

## II. UN MÉMOIRE SUR LA THÉORIE DES MATRICES.

ARTHUR CAYLEY, ESQ., F.R.S.

*Reçu le 10 décembre 1857, lu le 14 janvier 1858.*

Le terme matrice peut être utilisé dans un sens plus général, mais dans le présent mémoire, je considère seulement des tableaux carrés et rectangulaires, et le terme matrice, utilisé sans précision, doit être compris comme signifiant une matrice carrée ; dans ce sens restreint, un ensemble de quantités arrangées sous la forme d'un carré,

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$$

est appelé une matrice. La notion d'une telle matrice surgit naturellement d'une notation abrégée pour un ensemble d'équations linéaires, par exemple les équations

$$\begin{aligned} X &= ax + by + cz, \\ Y &= a'x + b'y + c'z, \\ Z &= a''x + b''y + c''z, \end{aligned}$$

peuvent être plus simplement représentées par

$$(X, Y, Z) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} (x, y, z)$$

et la considération d'un tel système d'équations amène à la plupart des notions fondamentales de la théorie des matrices. On verra que les matrices (en ne considérant seulement que celles du même ordre) se comportent comme des objets particuliers ; elles peuvent être ajoutées, multipliées ou composées ensemble, etc. : la loi de l'addition des matrices est précisément similaire à celle pour l'addition des quantités algébriques ordinaires ; en ce qui concerne leur multiplication, il y a une particularité telle que les matrices ne peuvent être échangées<sup>1</sup> ; il est néanmoins possible de former les puissances (positive ou négative, entière ou fractionnaire) d'une matrice, et par conséquent, de parvenir à appliquer une fonction rationnelle et entière, ou plus généralement n'importe quelle fonction algébrique d'une matrice. J'obtiens le théorème remarquable qu'une matrice quelconque satisfait une équation algébrique de son propre ordre, le coefficient de la plus grande puissance étant l'unité, et les autres puissances, des fonctions des termes de la matrice, le dernier coefficient étant en fait le déterminant sous forme condensée ; la règle de formation de cette équation peut être énoncée sous la forme condensée suivante, qui sera compréhensible après une lecture de ce mémoire, le déterminant, formée de la matrice diminuée de la matrice considérée comme une quantité unique<sup>2</sup> multipliée par la matrice unité, sera égal à zéro. Le théorème montre que toute fonction rationnelle

---

Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 1858, Vol. 148 (1858), pp. 17-37.

*Esq. F.R.S = Esquire Fellowship of the Royal Society* ; trad. : a le titre de Membre de la Société royale.

<sup>1</sup>on dit maintenant "ne commutent pas".

<sup>2</sup>On les appelle maintenant scalaire.

et entière (ou en effet, toute fonction rationnelle) d'une matrice peut être considérée comme une fonction rationnelle et entière, dont le degré est au plus égal à celui de la matrice, diminué d'une unité ; cela montre même que dans un certain sens, on a la même chose par rapport à n'importe quelle fonction algébrique d'une matrice quelle qu'elle soit. Une des applications du théorème est de trouver une expression générale des matrices qui peuvent être échangées<sup>3</sup> avec une certaine matrice, et je ne suis pas entré dans ce domaine plus avant qu'en montrant comment certaines des notions applicables à celles-ci peuvent s'étendre aux matrices rectangulaires.

1. Pour la concision, les matrices écrites complètement seront en général d'ordre 3, mais on doit comprendre que les définitions, les raisonnements et les conclusions s'appliquent à n'importe quel degré. Et quand deux matrices ou plus sont dites en connexion l'une avec l'autre, cela implique toujours (à moins que le contraire ne soit explicitement écrit) que les matrices sont du même ordre.

2. Notation

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} (x, y, z)$$

représente l'ensemble des fonctions linéaires

$$((a, b, c \text{ } \checkmark \text{ } x, y, z), (a', b', c' \text{ } \checkmark \text{ } x, y, z), (a'', b'', c'' \text{ } \checkmark \text{ } x, y, z)),$$

de telle façon qu'en appelant celles-ci  $(X, Y, Z)$ , on a

$$(X, Y, Z) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} (x, y, z)$$

et, comme remarqué au-dessus, cette formule amène à la plupart des notions fondamentales de la théorie.

3. Les quantités  $(X, Y, Z)$  seront identiquement nulles, si tous les termes de la matrice sont nulles, et on peut dire que

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est la matrice nulle.

À nouveau,  $(X, Y, Z)$  sera égal à  $(x, y, z)$ , si la matrice est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et on appelle cette dernière la matrice unité. On peut parler, bien sûr, quand il est nécessaire de distinguer, disons, de la matrice zéro, ou (suivant le cas) de la matrice unité *de tel ordre*. Les

---

<sup>3</sup>commuter

matrices nulles peuvent être représentées par 0 et la matrice unité par 1.

