

Tentative de traduction du texte contenant le théorème du point fixe de Brouwer en n'étant pas germaniste, Denise Vella-Chemla, début mars 2026.

La référence de l'article de Brouwer que l'on cherche à traduire est : Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten, de L. E. J. Brouwer, d'Amsterdam, Mathematische Annalen (Annales mathématiques) LXXI.

On utilise les outils gratuits de traduction Google. N'étant pas germaniste, il s'avère très difficile pour moi de traduire correctement tous les symboles mathématiques, pour que les énoncés soient justes. Cependant, ce long travail que j'effectue en essayant d'être au plus proche d'un texte dont je ne saisis pas le sens exact précisément, constitué d'un gros effort cérébral/visuel/kinesthésique, les yeux déchiffrant le texte et les doigts le transcrivant/traduisant péniblement, et cette tentative de sans arrêt corriger pour placer les bons éléments aux bons endroits, me permet, du moins l'espéré-je, d'appréhender autant qu'il est possible l'esprit du texte et le cheminement de pensée de son auteur. Je fais ce travail car j'ai l'espoir d'utiliser ce théorème dans un autre contexte.

Sur la cartographie des variétés ¹

L. E. J. Brouwer

à Amsterdam.

§ 1. Le degré de continuité d'une variété fermée à deux faces.

Un simplexe étoilé de l'espace des nombres à n dimensions est un ensemble fini de simplexes qui sont densément regroupés dans un voisinage d'un point O , ne pénètrent pas les uns dans l'intérieur des autres et ont le point O comme sommet commun, où deux quelconques de ces simplexes ont un côté p -dimensionnel ($0 \leq p \leq n-1$) en commun, mais n'ont autrement aucun point commun.

Un élément n -dimensionnel E est considéré comme l'image biunivoque et continue d'un simplexe S de l'espace numérique n -dimensionnel.

Par les sommets par rapport aux côtés p -dimensionnels de E , nous comprenons alors les images des sommets par rapport aux côtés p -dimensionnels de S .

Nous formons maintenant à partir d'éléments n -dimensionnels un ensemble connecté de points Z tel que deux quelconques de ces éléments n'aient aucun point commun, ou aient un côté p -dimensionnel ($0 \leq p \leq n-1$) en commun. L'ensemble de points Z ainsi construit est appelé variété n -dimensionnelle, c'est-à-dire que si le nombre de ses éléments est fini, il s'agit d'une variété fermée de dimension n ; si le nombre de ses éléments est infini, il s'agit d'une variété ouverte de dimension n .

1. Au moment de l'impression de cet article, Jules Tannery publie le second volume de l'"Introduction à la théorie des fonctions d'une variable" et Jacques Hadamard publie "Sur quelques applications de l'indice de Kronecker". La théorie qui y est présentée se rapporte à bien des égards aux développements présentés ici.

Cette définition permet de prendre en compte à la fois les nombres liés finis et infinis ².

Une variété fermée de dimension n est un ensemble fermé de points ; une variété ouverte de dimension n , en revanche, est un ensemble ouvert de points ³. Soit $P_1, P_2, P_3, \dots$ une suite fondamentale de points d'une variété ouverte telle que deux points de cette suite n'appartiennent jamais au même élément. Alors, puisqu'il n'existe aucun élément à proximité quelconque duquel se trouvent des points appartenant à une infinité d'éléments différents, cette suite fondamentale ne possède pas de point d'accumulation.

Une variété à n dimensions est appelée variété mesurée à n dimensions si, dans chaque élément, les points sont représentés de manière unique et continue par $n + 1$ coordonnées homogènes non négatives (appelées "coordonnées normales") telles que, dans chaque côté à p dimensions, les points aient les mêmes coordonnées pour chaque élément auquel appartient ce côté.

Nous affirmons maintenant que toute variété n -dimensionnelle peut être transformée en une variété n -dimensionnelle mesurée.

Pour prouver cette affirmation, nous attribuons d'abord des coordonnées normales aux points des côtés unidimensionnels, à savoir, si nous désignons par u_P et u_Q les coordonnées normales non nulles des points du côté unidimensionnel $A_P A_Q$, le rapport $\frac{u_P}{u_Q}$ est infini en A_P , et à partir de là, il décroît continûment jusqu'à ce que la valeur de zéro soit atteinte en A_Q .

Pour déterminer ensuite les coordonnées normales des points des côtés bidimensionnels, nous transformons un tel côté bidimensionnel A_p, A_q, A_r , en un triangle plan euclidien FGH de manière bi-univoque et continue, de telle sorte que les côtés du triangle correspondant aux côtés de l'élément unidimensionnel $A_p A_q, A_q A_r$ et $A_r A_p$, représentent les points de ce triangle euclidien par des coordonnées de centroïdes homogènes par rapport aux sommets F, G, H , et nous choisissons un point arbitraire O à l'intérieur du triangle.

2. Pour prouver cette affirmation, nous attribuons d'abord des coordonnées normales aux points des côtés unidimensionnels, à savoir, on obtient le même résultat par la construction que j'ai utilisée comme base pour mes recherches en théorie des groupes (cf. Math. Ann. 67, p. 247, et la correction dans 69, p. 180). On y suppose une région finie arbitraire G de l'espace des nombres à n dimensions, munie de la frontière $\mathfrak{G}$. Un sous-ensemble connexe de $\mathfrak{G}$ tel que, si un point P lui appartient, la partie de $\mathfrak{G}$ située à l'intérieur d'une certaine sphère inscrite autour de P dans l'espace des nombres à n dimensions lui appartient également, est appelé une sous-région γ de $\mathfrak{G}$, et la sous-région de G située à l'intérieur d'un tel ensemble de sphères est appelée l'intérieur de γ . Alors, certaines régions γ , munies de leurs frontières G , sont transformées de manière unique et continue et identifiées deux à deux de manière à ce que deux surfaces intérieures quelconques se rencontrant ainsi, avec la région γ correspondante, représentent un ensemble de points qui peuvent être transformés de manière unique et continue sur une région de l'espace des nombres à n dimensions. Premièrement, les régions identifiées deux à deux γ , et deuxièmement, les points des frontières γ qui, grâce à ces identifications, ont acquis des voisinages qu'on peut envoyer l'un sur l'autre bijectivement et continûment sur des régions de l'espace numérique n -dimensionnel, sont ajoutés à la région G . Cependant, tant que la théorie des invariants de forme de l'espace numérique n -dimensionnel n'est pas suffisamment développée, une telle définition est souvent insuffisante pour la suite des opérations ; ainsi, par exemple, pour le sujet du présent travail, nous dépendons du point de départ choisi plus haut dans le texte.

