1}(1-x^2)^{-B_2}(1-x^3)^{-B_3}(1-x^4)^{-B_4}\ldots = 1 + x + 2B_2x^2 + 2B_3x^3 + 2B_4x^4 + \ldots,$$

Fig.

et un processus de développement similaire donne :

$B_r =$	1	2	5	12	33	90
for $r =$	2	3	4	5	6	7

Je peux mentionner, en conclusion, que j'ai été amené à considérer la théorie des arbres ci-dessus par les recherches du professeur Sylvester sur le changement des variables indépendantes dans le calcul différentiel.

2. Stone Buildings, 2 janvier 1856.