#### 4. Les équations

$$(X, Y, Z) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} (x, y, z), \quad (X', Y', Z') = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{pmatrix} (x, y, z),$$

donnent

$$(X + X', Y + Y', Z + Z') = \begin{pmatrix} a + \alpha & b + \beta & c + \gamma \\ a' + \alpha' & b' + \beta' & c' + \gamma' \\ a'' + \alpha'' & b'' + \beta'' & c'' + \gamma'' \end{pmatrix} (x, y, z)$$

et cela amène à

$$\begin{pmatrix} a + \alpha & b + \beta & c + \gamma \\ a' + \alpha' & b' + \beta' & c' + \gamma' \\ a'' + \alpha'' & b'' + \beta'' & c'' + \gamma'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{pmatrix}$$

selon la règle d'addition des matrices ; pour la soustraction on procède de façon similaire.

5. Une matrice n'est pas modifiée par addition ou soustraction de la matrice nulle, c'est-à-dire qu'on a  $M \pm 0 = M$ .

L'équation  $L = M$ , qui exprime que les matrices  $L, M$  sont égales, peut aussi s'écrire sous la forme  $L - M = 0$ , i. e. la différence de deux matrices égales est la matrice nulle.

6. L'équation  $L = -M$ , écrite sous la forme  $L + M = 0$ , exprime que la somme de deux matrices  $L, M$  est égale à la matrice nulle, les matrices ainsi reliées sont dites être *opposées* l'une à l'autre ; en d'autres termes, une matrice dont les termes sont égaux ou opposés en signe aux termes d'une matrice donnée est appelée l'opposée de la matrice en question.

7. Il est clair qu'on a  $L + M = M + L$ , c'est-à-dire que l'opération d'addition est commutative, et de plus, que  $(L + M) + N = L + (M + N) = L + M + N$ , c'est-à-dire que l'opération d'addition est aussi associative.

#### 8. L'équation

$$(X, Y, Z) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} (mx, my, mz)$$

écrite sous la forme :

$$(X, Y, Z) = m \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} (x, y, z) = \begin{pmatrix} ma & mb & mc \\ ma' & mb' & mc' \\ ma'' & mb'' & mc'' \end{pmatrix} (x, y, z)$$

donne

$$m \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ma & mb & mc \\ ma' & mb' & mc' \\ ma'' & mb'' & mc'' \end{pmatrix}$$

comme règle de multiplication d'une matrice par une quantité unique<sup>4</sup>. Le scalaire  $m$  peut être écrit soit avant soit après la matrice, et l'opération est par conséquent commutative. On a clairement  $m(L + M) = mL + mM$ , ou que l'opération est distributive.

9. Les matrices  $L$  et  $mL$  peuvent être dites similaires l'une à l'autre ; en particulier, si  $m = 1$ , elles sont égales, et si  $m = -1$ , elles sont opposées.

10. On a, en particulier,

$$m \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}$$

ou bien en remplaçant la matrice du côté gauche par l'unité, on peut écrire

$$m = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}$$

La matrice du côté droit est dite scalaire  $m$  en la considérant comme *intervenant dans la matrice unité*.

11. Les équations

$$(X, Y, Z) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} (x, y, z), \quad (x, y, z) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{pmatrix} (\xi, \eta, \zeta),$$

donnent

$$(X, Y, Z) = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix} (\xi, \eta, \zeta) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{pmatrix} (\xi, \eta, \zeta)$$

et par conséquent, en substituant à la matrice

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix}$$

sa valeur, on obtient

$$\begin{pmatrix} (a, b, c \text{ } \checkmark \text{ } \alpha, \alpha', \alpha'') & (a, b, c \text{ } \checkmark \text{ } \beta, \beta', \beta'') & (a, b, c \text{ } \checkmark \text{ } \gamma, \gamma', \gamma'') \\ (a', b', c' \text{ } \checkmark \text{ } \alpha, \alpha', \alpha'') & (a', b', c' \text{ } \checkmark \text{ } \beta, \beta', \beta'') & (a', b', c' \text{ } \checkmark \text{ } \gamma, \gamma', \gamma'') \\ (a'', b'', c'' \text{ } \checkmark \text{ } \alpha, \alpha', \alpha'') & (a'', b'', c'' \text{ } \checkmark \text{ } \beta, \beta', \beta'') & (a'', b'', c'' \text{ } \checkmark \text{ } \gamma, \gamma', \gamma'') \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{pmatrix}$$

---

<sup>4</sup>un scalaire.

comme règle de multiplication ou composition de deux matrices. On doit observer que l'opération n'est pas commutative ; les facteurs matriciels que l'on compose peuvent être distingués comme le premier composant (ou davantage), et le second composant ou le composant matriciel le plus proche et la règle de composition est comme suit, par exemple n'importe quelle *ligne* de la matrice composée est obtenue en combinant les *lignes* de la première matrice ou des composantes matricielles suivantes successivement avec les *colonnes* de la seconde matrice ou de la matrice la plus proche.