3. c'est-à-dire un ensemble de points dans lequel chaque série fondamentale a un point limite qui appartient également à l'ensemble des points.

Soit B un point du côté bidimensionnel $A_p A_q A_r$, B' son image dans le triangle FGH . Le segment de droite OB' , prolongé au-delà de B' , coupe l'un des côtés du triangle, par exemple le côté GH , en un point C . Soit C le point du côté unidimensionnel $A_q A_r$ correspondant à C' , ${}_c u_q$ et ${}_c u_r$ ses coordonnées normales, C'' le point du côté GH du triangle dont le centre de gravité est O , ${}_c u_q$ et ${}_c u_r$, et B'' l'intersection de la droite OC'' avec la parallèle à GH passant par B' . On choisit alors les coordonnées du centre de gravité de B'' comme coordonnées normales de B .

Ayant ainsi déterminé les coordonnées normales des points sur tous les côtés bidimensionnels, nous considérons un côté tridimensionnel $A_p A_q A_r A_s$ et le projetons sur un tétraèdre euclidien $FGHK$ de sorte que les faces des éléments bidimensionnels et unidimensionnels appartenant à $A_p A_q A_r A_s$ correspondent successivement aux côtés et aux arêtes du tétraèdre. Nous représentons les points de ce tétraèdre euclidien par des coordonnées de centre de gravité homogènes par rapport aux sommets F, G, H, K , et nous choisissons un point M arbitraire à l'intérieur du tétraèdre.

Soit D le point situé sur le côté tridimensionnel $A_p A_q A_r A_s$ et son image dans le tétraèdre $FGHK$. Le segment de droite MD' , se prolongeant au-delà de D , coupe l'une des faces du tétraèdre, par exemple la face GHK , au point E' . Soit E le point situé sur le côté bidimensionnel $A_q A_r A_s$, correspondant à ses normales E' , ${}_E u_q$, ${}_E u_r$, ${}_E u_s$, et E'' le point de la face GHK du tétraèdre dont le centre de masse a pour coordonnées O , ${}_E u_q$, ${}_E u_r$, ${}_E u_s$ et D'' est l'intersection de la droite ME'' avec le plan parallèle à GHK contenant D' . On choisit alors les coordonnées du centre de masse de D'' comme normales de D .

Nous continuons ainsi jusqu'à ce que nous ayons finalement déterminé les coordonnées normales de tous les points de la variété en utilisant les coordonnées normales des points des faces des éléments $(n - 1)$ -dimensionnels, de sorte qu'il s'agisse effectivement d'une variété mesurée à n dimensions.

Nous choisissons maintenant pour chaque élément d'une variété n -dimensionnelle mesurée un simplexe régulier euclidien de longueur d'arête fixe comme son "simplexe représentatif", et nous l'envoyons sur celui-ci de telle sorte que les coordonnées du centroïde par rapport aux sommets d'un point du simplexe représentatif soient égales aux coordonnées normales du point correspondant de l'élément n -dimensionnel.

Par un sous-simplexe ou un morceau d'espace planaire p -dimensionnel de l'élément, nous entendons alors l'image d'un sous-simplexe ou d'un morceau d'espace planaire p -dimensionnel du simplexe représentant.

La longueur d'un segment rectiligne contenu dans un élément est définie comme la longueur du segment correspondant dans le simplexe représentant cet élément. La distance entre deux points de la variété est définie comme la longueur minimale du segment de droite les reliant (pouvant traverser plusieurs éléments).

Par le centre de gravité de certaines masses placées aux points du même élément, nous entendons le point image du centre de gravité de ces mêmes masses placées aux points correspondants du simplexe représentant.

Par le contenu d'une sous-zone d'un élément, nous entendons le contenu de la sous-zone correspondante du simplexe représentant.

L'indicatrice d'un élément est définie comme une certaine suite de ses sommets, les suites résultant d'un nombre pair de permutations de deux sommets quelconques étant considérées comme équivalentes. Ainsi, l'élément ne peut avoir que deux indicatrices : l'une est choisie comme indicatrice positive et l'autre comme indicatrice négative. Le choix de l'indicatrice positive de l'élément détermine simultanément l'indicatrice positive du simplexe le représentant ; on détermine ainsi l'indicatrice positive de chaque sous-simplexe de ce simplexe ; et enfin, l'indicatrice positive de chaque sous-simplexe de l'élément.

Considérons maintenant une chaîne fermée finie d'éléments distincts de la variété mesurée de dimension n , où deux éléments successifs quelconques partagent n sommets, et supposons qu'un de ces éléments possède une indicatrice positive. À partir de cette indicatrice, nous déterminons l'indicatrice négative de l'élément suivant en substituant le sommet qui disparaît à celui qui apparaît. De cette manière, nous déterminons successivement une indicatrice positive pour chaque élément de la chaîne, et finalement, en revenant à l'élément initial, nous lui trouvons une nouvelle indicatrice positive. Si, pour toute chaîne fermée d'éléments, cette nouvelle indicatrice positive est identique à celle de départ, alors la variété est dite bilatérale ; sinon, elle est unilatérale.

Dans une variété n -dimensionnelle mesurée à deux faces, l'indicatrice positive est ainsi déterminée pour chaque élément et pour chaque sous-simplexe d'un élément en choisissant l'indicatrice positive de cet élément, de sorte que l'on peut parler d'une indicatrice positive de la variété.

Nous imaginons une application unique et continue μ sur une variété mesurée n -dimensionnelle, et une application μ' à partir d'une variété mesurée de dimension n à deux faces fermée, et supposons initialement que μ' est également à deux faces et fermée.

On soumet μ à une décomposition simpliciale ζ de densité ε , c'est-à-dire qu'on décompose chaque élément de μ en un nombre fini de sous-simplexes tels que deux quelconques d'entre eux n'aient aucun point commun, ou partagent un côté de dimension p ($0 \leq p \leq n - 1$) (et alors simultanément tous les côtés de dimension inférieure inclus dans ce côté), mais n'aient par ailleurs aucun autre point commun, et que la largeur des sous-simplexes soit au maximum de la taille ε . Ces sous-simplexes seront appelés les simplexes de base, leurs sommets les points de base, et leurs côtés les côtés de base de la décomposition. Pour la densité ε , on choisit une borne supérieure ε_1 , qu'elle ne doit pas dépasser.

