Traduction des pages 247-250 du livre de Kevin Broughan “Equivalents of the Riemann hypothesis”, vol. 1 : arithmetic equivalents, Cambridge university press, section 10.4. Redheffer Matrix, (Denise Vella-Chemla, décembre 2023).

Fixons $n \in \mathbb{N}$ et définissons une matrice $n \times n$ contenant des entrées définies par $r_{i,j} = 1$ si $j = 1$ ou $i \mid j$. Sinon, $r_{i,j}$ est fixé à 0. On dénote par R_n la matrice contenant les $r_{i,j}$, et on l'appelle matrice de Redheffer d'ordre n. Le déterminant de cette matrice a été évalué pour la première fois par Ray Redheffer en 1976 [138]. Il a également été évalué, en utilisant un argument combinatoire, par Herbert Wilf en 2006 [180]. Ici on présente la méthode de Bryan Gillespie de 2011 [67], qui révèle mieux la structure sous-jacente et permet une vaste généralisation.

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ une fonction arithmétique telle que $f(1) \neq 0$ Alors, [6, théorème 2.8], il existe une unique fonction arithmétique f^{-1}, appelée inverse de Dirichlet de f, telle que

$$f * f^{-1} = f^{-1} * f = I$$

où $I(1) = 1$ et $I(n) = 0$ pour $n > 1$ est l'identité pour la multiplication de Dirichlet, qui est comme d'habitude notée “$*$”. Par exemple, f^{-1} peut être définie récursivement par $f^{-1}(1) := 1/f(1)$ et pour $n > 1$,

$$f^{-1}(n) := -\frac{1}{f(1)} \sum_{d|n, d<n} f\left(\frac{n}{d}\right) f^{-1}(d).$$

Si f est complètement multiplicative, cela semble beaucoup plus simple. Dans ce cas, pour tout $n \geq 1$ on a [6, théorème 2.17] $f^{-1}(n) = \mu(n) f(n)$.

Étant donnée une fonction arithmétique $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ avec $f(1) \neq 0$ et un nombre naturel n, définissons une matrice $n \times n$ par $R_n(f) := (r_{i,j})$ où, pour $1 \leq i, j \leq n, r_{i,j} = f(j/i)$ si $i|j$, $r_{i,j} = 1$ si $i > 1$ et $j = 1$ et $r_{i,j} = 0$ sinon.

Lemme 10.7 *[67, théorème 2.7] Soit f une fonction arithmétique avec $f(1) \neq 0$. Alors*

$$\det R_n(f) = f(1)^n \left(1 + \sum_{j=1}^{n} f^{-1}(j)\right).$$

Preuve : Définissons une matrice triangulaire supérieure $n \times n$ contenant des coefficients complexes $S_n(f) = (s_{i,j})$ par $s_{i,j} := f(j/i)$ si $i|j$ et $s_{i,j} = 0$ sinon. Alors $S_n(f)$ a pour déterminant $f(1)^n$ et est donc invertible dans $\mathbb{C}$. Notons également que si f et g sont deux telles fonctions arithmétiques alors $S_n(f) \times S_n(g) = (t_{i,j})$ où “$\times$” est la multiplication normale des matrices et $t_{i,j} = 0$ si $i \nmid j$ et $t_{i,j} = (f * g)(j/i)$ si $i|j$. En d'autres termes $S_n(f) \times S_n(g) = S_n(f * g)$.

Par conséquent, si A est la matrice $n \times n$ contenant des zéros partout sauf dans la colonne principale, qui contient un 1 dans toutes les positions exceptée la première, alors

$$S_n(f^{-1}) \times R_n(f) = S_n(f^{-1})(S_n(f) + A) = I_{n\times n} + S_n(f^{-1})A, \tag{10.5}$$

où $I_{n\times n}$ est la matrice identité $n \times n$. Alors, à cause de leur forme $S_n(f^{-1})A$ est la matrice nulle qui contient l'élément $(1,1) = \Sigma_{j=2}^{n} f^{-1}(j)$, et les éléments $(i,1)$ avec $i > 1$. Prendre les déterminants des deux côtés de (10.5) donne

$$f(1)^{-n} \det R_n(f) = 1 + \sum_{j=2}^{n} f^{-1}(j)$$

et la preuve est complète. $\square$

Maintenant posons $f(n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $f^{-1}(n) = \mu(n)$ dans le Lemme 10.7. On obtient :

Corollaire 10.8 *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$,

$$\det R_n = \sum_{j=1}^{n} \mu(j).$$

Le théorème 10.9 découle alors directement du théorème 4.16 [1].

Théorème 10.9 (critère de Redheffer) *[138] L'hypothèse de Riemann est équivalente à l'assertion que pour tout* $\epsilon > 0$, *lorsque* $n \to \infty$,

$$\det R_n \ll n^{1/2+\epsilon}.$$

Références

[6] T. M. Apostol, *Introduction to Analytic Number Theory*, 2nde édition, Springer, 1990.

[67] B. R. Gillespie, *Extending Redheffer's matrix to arbitary arithmetic functions*, Bachelor with Honors Thesis, Pennsylvania State University, 2011.

[138] R. Redheffer, *Eine explizit lösbare Optimierungsaufgabe, in Numerische Methoden bei Optimierungsaufgaben*, Band 3 (Tagung, Math. Forschungsinst., Oberwolfach, 1976), Int. Ser. Numer. Math., Vol. 36, pp. 213–216, Birkhäuser, 1977.

[180] H. S. Wilf, *The Redheffer matrix of a partially ordered set*, Electron. J. Combin. **11** (2004/2006), Research Paper 10 (5 pp.).

[1] **Théorème 4.16** (critère de Littlewood) *[108] L'hypothèse de Riemann est équivalente à l'estimation que pour tout* $\epsilon > 0$, *on a*

$$\sum_{n \le x} \mu(n) \ll x^{1/2+\epsilon}, \quad x \to \infty,$$

où la constante intervenant dépend de ϵ.