12. Une matrice composée, soit comme première soit comme seconde matrice, avec la matrice nulle donne la matrice nulle. Le cas où l'un quelconque des termes de la matrice donnée est infini est bien sûr exclus.

13. Une matrice n'est pas altérée par sa composition, soit comme premier soit comme second composant avec la matrice unité. Elle est composée soit comme premier soit comme deuxième composant avec un scalaire  $m$  considéré comme une matrice unité dans laquelle tous les 1 serait remplacés par la quantité  $m$  : ceci est en fait la règle déjà mentionnée pour la multiplication d'une matrice par un scalaire, règle qui peut ainsi être vue comme un cas particulier de la multiplication de deux matrices.

14. On peut de la même manière multiplier ou composer ensemble trois matrices ou plus : l'ordre d'arrangement des facteurs est bien sûr accessoire et on peut les distinguer comme étant le premier ou le plus éloigné, le second, le troisième, etc., et le dernier ou le plus proche, et les remplacer par une matrice unique, et etc. jusqu'à ce que toutes les matrices aient été composées ensemble, le résultat étant indépendant de la manière dont la composition est effectuée ; c'est-à-dire qu'on a  $L.MN = LM.N = LMN, LM.NP = L.MN.P$ , etc. : l'opération de multiplication, bien qu'elle ne soit pas commutative, comme cela a déjà été noté, est un opération associative.

15. On arrive alors à la notion de puissance entière et positive  $L^p$  d'une matrice  $L$ , et on doit observer que les différentes puissances de la même matrice commutent. Il est clair également que  $p$  et  $q$  étant des entiers positifs, on a  $L^p.L^q = L^{p+q}$ , qui est le théorème des exposants pour les puissances entières positives d'une matrice.

16. La dernière équation mentionnée,  $L^p.L^q = L^{p+q}$ , supposée être vrai pour toutes les valeurs quels que soient les exposants  $p$  et  $q$ , amène à la notion de puissances d'une matrice pour n'importe quelle forme, quel que soit l'exposant. En particulier,  $L^p.L^0 = L^p$  ou  $L^0 = 1$ , c'est-à-dire, la 0<sup>ième</sup> puissance d'une matrice est la matrice unité. Et alors en posant  $p = 1, q = -1$ , ou  $p = -1, q = 1$ , on a  $L.L^{-1} = L^{-1}.L = 1$  ; c'est-à-dire,  $L^{-1}$ , ou, comme on peut l'appeler, la matrice inverse ou réciproque, est une matrice qui, composée soit comme premier soit comme second composant avec la matrice originale, donne la matrice unité.

17. On peut arriver à la notion d'inverse ou de matrice réciproque, directement à partir de l'équation

$$(X, Y, Z) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} (x, y, z)$$

en fait, l'équation donne

$$(x, y, z) = \begin{pmatrix} A & A' & A'' \\ B & B' & B'' \\ C & C' & C'' \end{pmatrix} (X, Y, Z) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}^{-1} (X, Y, Z),$$

et on a, pour la détermination des coefficients de la matrice inverse ou réciproque les équations

$$\begin{pmatrix} A & A' & A'' \\ B & B' & B'' \\ C & C' & C'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & A' & A'' \\ B & B' & B'' \\ C & C' & C'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui sont équivalentes, et l'une ou l'autre d'entre elles est suffisante pour déterminer complètement la matrice inverse ou réciproque. Il est connu que si  $\nabla$  dénote le déterminant, c'est-à-dire si

$$\nabla = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

alors les termes de la matrice inverse ou réciproque sont donnés par les équations :

$$A = \frac{1}{\nabla} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b' & c' \\ 0 & b'' & c'' \end{vmatrix}, \quad B = \frac{1}{\nabla} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a' & 0 & c' \\ a'' & 0 & c'' \end{vmatrix}, \text{ etc.}$$

ou, ce qui est la même chose, la matrice inverse ou réciproque est donnée par l'équation

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\nabla} \begin{pmatrix} \partial_a \nabla & \partial_{a'} \nabla & \partial_{a''} \nabla \\ \partial_b \nabla & \partial_{b'} \nabla & \partial_{b''} \nabla \\ \partial_c \nabla & \partial_{c'} \nabla & \partial_{c''} \nabla \end{pmatrix}$$

où bien sûr les différentiations doivent dans tous les cas être réalisées comme si les termes  $a, b$ , etc. étaient tous des quantités arbitraires.

18. La formule montre, ce qui est clair en effet *a priori*, que les notions de matrice inverse ou réciproque échouent ensemble quand le déterminant s'évanouit : la matrice est dans ce cas dite indéterminée, et on doit comprendre qu'en l'absence de mention expresse, le cas particulier en question est fréquemment exclus des considérations. On doit ajouter que la matrice nulle est indéterminée ; et que le produit de deux matrices peut être nul, seulement si les matrices sont des matrices unités ou si les deux sont indéterminées.