Dans la variété μ , on suppose une indicatrice positive, et par conséquent chaque simplexe de base est doté d'une indicatrice positive.

Nous appellerons un tel simplexe de base, dont les images des sommets appartiennent toutes au même élément de μ' , un "simplexe de base ordinaire".

Nous définissons maintenant ce que signifie un complexe simplicial ζ , le terme β , qui approxime l'application α , doit être compris comme une application qui ne s'étend qu'aux simplexes de base

ordinaires, de la manière suivante :

Soit π un simplexe de base ordinaire de sommets $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$, qui correspondent aux points $B_1, B_2, \dots, B_{n+1}$ appartenant aux mêmes éléments de π pour l'application β . Un point P situé à l'intérieur ou sur la frontière de π peut être considéré comme le centre de masse de certaines masses positives concentrées en $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$. Si l'on place successivement ces mêmes masses en $B_1, B_2, \dots, B_{n+1}$, elles déterminent un centre de masse Q , que l'on fait correspondre au point P pour l'application β . Alors, si les points $B_1, B_2, \dots, B_{n+1}$ ne sont pas situés dans un espace planaire de dimension $(n - 1)$, le simplexe de base π est transformé bijectivement et continûment en un simplexe image ϱ , dont le contenu est calculé comme positif ou négatif selon que l'indicatrice de l'image est positive ou négative. Cependant, si les points $B_1, B_2, \dots, B_{n+1}$ sont contenus dans un espace à $(n - 1)$ dimensions, alors le simplexe image devient singulier et a un contenu de zéro.

La distance entre les points images pour α et pour β du même point μ a une certaine limite supérieure ε_1 , qui tombe en dessous de toute limite ε_1 , aussi petite que soit potentiellement cette limite.

Nous définissons en outre une application simpliciale modifiée correspondante γ , qui approxime l'application ζ . Elle est déterminée par la taille ε_1 , ne dépassant pas les déplacements des images des points de base, et est ensuite construite à partir de ses images de points de base de la même manière que β , de sorte que pour γ , en général, les mêmes simplexes de base ordinaires n'apparaissent que pour β .

Nous déterminons maintenant arbitrairement dans chaque élément de μ' comme son "simplexe intérieur" un sous-simplexe dont la frontière ne rencontre pas la frontière de l'élément, et choisissons ε_1 de telle sorte que chaque point de μ , qui est envoyé dans un simplexe intérieur pour une application β ou γ , appartienne pour chaque application β ou γ uniquement à des simplexes de base ordinaires, qui sont alors bien sûr toujours envoyés dans le même élément de μ' .

Nous considérons d'abord une telle application γ qui n'a pas de simplexes images singuliers, en particulier par rapport au simplexe intérieur J d'un certain élément E . Nous désignons par σ l'ensemble des points contenus dans l'intérieur de J qui n'appartiennent pas à l'image d'une base $(n - 2)$ -dimensionnelle, et notons que deux points quelconques de σ peuvent être connectés par une chaîne polygonale composée d'un nombre fini de segments de droite et passant entièrement par σ .

Nous appelons un tel point appartenant à σ , qui n'appartient pas à l'image d'une base $(n - 1)$ -dimensionnelle, un point ordinaire de J .

Soient P_1 et P_2 deux points ordinaires quelconques de J reliés par une chaîne polygonale s'étendant entièrement dans σ , et soit P un point ordinaire variable de J . Nous désignons le nombre de simplexes d'images positives et négatives couvrant, respectivement, les nombres analogues pour P_1 par p_1 et p'_1 , et les nombres analogues pour P_2 par p_2 et p'_2 , et enfin pour P , par p et p' .

Ces nombres p et p' ne peuvent changer lors du déplacement de P vers s que si l'image d'une base pure de dimension $(n - 1)$ est traversée. Si les deux simplexes images qui se rencontrent en τ sont situés de part et d'autre de $\varkappa$, ils ont le même signe, et leur traversée n'a aucun effet sur les nombres

p et p' , ni sur le nombre $p - p'$. Cependant, si les deux simplexes images qui se rencontrent en τ sont situés du même côté de τ , ils ont des signes opposés, et leur traversée augmente ou diminue p et p' de 1 chacun, laissant ainsi le nombre $p - p'$ inchangé. Par conséquent, $p_1 - p'_1 = p_2 - p'_2$, et pour l'application γ , le nombre $p - p'$ est constant aux points ordinaires de J .

Nous considérons maintenant une application β , pour laquelle nous définissons les points ordinaires de J et les nombres p et p' de manière analogue à celle utilisée pour γ . Si, pour β dans J , il existait deux points ordinaires P_1 et P_2 tels que $p_1 - p'_1$ et $p_2 - p'_2$ soient distincts, nous pourrions approcher β avec une précision telle par une application simpliciale modifiée correspondante γ , sans simplexe image singulier, que les points P_1 et P_2 seraient également des points ordinaires de J pour γ , et que les nombres p_1, p'_1, p_2 et p'_2 auraient les mêmes valeurs pour γ que pour β . Ainsi, pour γ , le nombre $p - p'$ ne pourrait être constant pour les points ordinaires de J . De cette contradiction, nous concluons que le nombre $p - p'$ est également constant pour l'application β pour les points ordinaires de J .

Nous affirmons en outre que la valeur de cette constante, que nous notons c , est la même pour chaque application simpliciale qui approxime l'application α ; et nous montrons d'abord pour deux telles applications simpliciales β'_1 et β'_2 que la décomposition simpliciale β'_1 sous-jacente à ζ'_1 est obtenue à partir de la décomposition simpliciale sous-jacente à β'_2 par décomposition simpliciale des simplexes de base de ζ'_2 ; nous disons en bref que ζ'_1 est une subdivision de ζ'_2 .

Dans ce cas, nous pouvons transformer continûment les images des points de base de ζ'_1 pour β'_1 , dans la mesure où les images correspondantes pour β'_2 existent, en celles situées sur les segments de droite les plus courts, et les fixer pour la suite, où, par rapport à J , l'application β'_2 est continûment transformée en β'_1 . Le contenu total des parties des simplexes images contenues dans J , qui est c fois plus grand que J , ne subit aucune discontinuité durant cette transition continûment, de sorte que l'entier c ne change pas.

Soient β_1 et β_2 deux applications simpliciales quelconques qui approchent l'application α . Soient ζ_1 et ζ_2 les partitions simpliciales de μ sous-jacentes. On construit une partition ζ_3 de ζ_1 si dense que, pour l'application simpliciale correspondante β_3 , qui approche l'application β , il est possible de choisir dans J un point P ordinaire pour β_2 et β_3 tel que les sommets d'un simplexe image quelconque recouvrant P pour β_2 soient contenus dans tout simplexe image recouvrant P pour β_3 . Alors, pour tout simplexe image recouvrant P pour β_2 , il existe un et un seul simplexe image recouvrant P pour β_3 , et deux simplexes images correspondants de cette manière ont les mêmes indicatrices. On en conclut que le nombre c , qui est déjà le même pour β_1 et β_3 , est également le même pour β_2 et β_3 , et donc finalement aussi pour β_1 et β_2 .

Nous allons maintenant montrer que les valeurs c_1 et c_2 , que c prend dans les simplexes intérieurs J_1 et J_2 de deux tels éléments E_1 et E_2 , qui ont un côté $(n - 1)$ -dimensionnel S en commun, sont égales entre elles.

À cette fin, nous choisissons deux simplexes réguliers euclidiens T_1 et T_2 , qui sont des images miroir l'un de l'autre par rapport à un côté commun Σ de dimension $(n - 1)$, successivement comme représentant des simplexes de E_1 et E_2 , de sorte que les côtés de dimension $(n - 1)$ de S et Σ se

correspondent les uns aux autres.

Ensuite, les termes “sous-simplexe”, “morceau d’espace p -dimensionnel”, “centroïde” et “contenu” de $T_1 + T_2$ (c’est-à-dire de l’ensemble des points formés par T_1 et T_2 ensemble) sont transférés à $E_1 + E_2$ exactement de la même manière qu’ils ont été précédemment transférés d’un simplexe représentatif unique à l’élément qu’il représente.

Dans E_1 et E_2 nous déterminons de tels sous-simplexes U_1 et U_2 contenant J_1 et J_2 successivement, qui ont un côté commun de dimension $(n - 1)$ situé dans S , mais dont les frontières ne rencontrent pas les autres côtés de E_1 et E_2 .

Ces simplexes de base, dont les images des sommets sont utilisées pour la mise en correspondance puisque tous les points appartenant à l’intérieur de l’ensemble $E_1 + E_2$, étant désormais considérés comme des simplexes de base ordinaires, on détermine une application simpliciale β' qui approche α et qui s’étend également aux simplexes de base ordinaires nouvellement ajoutés; cette application inclut des applications simpliciales modifiées γ' . On choisit ensuite la borne supérieure ε de sorte que, par rapport à $U_1 + U_2$ et aux simplexes de base ordinaires au sens nouveau, la propriété précédemment imposée aux simplexes intérieurs et aux simplexes de base ordinaires au sens ancien reste valable. Alors, en utilisant la méthode déjà appliquée, on peut conclure que pour l’application β' aux points ordinaires de $U_1 + U_2$, le nombre $p - p'$ est constant.

Cette constante appartenant à β' et $U_1 + U_2$ est identique d’une part à la constante c_1 appartenant à β et J_1 , et d’autre part à la constante c_2 appartenant à β et J_2 , de sorte qu’en fait la constante c a la même valeur dans J_1 et J_2 , et aussi dans tous les éléments de μ' .

La constante c , qui a la même valeur dans tous les éléments de μ' et pour toutes les applications simpliciales qui approchent α , représente donc une propriété de α . On l’appelle le degré de l’application unique et continue α .

Deux applications uniques et continues de μ à μ' , qui peuvent être continuellement transformées l’une en l’autre, ont le même degré.

Si l’on approche μ et μ' par des applications simpliciales, deux à deux fondées sur la même décomposition simpliciale de μ , on peut insérer entre chaque paire d’applications une série finie d’applications simpliciales, elles aussi fondées sur la même décomposition. Chacune de ces applications doit satisfaire les conditions imposées précédemment à l’application simpliciale β , et deux applications successives quelconques ne doivent différer que par le point image de l’un des points de base, et ce, d’une quantité arbitrairement petite. Il existe donc nécessairement un simplexe intérieur de μ' dans lequel ces applications déterminent exactement le même ensemble d’images, c’est-à-dire la même valeur de la constante c . Par conséquent, cette valeur ne peut varier le long de la série d’applications susmentionnée, ce qui n’est possible que si les deux applications uniques et continues initiales sont de même degré.

Le fait que tout entier fini, positif ou négatif, puisse apparaître comme degré d’une application est aisément démontré par les applications uniques et continues d’une sphère sur une autre qui

représentent des fonctions rationnelles des variables complexes. La valeur absolue du degré de l'application est identique au degré de la fonction correspondante.

Enfin, notons que si l'ensemble d'images de l'application α n'est pas dense partout dans μ' , le degré de α est certainement nul.

Alors il existe certainement une application simpliciale β qui approxime α , pour laquelle on peut choisir un simplexe intérieur J dans μ' tel que l'ensemble image qu'il détermine ne soit pas partout dense. Dans une sous-région d'un simplexe intérieur où l'ensemble image de μ ne pénètre pas pour β , cependant, p et p' , ainsi que c , sont nuls.

Jusqu'à présent, nous avons supposé que μ' était bilatéral et fermé. Cependant, si μ' est unilatéral et fermé, les considérations précédentes restent pleinement valides, tant pour un simplexe intérieur isolé que pour les simplexes intérieurs de deux éléments adjacents sur un côté de dimension $(n - 1)$. Si l'on considère alors une telle chaîne fermée d'éléments dans laquelle le sens de l'indicatrice est inversé, le nombre $c = p - p'$ de cette chaîne doit, d'une part, être constant et, d'autre part, changer de signe à chaque tour complet, ce qui n'est possible que s'il est égal à zéro.

Si μ' est ouvert, alors, puisque l'image de μ dans μ' est fermée, on peut définir dans μ' un ensemble fini μ'' d'éléments tel que, pour α et les différentes applications β et γ , l'image de μ soit entièrement contenue dans μ'' sans pour autant être dense partout dans μ'' . La première propriété implique que les considérations précédentes restent pleinement valides aussi bien pour un simplexe intérieur isolé que pour les simplexes intérieurs de deux éléments adjacents sur un côté de dimension $(n - 1)$. De la propriété selon laquelle l'image de μ n'est pas dense partout dans μ'' nous déduisons alors que le degré de α peut également être nul dans ce cas.