19. La notion de matrice inverse ou de matrice réciproque une fois établie, les autres puissances négatives entières de la matrice originale sont des puissances entières positives de la matrice inverse ou réciproque, et la théorie à propos de telles puissances négatives entières peut être considérée

comme connue. La discussion ultérieure des puissances fractionnaires d'une matrice sera résumée par la suite.

20. La puissance entière positive  $L^m$  de la matrice  $L$  peut bien sûr être multipliée par n'importe quelle matrice de même degré ; un tel facteur cependant ne commute en général pas avec  $L$  ; et pour préserver autant que possible l'analogie avec l'algèbre ordinaire des fonctions algébriques, on peut restreindre l'attention au cas où le facteur est un scalaire, et une telle convertibilité existe par conséquent. On a de cette manière une matrice  $cL^m$ , et par addition de n'importe quel nombre de tels termes, on obtient une fonction rationnelle et entière de la matrice  $L$ .

21. Le théorème général auquel il a été fait référence précédemment sera mieux compris par un développement complet d'un cas particulier. Imaginons la matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

et formons le déterminant

$$\begin{vmatrix} a - M & b \\ c & d - M \end{vmatrix}.$$

L'expression développée de ce déterminant est

$$M^2 - (a + d)M^1 + (ad - bc)M^0 ;$$

les valeurs de  $M^2, M^1, M^0$  sont

$$\begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a + d) \\ c(a + d) & d^2 + bc \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et en substituant ces valeurs, le déterminant devient égal à la matrice nulle, on a notamment

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a - M & b \\ c & d - M \end{vmatrix} &= \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a + d) \\ c(a + d) & d^2 + bc \end{pmatrix} - (a + d) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (ad - bc) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a^2 + bc) - (a + d)a + (ad - bc) & b(a + d) - (a + d)b \\ c(a + d) - (a + d)c & d^2 + bc - (a + d)d + ad - bc \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{vmatrix} a - M & b \\ c & d - M \end{vmatrix} = 0$$

où la matrice du déterminant est

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - M \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire que c'est la matrice originale, diminuée de la matrice unité dont les 1 sont remplacés par un même scalaire. Et ceci, c'est le théorème général, qui est que le déterminant, ayant pour matrice une matrice donnée moins la même matrice considérée comme une matrice unité dont les

1 sont remplacés par un scalaire est égal à zéro.

22. La représentation symbolique suivante du théorème vaut, je pense, la peine d'être notée : soit la matrice  $\widetilde{M}$ , considérée comme un scalaire, représentée par  $\widetilde{M}$ , alors en dénotant la matrice identité par 1,  $\widetilde{M}.1$  représentera la matrice  $M$ , considérée comme une matrice unité dont les 1 sont remplacés par un scalaire. Selon des principes de notation identiques,  $\widetilde{1}.M$  représentera, ou peut être considérée comme représentant, simplement la matrice  $M$ , et le théorème est

$$\text{Det}(\widetilde{1}.M - \widetilde{M}.1) = 0.$$

23. J'ai vérifié le théorème, dans le cas le plus simple, d'une matrice d'ordre 3, par exemple si  $M$  est une telle matrice, considérons

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

alors le déterminant s'évanouit, ou bien on a

$$\begin{vmatrix} a - M & b & c \\ d & e - M & f \\ g & h & i - M \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en développant,

$$M^3 - (a + e + i)M^2 + (ei + ia + ae - fh - cg - bd)M - (aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg) = 0$$

mais je n'ai pas trouvé nécessaire d'entreprendre le travail de l'établissement d'une preuve formelle dans le cas général d'une matrice de n'importe quel degré.

24. Si l'on ne fait qu'énoncer la forme générale du résultat, on voit que toute matrice satisfait une équation algébrique de son propre ordre, ce qui est dans de nombreux cas la matière du théorème.

25. Il découle directement de cela que toute fonction rationnelle et entière, ou en effet toute fonction rationnelle d'une matrice peut être exprimée comme une fonction rationnelle et entière d'un ordre au plus égal à celui de la matrice, moins l'unité. Mais il est important de considérer à quel niveau ou dans quel sens un théorème semblable est vrai par rapport aux fonctions irrationnelles d'une matrice. Si on avait seulement l'équation satisfaite par la matrice elle-même, une telle extension<sup>5</sup> ne pourrait pas être faite ; mais on a, outre l'équation du même ordre satisfaite par la fonction irrationnelle de la matrice, et au moyen de ces deux équations, et de l'équation par laquelle la fonction irrationnelle de la matrice est déterminée, on peut exprimer la fonction irrationnelle comme une fonction rationnelle et entière de la matrice, d'un ordre égal au plus à celui de la matrice, moins une unité ; une telle expression fera pourtant intervenir *les coefficients de l'équation satisfaite par la fonction irrationnelle* qui sont des fonctions (en nombre égal à l'ordre de la matrice) des coefficients supposés inconnus, de la fonction irrationnelle elle-même. La transformation n'est jamais une transformation importante, comme celle de réduire le nombre de quantités inconnues de  $n^2$  (si  $n$  est l'ordre de la matrice) à  $n$ . Pour compléter la solution, il est nécessaire de comparer la valeur

---

<sup>5</sup>aux fonctions irrationnelles



obtenue comme ci-dessus, avec la valeur supposée de la fonction irrationnelle, ce qui amènera à des équations pour la détermination des  $n$  quantités inconnues.