Nous résumons le résultat de ce paragraphe comme suit :

Théorème 1. *Si une variété μ mesurée bilatérale, fermée et de dimension n admet une application unique et continûment transformée en une variété mesurée de dimension μ' , alors il existe un entier fini c , invariant par transformation continûment de l'application, tel que l'image de μ recouvre chaque sous-domaine de μ' , c fois positivement. Si μ est unilatérale ou ouverte, alors c est toujours égal à zéro⁴.*

§ 2. Champs vectoriels continus sur des sphères à n dimensions.

On considère une sphère K de dimension n , que l'on représente dans un espace euclidien R_{n+1} de dimension $(n + 1)$ par l'équation $\sum x_h^2 = 1$ en coordonnées cartésiennes rectangulaires. Le fait que cette sphère relève du concept de variété mesurée de dimension n développé au paragraphe précédent devient évident lorsqu'on considère les 2^{n+1} simplexes sphériques en lesquels elle est décomposée. Ses éléments sont les espaces plans de dimension n déterminés par les équations $x_h = 0$

4. Il apparaît immédiatement que ce degré de correspondance est très indépendant de la décomposition spécifique de μ et μ' en éléments, ainsi que de la fabrication spécifique de leurs échelles de mesure. Pour $n = 2$, on peut même facilement démontrer que cette indépendance est complète. La démonstration correspondante pour des nombres de dimension supérieure est probablement assez complexe, mais même sans elle, le théorème 1 peut être utilisé, comme le montrent les paragraphes suivants.

de R_{n+1} , et ses sous-régions sont les grandes sphères de dimension p qui la composent. Dans chaque élément, on choisit comme point unitaire des coordonnées normales le point dont les coordonnées cartésiennes dans R_{n+1} sont toutes égales à $\pm\sqrt{\frac{1}{n}}$. De plus, puisqu'une indicatrice positive est choisie pour l'un des éléments, une indicatrice positive est également déterminée pour chaque simplexe sphérique (un tel simplexe sphérique est formé de $n + 1$ grandes sphères de dimension $(n - 1)$ différentes et est entièrement contenu dans un hémisphère de K).

En tout point P de K , il existe une sphère de direction λ_p de dimension $(n - 1)$, dans laquelle on peut définir les éléments, les simplexes, les portions d'espace planaires de dimension p et les coordonnées normales à l'aide de grandes sphères, de manière analogue à K lui-même. De plus, l'indicatrice positive de λ_p se déduit de l'indicatrice positive de K de la manière suivante : soit s son simplexe sphérique de dimension $(n - 1)$ associé à λ_p ; on détermine un simplexe S de dimension n dans K , dont le sommet est P , tandis que ses côtés de dimension $(n - 1)$ contenant P sont déterminés par les côtés de dimension $(n - 2)$ de s , le dernier côté de dimension $(n - 1)$ étant arbitraire. On écrit alors l'indicatrice positive de S de sorte que P occupe la dernière position dans la suite des sommets. Les sommets restants de cette suite déterminent alors un certain ordre des arêtes de S qui se rencontrent en P , et donc également un certain ordre des sommets de s . Nous choisissons ce dernier ordre comme indicatrice positive de s .

On considère K comme un champ vectoriel continu, où seule la direction des vecteurs est prise en compte, et non leur norme. Il n'existe qu'un nombre fini de points singuliers (c'est-à-dire des points où la continuité de la direction du vecteur est interrompue). On partitionne K à l'aide d'une grande sphère $\varkappa$ de dimension $(n - 1)$, de pôles π_1 et π_2 , ne contenant aucun point singulier du champ vectoriel, en une moitié contenant H_1 et une moitié contenant H_2 (la grande sphère $\varkappa$ étant considérée comme appartenant aux deux moitiés). H_1 et H_2 sont décomposés à l'aide de grandes sphères de dimension $(n - 1)$, ne contenant aucun point singulier du champ vectoriel, qui sont divisées en un nombre fini de simplexes sphériques de dimension n , respectivement $S_{11}, S_{12}, S_{13}, \dots$ et $S_{21}, S_{22}, S_{23}, \dots$, qui se connectent tous entre eux de la même manière que les éléments d'une variété n -dimensionnelle, tandis que les sous-simplexes de H_2 sont les images miroir par rapport à $\varkappa$ des sous-simplexes de H_1 .

Soit σ un côté de dimension $(n - 1)$ d'un sous-simplexe $S_{\alpha\beta}$. À partir de l'indicatrice positive de $S_{\alpha\beta}$, on obtient une "indicatrice positive de σ , considérée comme un côté de $S_{\alpha\beta}$ " de la manière suivante : on définit l'indicatrice positive de $S_{\alpha\beta}$ de sorte que, dans la séquence des sommets, le sommet n'appartenant pas à σ soit placé en dernier. L'ordre des sommets restants est déterminé par l'indicatrice positive de σ , considérée comme un côté de $S_{\alpha\beta}$. De cette façon, on établit également une indicatrice positive pour le périmètre de $S_{\alpha\beta}$, qui peut être considérée comme une variété bilatérale, fermée et mesurée de dimension $(n - 1)$, dont les côtés de dimension $(n - 1)$ de $S_{\alpha\beta}$ représentent les éléments, et les sous-domaines des grandes sphères de dimension p incluses dans ce périmètre représentent ses morceaux d'espace planaire de dimension p .

Dans R_{n+1} , nous projetons le périmètre $U_{\alpha\beta}$ d'un simplexe $S_{\alpha\beta}$, ainsi que les vecteurs associés à ses points, depuis un point extérieur à $S_{\alpha\beta}$ de K sur l'espace tangent planaire n -dimensionnel associé au point diamétralement opposé O . Ceci détermine une application unique et continue de $U_{\alpha\beta}$ sur la sphère des directions ϑ , dont l'indicatrice positive est déterminée par l'indicatrice positive de la

sphère λ_0 ; nous affirmons que le degré de cette application est indépendant du choix spécifique du centre de projection Q .