26. Comme illustration, considérons la matrice donnée

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

et cherchons à trouver la matrice  $L = \sqrt{M}$ . Dans ce cas,  $M$  satisfait l'équation

$$M^2 - (a + d)M + ad - bc = 0;$$

et de la même manière si

$$L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

alors  $L$  satisfait l'équation

$$L^2 - (\alpha + \delta)L + \alpha\delta - \beta\gamma = 0;$$

et à partir de ces deux équations, et de l'équation rationalisée  $L^2 = M$ , il devrait être possible d'exprimer  $L$  sous la forme d'une fonction linéaire de  $M$  : en fait, en substituant à  $L$  dans la dernière équation sa valeur ( $= M$ ), on trouve directement

$$L = \frac{1}{\alpha + \delta}[M + (\alpha\delta - \beta\gamma)],$$

qui est l'expression requise, faisant intervenir comme il se doit les coefficients  $\alpha + \delta, \alpha\delta - \beta\gamma$  de l'équation dans  $L$ . Il n'y a pas de difficulté à compléter la solution ; écrivons pour résumer  $\alpha + \delta = X, \alpha\delta - \beta\gamma = Y$ , alors on a

$$L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a+Y}{X} & \frac{b}{X} \\ \frac{c}{X} & \frac{d+Y}{X} \end{pmatrix}$$

et par conséquent en formant les valeurs de  $\alpha + \delta$  et  $\alpha\delta - \beta\gamma$ ,

$$X = \frac{a + d + 2Y}{X},$$

$$Y = \frac{(a + Y)(d + Y) - bc}{X^2},$$

et en mettant également  $a + d = P, ad - bc = Q$ , on trouve sans difficulté

$$X = \sqrt{P} + 2\sqrt{Q},$$

$$Y = \sqrt{Q},$$

et les valeurs de  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  sont par conséquent connues. Le signe de  $\sqrt{Q}$  est le même dans les deux formulæ, et est par conséquent le même dans les quatre solutions, c'est-à-dire que la racine  $\sqrt{M}$  a

quatre valeurs.

27. Pour illustrer cela plus avant, supposons qu'à la place de  $M$ , on ait la matrice

$$M^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2 + bc \end{pmatrix},$$

de telle façon que  $L^2 = M^2$ , on trouve

$$P = (a+d)^2 - 2(ad-bc), Q = (ad-bc)^2,$$

et par conséquent  $Q = \pm(ad-bc)$ . En prenant le signe positif, on a

$$Y = ad - bc, X = \pm(a+d),$$

et ces valeurs donnent simplement

$$L = \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \pm M,$$

Mais en prenant le signe négatif

$$Y = -ad + bc, X = \pm\sqrt{(a-d)^2 + 4bc},$$

et en retenant  $X$  pour dénoter cette racine, on trouve

$$L = \begin{pmatrix} \frac{a^2 - ad + 2bc}{X} & \frac{b(a+d)}{X} \\ \frac{c(a+d)}{X} & \frac{d^2 - ad + 2bc}{X} \end{pmatrix}$$

qui peut aussi s'écrire

$$L = \frac{a+d}{X} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \frac{2(ad-bc)}{X} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ou, ce qui est la même chose

$$L = \frac{a+d}{X} M - \frac{2(ad-bc)}{X} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et il est facile de vérifier *a posteriori* que cette valeur en fait donne  $L^2 = M^2$ . On peut remarquer que si

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = 1$$

la formule mentionnée en dernier échoue, car on a  $X = 0$  ; on verra présentement que l'équation  $L^2 = 1$  admet d'autres solutions outre  $L = \pm 1$ . L'exemple montre comment les valeurs des puissances fractionnaires d'une matrice doivent être recherchées.

28. Il y a une difficulté apparente liée à l'équation satisfaite par une matrice, qu'il convient d'expliquer. Supposons, comme précédemment,

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

de telle façon que  $M$  satisfasse l'équation

$$\begin{vmatrix} a - M & b \\ c & d - M \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$M^2 - (a + d)M + ad - bc = 0,$$

et dénotons par  $X', X''$ , les quantités scalaires, racines de l'équation

$$\begin{vmatrix} a - X & b \\ c & d - X \end{vmatrix}$$

ou

$$X^2 - (a + d)X + ad - bc = 0.$$

L'équation satisfaite par la matrice peut être écrite

$$(M - X' \text{ ) } (M - X'' \text{ ) } = 0,$$

dans laquelle  $X', X''$ , doivent être considérées comme des matrices scalaires, et il pourrait sembler à première vue que l'on doive avoir l'un des facteurs simples égal à zéro, ce qui n'est pas le cas de manière évidente, car une telle égalité signifierait que la matrice parfaitement indéterminée  $M$  serait égale à une matrice scalaire. L'explication est que chacun des facteurs simples est une matrice indéterminée, en fait  $M - X'$ , représente la matrice

$$\begin{pmatrix} a - X' & b \\ c & d - X' \end{pmatrix}$$

et le déterminant de cette matrice est égal à zéro. Le produit de deux facteurs est ainsi égal à zéro sans que l'un ou l'autre des facteurs ne soit nul.

29. Une matrice satisfait, nous l'avons vu, une équation de son propre ordre, faisant intervenir les coefficients de la matrice ; supposons que la matrice doive être déterminée pour satisfaire une certaine autre équation, dont les coefficients sont des quantités scalaires données. Il pourrait sembler à première vue que nous puissions éliminer la matrice entre les deux équations, et ainsi obtenir une équation qui serait la seule condition que les coefficients de la matrice devraient satisfaire ; ceci est trivialement faux, car plus de conditions doivent être nécessaires, et on voit que si nous devons alors procéder pour compléter la solution en trouvant la valeur de la matrice commune aux deux équations, nous devrions trouver que la matrice est égale dans tous les cas à une matrice scalaire, ce qui ne peut clairement pas être le cas. L'explication est similaire à celle de la difficulté dont on a dit de se méfier précédemment, les équations doivent contenir un, et un seul, facteur commun, et il est possible alors qu'elles soient satisfaites toutes les deux, et il est possible que le facteur commun ne s'évanouisse même pas. La condition nécessaire semble être que l'une des équations devraient être

un facteur de l'autre ; dans le cas où l'équation supposée est d'un ordre égal ou supérieur à celui de la matrice, alors si cette équation contient comme facteur l'équation qui est toujours satisfaite par la matrice, l'équation supposée sera satisfaite identiquement et la condition est suffisante aussi bien que nécessaire : dans l'autre cas, lorsque l'équation supposée est d'un ordre inférieur à celui de la matrice, la condition est nécessaire, mais elle n'est pas suffisante.

30. L'équation satisfaite par la matrice peut être de la forme  $M^n = 1$  ; la matrice dans ce cas est dite périodique du  $n^{\text{ième}}$  ordre. Les considérations précédentes s'appliquent à la théorie des matrices périodiques ; ainsi, par exemple, supposons qu'il soit nécessaire de trouver une matrice d'ordre 2, qui est périodique du second ordre. En écrivant

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

on a

$$M^2 - (a + d)M + ad - bc = 0$$

et l'équation supposée est

$$M^2 - 1 = 0.$$

Ces équations seront identiques si

$$a + d = 0, \quad ad - bc = -1,$$

c'est-à-dire que, ces équations étant satisfaites, l'équation  $M^2 - 1 = 0$  devant l'être, sera identique à l'équation qui est toujours satisfaite, et sera donc elle-même satisfaite. Et d'une façon semblable, la matrice  $M$  d'ordre 3 satisfera la condition  $M^3 - 1 = 0$ , ou sera périodique du troisième ordre, si seulement  $M^3 - 1$  contient un facteur

$$M^2 - (a + d)M + ad - bc$$

et etc.

31. Mais supposons qu'on ait besoin de trouver une matrice d'ordre 3,

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

qui soit périodique du second ordre. En écrivant pour résumer

$$\begin{vmatrix} a - M & b & c \\ d & e - M & f \\ g & h & i - M \end{vmatrix} = -(M^3 - AM^2 + BM - C),$$

la matrice ici satisfait

$$M^3 - AM^2 + BM - C = 0$$

et, comme précédemment, l'équation supposée est  $M^2 - 1 = 0$ . Ici, si on a  $1 + B = 0$ ,  $A + C = 0$ , le côté gauche contiendra le facteur  $(M^2 - 1)$ , et l'équation prendra la forme  $(M^2 - 1)(M + C) = 0$ ,

et on devrait alors avoir  $M^2 - 1 = 0$ , en supposant que  $M + C$  n'est pas une matrice indéterminée. Mais  $M + C$  dénotant la matrice

$$\begin{pmatrix} a + C & b & c \\ d & e + C & f \\ g & h & i + C \end{pmatrix}$$

dont le déterminant est  $C^3 + AC^2 + BC + C$ , qui est égal à zéro en vertu des équations  $1 + B = 0, A + C = 0$ , on ne peut, par conséquent, à partir de l'équation  $(M^2 - 1)(M + C) = 0$ , déduire l'équation  $M^2 - 1 = 0$ . C'est comme ça devrait être, car les deux conditions ne sont pas suffisantes, en fait l'équation

$$M^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bd + cg & ab + be + ch & ac + bf + ci \\ da + ed + fg & db + e^2 + fh & dc + ef + fi \\ ga + hd + ig & gb + he + ih & gc + hf + i^2 \end{pmatrix} = 1$$