Pour prouver cette affirmation, nous notons que par projection stéréographique, la sphère de direction $(n-1)$ -dimensionnelle λ_P d'un point arbitraire P appartenant à $U_{\alpha\beta}$ est placée en relation congruente avec la sphère de direction $(n-1)$ -dimensionnelle de sorte qu'en même temps, une relation de congruence b_{PR} est établie entre les sphères de direction λ_P et λ_R de deux points arbitraires P et R appartenant à $U_{\alpha\beta}$, de la manière suivante :

Soit V une direction quelconque appartenant à λ_P . Elle définit, conjointement avec Q , une sphère bidimensionnelle l incluse dans K , dans laquelle les points P, Q et R définissent un cercle k . Dans R , il existe alors une telle direction appartenant à l , qui forme avec k dans l le même angle que V . Cette direction correspond à V pour la relation b_{PR} .

Le déplacement continu de Q à une distance finie de P et R ne peut modifier que continûment la relation de congruence b_{PR} ; par conséquent, le déplacement continu de Q à une distance finie de $S_{\alpha\beta}$ ne peut modifier que continûment l'ensemble des relations de congruence entre les sphères de direction $(n-1)$ -dimensionnelles des points de $U_{\alpha\beta}$, de sorte que le degré de l'application de $U_{\alpha\beta}$ sur la sphère de direction $(n-1)$ -dimensionnelle de l'espace de projection, déterminé par le champ vectoriel, ne peut subir de discontinuité, ce qui n'est possible que s'il existe une constante $c_{\alpha\beta}$, que nous appelons le degré du simplexe $S_{\alpha\beta}$. Notre objectif est de déterminer la somme des degrés des différents $S_{\alpha\beta}$.

Nous projetons la moitié H_1 stéréographiquement selon π_2 et H_2 selon π_1 . Nous désignons les espaces de projection planaires n -dimensionnels correspondants par ϑ_1 et ϑ_2 , nous considérons les applications des $U_{1\beta}$ sur la sphère de direction de ϑ_1 déterminée par cette projection stéréographique, et nous cherchons la somme des degrés de ces applications.

Dans cette somme, chaque côté $(n-1)$ -dimensionnel d'un $S_{1\beta}$ qui n'y est pas contenu, parce que les simplexes de base qui y sont contenus sont envoyés deux fois avec une indicatrice opposée, fournit deux contributions mutuellement destructives ϑ_1 et ϑ_2 , de sorte que seules les contributions des côtés $(n-1)$ -dimensionnels qui sont contenus dans ϑ_1 ont une influence.

Si, toutefois, nous considérons maintenant $S_{1\beta}$ comme une variété bilatérale, fermée, mesurée de dimension $(n-1)$ de telle sorte que $\varkappa$ représente ses éléments, et que les sous-domaines des grandes sphères de dimension $\varkappa$ qui s'y trouvent représentent ses morceaux d'espace planaires de dimension $(n-1)$, tandis que son indicatrice positive est déterminée par l'indicatrice positive des σ_x , considérés comme côtés de $S_{1\beta}$, alors la projection stéréographique de $\varkappa$ par une application unique et continue de ϑ_1 sur la sphère directionnelle, à laquelle σ_x contribue exactement de la même manière qu'à la somme des $c_{1\beta}$, de sorte que la somme des c_1 est égale à $c_{1\beta}$.

Mais si nous munissons $\varkappa$ de cette indicatrice positive, l'indicatrice positive de $\sigma_\varkappa$, considérée comme côtés de $S_{2\beta}$, et si nous projetons ensuite $\varkappa$ stéréographiquement sur ϑ_2 , il est montré de la même manière que le degré c_2 de l'application unique et continue de $\varkappa$ sur la sphère directionnelle de ϑ_2 produit de cette manière est égal à la somme des $c_{2\beta}$.

Soit ϱ ou $\varkappa$ un espace plan n -dimensionnel de R_{n+1} , qui correspond, après réflexion de R_{n+1} par rapport à la sphère de projection $\varkappa_2$ de $\varkappa$ dans ϑ_2 , à la sphère de projection $\varkappa_1$ de $\varkappa$ dans ϑ_1 , avec indicatrice opposée, à la sphère de direction de ϑ_2 à la sphère de direction de ϑ_1 , également avec indicatrice opposée, et à la distribution vectorielle actuelle dans la distribution de réflexion dans ϑ_1 , c'est-à-dire la distribution qui est obtenue à partir de la distribution actuelle par réflexion ϑ_1 en chaque point de l'espace plan tangent.

Afin de déterminer la somme des $c_{\alpha\beta}$, c'est-à-dire la somme de c et c_2 , nous devons donc aborder la question suivante : *dans un espace euclidien plan à n dimensions ϑ , quelle est la somme des degrés des applications δ et ϱ d'une sphère F à $(n - 1)$ dimensions sur la sphère 2-directionnelle, déterminées par une distribution vectorielle continue des points de F et sa distribution de réflexion ?*

À cette fin, nous définissons dans F , à l'aide d'un espace planaire f de dimension $(n - 1)$, une grande sphère de dimension $(n - 2)$ avec des pôles q_1 et q_2 , et avec F , nous entreprenons une série fondamentale de partitions simpliciales $\zeta'_1, \zeta'_2, \zeta'_3, \dots, \zeta'_m, \dots$ telles que pour aucune d'entre elles, p_1 ne se trouve sur une face de base, et que leur densité diminue en deçà de toute limite lorsque m augmente. Nous désignons par z_m le simplexe fondamental qui contient q_1 pour ζ'_m , et par u_m la circonférence de z_m .

Pour chaque m , on obtient la nouvelle application δ unique et continue δ_m de F vers λ comme suit : soit j un demi-cercle quelconque reliant les points q_1 et q_2 de F , et h son point d'intersection avec u_m . On applique de même l'arc q_1h de j sur le demi-cercle j . Si un point quelconque F est envoyé sur F' , alors pour l'application λ , le point F doit correspondre au point δ_m de λ qui correspond au point F' pour l'application δ , tandis que tous les points de j n'appartenant pas à l'arc q_1h pour δ_m sont envoyés sur le point image g de q_2 pour δ .

Nous désignons par ϱ_m l'application de réflexion (c'est-à-dire l'application appartenant à la distribution de réflexion) de δ_m .

Parce que δ peut être continuellement transformé en δ_m , en même temps que ϱ se transforme simultanément en ϱ_m , la somme des degrés de δ et ϱ est égale à celle des degrés de δ_m et ϱ_m .

Par le biais de décompositions simpliciales supplémentaires des simplexes ζ'_m de base de ζ_m , nous arrivons à une telle décomposition simpliciale de F que les applications simpliciales correspondantes δ'_m et ϱ'_m , qui approximent δ_m et ϱ_m , satisfont aux conditions imposées au § 1 de l'application d'approximation β .