donne neuf équations, qui sont pourtant satisfaites par les valeurs suivantes, dans lesquelles interviennent en réalité quatre coefficients arbitraires ; on peut dire que la matrice est égale à

$$k = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma} & \frac{-(\beta + \gamma)\frac{\nu}{\mu}}{\alpha + \beta + \gamma} & \frac{-(\beta + \gamma)\frac{\nu}{\mu}}{\alpha + \beta + \gamma} \\ \frac{-(\gamma + \alpha)\mu\nu^{-1}}{\alpha + \beta + \gamma} & \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma} & \frac{-(\gamma + \alpha)\frac{\lambda}{\mu}}{\alpha + \beta + \gamma} \\ \frac{-(\alpha + \beta)\mu\nu^{-1}}{\alpha + \beta + \gamma} & \frac{-(\alpha + \beta)\frac{\nu}{\lambda}}{\alpha + \beta + \gamma} & \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \end{pmatrix}$$

de telle façon qu'il y a en tout quatre relations (et pas seulement deux) entre les coefficients de la matrice.

32. Plutôt que l'équation  $M^n - 1 = 0$ , qui est celle d'une matrice périodique, il est plus pratique dans de nombreux cas, et c'est un peu la même chose, de considérer une équation  $M^n - k = 0$ , où  $k$  est un scalaire. La matrice peut dans ce cas être dite périodique à un facteur près.

33. Deux matrices  $L, M$  commutent quand  $LM = ML$ . Si la matrice  $M$  est donnée, cette égalité fournit un ensemble d'équations linéaires entre les coefficients de  $L$  de cardinal le nombre de coefficients, mais ces équations ne peuvent pas être toutes indépendantes, car il est clair que si  $L$  est une fonction rationnelle et entière quelconque de  $M$  (les coefficients étant des quantités uniques), alors  $L$  commutera avec  $M$  ; ou bien ce qui est apparemment (mais seulement apparemment) plus général, si  $L$  est n'importe quelle fonction algébrique de  $M$  (les coefficients étant toujours des quantités uniques), alors  $L$  commutera avec  $M$ . Mais quelle que soit la forme de la fonction, elle peut être réduite à une fonction rationnelle et entière d'un ordre égal à celui de  $M$ , diminué de 1, et on a ainsi l'expression générale pour les matrices commutant avec une matrice donnée, i.e. toute telle matrice est une fonction rationnelle et entière (les coefficients étant des quantités uniques) de la matrice donnée, l'ordre étant celui de la matrice donnée, diminué de 1. En particulier, la forme

générale de la matrice  $L$  qui commute avec une matrice donnée  $M$  d'ordre 2, est  $L = \alpha M + \beta$ , ou bien, ce qui est la même chose, les matrices

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

commutent si  $a' - d' : b' : c' = a - d : b : c$ .

34. Deux matrices  $L, M$  anti-commutent quand  $LM = -ML$  ; c'est une relation beaucoup moins importante que la commutativité ordinaire, car on doit remarquer qu'on ne peut en général trouver une matrice  $L$  qui anti-commute avec une matrice donnée  $M$ . En fait, en considérant  $M$  comme donnée, l'égalité fournit un ensemble d'équations linéaires entre les coefficients de  $L$  en nombre égal au nombre de coefficients ; et dans ce cas, les équations sont indépendantes, et on peut éliminer tous les coefficients de  $L$ , et on arrive ainsi à une relation qui doit être satisfaite par les coefficients de la matrice donnée  $M$ . Ainsi, supposons que les matrices

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

anti-commutent, on a

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + b'c & a'b + b'd \\ c'a + d'c & c'b + d'd \end{pmatrix}$$

et les conditions d'anti-commutativité sont

$$\begin{aligned} 2aa' + bc' + b'c &= 0 \\ b'(a + d) + b(a' + d') &= 0 \\ c'(a + d) + c(a' + d') &= 0 \\ 2dd' + bc' + b'c &= 0 \end{aligned}$$

En éliminant  $a', b', c', d'$ , la relation entre  $a, b, c, d$  est

$$\begin{vmatrix} 2a & c & b & . \\ b & a + d & . & b \\ c & . & a + d & c \\ . & c & b & 2d \end{vmatrix} = 0$$

qui est équivalente à

$$(a + d)^2(ad - bc) = 0$$

En excluant le cas  $ad - bc = 0$ , qui impliquerait que la matrice est indéterminée, on a  $a + d = 0$ . Le système de conditions résultant est

$$a + d = 0, \quad a' + d' = 0, \quad aa' + bc' + b'c + dd' = 0,$$

dont les deux premières équations impliquent que les matrices sont respectivement périodiques du second ordre à un facteur près.

35. On peut noter que si les matrices composées  $LM$  et  $ML$  sont similaires, elles sont soit égales soit opposées ; c'est-à-dire que les matrices  $L, M$  soit commutent soit anti-commutent.