Nous cherchons d'abord à déterminer la contribution des ensembles d'images de z_m générés par δ'_m et ϱ'_m à la somme des degrés de δ_m et ϱ_m . Si l'on note g' le vecteur de réflexion de la direction g au point q_1 de F , alors, en dehors d'un voisinage de g' qui décroît en dessous de toute limite à l'infini lorsque m tend vers l'infini, le nombre $p - p'$ est constant pour l'ensemble d'images de z_m généré par δ_m et pour celui généré par ϱ_m . Parmi ces deux constantes, seule la seconde reste inchangée si l'on modifie l'ensemble d'images généré par ϱ'_m de sorte que le vecteur de réflexion de e_P en q_1 remplace celui en P comme point image de chaque point P de m appartenant à δ'_m , ce qui corres-

pond à la direction e_P pour λ . Après cette modification, l'ensemble des images de z_m engendré par λ été transformé en l'image miroir par rapport à f de l'ensemble des images engendré par δ . Ces deux images miroir possèdent des indicatrices opposées, de sorte que les deux ensembles d'images déterminent successivement des nombres opposés $p - p'$ en deux points de F , qui sont les images miroir l'une de l'autre par rapport à f . Cependant, en dehors du voisinage de g' qui descend en dessous de toute limite, les ensembles d'images de z_m engendrés par δ'_m et ϱ'_m déterminent partout des nombres opposés $p - p'$, et détruisent ainsi les contributions mutuelles à la somme des degrés de δ_m et ϱ_m .

Il nous faut maintenant déterminer la contribution des ensembles d'images générés par δ'_m et ϱ'_m de la région résiduelle, définie par z_m dans F , à la somme des degrés de δ_m et ϱ_m . Premièrement, l'ensemble d'images généré par δ'_m se réduit au point unique g et ne contribue donc pas. Ensuite, pour l'ensemble d'images généré par en dehors d'un voisinage de g' qui décroît en dessous de toute limite lorsque m tend vers l'infini, le nombre $p - p'$ est égal au degré de l'application de F vers λ , déterminé par la distribution de réflexion d'un vecteur constant aux points de F .

Pour déterminer ce degré, on note χ_1 le point de F dont le rayon est opposé au vecteur constant, χ_2 le point diamétralement opposé à F , w la grande sphère de dimension $(n - 2)$ appartenant à F , dont les pôles sont χ_1 et χ_2 , et a_1 (resp. a_2) la moitié contenant χ_1 (resp. χ_2), qui détermine w dans F . On peut alors facilement effectuer une telle décomposition simpliciale avec la moitié a_1 (resp. a_2) des images avec indicatrice positive (resp. négative).

Les simplexes de base recouvrent la sphère exactement une fois, et leur indicatrice est positive. Si l'on décompose la moitié de a_1 en de tels simplexes de base diamétralement opposés à ceux de a_2 , et que l'on attribue à chacun de ces simplexes une indicatrice également diamétralement opposée à celle du simplexe de base correspondant de a_1 , ce qui implique que cette indicatrice est positive pour n pair et négative pour n impair, alors deux simplexes de base correspondants de a_1 et a_2 déterminent le même simplexe image muni d'une indicatrice positive dans 1.

Si nous équipons les simplexes de base de a_2 d'une indicatrice positive, leurs simplexes images recouvrent à nouveau la boule exactement une fois, à savoir avec une indicatrice positive pour n pair et avec une indicatrice négative pour n impair, de sorte que le degré de l'application souhaité est égal à deux pour n pair et égal à zéro pour n impair.

Par conséquent, la somme des degrés de δ_m et ϱ_m , la somme des degrés de δ et ρ , et enfin la somme de $c_{\alpha\beta}$ sont également égales à deux pour n pair, et égales à zéro pour n impair.

Si le champ vectoriel dans K ne présente aucun point singulier, alors sa continuité est uniforme. On peut alors choisir les $S_{\alpha\beta}$ suffisamment petits pour que la variation directionnelle des vecteurs d'un même $U_{\alpha\beta}$, projetés stéréographiquement sur ϑ_1 et ϑ_2 respectivement, ne dépasse pas une quantité arbitrairement petite, de sorte que chaque cas soit égal à zéro. Cependant, d'après les résultats précédents, ceci est impossible pour n pair, donc nous avons démontré le :

Théorème 2. *Un champ vectoriel continu sur une sphère de dimension paire possède au moins un point singulier.*

Le fait que ce théorème ne s'applique pas aux sphères de dimension impaire se démontre plus facilement en considérant un tel champ vectoriel sur la sphère tridimensionnelle, pour lequel les courbes tangentes sont formées par une famille (deux fois infinie) de grands cercles parallèles entre eux au sens de Clifford.

§ 3. Les transformations uniques et continues des sphères n -dimensionnelles et des éléments n -dimensionnels en eux-mêmes.

On considère maintenant la sphère K de dimension n soumise à une transformation unique et continue r qui ne laisse aucun point fixe. On effectue des décompositions simpliciales arbitrairement denses sur K , pour lesquelles les simplexes fondamentaux sont formés de la même manière que les simplexes $S_{\alpha\beta}$ au § 2, et on construit les transformations simpliciales correspondantes de K sur elle-même, qui approximent r .

Assurément, une transformation simpliciale t approche r sans laisser aucun point fixe. Sinon, il existerait une série fondamentale de telles transformations simpliciales convergeant vers r , chacune laissant successivement les points F_1, F_2, F_3 fixes; or, chaque point limite de cette série fondamentale F_1, F_2, F_3 serait alors un point fixe pour la transformation r .

On choisit un point arbitraire O sur K , ordinaire pour t et n'appartenant pas à un côté d'un simplexe de base, on relie chaque point P sur K à son image P' pour la transformation t à travers un cercle contenant O , et on place dans P le vecteur déterminé par l'arc de ce cercle ne contenant pas O . On crée alors un champ vectoriel continu sur K , qui ne possède qu'un nombre fini de points singuliers, à savoir premièrement les points ayant O pour image, et deuxièmement le point O lui-même.

On choisit une indicatrice positive dans K , et l'on note $S_1, S_2, S_3, \dots, S_p$ les simplexes de base dont les simplexes images ${}_bS_1, {}_bS_2, \dots, {}_bS_p$ recouvrent le point O avec une indicatrice positive; $S'_1, S'_2, S'_3, \dots, S'_{p'}$ les simplexes de base dont les simplexes images ${}_bS'_1, {}_bS'_2, {}_bS'_3, \dots, {}_bS'_{p'}$ recouvrent le point O avec une indicatrice négative; et S'' le simplexe de base contenant O . De plus, on peut supposer que la décomposition simpliciale sous-jacente de K est suffisamment dense pour qu'aucun simplexe de base ne partage de point avec son simplexe image; alors S'' est également distinct de tous les S_α et de tous les S'_α .

Pour déterminer les degrés des simplexes S_α et S'_α , nous projetons la sphère K ainsi que ses champs vectoriels stéréographiquement à partir de O sur l'espace tangent plan n -dimensionnel situé au point diamétralement opposé O' dans R_{n+1} .

Nous désignons par $\mathfrak{S}_\alpha$ la projection du simplexe S_α par ${}_b\mathfrak{U}_\alpha$ sa frontière et par ${}_bU_\alpha$ la projection de la frontière du simplexe ${}_bS_\alpha$. L'indicatrice image dans ${}_b\mathfrak{U}_\alpha$ appartient maintenant à une indicatrice négative du simplexe sphérique ${}_b\mathfrak{S}_\alpha$ délimité par ${}_b\mathfrak{U}_\alpha$.

Les vecteurs aux points $\mathfrak{P}$ de $\mathfrak{U}_\alpha$ correspondant aux points $\mathfrak{P}'$ de ${}_b\mathfrak{U}_\alpha$ sont déterminés par les segments de droite $\mathfrak{P}\mathfrak{P}'$ les reliant; par une modification uniformément continue, on peut les transformer en vecteurs parallèles en tout point du segment de droite $O'\mathfrak{P}'$. Ces derniers vecteurs,

cependant, recouvrent la sphère de direction une seule fois avec une indicatrice négative, de sorte que le degré de S_α est égal à -1.

De la même manière, la valeur +1 est trouvée pour le degré de chaque simplexe S'_α .

Pour déterminer le degré de S'' , on transforme la distribution vectorielle sur la frontière U'' de S'' par modification continue, de sorte qu'en tout point P de U'' le vecteur soit déterminé par l'arc d'un grand cercle reliant O et P et ne contenant pas O . Si l'on projette ensuite stéréographiquement U'' avec son champ vectoriel dans R_{n+1} à partir de O sur l'espace plan n -dimensionnel $\mathcal{V}'$, tangent à K en O , dans $\mathcal{U}''$, alors, en tout point $\mathfrak{P}$ de $\mathcal{U}''$, le vecteur est déterminé par la direction du segment de droite $O\mathfrak{P}$; ainsi, la distribution vectorielle dans $\mathcal{U}''$ recouvre la sphère de direction λ_0 exactement une fois avec une indicatrice positive, et le degré de S'' est égal à +1.

Quant aux simplexes de base restants, ils peuvent être décomposés en sous-simplexes tels que, dans chacun d'eux, la variation de la direction du vecteur sous projection stéréographique ne dépasse pas une valeur arbitrairement petite. Chacun de ces sous-simplexes est donc de degré zéro, et il en va de même pour les simplexes de base qui les composent.

La somme des degrés de tous les simplexes de base est donc égale à $-p + p' + 1$, ce qui vaut deux pour n pair et zéro pour n impair. On en déduit que $p - p'$, c'est-à-dire le degré des transformations r autour de t , vaut -1 pour n pair et +1 pour n impair, ce qui nous conduit au résultat suivant :

Théorème 3. *Une transformation unique et continue d'une sphère à n dimensions en elle-même, qui n'a pas de point fixe, a un degré de -1 pour n pair et un degré de +1 pour n impair.*

Nous énonçons les cas particuliers suivants :

Corrolaire 1. *Si, dans une transformation unique et continue d'une sphère n -dimensionnelle en elle-même, l'ensemble d'images n'est pas dense partout sur toute la sphère, alors un point fixe existe de façon certaine.*

Corrolaire 2. *Toute transformation non ambiguë et continue d'une sphère de dimension paire en elle-même, qui peut être continuellement transformée en identité, possède de façon certaine un point fixe⁵.*

Corrolaire 3. *Toute transformation biunivoque et continue d'une sphère de dimension impaire en elle-même, qui peut être continuellement transformée en une réflexion, possède de façon certaine un point fixe.*

Le fait que les transformations du $(-1)^{\text{ième}}$ degré pour n pair et les transformations du $(+1)^{\text{ième}}$ degré pour n impair n'aient pas nécessairement de point fixe se voit plus facilement en considérant les

5. À partir de ce théorème, j'ai précédemment démontré le cas particulier selon lequel toute transformation bijective et continue de la sphère bidimensionnelle en elle-même, qui ne modifie pas le sens de rotation, admet nécessairement un point fixe. Cf. Amsterdam, Reports, édition néerlandaise XVII 2, p. 750, XIX 1, p. 48; édition anglaise XI 2, p. 797, XIII 1, p. 184.

rotations et les réflexions de l'espace euclidien R_{n+1} autour d'un point fixe.

Nous considérons maintenant une transformation unique et continue $\mathfrak{T}$ d'un élément n -dimensionnel E dans lui-même. Nous établissons une relation biunivoque et continue entre E et une demi-sphère H_1 , déterminée dans une sphère n -dimensionnelle K par une grande sphère $\varkappa$ de dimension $(n-1)$. La transformation unique et continue de E dans lui-même correspond à une transformation unique et continue $\mathfrak{A}$ de H_1 dans lui-même. Si nous étendons maintenant la transformation $\mathfrak{A}$ à l'autre moitié H_2 de K de sorte que deux points quelconques de K , symétriques par rapport à $\varkappa$, soient transformés par $\mathfrak{A}$ en un même point de H_1 , alors nous obtenons une telle transformation unique et continue de K dans lui-même, dont l'ensemble image n'est pas dense partout dans K , et pour laquelle, par conséquent, existe nécessairement un point fixe appartenant à H_1 . Ce point fixe correspond nécessairement à un point fixe de la transformation $\mathfrak{T}$ de E dans lui-même, ce qui démontre que :

Théorème 4 : *Une transformation unique et continue d'un élément n -dimensionnel en lui-même possède de façon certaine un point fixe.*

AMSTERDAM, JUILLET 1910.