36. Deux matrices telles que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

sont dites formées l'une à partir de l'autre par transposition, et on note ça par le symbole  $\text{tr.}$ <sup>6</sup> ; ainsi on peut écrire

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \text{tr.} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

L'effet de deux transpositions successives est bien sûr de ramener à la matrice originale.

37. Il est facile de voir que si  $M$  est une matrice quelconque, alors

$$(\text{tr. } M)^p = \text{tr.}(M^p),$$

et en particulier,

$$(\text{tr. } M)^{-1} = \text{tr.}(M^{-1}),$$

38. Si  $L, M$  sont deux matrices quelconques,

$$\text{tr.}(LM) = \text{tr.}M. \text{tr.}L,$$

et similairement pour trois matrices ou plus  $L, M, N$ , etc.,

$$\text{tr.}(LMN) = \text{tr.}N. \text{tr.}M. \text{tr.}L, \text{ etc.}$$

40<sup>7</sup>. Une matrice telle que

$$\begin{pmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{pmatrix}$$

qui n'est pas modifiée par transposition, est dite symétrique.

41. Une matrice telle que

$$\begin{pmatrix} 0 & \nu & -\mu \\ -\nu & 0 & \lambda \\ \mu & -\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

qui par transposition est changée en son opposée est dite antisymétrique.

42. Il est facile de voir qu'une matrice quelconque peut être exprimée comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique ; par conséquent, la forme

$$\begin{pmatrix} a & h + \nu & g - \mu \\ g - \nu & b & f + \lambda \\ g + \mu & f - \lambda & c \end{pmatrix}$$

---

<sup>6</sup>Actuellement, la notation standard est plutôt  $M^T$  pour la transposée tandis que  $\text{tr}$  dénote la trace.

<sup>7</sup>Remarque de la traductrice : il n'y a pas d'article 39 dans l'article original.

qui peut évidemment représenter toute matrice quelle qu'elle soit d'ordre 3 est la somme des deux matrices mentionnées juste avant.

43. Les formules suivantes, bien qu'étant un peu plus que des exemples de la composition de matrices transposées peuvent être notées,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix}$$

qui montre qu'une matrice composée à sa transposée donne une matrice symétrique. Il n'en découle pas cependant, et ce n'est pas un fait, qu'une matrice et sa transposée commutent. Et également

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 + bcd + a(b^2 + c^2) & c^3 + abd + c(a^2 + d^2) \\ b^3 + acd + b(a^2 + d^2) & d^3 + abc + d(b^2 + c^2) \end{pmatrix}$$

qui est une forme remarquablement symétrique. Il n'est pas nécessaire d'aller plus loin, puisqu'il est clair que

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \left( \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right)^2$$

44. Dans tout ce qui précède, on a utilisé fréquemment des matrices d'ordre 2, mais essentiellement pour illustrer la théorie générale ; mais il vaut la peine de développer la théorie de telles matrices. Je rappelle les propriétés fondamentales qui ont été obtenues, par exemple, on a montré que la matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

satisfait l'équation

$$M^2 - (a + d)M + ad - bc = 0,$$

et que les deux matrices

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

commuteront si

$$a' - d' : b' : c' = a - d : b : c$$

et qu'elles seront antisymétriques si

$$a + d = 0, \quad a' + d' = 0, \quad aa' + bc' + b'c + dd' = 0,$$

les deux premières de ces équations étant les conditions pour que les deux matrices soient respectivement périodiques du second ordre à un facteur près.

45. On peut noter en passant que si  $L, M$  sont des matrices antisymétriques d'ordre 2, et si ces matrices sont également telles que  $L^2 = -1, M^2 = -1$ , alors en utilisant le fait que  $N = LM = -ML$ , on obtient

$$\begin{aligned} L^2 &= -1, & M^2 &= -1, & N^2 &= -1, \\ L &= MN = -NM, & M &= NL = -LN, & N &= LM = -ML, \end{aligned}$$



qui est un système de relations précisément similaire à celui de la théorie des quaternions.

46. Les puissances entières de la matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

sont obtenues avec une grande facilité à partir de l'équation quadratique ; ainsi on a, d'abord pour les puissances positives,

$$\begin{aligned} M^2 &= (a + d)M - (ad - bc), \\ M^3 &= [(a + d)^2 - (ad - bc)]M - (a + d)(ad - bc), \\ &\text{etc.,} \end{aligned}$$

par conséquent également, les conditions sur l'ordre que la matrice soit à un facteur près périodique d'ordres 2, 3, etc. sont

$$\begin{aligned} a + d &= 0, \\ (a + d)^2 - (ad - bc) &= 0, \\ &\text{etc. ;} \end{aligned}$$

et pour les puissances négatives, on a

$$(ad - bc)M^{-1} = -M + (a + d),$$

qui est équivalent à la forme ordinaire

$$(ad - bc)M^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

et les autres puissances négatives de  $M$  peuvent être obtenues par des multiplications successives par  $M^{-1}$ .